

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

**В.А. Гришагин**

**АНАЛИЗ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ  
МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород

2021

УДК 004.02(075.8)

ББК 22.1я-73

Г 72

Г 72 Гришагин В.А. АНАЛИЗ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 40 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **О.А.Кузенков**

Пособие предназначено для студентов магистратуры ИИТММ по направлениям подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», изучающих курс «Модели выбора решений».

В данном пособии основное внимание уделяется практическим способам построения множеств Парето и Слейтера, рассматриваемых в качестве полного решения многокритериальных задач оптимизации. В качестве инструмента построения множеств решений используется подход, основанный на применении редукции многокритериальной задачи к семейству скалярных (однокритериальных) подзадач при помощи метода сверток. Рассматривается один из возможных типов сверток – линейные свертки – и обсуждается их применение на примерах различного уровня сложности.

Ответственный за выпуск:

Заместитель председатель методической комиссии ИИТММ ННГУ,  
к.х.н., доцент Г.В. Кузенкова

УДК 004.02(075.8)

ББК 22.1я-73

В.А. Гришагин

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ.....	7
1.1. Оптимальное проектирование цилиндрического сосуда (консервной банки).....	7
1.2. Доминирование .....	9
1.3. Оптимальность по Парето.....	9
1.4. Оптимальность по Слейтеру.....	10
2. МЕТОД СВЕРТОК. ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА. ....	12
2.1. Редукция к скалярным задачам на основе линейной свертки.....	12
2.2. Однопараметрические линейные задачи. Пространство параметров. ....	13
2.3. Однопараметрические линейные задачи. Пространство критериев.....	14
2.4. Двухпараметрические линейные задачи. Пространство параметров. ....	16
2.4.1. Применение подхода линейного программирования. ....	16
2.4.2. Геометрическое рассмотрение в пространстве параметров.....	18
2.5. Двухпараметрические линейные задачи. Пространство критериев. ....	20
2.5.1. Решение на основе линейного программирования. ....	20
2.5.2. Геометрическое рассмотрение в пространстве критериев. ....	21
2.6. Однопараметрические линейные задачи. Пространство параметров. ....	23
2.7. Однопараметрические линейные задачи. Пространство критериев.....	24
2.8. Однопараметрические нелинейные задачи. Пространство параметров. ....	27
2.9. Однопараметрические нелинейные задачи. Пространство критериев. ....	32
3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ. ....	36
3.1. Построение многокритериальных моделей .....	36
3.2. Линейные задачи .....	36
3.3. Нелинейные задачи .....	37
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	38
ЛИТЕРАТУРА .....	39

## ВВЕДЕНИЕ

При моделировании интеллектуальных процессов принятия решений часто приходится искать наилучшее решение, руководствуясь несколькими различными целями. Например, при проектировании некоторого объекта он может быть охарактеризован разными показателями, и частной целью может являться нахождение таких параметров объекта, которые оптимизируют конкретный показатель (частную характеристику объекта).

Достаточно общей моделью такого рода может быть следующая модель.

Объект описывается *вектором параметров*

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \quad (1)$$

где количество параметров  $N \geq 1$  задает размерность модели объекта, и *вектор-функцией характеристик*

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_k(y)) \quad (2)$$

в которой функция (частная характеристика)  $f_i(y), 1 \leq i \leq k$ , описывает зависимость  $i$ -го показателя от вектора параметров и характеризует «качество» данного показателя. Для определенности будем считать, что чем меньше значение характеристики, тем лучше значение показателя.

Как устроен объект внутри и каким образом вычисляются характеристики, не важно. Достаточно, чтобы в нашем распоряжении была процедура, согласно которой по заданному вектору параметров вычисляются значения всех характеристик. Иными словами, объект рассматривается в парадигме «черного ящика».



Рис. 1. Модель объекта

Определив модель объекта, перейдем к формированию модели принятия решений.

При моделировании реального объекта очевидно, что его параметры могут быть выбраны из некоторого ограниченного диапазона значений. Это означает, что координаты вектора  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  изменяются в заданных пределах, определяемых векторами начала и конца

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_N), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_N), \quad (3)$$

где  $a_i, b_i, 1 \leq i \leq N$ , - константы.

Тем самым вводится гиперпараллелепипед возможных значений вектора  $y$

$$D = \{y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\} \quad (4)$$

задающий **координатные ограничения** на возможный выбор параметров объекта.

Наряду с координатными могут быть введены **функциональные ограничения**

$$g_i(y) \leq 0, 1 \leq i \leq m. \quad (5)$$

Координатные и функциональные ограничения порождают **допустимую область**

$$Q = \{y \in D : g_i(y) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}. \quad (6)$$

Если функциональные ограничения отсутствуют ( $m=0$ ), то полагаем  $Q = D$ .

Вектор удовлетворяющий неравенствам (5), называется **допустимым вектором (допустимой точкой)**.

Определив множество рассматриваемых вариантов (параметров объекта), сформируем цель принятия решений, направленную на выбор качественных значений параметров. Эту цель сформулируем как задачу минимизации векторного критерия  $f(y)$  в допустимой области  $Q$

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q, \quad (7)$$

имея в виду нахождение таких допустимых параметров, которые обеспечивают минимальные значения частных характеристик.

Итак, в качестве модели принятия решений рассматривается задача

$$f(y) \rightarrow \min, y \in Q \subseteq R^N \quad (8)$$

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_k(y)),$$

$$Q = \{y \in D : g_i(y) \leq 0, 1 \leq i \leq m\},$$

$$D = \{y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\}.$$

Если количество частных критериев  $k > 1$ , задача называется многокритериальной, а в случае  $k = 1$  - однокритериальной, или скалярной.

Если задача скалярна, она является задачей нелинейного программирования, и ее решением является множество точек глобального минимума в области  $Q$  единственного частного критерия  $f_1(y)$ .

Если же задача многокритериальна и критерии противоречивы, понятие решения усложняется, потому что оптимальное решение для одного критерия не обеспечивает оптимальность других. Что рассматривается в качестве решения в этой ситуации?

## 1. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Если все функции  $f_i(y), 1 \leq i \leq k$ , (частные критерии) достигают своих минимумов в одной и той же допустимой точке, решение очевидно. Это случай так называемых согласованных критериев.

Однако чаще всего для разных частных критериев минимальные значения могут достигаться при различных значениях вектора параметров. Прежде, чем определить понятие решения для этого случая, рассмотрим простой пример многокритериальной постановки: оптимальное проектирование цилиндрического сосуда (консервной банки).

### 1.1. Оптимальное проектирование цилиндрического сосуда (консервной банки).

Рассмотрим консервную банку в виде цилиндрического сосуда, которая формируется из двух круглых донышек и прямоугольного листа, образующего боковую поверхность. Технологически донышки соединяются с боковой поверхностью путем сварки и, кроме того, края прямоугольного листа также свариваются между собой.

Параметрами являются  $r$  – радиус,  $h$  – высота, т.е. вектор параметров  $y = (r, h)$ .

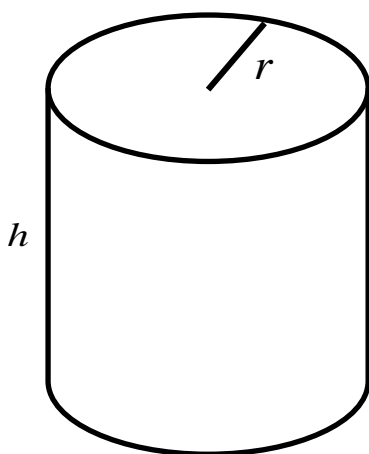


Рис.2. Проектируемый сосуд.

В качестве характеристик объекта (критериев) выберем

объем  $V = \pi r^2 h$ ,

площадь поверхности  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ,

длину сварных швов  $L = 4\pi r + h$ .

Рассмотрим задачу выбора параметров, минимизирующих площадь поверхности и длину сварных швов для банки заданного объема  $V = const$ .

Поскольку объем задан, можем исключить один из параметров, например, высоту:  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ .

Тогда  $S = 2\pi r^2 + 2V/r$ ,  $L = 4\pi r + V/\pi r^2$ , и векторный критерий

$$f(r) = (S(r), L(r)) \rightarrow \min, 0 \leq r \leq \infty$$

Найдем точки минимумов частных критериев

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0, \quad r_S = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$$

$$L'(r) = 4\pi - \frac{2V}{\pi r^3}, \quad r_L = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}, \quad L''(r) = \frac{6V}{\pi r^4} > 0$$

Нетрудно видеть, что  $r_S > r_L$ .

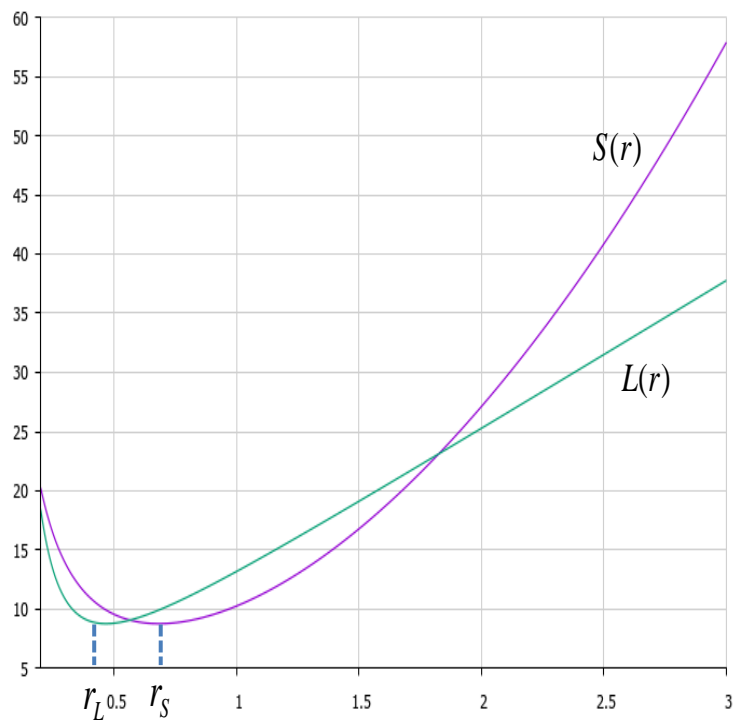


Рис. 3. Зависимости площади поверхности и длины швов от радиуса.



На графиках (рис. 3) отражено поведение частных критериев для случая двухлитровой банки ( $V=2$  л.). От нуля до  $r_L$  и после  $r_S$  критерии ведут себя одинаково: до  $r_L$  убывают, после  $r_S$  возрастают. А вот между  $r_L$  и  $r_S$  один из них (длина швов) возрастает, а другой (площадь поверхности) – убывает. Это означает, что когда мы пытаемся улучшить значение одного критерия, значение другого ухудшается. Эта ситуация отражает свойство *противоречивости* критериев.

## 1.2. Доминирование

При конструировании оптимального решения сначала исключим заведомо некачественные варианты, введя на множестве  $Q$  два типа отношений доминирования.

**Определение 1.** Точка  $x \in Q$  доминирует точку  $y \in Q$  ( $x \succ y$ ), если

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, f_i(x) < f_i(y) \quad (9)$$

(*сильное доминирование*).

**Определение 2.** Точка  $x \in Q$  доминирует точку  $y \in Q$  ( $x \bar{\succ} y$ ), если

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, f_i(x) \leq f_i(y) \quad (10)$$

и существует номер  $j, 1 \leq j \leq k$ , такой, что  $f_j(x) < f_j(y)$  (*слабое доминирование*).

Доминируемые точки заведомо хуже доминаторов (по всем критериям при сильном доминировании и хотя бы по одному при слабом), и в решение их включать нецелесообразно.

## 1.3. Оптимальность по Парето.

Сильное и слабое доминирования являются отношениями частичного строгого порядка на множестве  $Q$ , что допускает наличие *несравнимых* точек.

**Определение 3.** Точка  $y^* \in Q$  и соответствующий ей вектор  $f(y^*)$  называются *эффективными (неулучшаемыми, оптимальными по Парето)*, если из условий

$$f_i(y) \leq f_i(y^*), 1 \leq i \leq k, \quad (11)$$

следует, что  $f(y) = f(y^*)$ .

Таким образом, точка является паретовской, если у нее не существует доминатора в смысле слабого доминирования.

Иными словами,  $y^*$  оптимальна по Парето, если ее нельзя улучшить в  $Q$  ни по одному частному критерию, не ухудшая какого-либо из остальных.

Поскольку паретовские точки невозможно сравнить между собой, в качестве оптимального решения многокритериальной задачи берется все множество  $P$  паретовских точек.

#### 1.4. Оптимальность по Слейтеру.

**Определение 3.** Точка  $\tilde{y} \in Q$  и соответствующий ей вектор  $f(\tilde{y})$  называются *слабоэффективными (оптимальными по Слейтеру, слейтеровскими)*, если не существует точки  $x \in Q$  такой, что

$$f_i(x) < f_i(\tilde{y}), 1 \leq i \leq k, \quad (12)$$

(т.е. не существует доминатора в смысле Определения 1).

При таком подходе к сравнению точек (строгое доминирование) в качестве решения многокритериальной задачи можно принять множество  $S$  всех слейтеровских точек.

Очевидно, что  $P \subseteq S$ .

Отдельный элемент паретовского (слейтеровского) множества будем называть *частным решением*, а все множество Парето (или Слейтера) – *полным решением* многокритериальной задачи.

Выбор конкретного частного решения означает выбор некоторого *компромисса* между противоречивыми требованиями, предъявляемыми к объекту исследования в рамках принятой многокритериальной модели.

## 2. МЕТОД СВЕРТОК. ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА.

### 2.1. Редукция к скалярным задачам на основе линейной свертки.

Для нахождения паретовских (слейтеровских) точек широко применяются методы редукции многокритериальности, основанные на применении методов сверток (методов скаляризации) векторного критерия. Эти методы используют частные критерии для построения некоторой обобщенной скалярной функции, называемой сверткой, и последующей ее оптимизации. В определенных условиях точка найденного оптимума свертки является слейтеровской (паретовской) точкой исходной многокритериальной задачи.

Рассмотрим одну из наиболее распространенных сверток – линейную (аддитивную) свертку. Для задачи

$$\begin{aligned} f(y) &\rightarrow \min, y \in Q \subseteq R^N \\ f(y) &= (f_1(y), f_2(y), \dots, f_k(y)) \end{aligned} \quad (13)$$

введем вектор весов

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1. \quad (14)$$

Используя частные критерии и вектор весов, сконструируем функцию

$$\Lambda(y) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(y), \quad (15)$$

называемую *линейной*, или *аддитивной сверткой*.

Рассмотрим задачу минимизации свертки

$$\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q. \quad (16)$$

Пусть точка  $y^* \in Q$  является точкой глобального минимума данной задачи. Положительность всех весовых коэффициентов обеспечит принадлежность данной точки множеству Парето исходной многокритериальной задачи, а если не все весовые коэффициенты положительны – точка будет принадлежать множеству Слейтера.

Таким образом, при конкретном векторе весов  $\lambda$  минимизация (16) линейной свертки дает одно или несколько частных решений многокритериальной задачи, в общем случае слейтеровских, а если ограничиться положительными весами, то паретовских. Меняя веса, можем получить разные частные решения.

## 2.2. Однопараметрические линейные задачи. Пространство параметров.

Рассмотрим следующий простой пример двухкритериальной однопараметрической линейной задачи.

$$\begin{aligned} f_1(y) &= y \\ f_2(y) &= 5 - y \\ Q &= [1, 4] \end{aligned}$$

Для нахождения частных многокритериальных решений рассмотрим задачу (16) с линейной сверткой  $\Lambda(y) = \lambda y + (1 - \lambda)(5 - y) = (2\lambda - 1)y + 5(1 - \lambda)$ .

Построим выражения для свертки при различных  $\lambda$  и соответствующие им координаты  $y^*$  минимальных значений свертки на отрезке  $[1, 4]$ .

$$\lambda = 0 \rightarrow \Lambda(y) = 5 - y = f_2(y) \rightarrow y^* = 4$$

$$\lambda = 0.2 \rightarrow \Lambda(y) = 4 - 0.6y \rightarrow y^* = 4$$

$$\lambda = 0.5 \rightarrow \Lambda(y) = 2.5 \rightarrow y^* \in [1, 4]$$

$$\lambda = 0.8 \rightarrow \Lambda(y) = 1.6y + 1 \rightarrow y^* = 1$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \Lambda(y) = y = f_1(y) \rightarrow y^* = 1$$

Графики линейной свертки для различных  $\lambda$  приведены на рис.4.

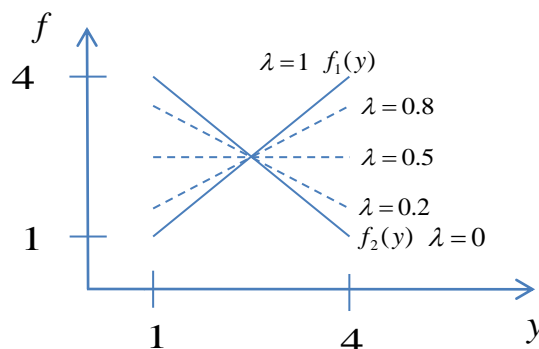


Рис.4. Линейная свертка с различными весовыми коэффициентами.

Если  $\lambda < 1/2$ , свертка убывает ( $\Lambda'(y) = 2\lambda - 1 < 0$ ),

при  $\lambda > 1/2$  свертка возрастает ( $\Lambda'(y) = 2\lambda - 1 > 0$ ),

при  $\lambda = 1/2$  имеем  $\Lambda(y) = 2.5$ , поэтому решение

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} \{4\}, & 0 \leq \lambda < 0.5 \\ [1, 4], & \lambda = 0.5 \\ \{1\}, & 0.5 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

### 2.3. Однопараметрические линейные задачи. Пространство критериев.

Теперь рассмотрим задачу на плоскости критериев  $(f_1, f_2)$ .

Векторный критерий  $f(y)$  реализует отображение параметрического пространства в критериальное, в нашей задаче  $f: R^1 \rightarrow R^2$ .

Поскольку критерии линейные, это отображение тоже линейное и является аффинным (невырожденным). В этом случае линейный объект переходит в линейный, в частности, отрезок в отрезок, поэтому область  $Q$  пространства параметров, являющаяся отрезком, перейдет в область  $Q_f$  в пространстве критериев, которая также будет отрезком. Чтобы его найти, достаточно выяснить, куда перейдут крайние точки области  $Q$ , т.е. точки  $y = 1$  и  $y = 4$ .

$y = 1 \rightarrow (1, 4)$ ,  $y = 4 \rightarrow (4, 1)$  (см. рис. 5).

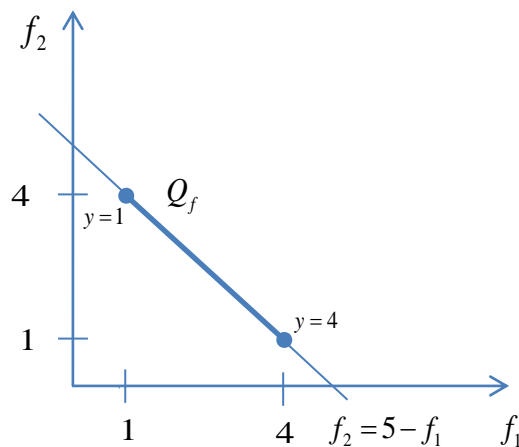


Рис. 5. Допустимая область  $Q_f$  в пространстве критериев.

Легко убедиться, что отрезок  $Q_f$  лежит на прямой  $f_2 = 5 - f_1$ .

В пространстве критериев линейная свертка имеет вид

$$\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 \quad (17)$$

Рассмотрим линии уровня свертки

$$\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 = c \quad (18)$$

$\Lambda(f) \rightarrow \min, y \in Q_f$  означает, что надо найти наименьшее  $c$ , при котором прямая (18) имеет общие точки с допустимой областью  $Q_f$ .

$$\lambda = 0 \rightarrow \Lambda(f) = f_2 = c$$

Минимальное  $c$  достигается в нижней точке отрезка  $Q_f$ , т.е. для  $\lambda = 0$  частное решение  $(f_1^*, f_2^*) = (4, 1)$ .

$$\lambda = 1 \rightarrow \Lambda(f) = f_1 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = (1, 4)$$

Если  $0 < \lambda < 1$ , то из (18)  $f_2(\lambda, c) = \frac{c}{1 - \lambda} - \frac{\lambda}{1 - \lambda} f_1$ .

Наклон этой прямой  $\varphi(\lambda) = -\frac{\lambda}{1 - \lambda} < 0$ . Так как  $\varphi'(\lambda) = -\frac{1}{(1 - \lambda)^2} < 0$ , то

наклон убывает от 0 (при  $\lambda = 0$ ) до  $-\infty$  (при  $\lambda = 1$ ).

Поведение линий уровня (18) при различных  $c$  и  $\lambda$  показано на рис. 6.

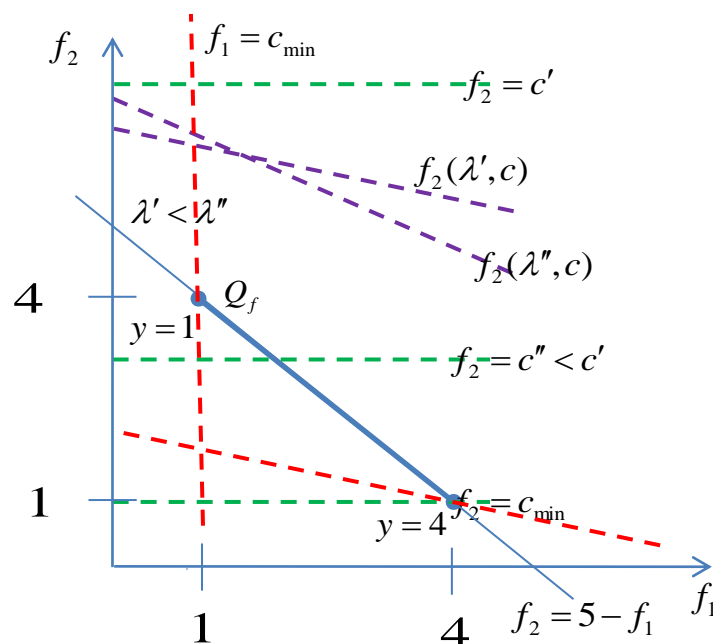


Рис.6. Линии уровня линейной свертки.

Если  $0 < \lambda < 1/2$ , то  $-1 < \varphi(\lambda) < 0$ , т.е. наклон свертки больше наклона прямой  $f_2 = 5 - f_1$ , поэтому минимальное значение уровня (18) в точках из  $Q_f$  достигается в точке (4,1).

Если  $1/2 < \lambda < 1$ , то  $\varphi(\lambda) < -1$ , т.е. наклон свертки меньше наклона прямой  $f_2 = 5 - f_1$ , поэтому минимальное значение уровня (18) в точках из  $Q_f$  достигается в точке (1,4).

Если  $\lambda = 1/2$ , то линия уровня свертки имеет вид  $f_2 = 2c - f_1$ , параллельна отрезку  $Q_f$  и достигает минимального значения  $c = 2.5$  во всех точках области  $Q_f$ .

Таким образом, решение задачи (9) для всех возможных  $\lambda$  обеспечивает нахождение полного множества Парето.

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} (4, 1), & 0 \leq \lambda < 0.5 \\ (f_1, 5 - f_1), & f_1 \in [1, 4], \lambda = 0.5 \\ (1, 4), & 0.5 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

## 2.4. Двухпараметрические линейные задачи. Пространство параметров.

Усложним задачу. Пример остается двухкритериальным, но становится двухпараметрическим с линейными критериями.

$$\begin{aligned} f_1(y) &= 2y_1 + y_2 \\ f_2(y) &= -y_1 + 2y_2 \\ Q &= \{y \in R^2 : 1 \leq y_1 \leq 2, 2 \leq y_2 \leq 3\} \end{aligned}$$

Линейная свертка данной задачи  $\Lambda(y) = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 = (3\lambda - 1)y_1 + (2 - \lambda)y_2$ .

### 2.4.1. Применение подхода линейного программирования.

Задача (16)  $\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q$  является задачей линейного программирования, потому что функция  $\Lambda(y)$  линейна по аргументам  $y_1, y_2$ , а область оптимизации  $Q$  - выпуклый многогранник (квадрат).



В соответствии с теорией линейного программирования минимум свертки будет достигаться в одной из крайних точек (вершин квадрата), либо на одном из ребер.

Вычислим значения свертки в крайних точках.

$$(1,2) \rightarrow \Lambda(y) = (3\lambda - 1) + 2(2 - \lambda) = \lambda + 3$$

$$(1,3) \rightarrow \Lambda(y) = (3\lambda - 1) + 3(2 - \lambda) = 5$$

$$(2,2) \rightarrow \Lambda(y) = 2(3\lambda - 1) + 2(2 - \lambda) = 4\lambda + 2$$

$$(2,3) \rightarrow \Lambda(y) = 2(3\lambda - 1) + 3(2 - \lambda) = 3\lambda + 4$$

Поскольку  $0 \leq \lambda \leq 1$ , можно сделать следующие выводы.

Точка (1,3) не может быть минимумом свертки, потому что  $5 > \lambda + 3$  для любых  $\lambda$ .

Аналогично можно исключить точку (2,3), которая доминируется точкой (1,2):  $3\lambda + 4 > \lambda + 3$ .

Выясним теперь, при каких  $\lambda$  будет лучшей (минимизирующей свертку) каждая из оставшихся точек.

Точка (2,2) лучше точки (1,2), если  $4\lambda + 2 < \lambda + 3 \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{3}$ .

Наоборот, точка (1,2) лучше точки (2,2), если  $4\lambda + 2 > \lambda + 3 \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{3}$ .

При  $\lambda = \frac{1}{3}$  имеем  $\Lambda(y) = \frac{5}{3}y_2$ . Это означает, что минимум свертки достигается во всех точках вида  $(y_1, 2), 1 \leq y_1 \leq 2$ .

Таким образом, решение задачи для различных  $\lambda$  можно выразить как

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} (2, 2), 0 \leq \lambda < \frac{1}{3} \\ (y_1, 2), 1 \leq y_1 \leq 2/3, \lambda = \frac{1}{3} \\ (1, 2), \frac{1}{3} < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Геометрически решением является нижняя сторона квадрата  $Q$ .

## 2.4.2. Геометрическое рассмотрение в пространстве параметров.

Представим еще один возможный способ решения.

Рассмотрим линии уровня свертки, т.е. функции вида  $\Lambda(y) = c$ , где параметр  $c$  - константа, т.е. в нашей задаче линии уровня имеют вид  $(3\lambda - 1)y_1 + (2 - \lambda)y_2 = c$ .

Эти линейные функции при различных  $c$  параллельны.

Решение задачи  $\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q$  означает, что среди всех линий уровня, имеющих общие точки с областью  $Q$ , необходимо найти линию уровня с наименьшим  $c$ .

Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда линии уровня имеют вид (рис. 7)

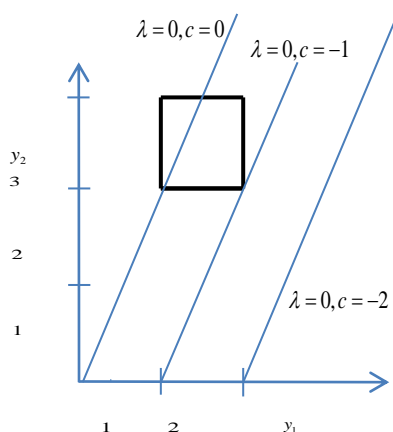


Рис. 7. Линии уровня свертки при  $\lambda = 0$ .

При уменьшении параметра  $c$  линии уровня будут смещаться вправо. Очевидно, что наименьшее значение параметра среди всех линий уровня, пересекающихся с областью  $Q$ , будет у линии, проходящей через точку  $(2, 2)$ . Эта точка и будет решением для  $\lambda = 0$ .

При изменении  $\lambda$  будет меняться наклон линии уровня, равный  $\frac{1-3\lambda}{2-\lambda}$ .

Оценим характер изменения. Производная наклона по  $\lambda$

$$\left(\frac{1-3\lambda}{2-\lambda}\right)' = \frac{-5}{(2-\lambda)^2} < 0 \quad \forall \lambda$$

Поэтому с увеличением  $\lambda$  наклон будет уменьшаться. Геометрически прямая будет поворачиваться по часовой стрелке.

Пока наклон не станет равен нулю, а это случится при  $\lambda = 1/3$ , свертка будет принимать минимальное значение в точке (2,2) (рис. 8)

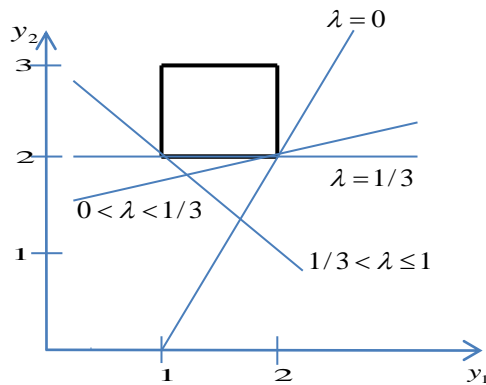


Рис. 8. Изменение положения линий уровня.

Если  $\lambda = 1/3$ , свертка имеет вид  $5y_2 = 3c$  и параллельна оси абсцисс. Очевидно, что минимум достигается при прохождении свертки через нижнюю сторону квадрата, каждая точка которой и является решением задачи.

Если  $\lambda > 1/3$ , наклон становится отрицательным и уменьшается до  $-2$  при  $\lambda = 1$ . При таких  $\lambda$  свертка достигает минимального значения при прохождении точки (1,2) (рис.8).

Получаемое решение

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} (2, 2), 0 \leq \lambda < \frac{1}{3} \\ (y_1, 2), 1 \leq y_1 \leq 2/3, \lambda = \frac{1}{3} \\ (1, 2), \frac{1}{3} < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

полностью совпадает с решением, построенным ранее с помощью аппарата линейного программирования.

## 2.5. Двухпараметрические линейные задачи. Пространство критериев.

Снова рассмотрим задачу

$$f_1(y) = 2y_1 + y_2$$

$$f_2(y) = -y_1 + 2y_2$$

$$Q = \{y \in R^2 : 1 \leq y_1 \leq 2, 2 \leq y_2 \leq 3\}$$

но исследуем ее в пространстве критериев.

Прежде всего, необходимо отобразить область  $Q$  на критериальную плоскость  $(f_1, f_2)$ . Поскольку критерии линейны, они задают аффинное (невырожденное) преобразование плоскости параметров в плоскость критериев. При этом линейные объекты переходят в линейные с сохранением точек пересечений и параллельности. Поэтому для построения на плоскости критериев образа  $Q_f$  множества  $Q$  достаточно выяснить, куда переходят угловые точки квадрата  $Q$  (см. рис. 9).

$$Q \rightarrow Q_f : \begin{cases} (1,2) \rightarrow (4,3) \\ (1,3) \rightarrow (5,5) \\ (2,2) \rightarrow (6,2) \\ (2,3) \rightarrow (7,4) \end{cases}$$

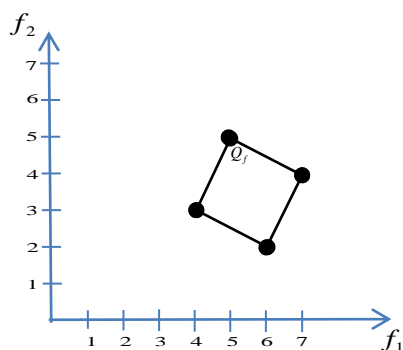


Рис. 9. Образ допустимой области на плоскости критериев

### 2.5.1. Решение на основе линейного программирования.

Вновь рассмотрим линейную свертку  $\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ .

Для нахождения решений многокритериальной задачи необходимо решить задачу  $\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ . Но свертка линейна по  $f_1, f_2$ , область  $Q_f$  -

выпуклый многогранник, поэтому данная задача является задачей линейного программирования, и мы вновь можем найти решение через сравнение значений в крайних точках квадрата  $Q_f$ .

$$\Lambda(4, 3) = 4\lambda + 3(1 - \lambda) = \lambda + 3$$

$$\Lambda(5, 5) = 5\lambda + 5(1 - \lambda) = 5$$

$$\Lambda(6, 2) = 6\lambda + 2(1 - \lambda) = 4\lambda + 2$$

$$\Lambda(7, 4) = 7\lambda + 4(1 - \lambda) = 3\lambda + 4$$

Заметим, что значения свертки в угловых точках области  $Q_f$  в точности совпадают со значениями свертки в соответственных угловых точках области  $Q$  на плоскости параметров, поэтому анализ на плоскости критериев полностью совпадает с проведенным анализом на плоскости параметров, и решение легко трансформировать на плоскость критериев, учитывая, что прямая  $y_2 = 1$  переходит в прямую  $f_1 + 2f_2 = 10$ .

$$P_\lambda^* = \begin{cases} (6, 2), & 0 \leq \lambda < 1/3, \\ (f_1, 0.5(10 - f_1)), & 4 \leq f_1 \leq 6, \lambda = 1/3, \\ (4, 3), & 1/3 < \lambda \leq 1. \end{cases}$$

### 2.5.2. Геометрическое рассмотрение в пространстве критериев.

Перейдем к «геометрическому» способу решения задачи на плоскости критериев.

Рассмотрим линии уровня свертки:  $\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 = c$ .

При конкретном  $c$  линия уровня – линейная функция с наклоном  $-\frac{\lambda}{1 - \lambda}$ , равным нулю при  $\lambda = 0$  и отрицательным при  $\lambda > 0$ .

При разных  $c$  линии уровня параллельны, а при уменьшении  $c$  смещаются вниз.

Как было показано ранее (см. п.2.3), наклон  $-\frac{\lambda}{1 - \lambda}$  убывает с увеличением  $\lambda$ .

Это означает, что при увеличении  $\lambda$  прямая (18) (линия уровня свертки) будет поворачиваться по часовой стрелке.

Напомним, что для нахождения решений многокритериальной задачи необходимо решить задачу  $\Lambda(f) \rightarrow \min, y \in Q_f$ . Этого можно достичь, если найти наименьшее  $c$ , при котором прямая (18) имеет общие точки с допустимой областью  $Q_f$ .

Начнем с  $\lambda = 0$ . Линии уровня свертки  $\Lambda(f) = f_2 = c$ . Очевидно, что минимальное значение коэффициента уровня  $c_{\min} = 2$  достигается, когда линия уровня проходит через точку (6,2). Именно эта точка является решением многокритериальной задачи при  $\lambda = 0$  (рис. 10).

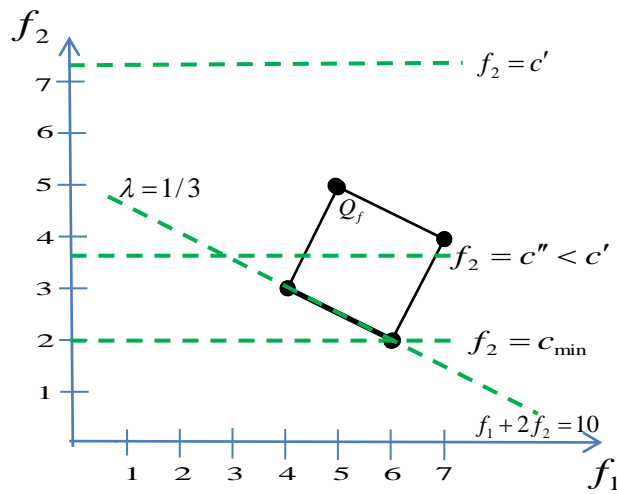


Рис. 10. Линии уровня на плоскости критериев.

Построим прямую, проходящую через точки (4,3) и (6,2), т.е. включающую нижнюю сторону квадрата (она же геометрически множество Парето задачи):  $f_1 + 2f_2 = 10$ .

Разделим на сумму коэффициентов при переменных  $f_1, f_2$ :  $\frac{1}{3}f_1 + \frac{2}{3}f_2 = \frac{10}{3}$ .

Но это уравнение линии уровня линейной свертки с  $\lambda = 1/3, c = 10/3$ , которое обеспечивает минимальное значение коэффициента линий уровня при  $\lambda = 1/3$  (рис. 10).

В этом случае решение достигается во всех точках нижней стороны квадрата, т.е. в точках вида  $(f_1, 0.5(10 - f_1)), 4 \leq f_1 \leq 6$ .

Если начнем увеличивать  $\lambda$ , начиная с  $\lambda = 0$ , прямая (18) начнет поворачиваться по часовой стрелке, и пока  $\lambda$  не достигнет значения  $1/3$

(линии уровня не станут параллельны прямой  $f_1 + 2f_2 = 10$ ), решением будет оставаться точка (6,2).

Если продолжить увеличение  $\lambda$  после значения  $1/3$ , прямая (18) продолжит поворот, и вплоть до  $\lambda = 1$  оптимальной точкой будет точка (4,3).

В результате мы получим полное решение многокритериальной задачи – множество Парето

$$P_\lambda^* = \begin{cases} (6, 2), 0 \leq \lambda < 1/3, \\ (f_1, 0.5(10 - f_1)), 4 \leq f_1 \leq 6, \lambda = 1/3, \\ (4, 3), 1/3 < \lambda \leq 1. \end{cases}$$

## 2.6. Однопараметрические линейные задачи. Пространство параметров.

Несколько усложним задачу. Пример является двухкритериальным и однопараметрическим, но критерии становятся нелинейными.

$$f_1(y) = y^2$$

$$f_2(y) = (y - 3)^2$$

$$Q = [1, 2]$$

Используя линейную свертку, найдем частные решения задачи для различных весовых коэффициентов.

Заметим, что критерии противоречивы во всей допустимой области (рис.11).

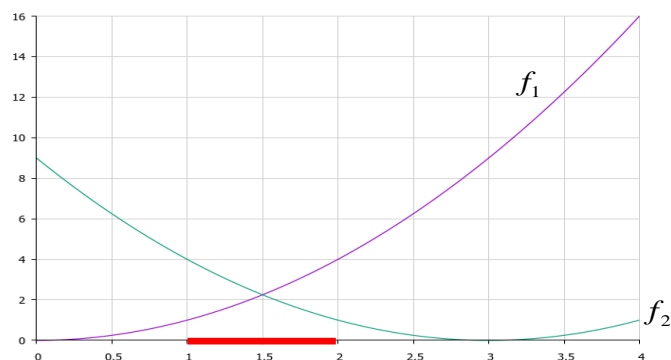


Рис. 11. Графики критериев и область противоречивости.

Линейная свертка имеет вид

$$\Lambda(y) = \lambda f_1(y) + (1 - \lambda)f_2(y) = \lambda y^2 + (1 - \lambda)(y - 3)^2 = y^2 - 6(1 - \lambda)y + 9(1 - \lambda)$$

Свертка является параболой, у которой ветви направлены вверх.

Координата минимума параболы на отрезке  $[1,2]$  будет частным решением многокритериальной задачи для соответствующего  $\lambda$ , т.е. надо решить задачу

$$\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in [1, 2].$$

$$\Lambda'(y) = 2y - 6(1 - \lambda) = 0$$

$$y_{\min} = 3(1 - \lambda)$$

Если  $3(1 - \lambda) < 1 \Leftrightarrow \lambda > 2/3$ , отрезок  $[1,2]$  находится справа от точки минимума и функция на этом отрезке возрастает, поэтому минимум свертки достигается на левом конце, т.е. в точке  $y^* = 1$ .

Если  $3(1 - \lambda) > 1 \Leftrightarrow \lambda < 1/3$ , отрезок  $[1,2]$  находится слева от точки минимума и функция на этом отрезке убывает, поэтому минимум свертки достигается в точке  $y^* = 2$ .

Если же  $1/3 \leq \lambda \leq 2/3$ , минимум свертки достигается на отрезке  $[1,2]$  в точке  $y_{\min}$ .

Окончательное решение, которое покрывает всю область противоречивости, имеет вид

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} \{2\}, & 0 \leq \lambda < 1/3 \\ 3(1 - \lambda), & 1/3 \leq \lambda \leq 2/3 \\ \{1\}, & 2/3 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

## 2.7. Однопараметрические линейные задачи. Пространство критериев.

Для отображения области  $Q$  на плоскость критериев выразим критерий  $f_2$  через  $f_1$ , исключив переменную  $y$ :  $y = \pm\sqrt{f_1}$ . Так как  $y > 0$ , оставляем  $y = \sqrt{f_1}$ . Тогда  $f_2 = (\sqrt{f_1} - 3)^2 = f_1 - 6\sqrt{f_1} + 9$ .

Из выражения для первого критерия очевидно, что из  $1 \leq y \leq 2$  следует  $1 \leq f_1 \leq 4$ .



Производная  $(f_2)'_{f_1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{f_1}} = \frac{3 - \sqrt{f_1}}{\sqrt{f_1}} < 0$  для  $1 \leq f_1 \leq 4$ , поэтому  $f_2(f_1)$

убывает на этом отрезке.

Вторая производная  $(f_2)'' = \frac{3}{2(f_1)^{3/2}} > 0$ , поэтому функция  $f_2$  выпукла вниз.

Таким образом, область  $Q_f$  будет представлять собой часть кривой  $f_2 = f_1 - 6\sqrt{f_1} + 9$  на отрезке  $1 \leq f_1 \leq 4$  (рис. 12).

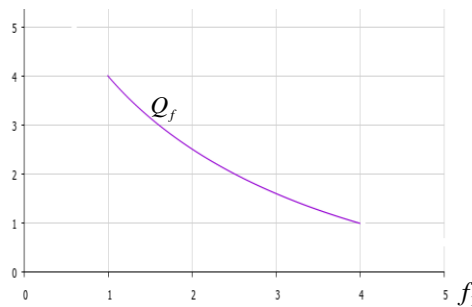


Рис.12. Область поиска на плоскости критериев.

Геометрически ясно, что множеством Парето является вся область  $Q_f$ , а конкретное  $\lambda$ , при котором точка из  $Q_f$  является паретовской согласно линейной свертке, соответствует ситуации касания свертки с графиком функции в этой точке. В этом случае имеем систему, из которой можно пытаться найти  $\lambda$ :

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= f_1 - 6\sqrt{f_1} + 9 \\ \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 &= c \end{aligned} \right\}$$

В этой системе, однако, два уравнения и ТРИ неизвестных:  $f_1, f_2, c$ . Что делать?

Подставим  $f_2$  из первого уравнения во второе. Получим квадратное уравнение относительно  $\sqrt{f_1}$ :

$$f_1 - 6(1 - \lambda)\sqrt{f_1} + 9(1 - \lambda) - c = 0$$

Но область  $Q_f$  выпукла, поэтому точка касания и, следовательно, решение системы единственно.

Единственность решения обеспечивается равенством нулю дискриминанта:

$$D = 36(1-\lambda)^2 - 36(1-\lambda) + 4c = 0$$

Тогда решением системы будет

$$\sqrt{f_1} = 3(1-\lambda) \Rightarrow f_1 = 9(1-\lambda)^2$$

$$f_2 = (\sqrt{f_1} - 3)^2 = 9\lambda^2$$

Что дает нам равенство нулю дискриминанта?

Из этого соотношения мы можем найти значение константы уровня:

$$c = 9\lambda(1-\lambda)$$

Заметим, что найти зависимость паретовских точек от  $\lambda$  можно и более простым способом. Дело в том, что линейная свертка в точке касания является касательной к функции, представляющей область  $Q_f$  и, следовательно, наклон свертки равен производной функции в этой точке:

$$1 - \frac{3}{\sqrt{f_1}} = -\frac{\lambda}{1-\lambda}, \text{ откуда } f_1 = 9(1-\lambda)^2.$$

Найденное решение имеет место, однако, только для  $1 \leq f_1 \leq 4$ .

$$\begin{aligned} f_1 \geq 1 &\Rightarrow 9(1-\lambda)^2 \geq 1 \Rightarrow \lambda \leq 2/3 \\ f_1 \leq 4 &\Rightarrow 9(1-\lambda)^2 \leq 4 \Rightarrow \lambda \geq 1/3 \end{aligned} \quad (19)$$

При  $\lambda = 0$  свертка  $\Lambda(f) = f_2$  достигает своего минимума в  $Q_f$  в точке (4,1).

Когда увеличиваем  $\lambda$ , наклон свертки становится отрицательным и уменьшается, и свертка начинает поворачиваться по часовой стрелке. Пока наклон больше наклона касательной в точке (4,1), соответствующего  $\lambda = 1/3$  и равного  $-1/2$ , минимум свертки достигается в точке (4,1).

При дальнейшем увеличении  $\lambda$  прямая продолжает поворот по часовой стрелке, и паретовские точки вычисляются согласно выражениям (19) вплоть до  $\lambda = 2/3$ , при котором паретовской является точка (1,4).

Продолжение увеличения  $\lambda$  вплоть до 1 приводит к дальнейшему уменьшению наклона, при этом паретовской будет оставаться точка (1,4).

Полное решение задачи

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} (4,1), 0 \leq \lambda \leq 1/3 \\ (9(1-\lambda)^2, 9\lambda^2), 1/3 < \lambda < 2/3 \\ (1,4), 2/3 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Покажем теперь эквивалентность решений в пространствах параметров и критериев.

Построим обратное отображение плоскости критериев в пространство параметров, а именно  $y = \sqrt{f_1}$ .

Тогда точка (4,1) переходит в точку  $y=2$ , точка (1,4) – в точку  $y=1$ , а точка  $(9(1-\lambda)^2, 9\lambda^2)$  переходит в точку  $y=3(1-\lambda)$ , что соответствует полной эквивалентности решений в пространствах параметров и критериев.

## 2.8. Однопараметрические нелинейные задачи. Пространство параметров.

Рассмотрим двухкритериальную задачу с одним параметром, одним линейным и одним нелинейным невыпуклым критерием.

$$f_1(y) = y$$

$$f_2(y) = \sin(y) + 2 \tag{20}$$

$$Q = \left[ y \in R^1 : \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3\pi}{2} \right]$$

В допустимой области  $Q$  первый критерий возрастает, второй убывает (см. рис. 13), т.е. критерии противоречивы во всей области. Это означает, что паретовскими будут все точки области.

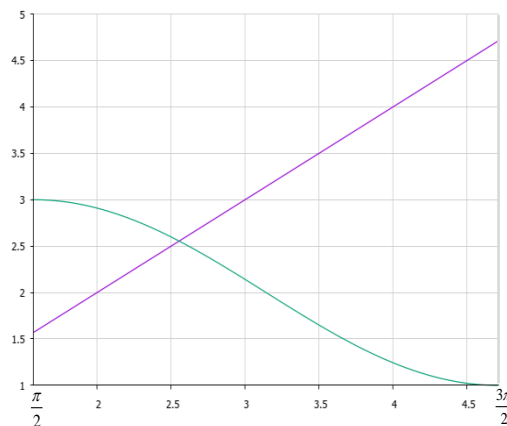


Рис. 13. Графики критериев.

Построим линейную свертку  $\Lambda(y) = \lambda y + (1-\lambda)(\sin y + 2)$  и с ее помощью будем искать паретовские точки, решая задачу

$$\Lambda(y) \rightarrow \min, y \in Q$$

При  $\lambda = 0$  свертка равна второму критерию:  $\Lambda(y) = \sin y + 2$ , и ее минимум в области  $Q$  достигается в точке  $y_{\min} = 3\pi/2$ .

Аналогично при  $\lambda = 1$  имеем  $\Lambda(y) = y \rightarrow y_{\min} = \pi/2$ .

Посмотрим поведение свертки при различных  $\lambda$  между нулем и единицей.

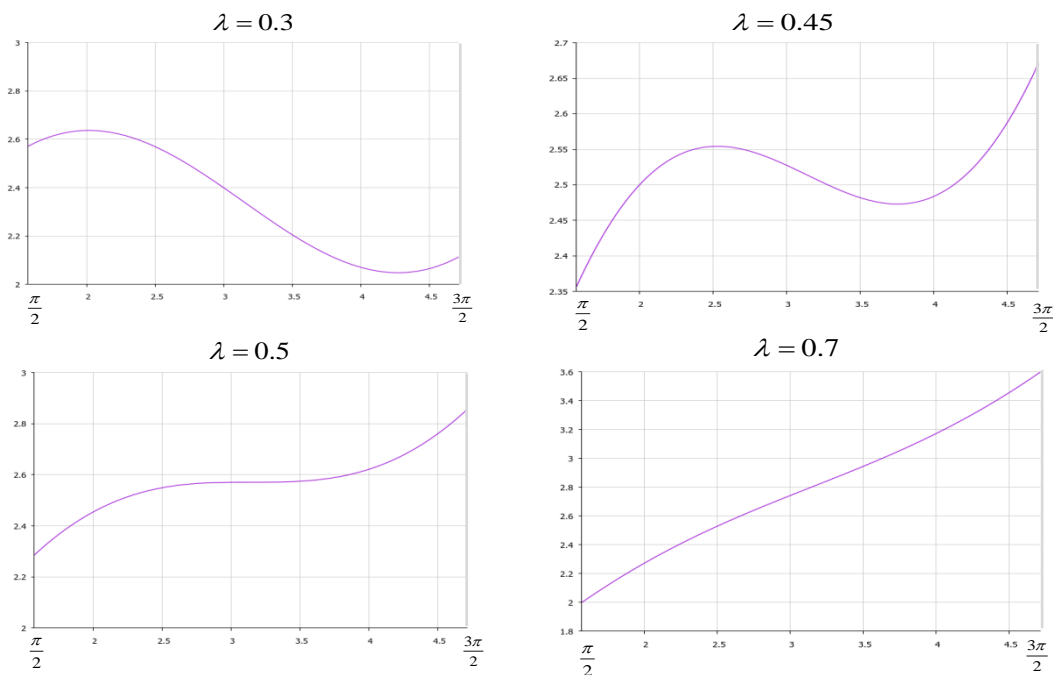


Рис. 14. Графики свертки для разных весов.

Как видно из графиков, при  $\lambda = 0.5$  и  $\lambda = 0.7$  функция является возрастающей, поэтому ее единственный минимум в области  $Q$  достигается в точке  $y_{\min} = \pi/2$ .

Однако при  $\lambda = 0.3$  и  $\lambda = 0.45$  поведение функции более сложное. Она имеет два минимума: один на левом конце области, а второй во внутренней точке, причем для  $\lambda = 0.3$  минимум на краю выше минимума во внутренней точке, а при  $\lambda = 0.45$  наоборот.

Проведем аналитическое исследование задачи минимизации свертки для различных  $0 < \lambda < 1$ .

Рассмотрим производную свертки по параметру  $y$  .

Заметим, что на отрезке  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$   $-1 \leq \cos y \leq 0$  и  $\cos y$  является выпуклой

вниз функцией.

$$\Lambda'(y) = \lambda + (1 - \lambda) \cos y$$

Если  $\lambda > 0.5$  , то  $\lambda > 1 - \lambda$  и  $\Lambda'(y) > (1 - \lambda)(1 + \cos y) \geq 0$  , поскольку  $\cos y \geq -1$ .

Это значит, что свертка строго возрастает и  $y_{\min} = \pi/2$  .

Возьмем  $\lambda = 0.5$  .

$$\Lambda'(y) = 0.5(1 + \cos y) = 0 \Rightarrow \cos y = -1 \Rightarrow y = \pi$$

$$\Lambda''(y) = -(1 - \lambda) \sin y$$

$$\Lambda''(\pi) = 0 \Rightarrow \pi - \text{точка перегиба.}$$

Слева и справа от точки  $\pi$  имеем  $\cos y > -1$  , поэтому производная положительна, а свертка – возрастающая функция, т.е. снова  $y_{\min} = \pi/2$  .

Если  $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$  , то  $-1 < -\frac{\lambda}{1 - \lambda} \leq 0$  , и уравнение  $\Lambda'(y) = 0$  имеет 2 корня:

$$y_1 = \arccos\left(-\frac{\lambda}{1 - \lambda}\right), \quad y_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1 - \lambda}\right), \quad (21)$$

симметрично расположенных относительно точки  $y = \pi$  (рис. 15).

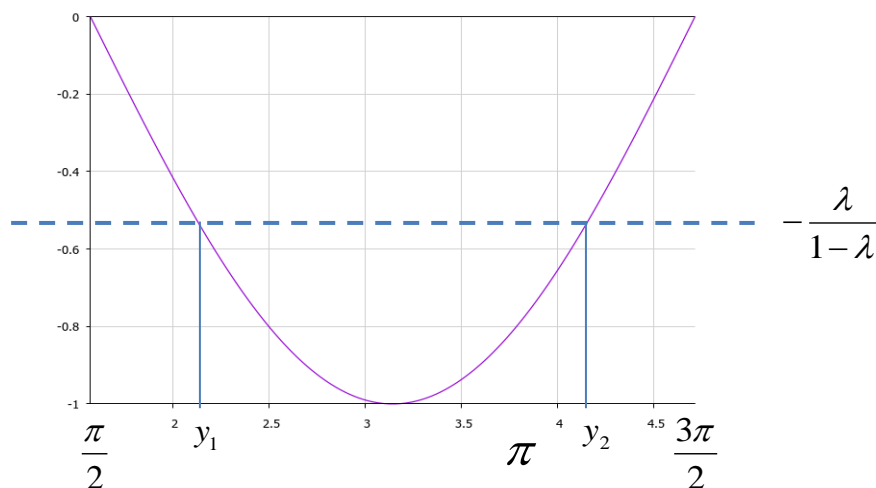


Рис. 15. Корни уравнения  $\Lambda'(y) = 0$  .

Первый корень  $y_1$  удовлетворяет неравенству  $\frac{\pi}{2} < y_1 < \pi$ , поэтому  $\sin y_1 > 0$ , откуда вторая производная  $\Lambda''(y) = -(1-\lambda)\sin y < 0$ , т.е. в точке  $y_1$  - максимум.

Иное обоснование.

$$\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = \frac{\sqrt{1-2\lambda}}{1-\lambda} \Rightarrow \Lambda''(y_1) = -\sqrt{1-2\lambda} < 0$$

Второй корень  $\pi < y_2 < \frac{3\pi}{2}$ , поэтому  $\sin y_1 < 0 \Rightarrow \Lambda''(y_1) > 0$ , т.е. в точке  $y_2$  - минимум.

Другой способ. Т.к.  $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ , то

$$\Lambda''(y_2) = -(1-\lambda)\sin\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right) = (1-\lambda)\sin \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = \sqrt{1-2\lambda} > 0.$$

Поскольку  $y_1$  - максимум,  $y_2$  - минимум и  $y_1 < y_2$ , то минимум свертки будет достигаться либо на левой границе  $\pi/2$ , либо в точке  $y_2$ .

Теперь надо выяснить, в каком случае глобальный минимум будет на левой границе, а в каком - в точке  $y_2$ .

Оценим зависимость значений свертки от  $\lambda$  в точках  $\pi/2$  и  $y_2$ .

$$\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 3\right)\lambda + 3 - \text{убывающая функция } \lambda.$$

$$\Lambda(y_2) = \lambda\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right) + (1-\lambda)\left(\sin\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right) + 2\right)$$

Возьмем производную от  $\Lambda(y_2)$  по  $\lambda$ .

$$\Lambda'(y_2) = \frac{\sqrt{1-2\lambda}}{1-\lambda} + \arcsin\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) + \frac{3\pi}{2} - 2$$

Т.к.  $\arcsin\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) > -\frac{\pi}{2}$ , то  $\Lambda'(y_2) = \frac{2\pi}{2} - 2 > 0$ , т.е.  $\Lambda(y_2)$  - возрастающая функция  $\lambda$ .

При  $\lambda = \frac{1}{2}$  получаем  $y_2 = \pi$  и  $\Lambda(y_2) = \frac{\pi}{2} + 1 > \Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}$ , т.е. свертку минимизирует точка  $\frac{\pi}{2}$ .

При уменьшении  $\lambda$  от  $\frac{1}{2}$  до  $0$   $\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 3\right)\lambda + 3$  будет возрастать, а  $\Lambda(y_2)$  - уменьшаться. При некотором  $\tilde{\lambda}$ , которое определяется как решение уравнения  $\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Lambda(y_2)$ , или

$$\lambda\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right) + (1-\lambda)\left(\sin\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right) + 2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 3\right)\lambda + 3,$$

они сравниваются, а при  $\lambda < \tilde{\lambda}$  точкой минимума свертки станет  $y_2$ .

Численно  $\tilde{\lambda} \approx 0.420159$ ,  $y_2(\tilde{\lambda}) \approx 3.90192$ .

Окончательно линейная свертка дает следующее множество частных решений многокритериальной задачи:

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} 2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right), & 0 \leq \lambda < \tilde{\lambda}, \\ \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi - \arccos\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{1-\tilde{\lambda}}\right)\right), & \lambda = \tilde{\lambda}, \\ \frac{\pi}{2}, & \tilde{\lambda} < \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Отметим красным цветом на оси абсцисс множество  $P_{\lambda}^*$  (рис. 16).

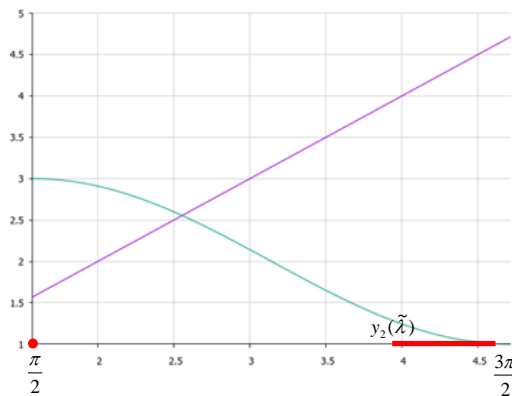


Рис. 16. Множество найденных паретовских точек.

Обратите внимание, что точки  $\frac{\pi}{2} < y \leq 2\pi - \arccos\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{1-\tilde{\lambda}}\right)$  **НЕ**

**СОДЕРЖАТСЯ** в множестве  $P_{\lambda}^*$ , т.е., используя линейную свертку, мы не смогли найти **ВСЕ** паретовские точки!

## 2.9. Однопараметрические нелинейные задачи. Пространство критериев.

Снова рассмотрим задачу (20), но теперь в плоскости критериев. Исключив  $y$  из уравнений критериев, получаем на плоскости критериев образ  $Q_f$  области  $Q$  (см. рис. 17).

$$f_2 = \sin(f_1) + 2$$

$$\frac{\pi}{2} \leq f_1 \leq \frac{3\pi}{2}$$

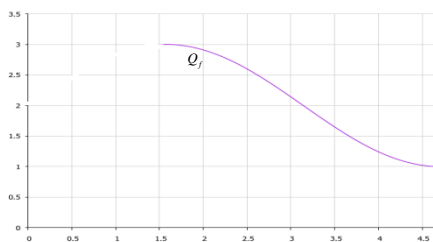


Рис. 17. Образ допустимой области на плоскости критериев.

Очевидно, что все точки множества  $Q_f$  являются паретовскими.

Линейная свертка в пространстве критериев имеет вид  $\Lambda(f) = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$

Рассмотрим линии уровня свертки  $\Lambda(f) = c$  и будем добиваться наименьшего значения уровня  $c$ , при котором линия уровня имеет общие точки с  $Q_f$ . Эти точки обеспечат минимум свертки в  $Q_f$  и будут частными решениями многокритериальной задачи.

Рассмотрим поведение линий уровня свертки при различных  $\lambda$ .

$$\lambda = 0 \rightarrow \Lambda(f) = f_2 = c \rightarrow (f_1^*, f_2^*) = \left( \frac{3\pi}{2}, 1 \right)$$

Минимальное значение коэффициента  $c$  соответствует ситуации, когда линия уровня свертки касается области, т.е. совпадает с касательной в точке касания.

Касательная к кривой  $f_2 = \sin(f_1) + 2$  в точке  $f_1$  равна  $f_2'(f_1) = \cos(f_1)$ , а наклон линейной свертки равен  $-\frac{\lambda}{1-\lambda}$ , т.е. паретовская точка  $f_1$  находится из уравнения  $\cos(f_1) = -\frac{\lambda}{1-\lambda}$ .

Это уравнение имеет два корня:



$$(f_1)_1 = \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right), \quad (f_1)_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right),$$

которые соответствуют двум разным касательным с наклоном  $\cos(f_1)$ . Выбираем корень  $(f_1)_2$ , поскольку он обеспечивает меньшее значение линии уровня (рис.18).

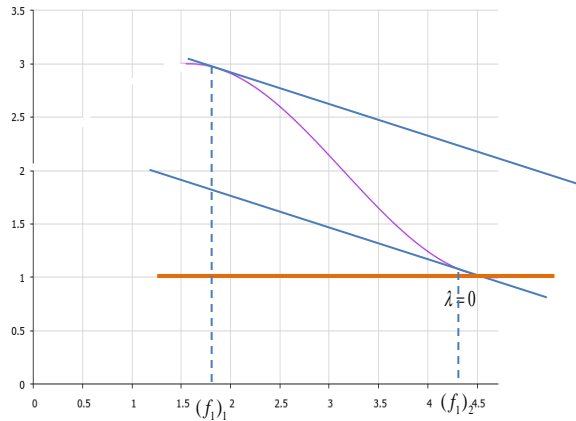


Рис. 18. Линии уровня линейной свертки.

От горизонтального уровня, соответствующего  $\lambda=0$ , с увеличением  $\lambda$  прямая линии уровня свертки начнет поворачиваться по часовой стрелке, обеспечивая решения  $(f_1)_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)$ , вплоть до ситуации, когда касательная пересечет точку  $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ . Этот случай соответствует  $\tilde{\lambda}$ , удовлетворяющей системе уравнений

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}(f_1)_2 + (1-\tilde{\lambda})(\sin(f_1)_2+2) = c \\ \frac{\tilde{\lambda}\pi}{2} + 3(1-\tilde{\lambda}) = c \\ (f_1)_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{1-\tilde{\lambda}}\right), \end{cases}$$

Из этой системы получается уже известное уравнение

$$\tilde{\lambda}\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{1-\tilde{\lambda}}\right)\right) + (1-\tilde{\lambda})\left(\sin\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{1-\tilde{\lambda}}\right)\right) + 2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 3\right)\tilde{\lambda} + 3,$$

решением которого является  $\tilde{\lambda} \approx 0.420159$ .

При дальнейшем повороте, однако, минимальное значение для всех остальных  $\lambda$  будет обеспечиваться точкой  $(\frac{\pi}{2}, 3)$ , а не точкой  $(f_1)_2$ ! Например, при  $\lambda=1/2$  имеем  $(f_1)_2 = \pi$ , но касательную в этой точке можно сдвинуть вниз до точки  $(\frac{\pi}{2}, 3)$  (см. рис. 19).

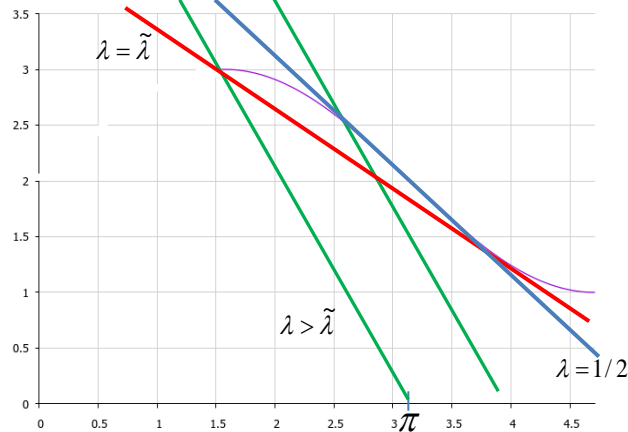


Рис. 19. Линии уровня линейной свертки при  $\lambda > \tilde{\lambda}$ .

Найденное решение

$$P_{\lambda}^* = \begin{cases} \left( 2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right), \sin\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right) + 2 \right), & 0 \leq \lambda < \tilde{\lambda}, \\ \left( \frac{\pi}{2}, 3 \right), \left( 2\pi - \arccos\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{1-\tilde{\lambda}}\right), \sin\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{1-\tilde{\lambda}}\right)\right) + 2 \right), & \lambda = \tilde{\lambda}, \\ \left( \frac{\pi}{2}, 3 \right), & \tilde{\lambda} < \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Снова следует отметить, что часть паретовских точек **НЕ ВХОДИТ** в решение!

Как следует из полученных результатов, линейная свертка не обеспечила нахождение всех частных решений задачи. Причина состоит в **невыпуклости** второго критерия. Тогда возникает вопрос: а при каких условиях при помощи линейной свертки можно построить полное решение?

Ответ дает следующая

**Теорема [5].** Пусть в многокритериальной задаче (7) множество  $Q$  выпукло, а все частные критерии  $f_i(y), 1 \leq i \leq k$ , являются выпуклыми функциями на множестве  $Q$ . Тогда для любой слабоэффективной точки

$y^* \in Q$  найдется такой вектор  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,  $\lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , что решение задачи

$$\Lambda(y) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(y) \rightarrow \min, y \in Q, \quad (22)$$

достигается в точке  $y^*$ .

### 3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

#### 3.1. Построение многокритериальных моделей

1. Найти прямоугольник максимальной площади с заданным периметром.
2. В задаче расчета консервной банки найти максимальный объем и минимальную длину сварных швов при заданной площади поверхности.
3. Для прямого кругового конуса рассматриваются следующие характеристики: объем, площадь поверхности и длина сварных швов, равная сумме длин образующей и окружности основания. Найти наименьшие значения площади поверхности и длины швов при заданном объеме.

#### 3.2. Линейные задачи

Построить методом линейной свертки множества Парето и Слейтера на плоскости параметров и плоскости критериев в следующих задачах.

1.  $f_1(y) = 2y_1 - y_2$   
 $f_2(y) = -2y_1 + 4y_2$   
 $Q = \{y = (y_1, y_2) : 2 \leq y_1, y_2 \leq 3\}$
2.  $f_1(y) = y_2$   
 $f_2(y) = y_1 - y_2$   
 $Q = \{y = (y_1, y_2) : 3 \leq y_1 \leq 4, 1 \leq y_2 \leq 2\}$
3.  $f_1(y) = 2y_2$   
 $f_2(y) = 3y_1$   
 $Q = \{y = (y_1, y_2) : 1 \leq y_1, y_2 \leq 2\}$
4.  $f_1(y) = 2y_2$   
 $f_2(y) = 2y_1 - y_2$   
 $Q = \{y = (y_1, y_2) : 2 \leq y_1 \leq 3, 1 \leq y_2 \leq 2, y_2 \geq 4 - y_1\}$
5.  $f_1(y) = 2y_2 - y_1$   
 $f_2(y) = 2y_1$   
 $Q = \{y = (y_1, y_2) : 1 \leq y_1 \leq 2, 2 \leq y_2 \leq 3, y_2 \geq 4 - y_1\}$

$$f_1(y) = -y_1 + y_2 + 2$$

6.  $f_2(y) = 3y_1 - y_2$   
 $Q = \{y = (y_1, y_2) : 1 \leq y_1 \leq 2, 1 \leq y_2 \leq 2\}$

### 3.3. Нелинейные задачи

Найти методом линейной свертки паретовские и слейтеровские точки на плоскости критериев в следующих задачах.

1.  $f_1(y) = y^2 - 4y + 5$   
 $f_2(y) = y + 1$   
 $y \in Q = [1, 4]$

2.  $f_1(y) = \frac{y_1}{y_2}$   
 $f_2(y) = 3y_2 - y_1$   
 $Q = \{y \in R^2 : 1 \leq y_1, y_2 \leq 2\}$

3.  $f_1(y) = y_1$   
 $f_2(y) = -y_1 + 4y_2$

Область  $Q$  (звезда) представлена на рис. 20.

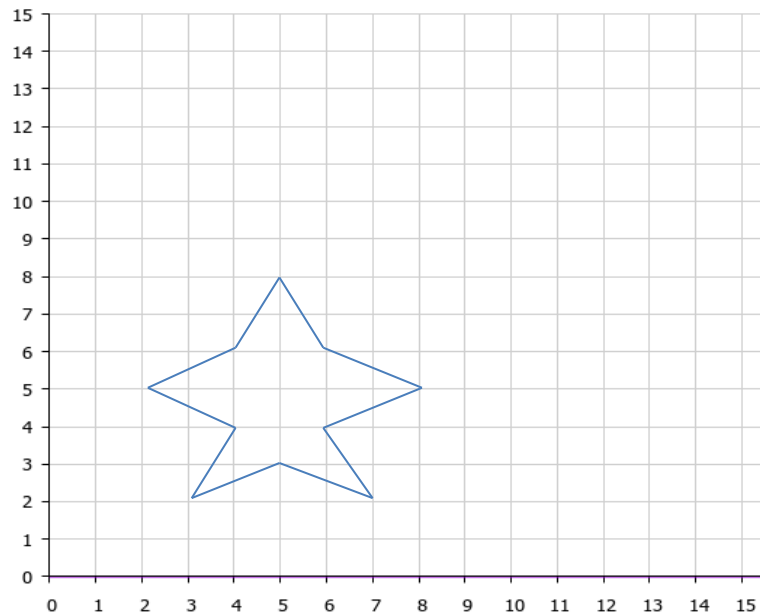


Рис. 20. Область поиска

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие является методической поддержкой курса "Модели выбора решений", который читается в магистратуре Института информационных технологий, математики и механики по направлениям подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Читатель знакомится с общей постановкой задачи многокритериальной оптимизации как модели выбора решений, фундаментальными особенностями таких задач, связанными с противоречивостью частных критериев, что приводит к формулировке решения в виде множеств Парето и Слейтера.

Для анализа многокритериальных задач используется методология сверток, заменяющая решение многокритериальной задачи решением семейства скалярных (однокритериальных) параметризованных задач.

На примерах различной степени сложности изучается применение линейной свертки критериев и демонстрируются ее особенности на невыпуклых многокритериальных задачах. Указываются достаточные условия, при которых с помощью линейной свертки находится полное множество Слейтера.

С целью закрепления материала предлагаются задачи разных типов для самостоятельного решения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981, 487 с.
2. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. М.: Радио и связь, 1984, 248 с.
3. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986, 290 с.
4. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006, 175 с.
5. Коротченко А.Г., Кумагина Е.А., Сморякова В.М. Введение в многокритериальную оптимизацию. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 55 с. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ, № 1429.17.06.  
<http://www.unn.ru/books/resources.html>

**Владимир Александрович Гришагин**

**АНАЛИЗ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ  
МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.