МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.В. Баркалов
Н.В Шестакова

МОДЕЛИ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
09.03.04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород
2021

УДК 519.83
ББК В185.5
Б 24

Б 24 Баркалов А.В., Н.В Шестакова. МОДЕЛИ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ: Учебно–методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2021. – 47 с.

Рецензент: к.ф.м.н. **Д.Е.Шапошников**

Данное пособие предназначено студентам института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета, изучающим приложения математики для обоснования процедур выбора наилучших решений в условиях конфликта или неопределенности. В первом разделе на примере взаимодействия конкурирующих сторон описывается формальная модель конфликтной ситуации (игра) и определяются понятия рационального выбора (устойчивость – равновесие по Нэшу и эффективность – оптимальность по Парето). Во втором разделе введенные понятия применяются к анализу ситуаций выбора со строгим соперничеством – антагонистическим играм. В третьем и четвертом разделах рассматривается расширение конечной антагонистической игры, получаемое введением случайности в выбор решений. В пятом разделе описаны конечные неантагонистические игры.

Основные теоретические понятия и утверждения приводятся в виде *определений* и *теорем,* их применение иллюстрируется *примерами*. В конце каждого раздела содержатся упражнения для контроля практических навыков владения методами нахождения наилучших стратегий в условиях конфликта. Они охватывают приемы вычисления минимаксов и максиминов функций, определенных в ограниченных областях, способы поиска оптимальных стратегий в конечных (матричных и биматричных) играх.

Пособие может быть полезно всем, кто интересуется проблематикой моделирования процессов выбора и поиска наилучших решений.

УДК 519.83
ББК В185.5

СОДЕРЖАНИЕ

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНФЛИКТОВ

При исследовании различного рода социально–экономических ситуаций часто приходится сталкиваться с наличием множества заинтересованных участников и зависимостью результативности решения отдельного участника от решений других. Так, доход производителя некоторого товара зависит не только от цен на этот товар, но и от того, сколько товара решит приобрести потребитель по этой цене. Соперничество производителей за рынки сбыта, спортивные состязания, военные столкновения представляют собой примеры подобных явлений.

Ситуации, в которых интересы участников не совпадают, называют конфликтными. Построением моделей конфликтных ситуаций, разработкой понятий наилучших решений и методов их отыскания занимается дисциплина, называемая теорией игр. Теория игр как математическая теория выбора рациональных решений в условиях конфликта или кооперации, оформилась в середине двадцатого столетия после выхода в 1944 году книги Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». В соответствии с терминологией основоположников, математические модели конфликтных ситуаций называются играми, участники конфликта – игроками, а их действия – решениями или стратегиями. Несмотря на упрощенность рассматриваемых моделей, теория игр предоставляет исследователю набор инструментов для анализа социально–экономических ситуаций, устанавливает ряд фундаментальных понятий и фактов, позволяющих глубже понимать и описывать конфликтные ситуации.

1.1. Дуополия с назначением выпусков

Рассмотрим с теоретико-игровой точки зрения дуополию, в которой участниками являются производители, выпускающие однотипный товар, в условиях зависимости цены от суммарного выпуска товара. Соответствующая этой экономической ситуации игра впервые была изучена в девятнадцатом веке А. Курно, объяснившим природу поведения производителей, конкурирующих на одном и том же рынке.

Пусть имеются два производителя однотипного товара, каждый из которых может производить его в объеме $x_i, i=1,2$, неся при этом расходы $c_i(x_i)$. Товар продается на рынке по сложившейся там цене $p(x)$, которая предполагается монотонно убывающей функцией от совокупного предложения товара $x = x_1 + x_2$. С учетом введенных обозначений, прибыль i–го производителя от выпуска товара в объеме x_i описывается функцией

$$M_i(x_1, x_2) = x_i * p(x) - c_i(x_i), \tag{1.1}$$

где

$x = x_1 + x_2$ – суммарный выпуск продукции.

В рамках данной модели естественно поставить вопрос об уровнях выпуска продукции, обеспечивающих максимальную прибыль каждому из производителей.

С теоретико-игровой точки зрения, приведенное описание представляет собой бескоалиционную (т.е. стороны принимают свои решения независимо друг от друга) игру двух лиц с непротивоположными интересами

$$\tilde{A} = < X_1, X_2, M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2) >, \qquad (1.2)$$

где

$X_i = \{x_i \geq 0\}$ – множества стратегий игроков (произволителей),

$x_i \in X_i$ – стратегии игроков (уровни выпуска), а

$M_i(x_1, x_2) = x_i * p(x) - c_i(x_i), i = 1{,}2$ – функции выигрыша (прибыли) игроков.

Модель конфликта в форме (1.2) называют моделью игры в нормальной форме. Цель каждой из сторон в игре двух лиц состоит в максимизации функции выигрыша путем надлежащего выбора стратегий, осуществляемого независимо друг от друга.

Рассмотрению дуополии предпошлем анализ монополии – задаче выбора решения с одним участником.

1.2. Монополия с назначением выпуска

Пусть производитель некоторого товара производит его в количестве x_1, неся при этом расходы $c_1(x_1)$. Этот товар поставляется на рынок, где он будет продан по зависящей от предложения цене $p(x_1)$, являющейся монотонно убывающей функцией от предложения товара x_1. При предположении о ненасыщаемости рынка весь товар будет продан, и производитель получит прибыль

$$M_1(x_1) = x_1 * p(x_1) - c_1(x_1). \qquad (1.3)$$

Для отыскания уровня выпуска продукции x_1^0, максимизирующего доход монополиста, примем следующие предположения о параметрах модели.

Предположим, что:

- производственные возможности монополиста ограничены, а именно

$$x_1 \in X_1 = [0{,}1];$$

- цена линейно зависит от предложения:

$$p(x_1) = 1 - x_1, x_1 \in X_1;$$

- затраты на производство (издержки) постоянны на выпуск единицы продукции при увеличении масштабов производства и составляют

$$c_1(x_1) = 1/2 * x_1.$$

Таким образом, для определения наилучшего объема выпуска продукции получается оптимизационная задача

$$M_1(x_1) = x_1 * (1 - x_1) - 1/2 * x_1 \xrightarrow[x_1 \in X_1]{} \max. \qquad (1.4)$$

Заметим, что функция $M_1(x_1)$ из (1.4) является квадратичной выпуклой вверх функцией (рис. 1.1).

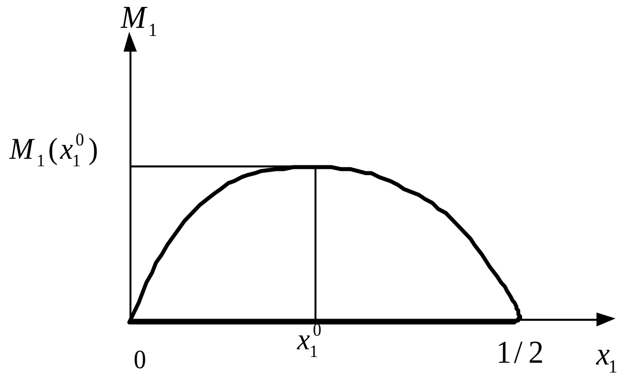

Рис. 1.1. График функции прибыли монополиста.

Ее максимум достигается в точке x_1^0 зануления первой производной:

$$\frac{d}{dx_1} M_1(x_1)|_{x_1=x_1^0} = (1-2*x_1-1/2)|_{x_1=x_1^0} = 0,$$

откуда решением задачи (1.4) является

$$x_1^0 = \frac{1}{4}, M_1(x_1^0) = \frac{1}{16}. \qquad (1.5)$$

1.3. Точка равновесия в дуополии с назначением выпусков

Пусть теперь, в отличие от монополии, имеются два производителя однотипного товара, характеризуемые количествами выпускаемой продукции x_i и затратами $c_i(x_i), i=1,2$. В этом случае на рынок будет поставлено $x = x_1 + x_2$ единиц товара, а прибыль при условии зависимости цены от суммарного предложения товара описывается выражениями (1.1).

Как и в случае монополии, примем дополнительные предположения о параметрах модели:

- производственные возможности сторон ограничены, а именно
$$x_i \in X_i = [0,1/2], i=1,2;$$
- цена линейно зависит от суммарного предложения товара
$$p(x) = 1-x, x = x_1 + x_2;$$
- затраты на производство постоянны на выпуск единицы продукции и составляют
$$c_i(x_i) = 1/2*x_i, i=1,2.$$

В случае дуополии для определения наилучших уровней выпуска продукции получаются две оптимизационные задачи

$$M_i(x_1,x_2) = x_i(1-x_1-x_2) - \frac{1}{2}x_i \xrightarrow[x_i \in X_i]{} \max, \qquad (1.6)$$

где $i = 1,2$.

Как видно из (1.6), решение об уровне выпуска одной стороны влияет на прибыль другой стороны – имеет место конфликт интересов. Если бы, например, первой стороне перед принятием решения об объеме производства был известен уровень выпуска продукции x_2 второй стороны, то решение задачи максимизации $M_1(x_1, x_2)$ можно осуществить аналогично решению задачи (1.4) для случая монополии с назначением выпуска:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} M_1(x_1, x_2)|_{x_1 = x_1^+} = (1 - x_2 - 2 * x_1 - 1/2)|_{x_1 = x_1^+} = 0,$$

откуда

$$x_1^+ = \frac{1/2 - x_2}{2}, M_1(x_1^+, x_2) = \left(\frac{1/2 - x_2}{2}\right)^2. \qquad (1.7)$$

Выражение x_1^+ из (1.7) можно интерпретировать как наилучший ответ первой стороны на стратегию x_2 второй стороны. Вычисляя подобным образом наилучший ответ x_2^+ второго производителя на стратегию x_1 первого, в силу симметрии задачи, имеем

$$x_2^+ = \frac{1/2 - x_1}{2}, M_2(x_1, x_2^+) = \left(\frac{1/2 - x_1}{2}\right)^2. \qquad (1.8)$$

Предположим теперь, что производители выбрали такие уровни выпуска продукции (x_1^0, x_2^0), что

$$x_1^0 = \frac{1/2 - x_2^0}{2},\ x_2^0 = \frac{1/2 - x_1^0}{2}, \qquad (1.9)$$

т.е. стратегия x_1^0 первой стороны является наилучшим ответом на стратегию x_2^0 второй, а стратегия x_2^0 второй стороны – наилучшим ответом на стратегию x_1^0 первой.

Пара стратегий (x_1^0, x_2^0), удовлетворяющая уравнениям (1.9), называется точкой равновесия Курно (либо точкой равновесия Нэша) дуополии – ни один из производителей, стремящихся максимизировать прибыль, при выборе стратегий (x_1^0, x_2^0) из (1.9), не заинтересован в их изменении на основании (1.7–8). Из уравнений (1.9) следует, что равновесные уровни выпуска продукции и соответствующие им выигрыши составляют

$$(x_1^0, x_2^0) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}), (M_1(x_1^0, x_2^0), M_2(x_1^0, x_2^0)) = (\frac{1}{36}, \frac{1}{36}). \qquad (1.10)$$

Точка равновесия (x_1^0, x_2^0) в дуополии может быть получена как результат дискретного динамического процесса принятия "близоруких" решений, называемого процедурой нащупывания по Курно. Процедура нащупывания начинается из некоторой начальной точки $(x_1(0), x_2(0))$. Предположим, что игроки «ходят» по очереди, выбирая наилучшие ответы на текущую стратегию партнера в соответствии с (1.7–8), первый игрок в нечетные, а второй – в четные моменты времени:

$$x_1(t) = \frac{1/2 - x_2(t-1)}{2}, t = 1,3,5,\ldots,$$

$$x_2(t) = \frac{1/2 - x_1(t-1)}{2}, t = 2,4,6,\ldots.$$

Пусть, для определенности, $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$. В этом случае последовательность точек $\{(x_1(t), x_2(t)), t = 0,1,2,\ldots\}$ имеет вид

$(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$,

$(x_1(1), x_2(1)) = (\frac{1/2 - x_2(0)}{2}, x_2(0)) = (\frac{1}{4}, 0)$,

$(x_1(2), x_2(2)) = (x_1(1), \frac{1/2 - x_1(1)}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$,

$(x_1(3), x_2(3)) = (\frac{1/2 - x_2(2)}{2}, x_2(2)) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{8})$, и т.д.

Такая последовательность изображена на рис. 1.2.

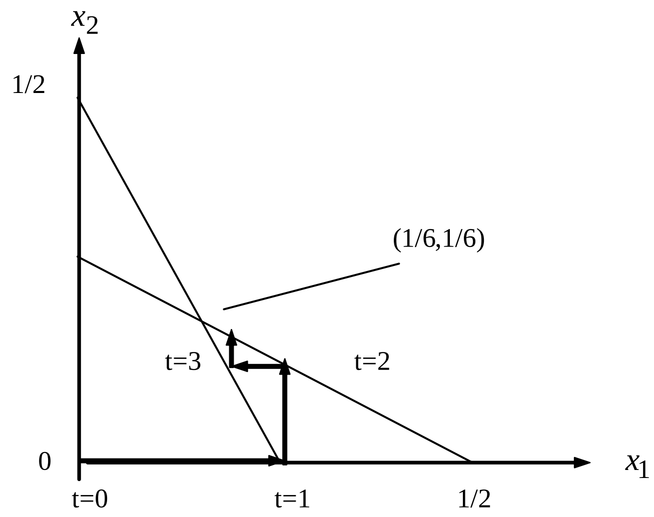

Рис. 1.2. Процедура нащупывания по Курно.

Осуществляя построение других последовательностей, начинающихся из других начальных точек, можно убедиться, что из любой начальной точки последовательности сходятся к точке (1/6,1/6), являющейся точкой пересечения прямых (1.7–8). К сожалению, процедура нащупывания по Курно не всегда сходится в играх общего вида.

Сравнивая выражения (1.5) и (1.10), описывающие наилучшие решения производителей и их доходы в условиях монополии и дуополии соответственно, можно сделать вывод о том, что конкуренция приводит к увеличению суммарного выпуска продукции, но суммарные доходы конкурентов меньше, чем доход монополиста.

1.4. Точки равновесия и эффективные решения

Для задачи выбора наилучшего решения в форме игры (1.2) свойство незаинтересованности сторон в изменении своего поведения может быть представлено в виде следующего определения.

Определение 1.1. Пара стратегий (x_1^0, x_2^0) называется точкой равновесия по Нэшу (либо ситуацией равновесия по Нэшу) в игре двух лиц $\tilde{A} =< X_1, X_2, M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2) >$, если

$$\begin{aligned}(\forall x_1)\, M_1(x_1^0, x_2^0) \geq M_1(x_1, x_2^0),\\ (\forall x_2)\, M_2(x_1^0, x_2^0) \geq M_2(x_1^0, x_2).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Эквивалентность применительно к дуополии соотношений (1.11) и (1.7–9) становится очевидной, если (1.11) записать в форме

$$M_1(x_1^0, x_2^0) = \max_{x_1 \in X_1} M_1(x_1, x_2^0),$$

$$M_2(x_1^0, x_2^0) = \max_{x_2 \in X_2} M_2(x_1^0, x_2).$$

Как отмечалось, суммарные доходы конкурирующих сторон в дуополии при применении ими равновесных стратегий меньше, чем у монополиста при выборе оптимального уровня выпуска продукции (максимизирующего прибыль). Однако в дуополии имеются стратегии, обеспечивающие такие же суммарные результаты, как и в монополии. Действительно, при выборе уровней выпуска конкурентов

$$\overline{x_1} = 1/8, \overline{x_2} = 1/8, \tag{1.12}$$

(равных половине от оптимального уровня выпуска продукции монополиста) доходы сторон, в соответствии с (1.1), составят

$$(M_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}), M_2(\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (\frac{1}{32}, \frac{1}{32}). \tag{1.13}$$

Однако решения (1.12) не совпадают с решениями из (1.10), и поэтому не являются равновесными – каждой из сторон выгодно от них отклониться. Следовательно, в дуополии имеет место несовпадение устойчивости ситуации, определяемой как равновесие по Нэшу, и выгодности ее результатов для конкурентов.

Выгодность результатов в теоретико–игровых моделях формализуется понятием т.н. эффективных (либо оптимальных по Парето) решений.

Определение 1.2. Пара стратегий $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ называется оптимальной по Парето в игре двух лиц $\tilde{A} =< X_1, X_2, M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2) >$, если из неравенств

$$M_1(x_1, x_2) \geq M_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}), M_2(x_1, x_2) \geq M_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \tag{1.14}$$

следует $M_1(x_1,x_2)=M_1(\overline{x_1},\overline{x_2}), M_2(x_1,x_2)=M_2(\overline{x_1},\overline{x_2})$ (т.е. ни один из выигрышей $M_1(\overline{x_1},\overline{x_2}), M_2(\overline{x_1},\overline{x_2})$ не может быть увеличен без уменьшения выигрыша партнера посредством выбора других стратегий).

Покажем, что решения (1.12) являются оптимальными по Парето в дуополии. Действительно, подставляя уровни выпуска (1.12) в неравенства (1.14), с учетом выражений (1.1) выигрышей сторон, получаем

$$\begin{aligned} M_1(x_1,x_2)&=x_1(1-x_1-x_2)-\frac{1}{2}x_1 \ge M_1(\overline{x_1},\overline{x_2})=\frac{1}{32}, \\ M_2(x_1,x_2)&=x_2(1-x_1-x_2)-\frac{1}{2}x_2 \ge M_2(\overline{x_1},\overline{x_2})=\frac{1}{32}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

что дает в результате почленного суммирования одно неравенство

$$(x_1+x_2)(\frac{1}{2}-(x_1+x_2)) \ge \frac{1}{16}.$$

Вследствие того, что левая часть последнего неравенства идентична функции прибыли монополиста в (1.4), максимум которой равнялся 1/16, суммарный выпуск продукции должен равняться оптимальному уровню выпуска продукции монополиста, т.е.

$$x_1+x_2=\frac{1}{4}. \tag{1.16}$$

С учетом (1.16), неравенства (1.15) приобретают вид

$$\frac{1}{4}x_1 \ge \frac{1}{32}, \frac{1}{4}x_2 \ge \frac{1}{32},$$

или

$$x_1 \ge 1/8, x_2 \ge 1/8.$$

Следовательно, на основании равенства (1.16), единственным решением системы неравенств (1.15) есть $x_1=1/8, x_2=1/8$, что и доказывает эффективность решений (1.12).

1.5. Задания и упражнения

1. Найти ситуации равновесия и эффективные решения в дуополии Курно при затратах на выпуск единицы продукции при увеличении масштабов производства

$$c_i(x_i)=C_i * x_i,\ C_1=1/3, C_2=1/3.$$

2. Найти ситуации равновесия и эффективные решения в дуополии Курно при затратах на выпуск единицы продукции при увеличении масштабов производства

$$c_i(x_i)=C_i * x_i,\ C_1=1/3, C_2=2/3.$$

2. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Как следует из анализа дуополии Курно, в играх двух лиц может наблюдаться несовпадение устойчивых (образующих ситуацию равновесия) и взаимовыгодных (оптимальных по Парето) решений. Поэтому представляет интерес выделение такого класса игр, в котором имело бы место совмещение устойчивости и эффективности. Одним из таких классов являются игры с противоположными интересами – антагонистические игры.

2.1. Седловые точки

Определение 2.1. Игра $\tilde{A} =< X_1, X_2, M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2) >$ называется антагонистической, если при любых стратегиях игроков значения их функций выигрыша равны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$M_1(x_1, x_2) = -M_2(x_1, x_2). \tag{2.1}$$

В силу условия (2.1) описание антагонистической игры может быть упрощено – функции выигрыша игроков выражаются через функцию $M(x_1, x_2)$, называемую ядром игры, такую, что

$$M(x_1, x_2) = M_1(x_1, x_2) = -M_2(x_1, x_2), \tag{2.2}$$

Исходя из (2.2), ядро игры представляет собой для первого игрока функцию выигрыша, а для второго игрока – функцию проигрыша. Поэтому под антагонистической игрой обычно понимают набор

$$\tilde{A} =< X, Y, M(x, y) >, \tag{2.3}$$

где

X, Y – множества стратегий первого и второго игроков соответственно,

$x \in X, y \in Y$ – стратегии игроков, а

$M(x, y)$ – ядро игры (являющееся функцией выигрыша первого и функцией проигрыша второго игрока).

В антагонистической игре определение ситуации равновесия (x^0, y^0), после подстановки ядра $M(x, y)$ вместо функций выигрыша первого и $-M(x, y)$ вместо функции выигрыша второго игрока в неравенства (1.11), приобретает вид двойного неравенства

$$\forall (x \in X, y \in Y)\ M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y). \tag{2.4}$$

Определение 2.2. Пара стратегий (x^0, y^0), удовлетворяющая двойному неравенству (2.4), называется *седловой точкой* ядра $M(x, y)$ (рис.2.1).

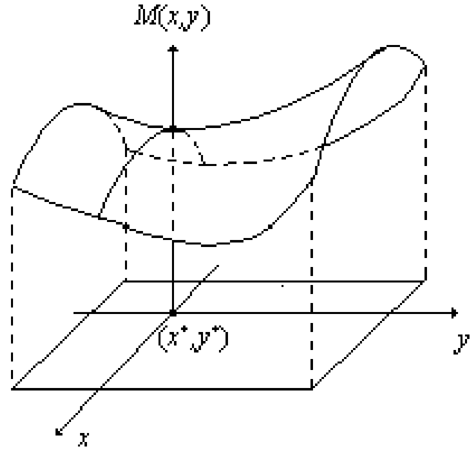

Рис.2.1[1]. Седловая точка внутри области определения ядра.

Отметим, что вид функции с седловой точкой может отличаться от изображения, приведенного на рис. 2.1. Так, например, у ядра $M(x, y) = x - y$, определенного на квадрате $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, имеется седловая точка $(x^0, y^0) = (1,1)$, так как $M(x,1) = x - 1 \le M(1,1) = 0 \le M(1, y) = 1 - y$ при $x \le 1, y \le 1$.

Подставляя ядро $M(x, y)$ вместо функций выигрыша игроков в определение оптимальных по Парето решений (1.14), легко убедиться в том, что все пары стратегий в антагонистической игре являются эффективными, так как из получающейся системы неравенств

$$M(x, y) \ge M(\bar{x}, \bar{y}), -M(x, y) \ge -M(\bar{x}, \bar{y})$$

следует $M(x, y) = M(\bar{x}, \bar{y})$.

Таким образом, ситуация равновесия в антагонистической игре (седловая точка ядра), если она существует, будет оптимальной по Парето.

Установим некоторые свойства седловых точек.

Теорема 2.1 (прямоугольность множества седловых точек). Если у ядра антагонистической игры $M(x, y)$ имеются две седловые точки (x^0, y^0) и (x^*, y^*), то:

– $M(x^0, y^0) = M(x^*, y^*)$;

– точки (x^0, y^*) и (x^*, y^0) также являются седловыми точками ядра.

Доказательство. Из определения седловой точки следует, что

$$\forall (x, y)\ M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y),$$

$$\forall (x, y)\ M(x, y^*) \le M(x^*, y^*) \le M(x^*, y).$$

Выберем в первом двойном неравенстве $x = x^*, y = y^*$, а во втором – $x = x^0, y = y^0$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$M(x^*, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y^*) \le M(x^*, y^*) \le M(x^*, y^0),$$

из которой следует, в силу совпадения крайних элементов цепочки, первое утверждение теоремы. Для доказательства второго используем доказанное равенство

$$M(x^0, y^0) = M(x^0, y^*) = M(x^*, y^*).$$

После приписывания к последнему равенству слева левой части определения седловой точки (x^*, y^*), и справа правой части определения седловой точки (x^0, y^0), получаем

$$M(x, y^*) \le M(x^0, y^0) = M(x^0, y^*) = M(x^*, y^*) \le M(x^0, y).$$

Если из последнего неравенства выбросить значения ядра в точках (x^0, y^0) и (x^*, y^*), то получится определение седловой точки (x^0, y^*):

$$\forall (x, y)\; M(x, y^*) \le M(x^0, y^*) \le M(x^0, y),$$

что и требовалось.

2.2. Принцип гарантированного результата

Рассмотрим проблему выбора наилучшего решения в антагонистической игре с другой точки зрения. Предположим, что при выборе некоторой стратегии $x \in X$ первый игрок, принимая во внимание противоположность интересов, оценивает последствия от ее применения по наихудшему случаю:

$$\underline{M}(x) = \min_{y \in Y} M(x, y). \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) представляет собой математическое выражение *принципа гарантированного результата* в антагонистической игре (2.3) для первого игрока: при оценке последствий решения следует рассчитывать на наихудшие значения неконтролируемых параметров. В этих условиях первому игроку естественно выбрать ту стратегию x^*, которая максимизирует его гарантированный выигрыш $\min_{y \in Y} M(x, y)$:

$$\min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y) = \underline{v}. \tag{2.6}$$

Определение 2.3. Стратегия x^* первого игрока, удовлетворяющая уравнению (2.6), называется *оптимальной по гарантированному результату,* а максимальный гарантированный выигрыш первого игрока в антагонистической игре называется *нижней ценой* (нижним значением) игры (обозначается $\underline{v}$).

Применяя принцип гарантированного результата для оценки последствий от выбора стратегии $y \in Y$ вторым игроком (с точки зрения которого ядро $M(x, y)$ является функцией проигрыша), естественно допустить, что при этом наилучшей стратегией для него будет стратегия y^*, минимизирующая гарантированный проигрыш второго игрока $\max_{x \in X} M(x, y)$:

$$\max_{x\in X} M(x, y^*) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x,y) = \bar{v}. \qquad (2.7)$$

Определение 2.4. Стратегия y^* второго игрока, удовлетворяющая уравнению (2.7), называется оптимальной по гарантированному результату, а минимальный гарантированный проигрыш второго игрока в антагонистической игре называется *верхней ценой* (верхним значением) игры (обозначается $\bar{v}$).

Теорема 2.2. Пусть $M(x,y)$ – вещественная функция, определенная на $X \times Y$, и существуют $\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x,y)$, $\bar{v} = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x,y)$. Тогда $\underline{v} \le \bar{v}$.

Доказательство. Из определения минимума и максимума следует, что

$$\forall (x,y)\ \min_{y\in Y} M(x,y) \le M(x,y) \le \max_{x\in X} M(x,y),$$

или

$$\forall (x,y)\ \min_{y\in Y} M(x,y) \le \max_{x\in X} M(x,y). \qquad (2.8)$$

Поскольку в левой части неравенства (2.8) x может принимать любое значение из области определения, то

$$(\forall y)\ \max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x,y) \le \max_{x\in X} M(x,y). \qquad (2.9)$$

Неравенство (2.9) справедливо при любом значении $y \in Y$, и поэтому

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x,y),$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.1. Вычислить максимин и минимакс, если

$$M(x,y) = (x-y)^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$$

Решение. Вначале вычислим максимин. Так как функция $(x-y)^2$ является квадратичной выпуклой вниз функцией по переменной y, то ее минимум по переменной y будет достигаться в точке зануления первой производной по y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x-y)^2 \big|_{y=y^+} = -2(x-y)\big|_{y=y^+} = 0,$$

откуда $y^+ = x$. Следовательно,

$$\underline{v} = \max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1}(x-y)^2 = \max_{0\le x\le 1}(x-x)^2 = \max_{0\le x\le 1} 0 = 0.$$

Поскольку функция $(x-y)^2$ является квадратичной выпуклой вниз функцией и по переменной x, то ее максимум по переменной x будет достигаться, в зависимости от значения y, либо в точке $x=0$, либо в точке $x=1$. Поэтому

$$\bar{v} = \min_{0\le y\le 1}\max_{0\le x\le 1}(x-y)^2 = \min_{0\le y\le 1}\max(y^2,(1-y)^2) = \min_{0\le y\le 1}\begin{cases} y^2, y \ge \dfrac{1}{2}, \\ (1-y)^2, y \le \dfrac{1}{2} \end{cases} =$$

$$= \min(\min_{0 \le y \le 1/2}(1-y)^2, \min_{1/2 \le y \le 1} y^2) = \min(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}.$$

Как следует из теоремы 2.2, либо $\underline{v} < \bar{v}$, либо $\underline{v} = \bar{v}$. Равенство нижней цены игры верхней содержательно означает равенство возможностей игроков – сколько в состоянии выиграть первый, столько может позволить себе проиграть второй. Оказывается, что именно в этом случае существует седловая точка ядра игры.

Теорема 2.3. Для того, чтобы функция $M(x, y)$ на произведении $X \times Y$ имела седловые точки, необходимо и достаточно существование и совпадение величин $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} M(x, y)$ и $\min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} M(x, y)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $M(x, y)$ имеет седловую точку (x^0, y^0), т.е.

$$\forall (x, y)\ M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y).$$

Поскольку $M(x^0, y^0)$ является константой, ограничивающей $M(x, y^0)$ сверху, а $M(x^0, y)$ снизу, то справедливы неравенства

$$\max_{x \in X} M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le \min_{y \in Y} M(x^0, y). \tag{2.10}$$

Далее, по определению минимума и максимума функции, очевидно справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y) \le \max_{x \in X} M(x, y^0), \\ &\min_{y \in Y} M(x^0, y) \le \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Сопоставляя (2.10) и (2.11), получим

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y) \le M(x^0, y^0) \le \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y).$$

Но согласно теореме 2.2, справедливо обратное соотношение между минимаксом и максимином. Это может быть только тогда, когда

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y), \tag{2.12}$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть справедливо равенство (2.12), и внешние экстремумы в (2.12) достигаются в точках x^*, y^*, т.е.

$$\min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y),$$

$$\max_{x \in X} M(x, y^*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y).$$

Покажем, что (x^*, y^*) – седловая точка функции $M(x, y)$. Из (2.12) вытекает справедливость равенства

$$\min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} M(x, y^*),$$

откуда из определения максимума и минимума функции следует

$$M(x^*, y^*) \geq \min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} M(x, y^*) \geq M(x^*, y^*).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\max_{x \in X} M(x, y^*) = M(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} M(x^*, y). \qquad (2.13)$$

Тогда на основании определения максимума и минимума из (2.13) получается

$$\forall (x, y)\ M(x, y^*) \leq M(x^*, y^*) \leq M(x^*, y),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 2.3 следует, что в случае совпадения верхней и нижней цены игры, стратегии игроков, оптимальные по гарантированному результату, образуют седловую точку ядра игры.

Определение 2.5. Тройка

$$(x^0, y^0, v),$$

где

x^0, y^0 – оптимальные по гарантированному результату стратегии игроков, а

$v = \underline{v} = \bar{v}$ – *цена* игры,

называется *решением* антагонистической игры.

Пример 2.2. Установить, имеет ли седловую точку функция

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 - 2x, x > y, \\ 0, x = y, \\ 2y - 1, x < y, \end{cases} \quad \text{в области } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Решение. Для отыскания седловой точки воспользуемся теоремой 2.3 – проверим совпадение нижней и верхней цен игры.

$$\underline{v} = \max_{0 \leq x \leq 1} \min_{0 \leq y \leq 1} M(x, y) =$$

$$= \max_{0 \leq x \leq 1} \min(\inf_{0 \leq y < x} (1 - 2x), \min_{y = x}(0), \inf_{x < y \leq 1} (2y - 1)) =$$

$$= \max_{0 \leq x \leq 1} \min(1 - 2x, 0, 2x - 1) = \max_{0 \leq x \leq 1} \begin{cases} 2x - 1, x \leq 1/2, \\ 1 - 2x, x \geq 1/2 \end{cases} =$$

$$= \max(\max_{0 \leq x \leq 1/2} (2x - 1), \max_{1/2 \leq x \leq 1} (1 - 2x)) = \max(0, 0) = 0,$$

причем

$$x^0 = 1/2.$$

$$\bar{v} = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} M(x, y) =$$

$$= \min_{0 \leq y \leq 1} \max(\sup_{0 \leq x < y} (2y - 1), \max_{x = y}(0), \sup_{y < x \leq 1} (1 - 2x)) =$$

$$= \min_{0 \le y \le 1} \max(2y - 1, 0, 1 - 2y) = \min_{0 \le y \le 1} \begin{cases} 1 - 2y, y \le 1/2, \\ 2y - 1, y \ge 1/2 \end{cases} =$$

$$= \min(\min_{0 \le y \le 1/2} (1 - 2y), \min_{1/2 \le y \le 1} (2y - 1)) = \min(0,0) = 0,$$

причем

$$y^0 = 1/2.$$

Так как максимин и минимакс совпадают, то точка $(x^0, y^0) = (1/2, 1/2)$ является седловой.

Проверка решения. Покажем для точки $(x^0, y^0) = (1/2, 1/2)$ выполнение определения седловой точки, подставляя ее в неравенства (2.4):

$$M(x, \frac{1}{2}) = \begin{cases} 1 - 2x, x > 1/2, \\ 0, x = 1/2, \\ 0, x < 1/2 \end{cases} \le M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0,$$
$$M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0 \le M(\frac{1}{2}, y) = \begin{cases} 0, y < 1/2, \\ 0, y = 1/2, \\ 2y - 1, y > 1/2 \end{cases} . \quad (2.14)$$

Действительно, левая часть двойного неравенства (2.14) $1 - 2x \le 0$ верна при $x \ge 1/2$, а правая часть – $0 \le 2y - 1$ – верна при $y \ge 1/2$.

2.3. Матричные игры

Определение 2.6. Антагонистическая игра, в которой у каждого из игроков конечное множество стратегий, называется *матричной игрой*.

Данное определение связано с возможностью описания игры с конечным множеством стратегий у игроков в виде прямоугольной таблицы (матрицы), в которой строки $i, 1 \le i \le m$, соответствуют стратегиям первого игрока, столбцы $j, 1 \le j \le n,$ – стратегиям второго, а на пересечениях строк и столбцов указаны выигрыши первого игрока $a_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. Такая матрица, представляющая собой ядро конечной антагонистической игры, называется матрицей игры, или матрицей выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим в матричной игре стратегии первого игрока индексом $i, 1 \le i \le m$, а стратегии второго – индексом $j, 1 \le j \le n$. С учетом введенных обозначений, определение седловой точки для матричной игры приобретает следующий вид.

Определение 2.7. Пара стратегий (i^0, j^0) называется седловой точкой матрицы игры, если выполняется двойное неравенство

$$\forall (i, j)\ a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}. \qquad (2.15)$$

На основании теоремы 2.3, для существования в матрице игры седловых точек, необходимо и достаточно совпадения минимакса и максимина:

$$\max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij}.$$

Нахождение минимакса и максимина для матрицы A может быть проведено по следующей схеме:

$$\begin{array}{ll}
\left(\begin{array}{cccc|l}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \min\limits_j a_{1j} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \min\limits_j a_{2j} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \min\limits_j a_{mj}
\end{array}\right) & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \\
\max\limits_i a_{i1}\ \max\limits_i a_{i2} \dots \max\limits_i a_{in} & \\
\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} &
\end{array} \qquad (2.16)$$

Пример 2.3. Найти седловые точки в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Отыскание седловых точек осуществим по схеме (2.16):

$$\begin{array}{lccccc}
 & & & & \min\limits_j a_{ij} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \\
 & \langle 4 \rangle & 5 & \langle 4 \rangle & 4 & \\
 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\max\limits_i a_{ij} & 4 & 5 & 4 & & \\
\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} & & 4 & & &
\end{array}$$

Так как нижняя цена игры совпадает с верхней, то на основании теоремы 2.3 в матрице имеются седловые точки. В соответствии с (2.6–7), они есть

$$(i^0, j^0) = (1{,}1), (i^*, j^*) = (1{,}3)$$

(заметим, что, как доказано в теореме 2.1, значения ядра в седловых точках совпадают).

2.4. Задания и упражнения

1. Имеют ли седловые точки функции:

1.1. $M(x,y)=\begin{cases}1-x^2, x\ge y,\\ y^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.2. $M(x,y)=\begin{cases}1-x^2, x\ge y,\\ 1-(1-y)^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.3. $M(x,y)=\begin{cases}(1-x)^2, x\ge y,\\ y^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.4. $M(x,y)=\begin{cases}(1-x)^2, x\ge y,\\ 1-(1-y)^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.5. $M(x,y)=\begin{cases}1-x^2, x\ge y,\\ y, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.6. $M(x,y)=\begin{cases}(1-x)^2, x\ge y,\\ y, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.7. $M(x,y)=\begin{cases}1-x, x\ge y,\\ y^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.8. $M(x,y)=\begin{cases}1-x, x\ge y,\\ 1-(1-y)^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.9. $M(x,y)=\begin{cases}x-y, x\ge y,\\ y-x, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.10. $M(x,y)=\begin{cases}5x-3y, x\ge y,\\ y-x, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

2. Найти седловые точки в матрицах:

2.1. $A=\begin{pmatrix}-11 & -11 & -15 & 13 & -6\\ -10 & -13 & -8 & 0 & -5\\ 14 & 5 & -6 & 5 & 12\\ -4 & 18 & -16 & 9 & -9\end{pmatrix}$;

2.2. $A=\begin{pmatrix}7 & -10 & 13 & -2 & -16\\ 1 & -14 & 16 & -14 & 7\\ 18 & -9 & 5 & 0 & 0\\ -6 & -9 & 3 & 0 & -8\end{pmatrix}$;

2.3. $A=\begin{pmatrix}-5 & 10 & -10 & -7 & 0\\ -6 & 17 & 6 & -9 & -10\\ 14 & 5 & 18 & 0 & 1\\ -8 & 18 & -11 & -7 & 10\end{pmatrix}$;

$$2.4.\ A=\begin{pmatrix} -18 & 0 & 10 & 7 & -19 \\ 16 & -6 & 10 & -1 & -4 \\ 15 & 14 & 19 & 14 & 16 \\ 18 & 19 & -7 & -18 & -8 \end{pmatrix};$$

$$2.5.\ A=\begin{pmatrix} -12 & 13 & -8 & -4 & -1 \\ 17 & 19 & 16 & 19 & 17 \\ -4 & 11 & -11 & -10 & -5 \\ -18 & 19 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$2.6.\ A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -8 & -13 & 19 \\ 13 & 12 & 16 & 6 & 10 \\ -2 & -3 & 6 & 4 & -10 \\ 11 & -8 & 12 & -14 & 16 \end{pmatrix};$$

$$2.7.\ A=\begin{pmatrix} 0 & -19 & 15 & -15 & 6 \\ 17 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & -19 & 0 & 3 & -13 \\ 9 & 0 & -10 & 7 & 17 \end{pmatrix};$$

$$2.8.\ A=\begin{pmatrix} -15 & -15 & 15 & -5 & -15 \\ -15 & 1 & 11 & -2 & 0 \\ -18 & -10 & -14 & 7 & 19 \\ -16 & -7 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ В МАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Если в матрице выигрышей конечной антагонистической игры имеется седловая точка, то задача выбора наилучшего способа действий решается весьма просто: как первому, так и второму игроку целесообразно выбрать стратегии, соответствующие седловой точке. В этом случае игра становится нечувствительной к утечке информации о выбранной стратегии. Так, если первый игрок выбрал в матричной игре стратегию i^0, оптимальную по гарантированному результату, то в наихудшем для себя случае, когда его стратегия становится известной второму игроку, первый игрок гарантирует себе выигрыш $a_{i^0 j^0}$ в соответствии с (2.15). Но стратегия j^0 второго игрока, являясь оптимальной по гарантированному результату, обеспечивает ему проигрыш, не больший $a_{i^0 j^0}$, даже если первый игрок узнает выбор второго игрока. Однако не во всех матрицах имеются седловые точки.

Пример 3.1. Игра "Орлянка". Два игрока играют в следующую игру. Первый игрок (загадывающий) выкладывает монету одной из сторон, орлом или решкой, не показывая второму. Второй игрок (отгадывающий) пытается угадать, какой стороной выложена монета. Если второй игрок угадал, то он получает единицу от первого; если нет – второй игрок платит единицу первому.

В игре "Орлянка" у каждого из игроков по две стратегии. Поэтому матрица выигрышей (ядро игры) имеет вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{îðåë} & \text{ðåøêà} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{îðåë} \\ \text{ðåøêà} \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матрице игры "Орлянка" нет седловых точек, т.к. $\underline{v} = -1 < \overline{v} = +1$.

Содержательной причиной несовпадения нижней и верхней цен игры является возможная утечка информации о выбранной стратегии – каждый из игроков оценивает последствия принимаемых решений по принципу гарантированного результата. Один из способов предотвращения утечки информации о выбираемых решениях состоит во введении случайности в выбор стратегий. Случайный выбор предполагает применение некоторого случайного механизма (например, рулетки) и возможности повторения игры достаточно много раз. При этих условиях игрок, доверяющий выбор стратегии случайному механизму, сам не будет информирован о предстоящем конкретном выборе в очередной партии игры (и тем более противник). При достаточно большом числе повторений игры последствия от случайного поведения можно оценить как средний выигрыш в расчете на одну партию.

3.1. Смешанное расширение матричной игры

Определение 3.1. Случайная величина, значениями которой являются стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией.*

Задание смешанной стратегии состоит в указании полного набора вероятностей – распределения вероятностей – на множестве стратегий игрока. Поскольку у первого игрока в матричной игре m стратегий, то его смешанная стратегия будет описываться вектором

$$P = (p_1,\ldots,p_m) \in S_m,$$
$$S_m = \{(p_1,\ldots,p_m) : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0, i = 1,\ldots,m\}, \tag{3.1}$$

где S_m – m–1–мерный симплекс[1]. Вершинам симплекса S_m – векторам, у которых одна координата равна единице, а остальные равны нулю – соответствуют т.н. чистые стратегии. Чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии и порождает детерминированный выбор исходной стратегии. Поэтому чистые стратегии первого игрока будем обозначать

$$i \equiv P_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots 0) = (p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_m),$$
$$p_i = 1, p_j = 0, i \neq j,\ i, j = 1,2,\ldots,m.$$

Смешанная стратегия второго игрока в матричной игре представляет собой распределение вероятностей

$$Q = (q_1,\ldots,q_n) \in S_n,$$
$$S_n = \{(q_1,\ldots,q_n) : \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1,\ldots,n\}, \tag{3.2}$$

где S_n –n–1–мерный симплекс. Чистые стратегии второго игрока будем обозначать

$$j \equiv Q_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots 0) = (q_1,\ldots,q_j,\ldots,q_n),$$
$$q_j = 1, q_i = 0, j \neq i,\ j, i = 1,2,\ldots,n.$$

Пусть в игре с матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

первый и второй игроки применяют смешанные стратегии $P = (p_1, p_2,\ldots,p_m)$ и $Q = (q_1, q_2,\ldots,q_n)$ соответственно. В этом случае выигрыши a_{ij} становятся случайными, а их вероятность совпадает с вероятностью реализации пары

---

[1] Симплекс S_m – простейший выпуклый многогранник с указанным числом вершин размерности m–1; так, при m=3 симплекс представляет собой равносторонний треугольник.

стратегий (i, j), равной $p_i q_j$. Поэтому средний выигрыш первого игрока в игре с матрицей A представляет собой математическое ожидание

$$E(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j . \qquad (3.3)$$

Выражение (3.3) можно переписать в форме

$$E(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \sum_{i=1}^{m} p_i E(i,Q), \qquad (3.4)$$

где $E(i,Q) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ – математическое ожидание выигрыша первого игрока при применении им чистой стратегии i против смешанной стратегии Q второго игрока, или в форме

$$E(P,Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j E(P, j), \qquad (3.5)$$

где $E(P, j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$ – математическое ожидание проигрыша второго игрока при применении им чистой стратегии j против смешанной стратегии P первого игрока.

Определение 3.2. Смешанным расширением матричной игры называется антагонистическая игра

$$G = < S_m, S_n, E(P,Q) >, \qquad (3.6)$$

где

S_m, S_n – множества смешанных стратегий первого и второго игроков соответственно,

$P \in S_m, Q \in S_n$ – стратегии игроков, а

$E(P,Q)$ – ядро игры (математическое ожидание выигрыша первого игрока).

Для смешанного расширения матричной игры нижняя и верхняя цена игры описываются выражениями

$$\underline{v} = \max_{P \in S_m} \min_{Q \in S_n} E(P,Q), \ \overline{v} = \min_{Q \in S_n} \max_{P \in S_m} E(P,Q),$$

а определение седловой точки (P^0, Q^0) приобретает вид

$$\forall (P,Q) \ E(P,Q^0) \le E(P^0,Q^0) \le E(P^0,Q). \qquad (3.7)$$

Как доказал Дж. фон Нейман в 1928 году, в смешанном расширении матричной игры нижняя цена совпадает с верхней. Следовательно, на основании теоремы 2.3, матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях в смысле определения 2.5.

Проверка определения седловой точки (3.7) для смешанного расширения матричной игры может быть упрощена.

Теорема 3.1. Для того, чтобы точка (P^0, Q^0) являлась седловой точкой смешанного расширения матричной игры, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\forall(i, j)\ E(i, Q^0) \le E(P^0, Q^0) \le E(P^0, j). \tag{3.8}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, т.к. неравенства (3.8) являются частным случаем неравенств (3.7), переписанных для чистых стратегий игроков.

Достаточность. Ограничимся доказательством того, что из левой части неравенств (3.7) следует левая часть неравенств (3.8) (для правых частей доказательство аналогично). Пусть $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$ – произвольная смешанная стратегия первого игрока. Умножим каждое из m левых неравенств (3.8) почленно на p_i (так как p_i неотрицательны, знак неравенств не изменяется):

$$(\forall i)\ p_i E(i, Q^0) \le p_i E(P^0, Q^0),$$

и сложим все полученные неравенства. Получается

$$\sum_{i=1}^{m} p_i E(i, Q^0) \le \sum_{i=1}^{m} p_i E(P^0, Q^0).$$

Вынося в последнем неравенстве $E(P^0, Q^0)$ за знак суммы, с учетом (3.1), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i E(i, Q^0) \le E(P^0, Q^0). \tag{3.9}$$

Так как левая часть неравенства (3.9) на основании (3.5) есть математическое ожидание выигрыша $E(P, Q^0)$, теорема доказана.

Следствие теоремы 3.1. Если чистые стратегии (i^0, j^0) образуют седловую точку матрицы A, то они являются седловой точкой смешанного расширения.

Действительно, подставляя $(i^0, j^0) \equiv (P_{l^0}, Q_{j^0})$ в (3.8), получаем

$$\forall(i, j)\ E(i, j^0) \le E(i^0, j^0) \le E(i^0, j).$$

Поскольку $E(i, j) = a_{ij}$, последние неравенства выполняются, так как являются определением седловой точки матрицы (i^0, j^0).

3.2. Решение игр 2×2

Рассмотрим матричную игру, в которой у каждого из игроков по две чистые стратегии – так называемую игру 2×2. Матрица выигрышей такой игры имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Вначале попытаемся найти седловую точку матрицы – решение игры в чистых стратегиях, применяя схему (2.16). Если седловая точка матрицы существует, то решение игры найдено. Если же седловой точки в чистых стратегиях не оказалось, то будем искать решение в классе смешанных стратегий.

В случае отсутствия в 2×2 матрице седловой точки в чистых стратегиях ее элементы связаны (с точностью до перестановок строк и столбцов) неравенствами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & > & a_{12} \\ \vee & & \wedge \\ a_{21} & < & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии игроков для 2×2 игры можно представить в виде

$$\begin{aligned} P &= (p_1, p_2) = (p, 1-p), 0 \le p \le 1, \\ Q &= (q_1, q_2) = (q, 1-q), 0 \le q \le 1, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где p, q – вероятности выбора первой чистой стратегии первым и вторым игроками соответственно. Пусть (P^0, Q^0) – седловая точка смешанного расширения 2×2 игры. Тогда, как следует из определения седловой точки для смешанного расширения (3.7), справедливы равенства

$$\max_{0\le p\le 1} E(P, Q^0) = E(P^0, Q^0) = \min_{0\le q\le 1} E(P^0, Q). \tag{3.11}$$

Поскольку в игре предполагается отсутствие седловых точек в чистых стратегиях, то экстремумы в (3.11) должны достигаться внутри отрезка $[0,1]$. Поэтому в точках p^0, q^0 должны зануляться частные производные $\dfrac{\partial}{\partial p} E(P, Q^0)$ и $\dfrac{\partial}{\partial q} E(P^0, Q)$. Для 2×2 игры, с учетом (3.10),

$$\begin{aligned} E(P,Q) &= a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q) = \\ &= pq(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) - p(a_{22} - a_{12}) - q(a_{22} - a_{21}) + a_{22}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial p} E(P, Q^0) = q^0(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) - (a_{22} - a_{12}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial q} E(P^0, Q) = p^0(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) - (a_{22} - a_{21}) = 0.$$

Решением этой системы являются

$$p^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \; q^0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \tag{3.12}$$

Установим, что знаменатель в формулах (3.12) не равен нулю. Предположим, что

$$a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0.$$

Тогда

$$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22}, \; a_{11} - a_{21} = a_{12} - a_{22}. \tag{3.13}$$

Пусть все разности в (3.13) положительны (другие варианты исследуются аналогично). Тогда элементы матрицы выигрышей связаны неравенствами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & > & a_{12} \\ \vee & & \vee \\ a_{21} & > & a_{22} \end{pmatrix},$$

которые приводят к наличию в матрице игры седловой точки в чистых стратегиях $(i^0, j^0) = (1,2)$, что противоречит исходному предположению.

Из структуры матрицы 2×2 для случая отсутствия седловой точки в чистых стратегиях следует корректность формул (3.12) – выполнение для p^0, q^0 из (3.12) неравенств из (3.10).

Окончательно, решение игры 2×2 в смешанных стратегиях при отсутствии его в чистых стратегиях описывается выражениями

$$P^0 = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22}}\right),$$

$$Q^0 = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22}}\right), \qquad (3.14)$$

$$v = E(P^0, Q^0) = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22}}.$$

Решение примера 3.1. Поскольку в матрице игры "Орлянка" нет седловых точек в чистых стратегиях, применим для нахождения решения формулы (3.14). После элементарных выкладок получаем

$$P^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), v = 0.$$

Проверка решения. Для проверки решения используем теорему 3.1. Подставляя решение в (3.8), получаем неравенства

$$\left.\begin{matrix} E(1, Q^0) = 0 \\ E(2, Q^0) = 0 \end{matrix}\right\} \le E(P^0, Q^0) = 0 \le \left\{\begin{matrix} E(P^0, 1) = 0, \\ E(P^0, 2) = 0, \end{matrix}\right.,$$

выполнение которых доказывает оптимальность найденных стратегий.

3.3. Графоаналитический метод решения игр 2xn

Рассмотрим игру, в которой у первого игрока две чистые стратегии, а у второго – n чистых стратегий. Матрица выигрышей этой игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix},$$

смешанная стратегия первого игрока описывается распределением вероятностей

$$P = (p_1, p_2) = (p, 1-p), 0 \le p \le 1,$$

а второго – распределением вероятностей

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in S_n.$$

Графоаналитический метод основывается на следующем утверждении.

Теорема 3.2. Какова бы ни была матрица игры,

$$v = \max_{P\in S_m}\min_{Q\in S_n} E(P,Q) = \max_{P\in S_m}\min_{1\le j\le n} E(P,j) \tag{3.15}$$

$$(v = \min_{Q\in S_n}\max_{P\in S_m} E(P,Q) = \min_{Q\in S_n}\max_{1\le i\le m} E(i,Q)). \tag{3.16}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (3.15) (справедливость равенства (3.16) устанавливается аналогично) достаточно показать совпадение в (3.15) максимизируемых функций. Из свойств минимума, поскольку чистая стратегия j, $1\le j\le n$, является частным случаем смешанной стратегии, справедливо неравенство

$$\min_{Q\in S_n} E(P,Q) \le \min_{1\le j\le n} E(P,j).$$

Далее,

$$\min_{Q\in S_n} E(P,Q) = \min_{Q\in S_n}\sum_{j=1}^{n} q_j E(P,j) \ge \min_{Q\in S_n}\sum_{j=1}^{n} q_j \min_{1\le k\le n} E(P,k) =$$

$$= \min_{Q\in S_n}(\min_{1\le k\le n} E(P,k))\sum_{j=1}^{n} q_j = \min_{Q\in S_n}\min_{1\le k\le n} E(P,k) = \min_{1\le k\le n} E(P,k),$$

что и доказывает совпадение максимизируемых функций.

Применив теорему 3.2 к игре $2\times n$, получим

$$\max_{P\in S_2}\min_{1\le j\le n} E(P,j) = \max_{0\le p\le 1}\min_{1\le j\le n}(a_{1j}p + a_{2j}(1-p)) \tag{3.17}$$

Последний максимин допускает следующую геометрическую интерпретацию. В декартовых координатах (p,E) построим отрезки прямых $E = E(P,j) = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$, $0\le p\le 1$, $1\le j\le n$ (рис. 3.1).

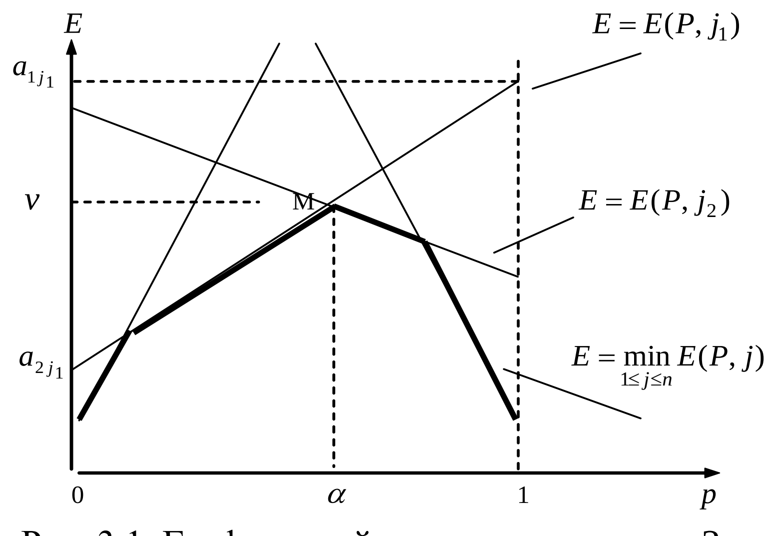

Рис. 3.1. Графический метод решения игр $2\times n$.

Каждой чистой стратегии j второго игрока соответствует свой отрезок прямой $E = E(P,j)$. Графиком функции $E = \min_{1\le j\le n} E(P,j)$ будет нижняя огибающая отрезков прямых, соответствующих чистым стратегиям второго игрока. На рис 3.1 она представляет собой ломаную, состоящую из жирных отрезков. Ордината наивысшей точки этой ломаной – точки M – в соответствии с

(3.17) равняется максимальному гарантированному выигрышу первого игрока, а абсцисса точки М равна тому значению p, при котором этот максимальный гарантированный выигрыш достигается. Следовательно, оптимальной стратегией первого игрока является смешанная стратегия

$$P^0 = (\alpha, 1-\alpha),$$

где α является решением уравнения

$$E(P^0, j_1) = E(P^0, j_2),$$

в котором j_1, j_2 – номера прямых, пересекающихся в точке М.

Если таких наивысших точек будет более одной, то, очевидно, нижняя огибающая будет иметь горизонтальный участок. В этом случае первый игрок будет располагать множеством оптимальных стратегий, порождаемым абсциссами точек горизонтального участка нижней огибающей.

Описанное построение позволяет находить оптимальные стратегии второго игрока. При этом возможны следующие случаи.

Случай 1. Максимум нижней огибающей достигается в единственной граничной точке $\alpha = 0$ (рис. 3.2).

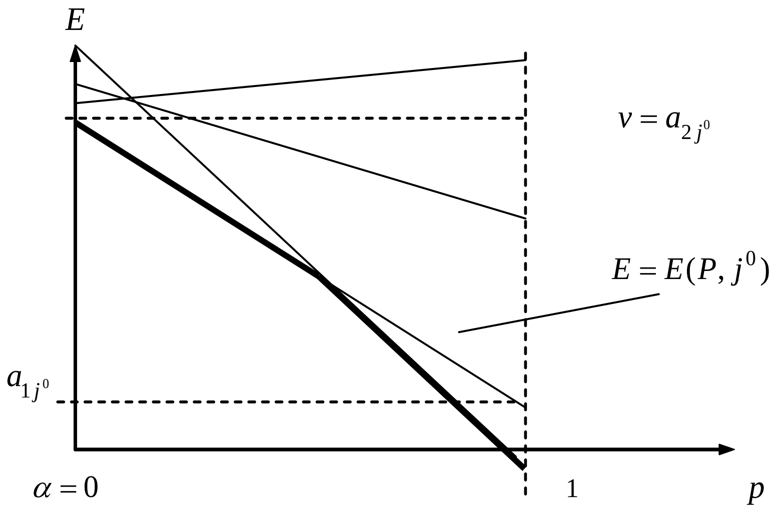

Рис. 3.2. Максимум нижней огибающей в точке $\alpha = 0$.

В этом случае оптимальной стратегией первого игрока будет чистая стратегия $i^0 = 2$. Выберем прямую $E = E(P, j^0)$, проходящую через точку $(0, v)$, тангенс угла наклона которой неположителен, т.е. $a_{1j^0} \le a_{2j^0}$. Тогда чистая стратегия j^0 будет оптимальной стратегией второго игрока, что вытекает из структуры матрицы выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j^0} & \dots & a_{1n} \\ & & \wedge & & \\ a_{21} & \ge & a_{2j^0} & \le & a_{2n} \end{pmatrix},$$

в которой точка $(2, j^0)$ является седловой.

Случай 2. Нижняя огибающая имеет горизонтальный участок, соответствующий чистой стратегии j^0 второго игрока (рис. 3.3).

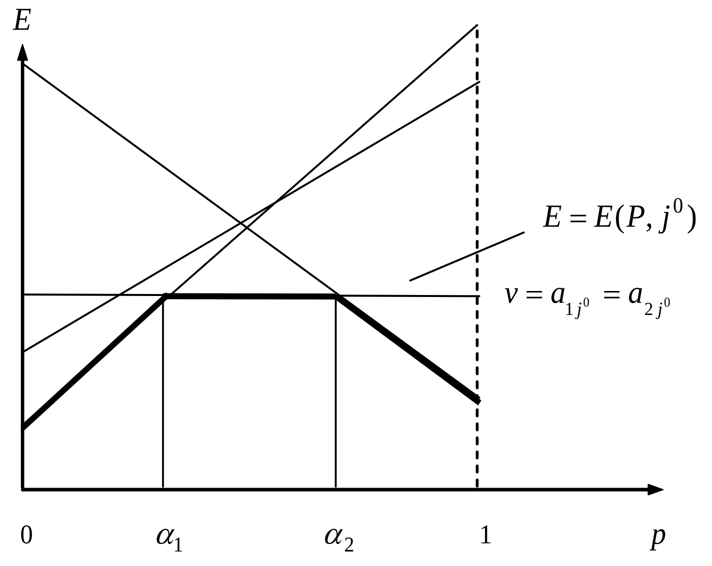

Рис. 3.3. Максимум нижней огибающей не в единственной точке.

В этом случае первый игрок будет располагать множеством оптимальных стратегий

$$P^0 = (\alpha, 1-\alpha), \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2,$$

а оптимальной стратегией второго игрока будет чистая стратегия j^0 (так как при ее выборе второй игрок обеспечивает себе проигрыш, не превышающий цены игры, независимо от действий первого игрока).

Случай 3. Максимум нижней огибающей достигается в единственной точке $0 < \alpha < 1$ (рис. 3.1). Для отыскания оптимальной стратегии второго игрока рассмотрим вспомогательную 2×2 игру, в которой чистыми стратегиями второго игрока являются чистые стратегии j_1, j_2 исходной игры, соответствующие отрезкам прямых, пересекающимся в точке максимума нижней огибающей М, с положительным (прямая j_1) и отрицательным (прямая j_2) тангенсами углов наклона. Матрица этой вспомогательной игры есть

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}.$$

Как видно из рис. 3.1, оптимальная стратегия первого игрока и цена во вспомогательной игре будут такими же, как и в исходной игре. Это значит, что второй игрок, используя лишь чистые стратегии j_1, j_2 в исходной игре, может обезопасить себя от проигрыша, большего цены исходной игры, и оптимальная смешанная стратегия второго игрока может быть получена путем смешивания только этих двух чистых стратегий. Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока во вспомогательной игре является его оптимальной стратегией в исходной игре. Оптимальная стратегия второго игрока во вспомогательной 2×2 игре

$$Q^0 = (\beta, 1-\beta), 0 < \beta < 1,$$

может быть найдена либо по формулам (3.14), либо графоаналитически, исходя из равенства

$$E(1, Q^0) = E(2, Q^0),$$

вытекающего из равенства (3.16) теоремы 3.2 для игры 2×2:

$$\min_{Q \in S_2} \max_{1 \le i \le m} E(i, Q) = \min_{0 \le q \le 1} \max_{1 \le i \le m} (a_{i1} q + a_{i2}(1-q)). \qquad (3.18)$$

Решение примера 3.1 графоаналитическим методом. Применим для отыскания оптимальных стратегий игроков геометрическую интерпретацию соотношений (3.17,18). Так как

$$A = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$E(P,1) = (-1)p + (1-p), E(P,2) = p + (-1)(1-p),$$
$$E(1,Q) = (-1)q + (1-q), E(2,Q) = q + (-1)(1-q).$$

Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока построим отрезки прямых $E = E(P, j)$, $0 \le p \le 1$, $1 \le j \le 2$ в декартовых координатах (p, E) (рис. 3.4а).

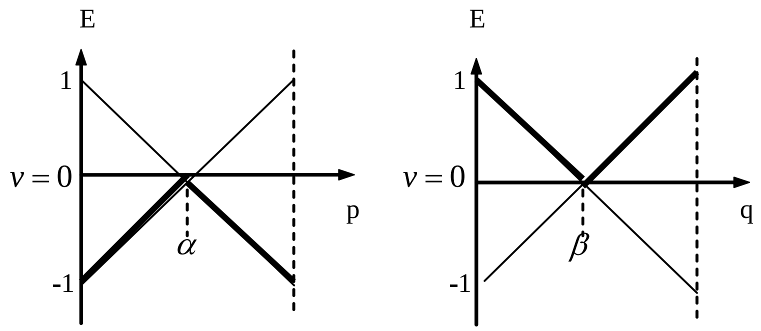

Рис. 3.4а. Рис. 3.4б.

Как видно из рис. 3.4а, имеется единственная точка α, в которой достигается максимум нижней огибающей. Она определяется уравнением

$$(-1)\alpha + (1-\alpha) = \alpha + (-1)(1-\alpha),$$

откуда

$$\alpha = 1/2.$$

Для того, чтобы найти оптимальную стратегию второго игрока, осуществим построение отрезков прямых $E = E(i, Q)$, $0 \le q \le 1$, $1 \le i \le 2$ в декартовых координатах (q, E) (рис. 3.4б). Как видно из рис. 3.4б, имеется единственная точка β, в которой достигается минимум верхней огибающей. Она определяется уравнением

$$(-1)\beta + (1-\beta) = \beta + (-1)(1-\beta),$$

откуда

$$\beta = 1/2.$$

Окончательно, оптимальные стратегии игроков в игре "Орлянка" есть

$$P^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), Q^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

а цена игры равна нулю:

$$v = E(P^0, j) = E(i, Q^0) = 0.$$

3.4. Задания и упражнения

Решить матричные игры

1. $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & 5 \\ 15 & 5 & -6 & -12 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 17 & 3 & -6 & -9 \\ -4 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} -13 & -7 & 4 & 14 \\ 4 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix};$

4. $A = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 4 & 18 \\ 5 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix};$

5. $A = \begin{pmatrix} -10 & -7 & 2 & 16 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix};$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 & 1 \\ -4 & -10 & 17 & 7 \end{pmatrix};$

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 19 & -7 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix};$

8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & -4 \\ -11 & -5 & 6 & 16 \end{pmatrix};$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 7 & -4 & 17 & -10 \end{pmatrix};$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

4. РЕДУКЦИЯ РАЗМЕРНОСТИ МАТРИЦЫ ИГРЫ ПРИ ДОМИНИРОВАНИИ

Решение матричных игр может быть упрощено путем исключения из рассмотрения заведомо невыгодных чистых стратегий. При этом оптимальные стратегии игроков должны сохраняться (хотя бы одна), а размерность матрицы игры – уменьшаться.

4.1. Доминирование в матричных играх

Определение 4.1. Говорят, что в матричной $m \times n$ игре смешанная стратегия первого игрока $P = (p_1, \ldots, p_m) \in S_m$ [2], *строго доминирует* чистую стратегию i, если

$$(\forall Q \in S_n)\ E(P,Q) > E(i,Q),$$

где

Q – смешанная стратегия второго игрока,

S_n [3] – множество смешанных стратегий второго игрока,

$E(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$ – математическое ожидание выигрыша первого игрока,

$E(i,Q) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ – математическое ожидание выигрыша первого игрока при применении им чистой стратегии i против смешанной стратегии Q второго игрока.

Заметим, что в определении строгого доминирования чистой стратегии для первого игрока можно было ограничиться множеством чистых стратегий второго, т.е.

$$(\forall j)\ E(P, j) > E(i, j) = a_{ij}.$$

Аналогично, в матричной $m \times n$ игре смешанная стратегия второго игрока $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ *нестрого доминирует* чистую стратегию j, если

$$(\forall P \in S_m)\ E(P,Q) \le E(P, j)$$

(или $(\forall i)\ E(i,Q) \le E(i, j) = a_{ij}$).

Представляется естественным, что доминируемые чистые стратегии не должны использоваться в смешанных оптимальных стратегиях игроков. До-

[2] $S_m = \{(p_1, \ldots, p_m) : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \ge 0, i = 1, \ldots, m\}$

[3] $S_n = \{(q_1, \ldots, q_n) : \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n\}$

кажем это утверждение относительно строгого доминирования для первого игрока.

Теорема 4.1. Если чистая стратегия k первого игрока строго доминируется некоторой стратегией P, то k–я чистая стратегия не может входить ни в одну оптимальную стратегию P^* (т.е. $p_k^* = 0$).

Доказательство. Покажем, что если k–я чистая стратегия строго доминируется некоторой стратегией P^0, то существует стратегия P такая, что $p_k = 0$ и $(\forall Q \in S_n) E(P,Q) > E(k,Q)$. Действительно, пусть $1 > p_k^0 > 0$. Подставляя P^0 в определение доминирования математическое ожидание в форме (3.4), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} E(i,Q) p_i^0 > E(k,Q),$$

или

$$\sum_{i \neq k} E(i,Q) p_i^0 > E(k,Q)(1 - p_k^0).$$

Разделим части последнего неравенства на заведомо положительную величину $1 - p_k^0$ (получается неравенство $\sum_{i \neq k} E(i,Q) \dfrac{p_i^0}{1 - p_k^0} > E(k,Q)$), и определим вектор P с координатами $p_i = \begin{cases} \dfrac{p_i^0}{1 - p_k^0}, i \neq k, \\ 0, \qquad i = k, \end{cases}$ $i = 1, \ldots, m$. Вектор P является смешанной стратегией первого игрока, имеет нулевую координату k, и, как следует из последнего неравенства, строго доминирует k–ю чистую стратегию.

Итак, пусть $(\forall Q \in S_n)\ E(P,Q) > E(k,Q)$, причем $p_k = 0$. Предположим противное утверждению теоремы – P^* оптимальная стратегия первого игрока и $p_k^* > 0$. Используя доминирующую стратегию P, определим стратегию $\tilde{P}$ как $\tilde{p}_i = \begin{cases} p_i^* + p_i p_k^*, i \neq k, \\ 0, \qquad i = k, \end{cases}$ $i = 1, \ldots, m$. Сравним математические ожидания $E(\tilde{P}, Q^*)$ и $E(P^*, Q^*)$:

$$E(\tilde{P}, Q^*) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i E(i, Q^*) = \sum_{i \neq k} (p_i^* + p_i p_k^*) E(i, Q^*) =$$

$$= \sum_{i \neq k} p_i^* E(i, Q^*) + p_k^* \sum_{i \neq k} p_i E(i, Q^*) = \sum_{i \neq k} p_i^* E(i, Q^*) + p_k^* E(P, Q^*) >$$

$$> \sum_{i \neq k} p_i^* E(i, Q^*) + p_k^* E(k, Q^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i^* E(i, Q^*) = E(P^*, Q^*).$$

Последнее неравенство противоречит определению P^* как стратегии, максимизирующей гарантированный выигрыш. Следовательно, утверждение теоремы справедливо.

*Теорема 4.2***.** Пусть $\Gamma = \langle X, Y, M(x, y) \rangle$ – матричная игра, $X = \{1,\ldots,m\}$, $Y = \{1,\ldots,n\}$, $\Gamma' = \langle X \setminus k, Y, M(x, y) \rangle$ – редукция игры Γ, где k – чистая стратегия первого игрока, доминируемая стратегией P ($p_k = 0$). Тогда всякое решение игры Γ' является решением игры Γ.

Доказательство. В соответствии с определением решения (P^*, Q^*) смешанного расширения игры Γ' (определением седловой точки ядра антагонистической игры)

$$(\forall P \in S_{m-1}, \forall Q \in S_n)\ E(P, Q^*) \le E(P^*, Q^*) \le E(P^*, Q).$$

На основании теоремы 3.1 приведенное двойное неравенство эквивалентно следующему:

$$(\forall i \in X \setminus k, \forall j \in Y)\ E(i, Q^*) \le E(P^*, Q^*) \le E(P^*, j).$$

Так как стратегия $P \in S_{m-1}$ из формулировки теоремы доминирует чистую стратегию k, то

$$E(P^*, Q^*) \ge E(P, Q^*) \ge E(k, Q^*).$$

Объединяя два последних двойных неравенства, получаем одно двойное неравенство

$$(\forall i \in X, \forall j \in Y)\ E(i, Q^*) \le E(P^*, Q^*) \le E(P^*, j),$$

которое является определением седловой точки ядра смешанного расширения игры Γ. Теорема доказана.

Пример. Используя доминирование, уменьшить размеры матрицы антагонистической игры $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 7` \end{pmatrix}$.

*Решение***.** Содержательно, доминируемой чистой стратегией первого игрока является та, которая доставляет первому игроку малый выигрыш при любых вариантах действий второго. Поскольку чистым стратегиям первого игрока соответствуют строки матрицы, то «претендентом» на доминирование будет являться строка матрицы с относительно малыми значениями. Так как третья строка матрицы покомпонентно превосходит первую, то стратегия $i = 3$ первого игрока строго доминирует стратегию $k = 1$. Исключая из матрицы A первую строчку, получаем $A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Для второго игрока доминируемой чистой стратегии соответствует столбец с большими проигрышами. Таковым в матрице A' является первый, элементы которого больше элементов третьего столбца – стратегия $j=3$ второго игрока строго доминирует стратегию $k=1$ (заметим, что в игре с матрицей A такое доминирование невозможно). После исключения первого столбца, в редуцированной матрице $A''=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ полусумма второго и третьего столбцов меньше первого – смешанная стратегия $Q=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ второго игрока доминирует стратегию $k=1$. В получающейся после исключения первого столбца матрице $A'''=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ максимальные элементы столбцов расположены во второй и третьей строках. Следовательно, вторая и третья чистые стратегии первого игрока не доминируются. В силу того, что первая строка матрицы A''' покомпонентно не меньше других строк, попытаемся найти доминирующую стратегию в виде смешанной $P=(0,p,1-p), 0\le p\le 1$. Для доказательства ее существования разрешим систему неравенств $(\forall j)\ E(P,j)>E(1,j)=a'''_{1j}$:

$$\begin{cases} 4p>1, \\ p+7(1-p)>4. \end{cases}$$

Данным неравенствам удовлетворяют $p\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$. Следовательно, в игре с матрицей A''' первая стратегия первого игрока строго доминируется, и поэтому не может входить ни в одну оптимальную – размеры матрицы игры можно уменьшить до 2x2: $A''''=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. В последней матрице доминируемые чистые стратегии отсутствуют.

Таким образом, задачу отыскания оптимальных стратегий в исходной 4x4 матричной игре доминированием чистых стратегий удалось свести к решению 2x2 матричной игры.

Отметим, что для уменьшения размеров матричной игры можно использовать и нестрогое доминирование, однако при этом некоторые из оптимальных стратегий исходной игры будут утеряны.

4.2. Задания и упражнения

1. Уменьшить размеры и решить матричную игру

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & 10 & 0 \\ -4 & -10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Уменьшить размеры и решить матричную игру

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -6 \\ 5 & -4 & 19 & -7 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Уменьшить размеры и решить матричную игру

$$A=\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & -4 \\ -11 & -5 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

4. Уменьшить размеры и решить матричную игру

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 7 & -4 & 17 & -10 \end{pmatrix}$$

5. Уменьшить размеры и решить матричную игру

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Уменьшить размеры и решить матричную игру

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Многие социально–экономические конфликты имеют неантагонистический характер: то, что хорошо для одного участника, не обязательно плохо для другого. В теории игр такие задачи выбора называются неантагонистическими. В силу непротивоположности интересов участники игры могут, вообще говоря, извлечь выгоду из сообщений о своих действиях и согласованного выбора решений. Такой эффект наблюдался в дуополии Курно: решения конкурентов, приводящие к устойчивой ситуации, не являлись взаимовыгодными. Ограничимся рассмотрением бескоалиционного варианта неантагонистических игр, когда запрещены любые соглашения и обмен информацией между участниками. В этом случае антагонистические игры будут являться частным случаем неантагонистических игр.

5.1. Биматричные игры

Определение 5.1. Неантагонистической игрой двух лиц называется набор

$$\tilde{A} = < X_1, X_2, M_1(x_1,x_2), M_2(x_1,x_2) >, \qquad (5.1)$$

где

X_1, X_2 – множества стратегий первого и второго игроков соответственно,

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ – стратегии игроков, а

$M_1(x_1,x_2), M_2(x_1,x_2)$ – функции выигрыша игроков.

Под решением игры (5.1) будем понимать ситуацию равновесия по Нэшу – пару стратегий (x_1^0, x_2^0), для которой выполняется

$$(\forall x_1 \in X_1) M_1(x_1^0, x_2^0) \ge M_1(x_1, x_2^0),$$

$$(\forall x_2 \in X_2) M_2(x_1^0, x_2^0) \ge M_2(x_1^0, x_2).$$

Если множества стратегий игроков конечны, то, вводя индексы $i, 1 \le i \le m$ и $j, 1 \le j \le n$ для обозначения стратегий первого и второго игроков соответственно, получаем описание игры в виде биматрицы

$$(A,B) = \begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \dots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \dots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \dots & (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix}, \qquad (5.2)$$

в которой строки $i, 1 \le i \le m$, соответствуют стратегиям первого игрока, столбцы $j, 1 \le j \le n,$ – стратегиям второго, а на пересечениях строк и столбцов указаны выигрыши a_{ij} первого и b_{ij} второго игрока.

Для биматричной игры определение ситуации равновесия по Нэшу (i^0, j^0) приобретает вид

$$(\forall i)\, a_{i^0 j^0} \geq a_{ij^0}, (\forall j)\, b_{i^0 j^0} \geq b_{i^0 j}. \tag{5.3}$$

Пример 5.1. Игра "Семейный спор". Два экономических партнера намерены произвести одно из двух действий, $\{d_1,\ d_2\}$, каждое из которых требует участия обоих партнеров (пусть, например, речь идет о долевом строительстве в одном из двух районов города). В случае совместного осуществления действия d_1 доходы сторон составят 1 и 2, в случае осуществления d_2 – наоборот, 2 и 1, в некоторых условных единицах измерения. Если же партнеры выполняют различные действия, то доход каждого из них равен нулю.

В игре "Семейный спор" (название игры соответствует наиболее известной интерпретации, по которой супруги выбирают один из двух вариантов вечернего досуга – хоккейный матч или балетный спектакль) у каждого из игроков по две стратегии. Поэтому биматрица выигрышей имеет вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d_1 & \quad d_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

По определению (5.3) в игре "Семейный спор" имеются две ситуации равновесия

$(i^1, j^1) = (1,1)$ с выигрышами $(a_{11}, b_{11}) = (1,2)$ и

$(i^2, j^2) = (2,2)$ с выигрышами $(a_{22}, b_{22}) = (2,1)$.

Как следует из примера 5.1, ситуации равновесия в биматричных играх не равноценны для игроков и не обладают свойством прямоугольности, которое имело место для антагонистических игр (теорема 2.1). Это обстоятельство не позволяет применить для отыскания ситуаций равновесия в биматричных играх методы, которые применялись для решения матричных игр.

Ситуации равновесия для биматричных игр будем искать в классе смешанных стратегий. Будем считать смешанными стратегиями первого и второго игроков в биматричной игре (5.2) распределения вероятностей $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$ и $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ соответственно. Тогда средние выигрыши первого и второго игроков составят

$$E_1(P,Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j,\ E_2(P,Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j.$$

Определение 5.2. Смешанным расширением биматричной игры называется игра

$$G = < S_m, S_n, E_1(P,Q), E_2(P,Q) >, \tag{5.4}$$

где

S_m, S_n – множества смешанных стратегий первого и второго игроков соответственно,

$P \in S_m, Q \in S_n$ – стратегии игроков, а

$E_1(P,Q), E_2(P,Q)$ – математические ожидания выигрышей игроков.

Определение ситуации равновесия биматричной игры (P^0, Q^0) в классе смешанных стратегий имеет вид

$$(\forall P)\ E_1(P^0,Q^0) \ge E_1(P,Q^0),$$
$$(\forall Q)\ E_2(P^0,Q^0) \ge E_2(P^0,Q). \tag{5.5}$$

Повторяя для биматричных игр доказательство теоремы 3.1 об упрощении проверки определения седловой точки в классе смешанных стратегий для матричных игр, неравенства (5.5) можно представить в форме

$$(\forall i)\ E_1(P^0,Q^0) \ge E_1(i,Q^0),$$
$$(\forall j)\ E_2(P^0,Q^0) \ge E_2(P^0,j). \tag{5.6}$$

5.2. Решение биматричных 2x2 игр

Рассмотрим биматричную игру, в которой у каждого из игроков по две чистых стратегии – игру 2×2. Эта игра описывается матрицами выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Решение игры 2x2 будем искать в смешанных стратегиях, исходя из определения (5.6) применительно к рассматриваемой игре:

$$E_1(P^0,Q^0) \ge \begin{cases} E_1(1,Q^0), \\ E_1(2,Q^0), \end{cases} E_2(P^0,Q^0) \ge \begin{cases} E_2(P^0,1), \\ E_2(P^0,2). \end{cases}$$

Перепишем эти неравенства с учетом того, что

$$E_1(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \sum_{i=1}^{m} p_i E_1(i,Q),$$

$$E_2(P,Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j E_2(P,j),$$

$$P = (p_1, p_2) = (p, 1-p),\ 0 \le p \le 1,$$
$$Q = (q_1, q_2) = (q, 1-q),\ 0 \le q \le 1, \tag{5.7}$$

где p, q – вероятности выбора первой чистой стратегии первым и вторым игроками соответственно:

$$p^0 E_1(1,Q^0) + (1-p^0) E_1(2,Q^0) \ge \begin{cases} E_1(1,Q^0), \\ E_1(2,Q^0), \end{cases}$$

$$q^0 E_2(P^0,1) + (1-q^0) E_2(P^0,2) \ge \begin{cases} E_2(P^0,1), \\ E_2(P^0,2). \end{cases}$$

Перегруппируем члены неравенств так, чтобы математические ожидания выигрышей, зависящие от первой чистой стратегии, оказались слева, а математические ожидания, зависящие от второй чистой стратегии – справа от знака неравенства:

$$(1-p^0)E_1(1,Q^0) \le (1-p^0)E_1(2,Q^0),$$
$$p^0 E_1(1,Q^0) \ge p^0 E_1(2,Q^0),$$
$$(1-q^0)E_2(P^0,1) \le (1-q^0)E_2(P^0,2),$$
$$q^0 E_2(P^0,1) \ge q^0 E_2(P^0,2).$$

И, наконец, после приведения подобных, получаем систему неравенств

$$\begin{aligned}&(1-p^0)(E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0)) \le 0,\\ &p^0(E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0)) \ge 0,\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}&(1-q^0)(E_2(P^0,1)-E_2(P^0,2)) \le 0,\\ &q^0(E_2(P^0,1)-E_2(P^0,2)) \ge 0.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Решим каждую из систем (5.8–9) в отдельности, полагая в первой q^0, а во второй – p^0 параметрами. В силу специфики систем, вид решения определяется знаком разности математических ожиданий, зависящей от параметра:

$$p^0 = \varphi(q^0) = \begin{cases} 1, E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0) \ge 0,\\ \beta, E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0) = 0,\ 0 \le \beta \le 1,\\ 0, E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0) \le 0,\end{cases} \tag{5.10}$$

$$q^0 = \psi(p^0) = \begin{cases} 1, E_2(P^0,1)-E_2(P^0,2) \ge 0,\\ \alpha, E_2(P^0,1)-E_2(P^0,2) = 0,\ 0 \le \alpha \le 1.\\ 0, E_2(P^0,1)-E_2(P^0,2) \le 0,\end{cases} \tag{5.11}$$

Выражения (5.10–11) можно интерпретировать как наилучший ответ игрока на известную стратегию партнера. Так, если в (5.10) $E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0) > 0$, то первому игроку естественно в качестве наилучшей выбрать первую чистую стратегию (или смешанную стратегию $P^0 = (p_1^0, p_2^0) = (p^0, 1-p^0) = (1,0)$); при $E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0) = 0$ обе чистые стратегии первого игрока равноценны, вследствие чего допустимо в качестве наилучшей стратегии выбрать их любую смесь $P^0 = (p_1^0, p_2^0) = (p^0, 1-p^0) = (\beta, 1-\beta), 0 \le \beta \le 1$, и т.д.

Множества точек $\{(\varphi(q), q) : 0 \le q \le 1\}$ и $\{(p, \psi(p)) : 0 \le p \le 1\}$ называются приемлемыми ситуациями для первого и второго игроков соответственно. Пересечение множеств приемлемых ситуаций – пересечение графиков функций $p = \varphi(q)$ и $q = \psi(p)$ из (5.10–11) внутри единичного квадрата $\{0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1\}$ – не пусто и представляет собой ситуации равновесия по Нэшу. Рассмотрим это пересечение для биматричной игры без ситуаций равновесия в чистых стратегиях.

Пусть элементы матриц выигрышей игроков связаны неравенствами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ \vee & & \wedge \\ a_{21} & & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & < & b_{12} \\ & & \\ b_{21} & > & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad (5.12)$$

при выполнении которых в биматричной 2х2 игре отсутствуют ситуации равновесия в чистых стратегиях по определению (5.3). Для построения пересечения графиков функций $p=\varphi(q)$ и $q=\psi(p)$ представим разности математических ожиданий из (5.10–11) через элементы матриц выигрышей игроков:

$$\begin{aligned} &E_1(1,Q^0)-E_1(2,Q^0)=a_{11}q^0+a_{12}(1-q^0)-a_{21}q^0-a_{22}(1-q^0)= \\ &=q^0(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})-(a_{22}-a_{12}), \end{aligned} \qquad (5.13)$$

$$\begin{aligned} &E_2(P^0,1)-E_2(P^0,2)=b_{11}p^0+b_{21}(1-p^0)-b_{12}p^0-b_{22}(1-p^0)= \\ &=p^0(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})-(b_{22}-b_{21}). \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Определим константы

$$\alpha^0=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}, \beta^0=\frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}}.$$

Заметим, что из соотношений (5.12) следует $0\le\alpha^0\le 1$, $0\le\beta^0\le 1$, а при подстановке $p^0=\beta^0, q^0=\alpha^0$ разности математических ожиданий (5.13–14) зануляются. При $q^0>\alpha^0$ разность (5.13) положительна, а при $q^0<\alpha^0$ – отрицательна, т.к. в (5.12) $a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}>0$. Аналогично, при $p^0>\beta^0$ разность (5.14) отрицательна, а при $p^0<\beta^0$ – положительна, так как в (5.12) $b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}<0$. Следовательно, для игры (5.12)

$$p^0=\varphi(q^0)=\begin{cases} 1, q^0>\alpha^0, \\ \beta, q^0=\alpha^0, \quad 0\le\beta\le 1, \\ 0, q^0<\alpha^0, \end{cases} \qquad (5.15)$$

$$q^0=\psi(p^0)=\begin{cases} 1, p^0<\beta^0, \\ \alpha, p^0=\beta^0, \quad 0\le\alpha\le 1. \\ 0, p^0>\beta^0, \end{cases} \qquad (5.16)$$

Формулы (5.15–16) определяют множества приемлемых ситуаций игроков как трехзвенные зигзаги. Результатом пересечения зигзагов приемлемых ситуаций являются ситуации равновесия. Графический метод отыскания пересечения называют *методом зигзагов.* Зигзаги (5.15–16) изображены на рис. 5.1.

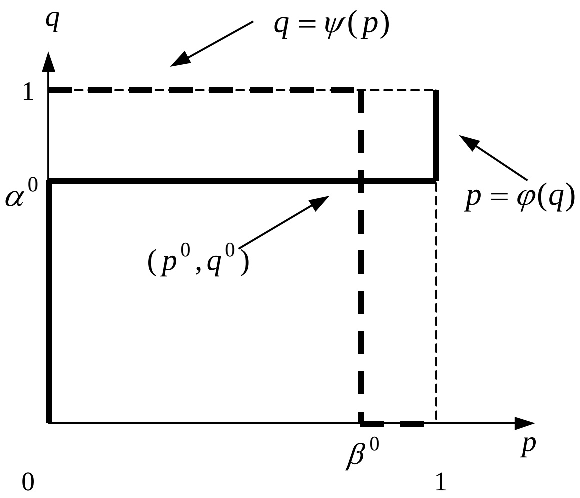

Рис. 5.1. Метод зигзагов: приемлемые ситуации (5.15–16).

Как видно из рис. 5.1, существует единственная точка пересечения графиков функций (5.15–16). Она задается выражениями

$$p^0=\beta^0=\frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}},$$
$$q^0=\alpha^0=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}. \qquad (5.17)$$

Таким образом, формулы (5.17) определяют ситуацию равновесия для биматричной 2х2 игры в классе смешанных стратегий при отсутствии таковой в чистых стратегиях. Отметим, что в соответствии с (5.17) равновесная стратегия первого игрока определяется матрицей выигрышей второго игрока, а равновесная стратегия второго – матрицей выигрыша первого. Сравнение выражений (5.17) с формулами (3.16), описывающими оптимальные смешанные стратегии игроков в матричной (антагонистической) 2х2 игре, позволяет интерпретировать равновесную стратегию p^0 из (5.17) как оптимальную стратегию первого игрока в антагонистической игре с матрицей $(-B)$, а равновесную стратегию q^0 – как оптимальную стратегию второго игрока в антагонистической игре с матрицей *A*. Сравнение устойчивых решений в смешанных стратегиях для биматричных и антагонистических 2х2 игр позволяет интерпретировать устойчивое поведение как стремление минимизировать выигрыш партнера. Описанное свойство равновесных смешанных стратегий носит название "антагонизма поведения без антагонизма интересов"[4].

Пример 5.2. Применяя метод зигзагов, найти ситуации равновесия в игре "Семейный спор".

Решение. Для применения метода зигзагов вычислим разности математических ожиданий из (5.10–11). Так как матрица выигрышей первого игрока имеет вид

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{array}$$

то

$$E_1(1,Q^0) - E_1(2,Q^0) = 1 * q^0 - 2*(1-q^0) = 3*q^0 - 2.$$

Поскольку выигрыши второго игрока описываются матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix},$$

то

$$E_2(P^0,1) - E_2(P^0,2) = 2*p^0 - 1*(1-p^0) = 3*p^0 - 1.$$

Подставляя разности математических ожиданий в (5.10–11), получаем

$$p^0 = \varphi(q^0) = \begin{cases} 1, 3\mathrm{q}^0 - 2 \ge 0, \\ \beta, 3\mathrm{q}^0 - 2 = 0, \ 0 \le \beta \le 1, \\ 0, 3\mathrm{q}^0 - 2 \le 0, \end{cases}$$

$$q^0 = \psi(p^0) = \begin{cases} 1, 3\mathrm{p}^0 - 1 \ge 0, \\ \alpha, 3\mathrm{p}^0 - 1 = 0, \ 0 \le \alpha \le 1. \\ 0, 3\mathrm{p}^0 - 1 \le 0, \end{cases}$$

Как видно из рис. 5.2, множества приемлемых ситуаций игры “Семейный спор” пересекаются в трех точках, каждая из которых порождает ситуацию равновесия.

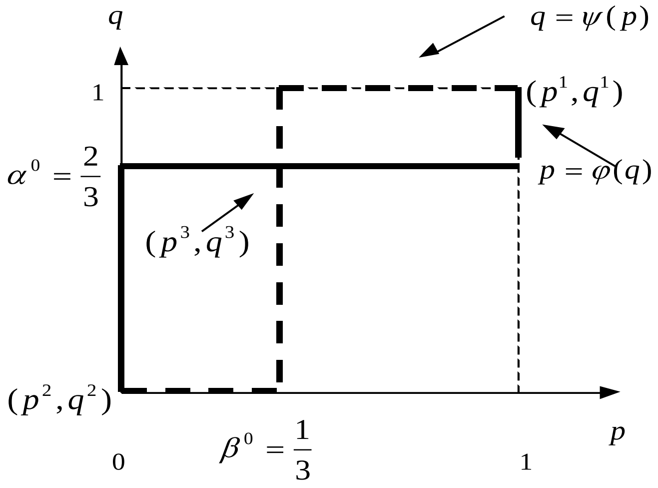

Рис. 5.2. Приемлемые ситуации игры ‘Семейный спор”.

Первые две ситуации равновесия порождаются точками $(p^1, q^1) = (1,1)$ и $(p^2, q^2) = (0,0)$. Они описываются распределениями вероятностей $(P^1, Q^1) = ((1,0),(1,0))$, $(P^2, Q^2) = ((0,1),(0,1))$ и являются ситуациями равновесия в чистых стратегиях $(i^1, j^1) = (1,1)$ с выигрышами $(a_{11}, b_{11}) = (1,2)$ и $(i^2, j^2) = (2,2)$ с выигрышами $(a_{22}, b_{22}) = (2,1)$ (см. пример 5.1).

Третья ситуация равновесия порождается точкой $(p^3, q^3) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и описывается распределениями вероятностей $(P^3, Q^3) = ((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$. В этой ситуации равновесия выигрыши игроков составляют

$$E_1(P^3, Q^3) = 1 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + 2 * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$E_2(P^3, Q^3) = 2 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + 1 * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

В последней ситуации равновесия выигрыши игроков совпадают, но меньше выигрышей, получаемых в ситуациях равновесия в чистых стратегиях, что является проявлением "антагонизма поведения без антагонизма интересов". Разрешение противоречия между устойчивостью и выгодностью предполагает некоторые механизмы согласованного выбора стратегий, рассматриваемые в кооперативной теории.

5.3. Задания и упражнения

Найти ситуации равновесия по Нэшу в следующих биматричных 2х2 играх:

1. $(A, B) = \begin{pmatrix} (2,0) & (4,2) \\ (3,3) & (4,1) \end{pmatrix};$
2. $(A, B) = \begin{pmatrix} (1,-1) & (-2,1) \\ (-1,1) & (1,-2) \end{pmatrix};$
3. $(A, B) = \begin{pmatrix} (1,-1) & (3,-1) \\ (3,-1) & (-3,2) \end{pmatrix};$
4. $(A, B) = \begin{pmatrix} (2,2) & (4,2) \\ (2,4) & (1,2) \end{pmatrix};$
5. $(A, B) = \begin{pmatrix} (3,0) & (5,0) \\ (5,0) & (-1,4) \end{pmatrix};$
6. $(A, B) = \begin{pmatrix} (0,-2) & (2,0) \\ (1,1) & (2,-1) \end{pmatrix};$
7. $(A, B) = \begin{pmatrix} (0,0) & (2,0) \\ (0,2) & (1,0) \end{pmatrix};$
8. $(A, B) = \begin{pmatrix} (3,0) & (0,0) \\ (0,3) & (0,2) \end{pmatrix};$

9. $(A, B) = \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (2,1) & (-1,-1) \end{pmatrix};$

10. $(A, B) = \begin{pmatrix} (0,-1) & (1,1) \\ (2,2) & (3,0) \end{pmatrix}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Стронгин Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения: Учебник. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И.Лобачевского, 2002. – 244 с.
2. Стронгин Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения. – М.: ИНТУИТ.РУ, 2007. – 208 с.
3. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: Учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 272 с.
4. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов–кибернетиков.– М.: Наука, 1985.–272 с.

Константин Александрович **Баркалов**
Наталья Валерьевна **Шестакова**

МОДЕЛИ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.