

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

А.П. Гажулина

ИЗУЧЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Практикум

Рекомендовано методической комиссией физического факультета для
студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
09.03.02 «Информационные системы и технологии»,
28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»

Нижегород
2021

УДК 538.951
ББК 22.251
Г–13

Г–13 Гажулина А.П. ИЗУЧЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТВЁРДЫХ ТЕЛ:
Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 17 с.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук **Тележников А.В.**

В настоящей работе студенты знакомятся с основными видами деформации и её характеристиками, экспериментально проверяют выполнение закона Гука и определяют модуль Юнга путем деформации растяжения, приобретают навыки в обработке результатов эксперимента методом наименьших квадратов. Практикум предназначен для студентов 1-го курса физических специальностей университетов.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
физического факультета ННГУ, к. ф.-м. н., доцент **Перов А.А.**

УДК 538.951
ББК 22.251

© Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, 2021

Цель работы: экспериментальная проверка закона Гука и определение модуля Юнга путем растяжения проволоки.

Приборы и принадлежности: прибор Лермантова для определения удлинения проволоки, набор грузов, микрометр, рулетка, измерительный микроскоп.

ВВЕДЕНИЕ

Деформация – это изменение формы или размеров тела под действием приложенных к нему сил.

Законы, связывающие силы и деформации в общем случае очень сложны и выражаются тензорными уравнениями. Кроме того, связи между силами и деформациями неодинаковы в разных частях тела. Это можно показать с помощью модели, изображенной на рис. 1а, которая представляет из себя несколько масс, соединённых пружинками. Когда к крайней массе модели приложена сила (рис. 1б), силы, действующие на каждую пружинку, уменьшаются от пружины к пружине, и те, в свою очередь, деформируются по-разному. Кроме того, картина деформаций будет совершенно другой, если сила будет приложена, например, к четвертой массе (рис. 1с).

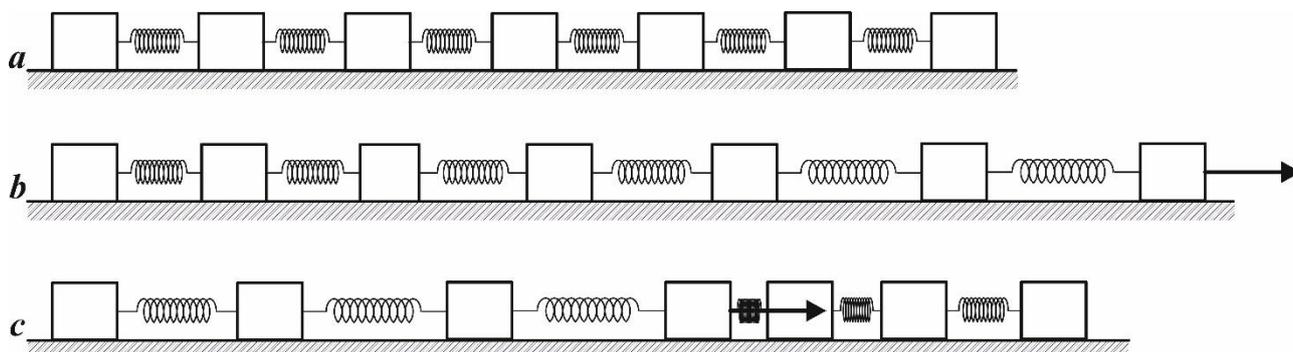


Рис. 1. Модель упругого тела

По характеру приложенного к телу воздействия виды деформации подразделяют следующим образом (рис. 2):

- Деформация *сжатия*;
- Деформация *растяжения*;
- Деформация *кручения*;
- Деформация *сдвига*;
- Деформация *изгиба*.

При всем разнообразии деформаций оказывается возможным любую деформацию тела свести к двум основным типам (*элементарным деформациям*). Такими элементарными деформациями являются растяжение (сжатие) и сдвиг.

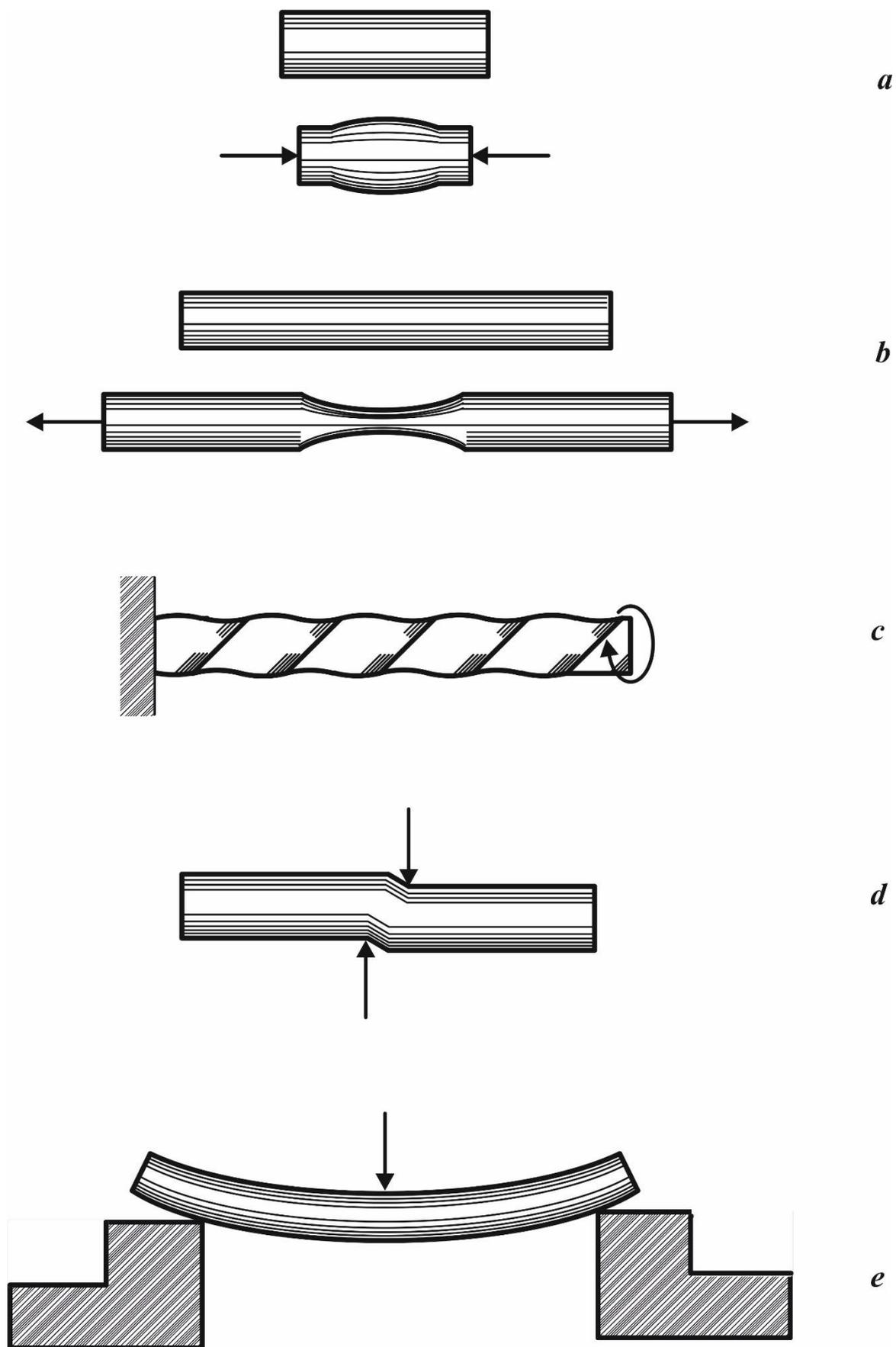


Рис. 2. Виды деформации:
a – сжатие; *b* – растяжение; *c* – кручение; *d* – сдвиг; *e* – изгиб

Для выяснения закономерностей, связывающих силу и деформацию, рассмотрим растяжение однородного стального образца (стержня) вдоль его оси (рис. 3а). Сила \vec{F} , приложенная к стержню, вызовет деформацию (рис. 3б), которую количественно можно охарактеризовать удлинением стержня. Величина, равная разности длины стержня l после деформации и первоначальной длины l_0 ,

$$\Delta l = l - l_0, \quad (1)$$

называется *абсолютным удлинением*. *Относительным удлинением* называется отношение абсолютного удлинения (1) к первоначальной длине стержня l_0 :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2)$$

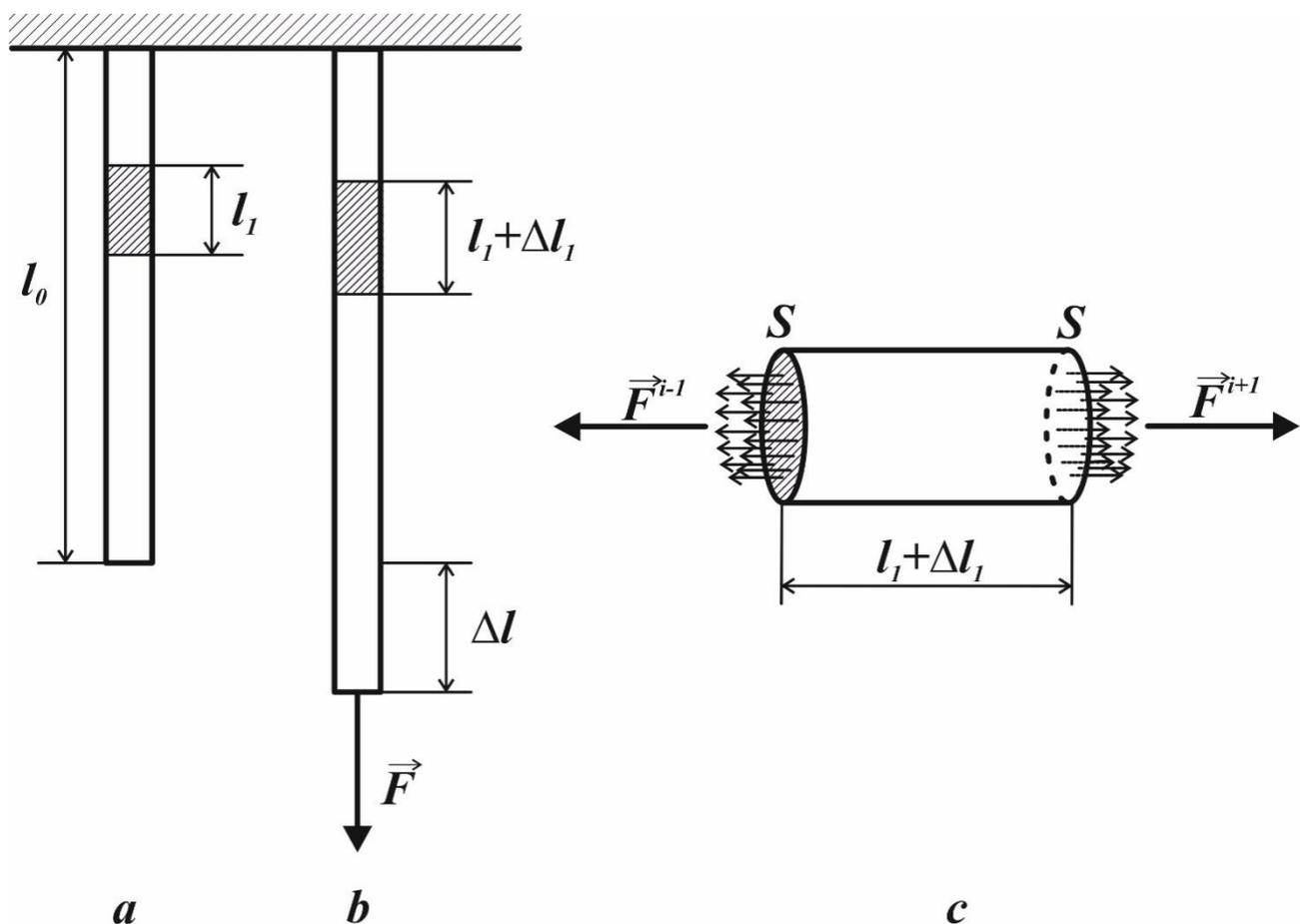


Рис. 3. Растяжение стального стержня

Выделим в стержне элемент длиной l_1 (рис. 3а). После растяжения абсолютное удлинение этого элемента стержня составит Δl_1 (рис. 3б). Если материал стержня однороден, то относительное удлинение (2) и величина,

равная $\Delta l_1/l_1$, будут одинаковыми для любого выбранного элемента стержня. Поэтому относительное удлинение (2) является однозначной характеристикой деформации.

Под действием силы \vec{F} в стержне возникнут внутренние силы, с которыми будут действовать друг на друга элементы стержня. Вырежем мысленно из стержня произвольный элемент (рис. 3с). В силу того, что рассматриваемый элемент стержня покоится, силы \vec{F}_{i-1} и \vec{F}_{i+1} , действующие на элемент стержня со стороны соседних элементов, равны по модулю и равны модулю силы F . Так как это условие справедливо для любого элемента стержня, то в любом поперечном сечении стержня возникают силы, равные F . Если материал стержня однороден, то можно считать, что сила равномерно распределена по поверхности S (рис. 3с) поперечного сечения. Величина силы, действующей на единицу площади поперечного сечения, называется *напряжением*:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (3)$$

На рис. 4 представлена диаграмма растяжения стального образца [1]. На этой диаграмме необходимо отметить ряд точек – A, B, C, D, E, S .

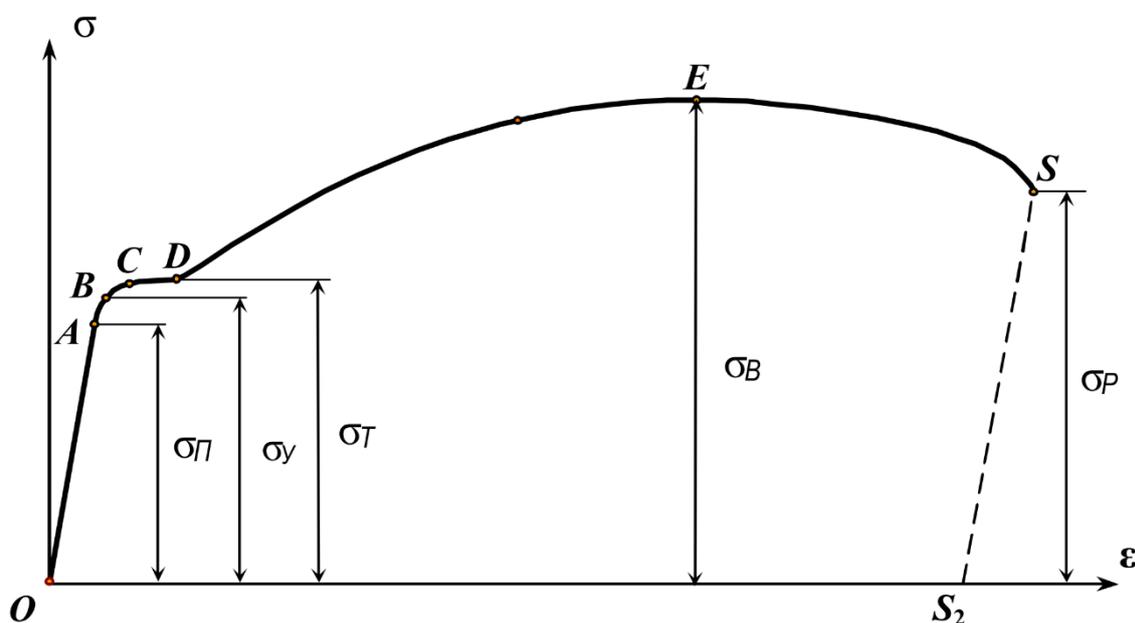


Рис. 4. Диаграмма растяжения

Начальный участок диаграммы OA – прямая линия. На этом участке напряжения σ в образце прямо пропорциональны деформации ϵ :

$$\sigma = E\epsilon. \quad (4)$$

Зависимость (4) носит название *закона Гука*. Постоянный коэффициент пропорциональности E называется *модулем Юнга* и является характеристикой материала. Напряжение σ как функция деформации ε может быть разложена в ряд Тейлора:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon = 0) + \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left. \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \dots \quad (5)$$

Первое слагаемое в (5) равно нулю в силу того, что при отсутствии напряжения деформации нет. Для малых деформаций всегда можно ограничиться линейным членом в ряду (5), что и является законом Гука (4), поэтому область пропорциональности присутствует всегда, однако из закона Гука нельзя определить, как велика эта область.

Точке A соответствует напряжение σ_n – *предел пропорциональности*. Пределом пропорциональности называется наибольшее напряжение, при котором деформация в материале прямо пропорциональна нагрузке.

Выше точки A диаграмма искривляется, закон Гука нарушается. Очень близко к точке A на криволинейном участке диаграммы можно отметить точку B , соответствующую *пределу упругости* σ_y . Пределом упругости называется наибольшее напряжение, при котором в материале возникает только *упругая деформация*. Упругой деформацией называется деформация, при которой после прекращения действия внешних сил тело полностью восстанавливает свои первоначальные размер и форму. Выше точки B лежит область *неупругих* или *пластических деформаций*. При пластической деформации после снятия нагрузки тело уже не восстановит свою первоначальную форму.

Начиная от точки C , диаграмма имеет горизонтальный (или почти горизонтальный) участок, которому соответствует *предел текучести* σ_T . На этом участке деформации растут без увеличения нагрузки – материал течет (удлинение растёт при неизменной силе деформации). Пределом текучести называется минимальное напряжение, при котором деформация возрастает без заметного увеличения нагрузки. Горизонтальный участок диаграммы CD называют *площадкой текучести*.

Точке E диаграммы соответствует напряжение σ_v – *предел прочности*. Пределом прочности называется наибольшее напряжение, которое выдерживает материал, не разрушаясь. До достижения предела прочности продольные и поперечные деформации образца равномерно распределяются по его длине. После достижения точки E диаграммы эти деформации концентрируются в одном наиболее слабом месте, где начинает образовываться шейка – местное значительное сужение образца. С этого момента продольная деформация зависит уже не столько от длины образца, сколько от его диаметра. За точкой E напряжение σ падает, что объясняется уменьшением поперечного сечения шейки, и происходит разрыв образца. Этому на диаграмме соответствует точка S и напряжение σ_p – *истинное сопротивление разрыву*.

На рис. 5а представлены диаграммы растяжения и сжатия для стали [1]. Начальный участок этих зависимостей – прямая линия. Точке А соответствует предел пропорциональности материала, рядом с которым лежит предел текучести. При растяжении и сжатии предел пропорциональности и текучести для стали совпадают. Как можно заметить, при сжатии нет заметной площадки текучести. Объясняется это тем, что при сжатии за пределом текучести растут пластические деформации, происходит быстрое увеличение поперечного сечения. Образец принимает бочкообразную форму и может быть сплюснен в диск. Разорвать на две части образец не удаётся. Поэтому особенно важное значение имеют именно испытания материалов на растяжение, при которых наиболее полно выявляются механические свойства материалов.

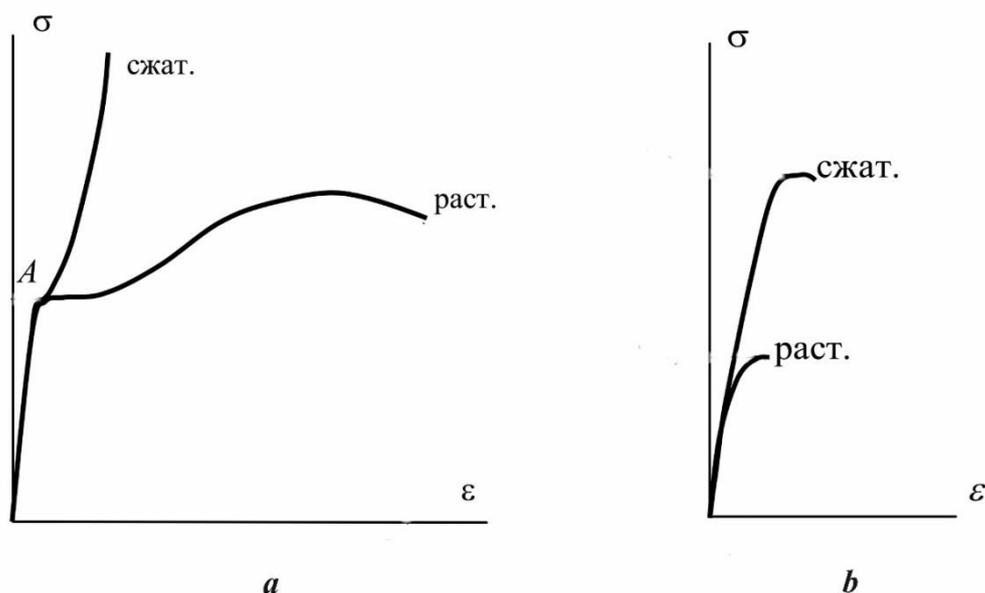


Рис. 5. Диаграммы растяжения и сжатия для: *a* – стали, *b* – чугуна

В качестве примера на рис. 5b представлены диаграммы растяжения и сжатия для чугуна [1]. Как можно заметить, для чугуна нет выраженной площадки текучести в отличие от стали. Материалы с площадкой текучести называются *пластическими*, материалы без площадки текучести – *хрупкими*.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка показана на рис. 6. Верхний конец проволоки укреплен на кронштейне А, нижний помещен в оправу D и зажат винтом В (рис. 3а). При растяжении проволоки смещается оправа D, соединенная с рычагом С, который может поворачиваться на шарнире О. Рычаг не позволяет проволоке раскачиваться. К оправе D прикреплена миллиметровая шкала (рис. 3с). Груз Р, растягивающий проволоку, помещается на платформу F (груз массой 1620 г всегда лежит на платформе и служит для выпрямления проволоки).

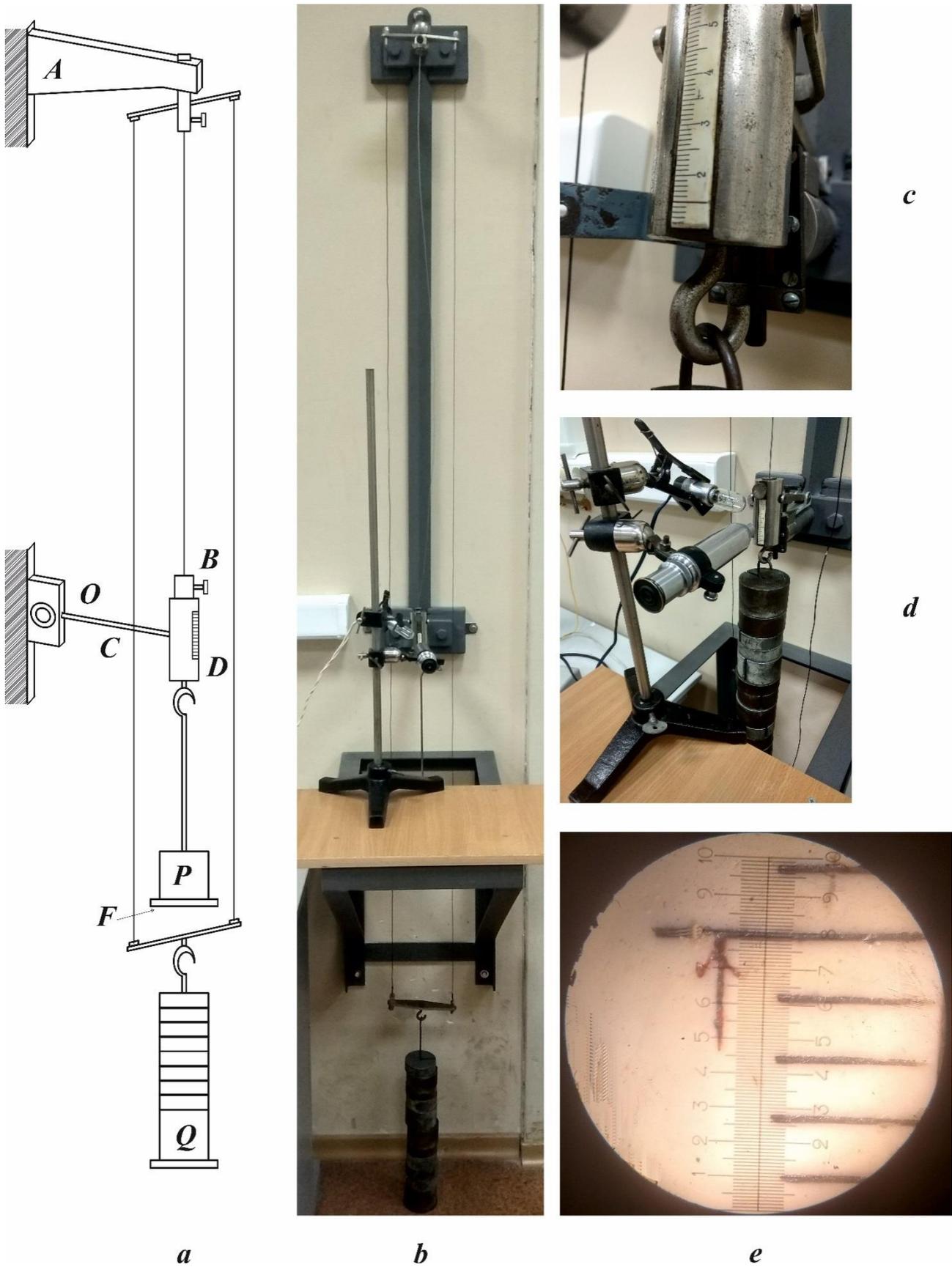


Рис. 6. Экспериментальная установка: *a* – схема; *b* – общий вид; *c* – миллиметровая шкала; *d* – измерительный микроскоп; *e* – миллиметровая и окулярная шкалы

Так как при изменении нагрузки изменяется прогиб кронштейна A , то смещение нижнего конца проволоки не равно её удлинению. Чтобы избежать этого, к кронштейну прикреплены проволоки, на которых могут подвешиваться грузы Q . При измерении грузы P и Q меняются так, чтобы их сумма оставалась постоянной. Тогда прогиб кронштейна будет постоянным, и смещение нижнего конца проволоки будет равно её удлинению.

Удлинение проволоки определяется по смещению одного из делений шкалы оправы D . Измерение смещения производят измерительным микроскопом (рис. 3*d*).

В фокальной плоскости окуляра измерительного микроскопа помещена шкала. Чтобы можно было определить размер предмета при помощи микроскопа, необходимо определить цену деления шкалы окуляра. Для этого микроскоп фокусируют на предмет, размер которого известен. В качестве такого предмета берут деления миллиметровой шкалы (рис. 3*e*). Подсчитывают число делений m окулярной шкалы, укладывающихся в n деления шкалы, видимой в микроскоп. Цена деления измерительного микроскопа b определяется следующим выражением:

$$b = \frac{n}{m} a, \quad (6)$$

где a – цена деления известной шкалы (в случае миллиметровой шкалы $a = 1$ мм).

ЗАДАНИЯ

1. Рассчитать, при какой нагрузке стальная проволока не выйдет из области линейной упругости.
2. Определить цену деления измерительного микроскопа.
3. Определить диаметр проволоки d с помощью микрометра, проводя измерения не менее пяти раз в различных сечениях. Определить длину проволоки l_0 с помощью рулетки.
4. Снять зависимость удлинения проволоки от массы нагрузки.

Измерения проводить, перемещая грузы Q поочередно на платформу F , записывая удлинение $\Delta N_{i\uparrow}$ в делениях микроскопа. Провести аналогичные измерения $\Delta N_{i\downarrow}$, постепенно снимая грузы P с платформы F . Количество циклов «нагрузки – разгрузки» должно быть не менее двух. В таблице 1 приведён пример записи результатов эксперимента в протокол.

Таблица 1. Результаты измерений

m_i, Γ	1 цикл		2 цикл		...	
	$\Delta N_{i\uparrow}, \text{дел.}$	$\Delta N_{i\downarrow}, \text{дел.}$	$\Delta N_{i\uparrow}, \text{дел.}$	$\Delta N_{i\downarrow}, \text{дел.}$	$\Delta N_{i\uparrow}, \text{дел.}$	$\Delta N_{i\downarrow}, \text{дел.}$
m_1						
...						
m_n						

Особые указания. При измерении грузы P и Q меняются так, чтобы их сумма оставалась постоянной! Нельзя грузы снимать с установки и класть на стол! Грузы имеют форму цилиндров с прорезью (рис. 7). При надевании грузов на платформы следует прорези на соседних грузах разворачивать на 180° друг относительно друга (для сохранения осевой симметрии нагрузки).



Рис. 7. Лабораторный груз

- Для каждой массы определить среднее значение удлинения $\overline{\Delta N}_i$ и его абсолютную погрешность.
- Построить график экспериментальной зависимости $\overline{\Delta N}$ от m . Для экспериментальных точек указать погрешности.
- Определить, носит ли зависимость $\overline{\Delta N}$ от m линейный характер.
- Методом наименьших квадратов [2] определить угловой коэффициент k зависимости $\overline{\Delta N}$ от m и его погрешность. На графике отобразить аппроксимирующую прямую.
- Закон Гука (4) можно переписать следующим образом:

$$\Delta N = \frac{4gl_0}{\pi d^2 E b} m, \quad (7)$$

где g – ускорение свободного падения, l_0 – длина проволоки в нерастянутом состоянии, d – диаметр проволоки, E – модуль Юнга, b – цена деления измерительного микроскопа.

Тогда модуль Юнга с помощью (7) и углового коэффициента k , определённого методом наименьших квадратов, можно рассчитать следующим образом:

$$E = \frac{4gl_0}{\pi d^2 kb} m. \quad (8)$$

Для расчёта погрешности модуля Юнга (8) следует использовать относительные погрешности измеренных величин [2].

10. Определить по справочным данным материал исследуемой проволоки.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое деформация? Виды деформации.
2. Количественные характеристики деформации.
3. Поясните диаграмму растяжения.
4. Размерность модуля Юнга в системе СИ.
5. Получите выражение (8).
6. Запишите формулу для расчёта относительной погрешности модуля Юнга (8). Какая из экспериментально определяемых величин вносит наибольший вклад в погрешность определения модуля Юнга?
7. Постройте ход лучей в микроскопе. Укажите на этой схеме положение окулярной шкалы.
8. Постройте графики зависимости нормального напряжения $\sigma = f(x)$, возникающего в сечении однородного цилиндра массы m , длины l с площадью поперечного сечения S для случаев, изображенных на рис. 8.

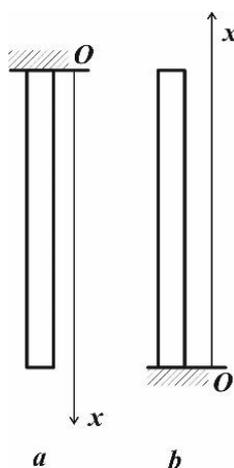


Рис. 8. Однородный цилиндр
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабораторные работы по курсу сопротивления материалов: Метод. указания / Сост.: А.Х. Валиуллин, М.Н. Серазутдинов, С.Г. Сидорин, Ф.С. Хайруллин. – Казань: Казан. нац. исслед-кий технол. ун-т; 2011. – 64 с.
2. Фаддеев, М. А. Элементарная обработка результатов эксперимента: учеб. пособие / М. А. Фаддеев. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2004. – 120 с.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайкин, С.Э. Физические основы механики. – М.: Наука, 1971. – 752 с.
2. Стрелков, С.П. Механика: учеб. пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2005. — 560 с.
3. Физические величины: Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; Под.ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 1232 с.
4. Раскатов, В.М. Машиностроительные материалы: краткий справочник / В.М. Раскатов, В.С. Чуенков, Н.Ф. Бессонова, Д.А. Вейс. – М.: Машиностроение, 1980. – 511 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1. Модули Юнга E для различных материалов [П1]

Материал	E, ГПа	Материал	E, ГПа
Серый чугун	14-16	Каменная кладка:	
Ковкий чугун	155	Из гранита	9-10
Углеродистые стали	200-210	Из известняка	6
Сталь высокопрочная	210-220	Из кирпича	2,7-3,0
Медь (прокат)	110	Бетон на пределе прочности, Мпа:	
Холоднотянутая медь	130	10	14,6-19,6
Медь (литье)	84	15	16,4-21,4
Фосфористая бронза (прокат)	115	20	18,2-23,2
Холоднотянутая латунь	91-99	Дерево (сосна, ель):	
Марганцовистая бронза (прокат)	110	Вдоль волокон	10-12
Алюминий (прокат)	69	Поперек волокон	0,5-1,0
Алюминиевая бронза	5	Каучук	0,008
Дюралюминий (прокат)	71	Текстолит	6-10
Цинк (прокат)	84	Гетинакс	10-17
Свинец	17	Бакелит	4,3
Стекло	56	Висхомлит	4,0-4,2
Гранит	49	Целлулоид	1430-2750
Известняк	42		
Мрамор	56		
Песчаник	18		

Таблица П2. Характеристики прочности и пластичности для некоторых конструкционных материалов [П2]

Материал	Предел текучести, МПа		Предел прочности, МПа	
	растяжение	сжатие	растяжение	сжатие
Сталь малоуглеродистая	250	250	390	-
Сталь 30 незакалённая	330	330	530	-
Сталь 30 закалённая	1030	900	1100	-
Сталь 45 незакалённая	370	370	620	-
Сталь 45 закалённая	1040	970	1080	-
Сталь 30ХГСА закалённая	1400	1400	1620	-
Сталь 40ХНВ закалённая	1720	2100	205	-
Чугун серый СЧ 28	140	310	150	640
Медь отожжённая	55	55	220	-
Медь прутковая	250	250	270	-
Дюралюминий	340	340	540	-
Текстолит	75	115	130	170
Резина	-	-	0,04	-
Сосна вдоль волокон	-	-	80	40
Кирпич	-	-	0,3-0,07	3,0-0,7
Бетон	-	-	8,0-1,0	17,0-8,5

Таблица ПЗ. Модули Юнга E и пределы упругости для различных материалов [ПЗ]

Материал	E , ГПа	σ_y , кг/мм ²
Алюминий	63-75	5
Бронза	106	10
Дерево	4-18	-
Железо кованое	200-220	20
Сталь	200-220	20-150
Инвар	140	50
Чугун серый	75-130	6
Чугун белый	180	-
Золото	70-95	-
Кварц плавленный	60	-
Константан	166	30
Латунь	80-100	до 13
Магналий	70	6
Манганин	126	-
Медь	100-130	0,5-20
Нейзильбер	110	-
Никель	200-220	9
Олово	40-55	-
Платина	160-175	-
Свинец	15-17	-
Серебро	70-80	15
Стекло	50-80	-
Тантал	190	-
Цинк	80-130	-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- П1. Справочные сведения по курсу «Соппротивление материалов». Метод. указания / Казан. гос. технол. ун-т; Сост.: М.Н. Серазутдинов, К.А. Абдулхаков, В.М. Котляр, М.Н. Убайдуллоев. – Казань, 2007. – 50 с.
- П2. Лабораторные работы по курсу сопротивления материалов: Метод. указания / Сост.: А.Х. Валиуллин, М.Н. Серазутдинов, С.Г. Сидорин, Ф.С. Хайруллин. – Казань: Казан. нац. исслед-кий технол. ун-т, 2011. – 64 с.
- ПЗ. Физический практикум: механика и молекулярная физика: / под ред. проф. В.И. Ивероновой; сост. А.Г. Белянкин, Г.П. Мотулевич, Е.С. Четверикова, И.А. Яковлев. – М.: Наука, 1967. – 352 с.

Анастасия Петровна Гажулина

ИЗУЧЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.