МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.04.03 «Прикладная информатика» и по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2021

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ: Автор: Панкратов Е.Л. Учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. - 74 с.

Рецензенты:
к.ф.-м.н. доцент НГПУ им. К. Минина Н.И. Лапин
старший преподаватель НГПУ им. К. Минина Л.Е. Платонова

к.ф.-м.н. доцент ННГАСУ А.А. Краснов

Учебное пособие «Математические методы и модели поддержки принятия решений» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.04.03 «Прикладная информатика» и по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», с базовыми экономико-математическими дисциплинами. Оно содержит основные понятия экономико-математического моделирования, теории игр и регрессионного анализа. Для закрепления теоретических знаний в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Макарова С.Д.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В системах управления и повседневной жизни человеку приходится целенаправленно выбирать определенные варианты действий из множества возможных вариантов в конкретной ситуации. Результат выбора принято называть решением, а последовательность действий - разработкой и принятием решения. Данная последовательность действий выполняется во времени. По этой причине вводится понятие процесса разработки и принятия решения. При разработке и реализации управленческих решений необходимо учитывать различные аспекты. Экономическая составляющая управленческих решений проявляется в том, что для его разработки и реализации требуются финансовые и материальные ресурсы. Поэтому каждое управленческое решение обладает реальной себестоимостью. Результатом реализации управленческого решения должен быть прямой или косвенный доход. Таким образом, эффективность принятого решения может быть выражена отношением прямого или косвенного дохода от реализации решения к его себестоимости. Организационная сущность управленческого решения состоит в том, что для его разработки и реализации должны быть привлечены соответствующие ресурсы и организационные возможности, в том числе: персонал компании; инструкции, регламентирующие деятельность работников; систему контроля. В данном пособии рассмотрены экономико- математические модели, методы прогнозировании экономических процессов, а также методы их оптимизации. Для закрепления теоретических знаний по математическому анализу в данном пособии приведены контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов) образовательных стандартов по направлению подготовки 09.04.03 «Прикладная информатика» и по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела «Математические методы и модели поддержки принятия решений» дисциплины «Математика» студенты должны знать основные понятия теории игр, регрессионного анализа, научиться формулировать и анализировать экономико-математического модели.

1. *Элементы теории игр*

Теория игр раздел исследования операций. Использование методов теория игр позволяет выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках рассматриваемых игр, их ресурсах и их возможных действиях.

1.1. Основные понятия теории игр

В экономической практике часто имеют место конфликтные ситуации. Игровые модели - это, в основном, упрощенные математические модели конфликтов. В отличие от реального конфликта игра ведётся по четким правилам. Для моделирования конфликтных ситуаций разработан специальный аппарат - математическая теория игр. Стороны, участвующие в конфликте, называются игроками. Каждая формализованная игра (модель) характеризуется:

1. количеством субъектов - игроков, участвующих в конфликте;
2. вариантом действий для каждого из игроков, называемых стратегиями;
3. функциями выигрыша или проигрыша (платежа) исхода конфликта.

<u>Определение 1</u>

Игра, в которой участвуют два игрока А и В называется парной. Если же количество игроков больше двух, то это игра множественная. Мы будем рассматривать модели только парных игр.

<u>Определение 2</u>

Игра, в которой выигрыш одного из игроков точно равен проигрышу другого, называется антагонистической игрой или игрой с нулевой суммой. Рассмотрение моделей начнем с рассмотрения моделей антагонистических игр.

Провести моделирование (решить) антагонистической игры - указать стратегии для каждого игрока, удовлетворяющие условию оптимальности, т.е. игрок А должен получить максимальный гарантированный выигрыш, какой бы своей стратегии не придерживался игрок В, а игрок В должен получить минимальный проигрыш, какой бы своей стратегии не придерживался игрок А. Оптимальные стратегии характеризуются устойчивостью, то есть ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.

<u>Замечание 1</u> Различают игры кооперативные и некооперативные, с полной информацией и не полной. В игре с полной информацией перед каждым ходом каждый игрок знает все возможные ходы (стратегии поведения) и выигрыши. В кооперативных играх допускается возможность предварительных переговоров между игроками. Мы будем рассматривать некооперативные игры с полной информацией.

Математическая теория игр является разделом математики, изучающей принятие решений в конфликтных ситуациях. Определим основные понятия теории игр.

<u>Определение 3</u>

Игра - упрощенная формализованная модель конфликтной ситуации. Игрок - одна из сторон в игровой ситуации. В зависимости от постановки задачи, стороной может выступать коллектив или даже целое государство.

Каждый игрок может иметь свои стратегии. Стратегией i-го игрока x_2 называется одно из возможных решений из множества допустимых решений этого игрока. По количеству стратегий игры делятся на конечные, в которых число стратегий ограничено, и бесконечные, которые имеют бесконечно много различных стратегий. Каждый из n участников игры может выбирать свою стратегию. Совокупность стратегий $x = x_1, x_2, ..., x_n$, которые выбрали участники игры, называется игровой ситуацией. Оценить ситуацию x с точки зрения преследуемых линейным программированием целей можно, построив целевые функции (или критерии качества), ставящие в соответствие каждой ситуации x числовые оценки $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ (например, доходы фирм в ситуации x или их затраты и т. д.). Тогда цель i - го участника формализуется следующим образом: выбрать такое свое решение x_i, чтобы в ситуации $x = x_1, x_2, ..., x_n$ число $f_i(x)$ было как можно большим (или меньшим). Однако достижение этой цели от него зависит лишь частично, поскольку другие участники игры влияют на общую ситуацию x с целью достижения своих собственных целей (оптимизируют свои целевые функции). Значение целевой функции в той или иной игровой ситуации можно назвать выигрышем игрока в этой ситуации.

Определение 4

По характеру выигрышей игры можно разделить на игры с нулевой и ненулевой суммой. В играх с нулевой суммой сумма выигрышей в каждой игровой ситуации равна нулю. Игры двух игроков с нулевой суммой называются антагонистическими. В этих играх выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. В играх с ненулевой суммой в выигрыше или проигрыше могут оказаться все участники игры.

По виду функции выигрышей игры можно разделить на матричные, биматричные, непрерывные, сепарабельные и т. д.

Определение 5

Матричными играми называются конечные игры двух игроков с нулевой суммой. В этом случае номер строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i игрока 1, а номер столбца - номеру стратегии B_j игрока 2.

Элементами матрицы a_{ij} является выигрыш игрока 1 для ситуации (реализации стратегий) A_iB_j. В силу того, что рассматривается матричная игра с нулевой суммой, выигрыш игрока 1 равен проигрышу игрока 2.

Можно показать, что всякая матричная игра с известной матрицей платежей сводится к решению задачи линейного программирования. Поскольку в прикладных задачах экономики и управления ситуации, сводящиеся к матричным играм, встречаются не очень часто, мы не будем останавливаться на решении этих задач.

Определение 6

Биматричная игра - это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. В этом случае для каждой игровой ситуации A_iB_j каждый из игроков имеет свой выигрыш a_{ij} для первого игрока и b_{ij} - для второго игрока. К биматричной игре сводится, например, поведение производителей на рынках несовершенной конкуренции.

Рассмотрим конечную игру двух игроков A и B, в которой игрок A может применить одну из m стратегий

$$A_1, A_2, \ldots, A_m,$$

а игрок B - одну из n стратегий

$$B_1, B_2, \ldots, B_m.$$

Будем предполагать везде далее, что игрок A выигрывает, а игрок B проигрывает.

Определение 7

Пусть каждая из сторон выбрала стратегии A_i и B_j соответственно (i, j фиксированы, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$). Через a_{ij} обозначим исход игры (сумму выигрыша игрока A или, что то же, сумму проигрыша игрока B). Предположим, что нам известны значения a_{ij} при всех $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Эти значения можно записать в виде матрицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы - стратегиям игрока B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу будем называть платёжной матрицей.

Определение 8

Величина

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\}$$

называется нижней чистой ценой игры или максимином, а величина

$$\beta = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{1 \le i \le m} a_{ij} \right\}$$

называется верхней чистой ценой игры или минимаксом.

Определение 9

Чистую стратегию игрока A, гарантирующую ему максимальный выигрыш, называют максиминной, а чистую стратегию игрока B, гарантирующую ему минимальный проигрыш, - минимаксной стратегией.

Определение 10

Максиминная и минимаксная стратегии называются оптимальными стратегиями игроков A и B соответственно.

Определение 11

Принцип, который определяет выбор игроками своих оптимальных стратегий, называют принципом минимакса.

По степени неполноты информации, которой обладают игры, игры делятся на стратегические и статистические.

Определение 12

Стратегические игры - это игры в условиях полной неопределенности.

Определение 13

Статистические игры - это игры с частичной неопределенностью. В статистической игре всегда имеется один активный игрок, имеющий свои стратегии и цели. Другим игроком (пассивным, не преследующим своих целей) является природа. Этот игрок реализует свои стратегии (состояния природы) случайным образом, причем вероятность реализации того или иного состояния можно оценить с помощью статистического эксперимента.

Поскольку с теорией статистических игр тесно связана теория принятия экономических решений, то в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только этого класса игр.

1.2. Чистые и смешанные стратегии

Определение 14

Пусть имеется два игрока. Чистой стратегией игрока I является выбор одной из n строк матрицы выигрышей A, а чистой стратегией игрока II является выбор одного из столбцов этой же матрицы. Оптимальные чистые стратегии игроков отличаются от смешанных наличием обязательного единичного значения вероятностей i-ой стратегии p_i=1, q_i=1.

Определение 15

Седловая точка - это пара оптимальных стратегий (A_i,B_j). В этом случае число a=b называется (чистой) ценой игры (нижняя и верхняя цена игры совпадают). Это означает, что матрица содержит такой элемент, который является минимальным в своей строке и одновременно максимальным в своем столбце.

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a=min(A_i)$
A_1	8	7	0	6	0
A_2	6	8	5	10	5
b=max(B_i)	8	8	5	10	5

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a=max$ (a_i) = (0,5,5) = 5, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_2. Верхняя цена игры b = min (b_j) = (8,8,5,10) = 5. Седловая точка (2,3) указывает решение на пару альтернатив (A_2,B_3). Цена игры равна 5.

Определение 16

p_i - вероятность применения i-ой стратегии первым игроком, q_i - вероятность применения i-ой стратегии вторым игроком. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока $P(p_i,q_i)$. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока $Q(p_i, q_i)$.

Пример 1

По платёжной матрице найти оптимальные чистые стратегии, используя принцип строгого доминирования.

A_1 A_2 A_3 A_4

B_1	3	1	2	5
B_2	2	0	0	3
B_3	-3	-5	-5	-2
B_4	0	-2	-2	1

Решение:

1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях. Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a=min(A_i)$
A_1	3	1	2	5	1
A_2	2	0	0	3	0
A_3	-3	-5	-5	-2	-5
A_4	0	-2	-2	1	-2
$b=max(B_i)$	3	1	2	5	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a=min(a_i)=1$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_1. Верхняя цена игры $b=max(b_j)=1$. Седловая точка (1,1) указывает решение на пару альтернатив (A_1,B_2). Цена игры равна 1.

2. Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы. Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

Считается, что *i-я* стратегия 1-го игрока доминирует его *k-ю* стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех $j \leq N$ и хотя бы для одного j $a_{ij} > a_{kj}$. В этом случае говорят также, что *i-я* стратегия (или строка) - доминирующая, *k-я* - доминируемая.
Считается, что *j-я* стратегия 2-го игрока доминирует его *l-ю* стратегию, если для всех $j \leq M$ $a_{ij} \leq a_{il}$ и хотя бы для одного i $a_{ij} < a_{il}$. В этом случае *j*-ю стратегию (столбец) называют доминирующей, *l*-ю - доминируемой.
Стратегия A_1 доминирует над стратегией A_2 (все элементы строки 1 больше или равны значениям 2-ой строки), следовательно исключаем 2-ую строку матрицы. Вероятность $p_2=0$.
Стратегия A_1 доминирует над стратегией A_3 (все элементы строки 1 больше или равны значениям 3-ой строки), следовательно исключаем 3-ую строку матрицы. Вероятность $p_3=0$.

3	1	2	5
0	-2	-2	1

С позиции проигрышей игрока B стратегия B_1 доминирует над стратегией B_2 (все элементы столбца 1 больше элементов столбца 2), следовательно исключаем 1-й столбец матрицы. Вероятность q_1=0.
С позиции проигрышей игрока B стратегия B_4 доминирует над стратегией B_1 (все элементы столбца 4 больше элементов столбца 1), следовательно исключаем 4-й столбец матрицы. Вероятность q_4=0.

1	2
-2	-2

Игра 4×4 сведена к игре 2×2.

3. Находим решение игры в смешанных стратегиях.

Решим задачу геометрическим методом, который включает в себя следующие этапы:

1. В декартовой системе координат по оси абсцисс откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка x = 0) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2 (x = 0). Промежуточные точки x соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1=(p_1,p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2.

Решение игры (2x n) проводим с позиции игрока A, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующихся и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет.

Ответ: Цена игры: y=1, векторы стратегии игроков: Q(1,0), P(1,0).

4. Проверим правильность решения игры с помощью критерия оптимальности стратегии.

$\sum a_{ij} q_i \le v$ $\qquad$ $\sum a_{ij} p_i \le v$

$M(P_1;Q)=(1\bullet1)+(2\bullet0)=1=v$

$M(P_2;Q)=(-2\bullet1)+(-2\bullet0)=-2\le v$

$M(P;Q_1)=(1\bullet1)+(-2\bullet0)=1=v$

$M(P;Q_2)=(2\bullet1)+(-2\bullet0)=2\ge v$

Все неравенства выполняются как равенства или строгие неравенства, следовательно, решение игры найдено верно. Поскольку из исходной матрицы были удалены строки и столбцы, то найденные векторы вероятности можно записать в виде: $P(1,0,0,0)$, $Q0,1,0,0)$.

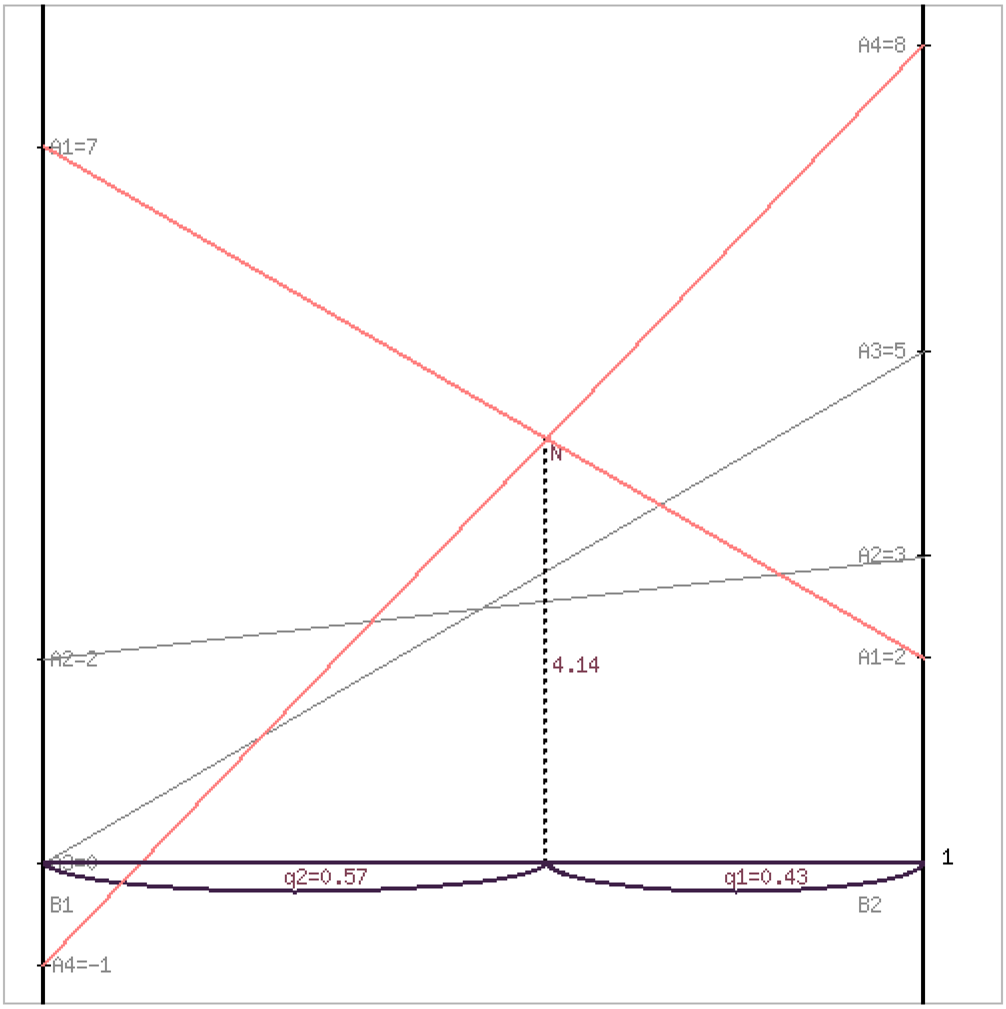

Рис. 1.1. Максиминной оптимальной стратегии игрока A соответствует точка N, для которой можно записать следующую систему уравнений: p_1=1, p_2=0. Цена игры, y=1.Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока В, записав соответствующую систему уравнений q_1=1, q_1+q_2=1. Решая эту систему, находим: q_1=1, q_2=0.

Пример 2

По платёжной матрице найти нижнюю и верхнюю цену игры. При наличии седловой точки записать векторы оптимальных чистых стратегий P^*, Q^*.

	R_1	R_2	R_3
S_1	-6	-5	0
S_2	-8	-3	-2
S_3	-3	-2	3

Решение:

1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

Игроки	B_1	B_2	B_3	$a=min(A_i)$
A_1	-6	-5	0	-6
A_2	-8	-3	-2	-8
A_3	-3	-2	3	-3
$b=max(B_i)$	-3	-2	3	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a=max(a_i)$ = -3, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_3. Верхняя цена игры $b = min\ (b_j)$ = -3. Седловая точка (-3,-3) указывает решение на пару альтернатив (A_3,B_1). Цена игры равна -3.

Ответ: P(0,0,1), Q(1,0,0)

<u>Пример 3</u>

По платёжной матрице найти векторы оптимальных стратегий P^*, Q^*и цену игры. Кто из игроков оказывается в выигрыше?

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	-6	-6	2	4
S_2	2	-2	7	-1

Решение:

1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a=min(A_i)$
A_1	-6	-6	2	4	-6
A_2	2	-2	7	-1	-2
$b=max(B_i)$	2	-2	7	4	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a=max(a_i)$ =-2, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_2. Верхняя цена игры $b = min(b_j)$ =-2. Седловая точка (2,2) указывает решение на пару альтернатив (A_2,B_2). Цена игры равна -2.

3. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Решим задачу геометрическим методом, который включает в себя следующие этапы:

1. В декартовой системе координат по оси абсцисс откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка $x=0$) соответствует

стратегии A_1, правый - стратегии A_2 ($x = 1$). Промежуточные точки х соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1=(p_1,p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2. Решение игры ($2 \ x \ n$) проводим с позиции игрока A, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующихся и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет.

Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока B, записав соответствующую систему уравнений, исключив стратегию B_1, B_3, B_4, которая дает явно больший проигрыш игроку B, и, следовательно, q_1=0, q_3=0, q_4=0, q_2=1.

Ответ: цена игры: y=-2, векторы стратегии игроков: Q(0,1,0,0), P(0,1).

4. Проверим правильность решения игры с помощью критерия оптимальности стратегии.

$\sum a_{ij} q_i \le v$ $\qquad \sum a_{ij} p_i \le v$

$M(P_1;Q)=(-6•0)+(-6•1)+(2•0)+(4•0)=-6\le v$

$M(P_2;Q)=(2•0)+(-2•1)+(7•0)+(-1•0)=-2=v$

$M(P;Q_1)=(-6•0)+(2•1)=2\ge v$

$M(P;Q_2)=(-6•0)+(-2•1)=-2=v$

$M(P;Q_3)=(2•0)+(7•1)=7\ge v$

$M(P;Q_4)=(4•0)+(-1•1)=-1\ge v$.

Все неравенства выполняются как равенства или строгие неравенства, следовательно, решение игры найдено верно.

1.3. Понятие и критерии статистических игр

При решении ряда задач оптимизации может возникнуть проблема принятия решений в условиях неопределённости. Очень часто неопределённость, сопровождающая ту или иную операцию, связана с недостаточной осведомлённостью об условиях, в которых она будет проводиться. Так, например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, покупательский спрос на продукцию определённого вида и т.п. Во всех подобных случаях условия выполнения операции зависят от объективной действительности, которую в теории игр принято называть "природой". Соответствующие ситуации называют "играми с природой" или "статистическими играми".

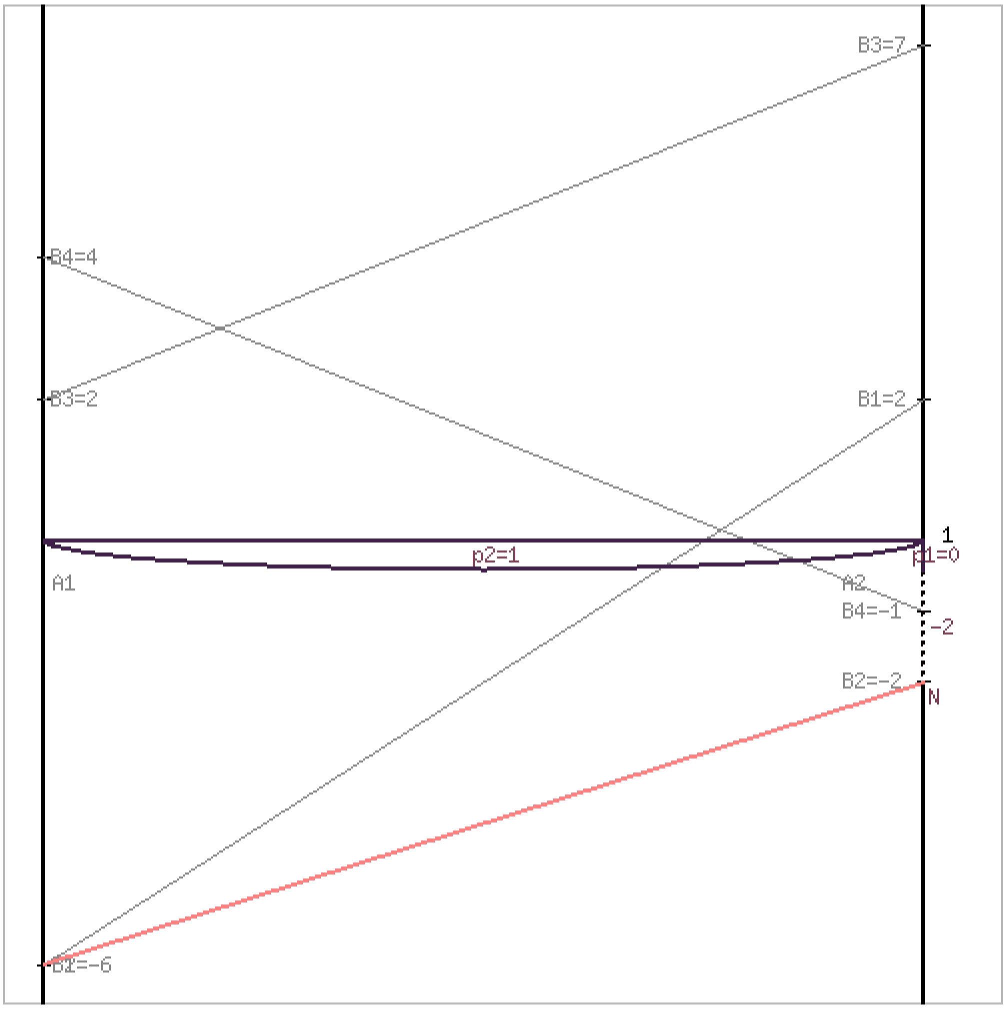

Рис. 1.2. Максиминной оптимальной стратегии игрока A соответствует точка N, для которой можно записать следующую систему соотношений: p_1=0; p_2=1. Цена игры, y=-2.

"Природа" в теории игр рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, поведение которой хотя и неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам. Рассмотрим подобную ситуацию.

Определение 17

Пусть сторона A имеет m возможных стратегий A_1, A_2, ..., A_m. О состоянии "природы" П можно сделать n предположений $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$. Для каждой пары стратегий A_i, $П_j$ ($i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$) существует функция $f(A_i,П_j)$, которая является случайной величиной и называется функцией потерь.

Пусть удаётся определить величину a_{ij} - эффективность решения A_i в условиях $П_j$ - для всех комбинаций пар стратегий A_i, $П_j$. В этом случае платёжная матрица игры имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В теории статистических игр, помимо платёжной матрицы, используется и, так называемая, матрица рисков или матрица сожалений.

Определение 18

Риском стороны A при использовании стратегии A_i в условиях $П_j$ называется величина $r_{ij}=\beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ - максимальный выигрыш стороны A в состоянии "природы" $П_j$.

Рассмотрим критерии выбора оптимальной стратегии в статистической игре.

1. Наиболее просто решается задача о принятии решения в условиях неопределённости, когда, хотя и неизвестны условия выполнения операции $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$, но известны их вероятности q_1, q_2, ..., q_n соответственно. В этом случае в качестве показателя эффективности естественно взять математическое ожидание выигрыша

$$\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \ .$$

1.1. В рамках критерия Байеса (этот критерий также известен как критерий Байеса-Лапласа), за оптимальную чистую стратегию принимается чистая стратегия A_i при которой величина $\overline{a}_i$ достигает наибольшего значения. С помощью этого критерия задача принятия решения в условиях неопределённости сводится к задаче принятия решения в условиях определённости, только принятое решение является оптимальным не в каждом отдельном случае, а в среднем. Данный критерий предполагает возможность использования какой-либо предварительной информации о состояниях природы. При этом предполагается как повторяемость состояний природы, так и повторяемость решений, и, прежде всего, наличие достаточно достоверных данных о прошлых состояниях природы. То есть, основываясь на предыдущих наблюдениях прогнозировать будущее состояние природы (статистический принцип). Следует отметить, что, по критерию Байеса, оптимальной будет та стратегия A_i, при которой минимизируется величина среднего риска

$$\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \ .$$

Это связано с тем, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

1.2. Вероятности q_1, q_2, ..., q_n состояний "природы" $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$ могут быть определены из статистических данных, связанных с многократным выполнением подобных операций или просто с проведением наблюдений над состояниями "природы". Однако часто об этих состояниях нет никаких представлений. В подобных случаях состояния могут быть оценены субъективно: некоторые из них представляются нам более, а другие - менее правдоподобными. Для того чтобы наши субъективные представления формализовать численно, могут применяться различные технические приёмы. Так, если мы не можем предпочесть ни одной гипотезы, то естественно положить состояния "природы" равновероятными

$$q_1=q_2=\ldots=q_n=1/n.$$

Этот подход получил название принципа недостаточного основания Лапласа. В этом случае, как и по критерию Байеса, оптимальной считается та стратегия, при которой максимизируется средняя величина выигрыша.

2. Пусть теперь вероятности состояний "природы" неизвестны. Рассмотрим критерии, которые можно использовать для определения оптимальной стратегии в этом случае.

2.1. Максиминный критерий Вальда.

Согласно этому критерию, в качестве оптимальной выбирается та стратегия A_i, при которой минимальный выигрыш максимален, т.е. стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыш, не меньший, чем максимин

$$\alpha = \max_{1\le i\le m}\left\{\min_{1\le i\le n} a_{ij}\right\}.$$

Если руководствоваться этим критерием, нужно всегда ориентироваться на худшие условия и выбирать ту стратегию, для которой в худших условиях выигрыш максимален.

2.2. Критерий минимаксного риска Сэвиджа.

Этот критерий рекомендует в условиях неопределённости выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (т.е. тогда, когда риск максимален):

$$\rho = \max_{1\le i\le m}\left\{\min_{1\le i\le n} r_{ij}\right\}$$

Сущность этого критерия состоит в том, чтобы любыми путями избежать большого риска при принятии решения. Критерии Вальда и Сэвиджа относятся к группе критериев крайнего пессимизма.

2.3. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.

По критерию Гурвица, оптимальной является та стратегия A_i для которой принимает наибольшее значение величина

$$\lambda \cdot \min_{1\le i\le n} a_{ij} + (1-\lambda)\max_{1\le i\le n} a_{ij},$$

где $\lambda\in[0,1]$.

При $\lambda=1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda=0$ - в критерий крайнего оптимизма, рекомендующий ту стратегию, для которой в наилучших условиях выигрыш максимален.

Пример 4

Планируется проведение операции в заранее неясных условиях, относительно которых можно сделать различные предположения $П_1$, $П_2$, $П_3$. Задана платёжная матрица

$$\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}35 \\ 0{,}25 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

Найдём оптимальную стратегию, пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и критерием Гурвица при λ=0,6.

Решение.

1. Критерий Вальда. В каждой строке платёжной матрицы выбираем наименьший выигрыш и из полученных значений берём наибольшее:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}35 \\ 0{,}25 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}45 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 0{,}15 \\ 0{,}20 \\ 0{,}25 \ * \\ 0{,}05 \end{array} \right.$$

Следовательно, согласно критерию Вальда, оптимальной является стратегия A_3.

2. <u>Критерий Сэвиджа</u>. Построим сначала матрицу сожалений $[r_{ij}]_{4\times 3}$. Для этого вычислим максимальные выигрыши стороны при трёх различных состояниях "природы":

$$\beta_1 = \max\{a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}\} = \max\{0{,}20; 0{,}75; 0{,}25; 0{,}85\} = 0{,}85\,;$$
$$\beta_2 = \max\{a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}\} = \max\{0{,}30; 0{,}20; 0{,}80; 0{,}05\} = 0{,}80\,;$$
$$\beta_3 = \max\{a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}\} = \max\{0{,}15; 0{,}35; 0{,}25; 0{,}45\} = 0{,}45\,.$$

Теперь можем вычислить элементы матрицы сожалений:

$$r_{11} = \beta_1 - a_{11} = 0{,}65\,,\ r_{12} = \beta_2 - a_{12} = 0{,}50\,,\ r_{13} = \beta_3 - a_{13} = 0{,}30\,,$$
$$r_{21} = \beta_1 - a_{21} = 0{,}10\,,\ r_{22} = \beta_2 - a_{22} = 0{,}60\,,\ r_{23} = \beta_3 - a_{23} = 0{,}10\,,$$
$$r_{31} = \beta_1 - a_{31} = 0{,}60\,,\ r_{32} = \beta_2 - a_{32} = 0{,}00\,,\ r_{33} = \beta_3 - a_{33} = 0{,}20\,,$$
$$r_{41} = \beta_1 - a_{41} = 0{,}00\,,\ r_{42} = \beta_2 - a_{42} = 0{,}75\,,\ r_{43} = \beta_3 - a_{43} = 0{,}00\,.$$

Матрица сожалений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}00 & 0{,}20 \\ 0{,}00 & 0{,}75 & 0{,}00 \end{pmatrix}$$

В каждой строке матрицы сожалений выберем наибольший риск и из полученных значений отметим наименьшее:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}00 & 0{,}20 \\ 0{,}00 & 0{,}75 & 0{,}00 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 0{,}65 \\ 0{,}60 \\ 0{,}60 \ * \\ 0{,}75 \end{array} \right.$$

Следовательно, согласно критерию Сэвиджа, оптимальными являются стратегии A_2 и A_3.

3. Критерий Гурвица. В каждой строке платёжной матрицы определяем наименьший и наибольший выигрыши α_i и ω_i соответственно, а затем для каждой строки вычисляем величину $0{,}6\alpha_i+0{,}4\omega_i$ и отмечаем из последней совокупности чисел наибольшее значение:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0,20 & 0,30 & 0,15 \\ 0,75 & 0,20 & 0,35 \\ 0,25 & 0,80 & 0,25 \\ 0,85 & 0,05 & 0,45 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c} 0,15 & 0,30 & 0,21 \\ 0,20 & 0,75 & 0,42 \\ 0,25 & 0,80 & 0,47\,* \\ 0,05 & 0,85 & 0,37 \end{array}$$

Следовательно, согласно критерию Гурвица при λ =0,6оптимальной является стратегия A_3.

1.4. Планирование эксперимента в условиях неопределённости

Пусть некоторую операцию предстоит осуществить в недостаточно ясных условиях. Необходимо выяснить, имеет ли смысл для уточнения условий в этой ситуации предпринимать некоторый эксперимент. Рассмотрим случай идеального эксперимента, приводящего к точному знанию того состояния "природы" Π_j которое имеет место в данной ситуации.

Пусть задана платёжная матрица $[a_{ij}]_{m\times n}$, а также известны вероятности q_j всех состояний "природы" Π_j ($j=\overline{1,n}$). Обозначим через C затраты на проведение эксперимента.

Сравним средний выигрыш с проведением эксперимента и средний выигрыш без проведения эксперимента. Если дополнительно не проводить эксперимента, то в качестве оптимальной необходимо выбрать ту стратегию A_i, для которой достигается

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}. \tag{1.1}$$

Это и будет выигрыш без проведения эксперимента. Теперь предположим, что произведён эксперимент и установлено, какое из состояний Π_1, Π_2, ..., Π_n является действительным состоянием "природы". Пусть этим состоянием является Π_j, тогда выигрыш будет определяться величиной

$$\beta_j = \max_{1\le i\le m} a_{ij}.$$

Осредним этот выигрыш с весами, равными вероятностям q_j:

$$q_1\beta_1+q_2\beta_2+...+q_n\beta_n.$$

С учётом стоимости эксперимента средний выигрыш с применением эксперимента равен величине

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \beta_j - C. \tag{1.2}$$

Тогда, если величина, выражаемая формулой (17), больше величины, выражаемой формулой (16), то эксперимент следует проводить, а если наоборот, то эксперимент проводить не следует:

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\} < \sum_{j=1}^{n} q_j \beta_j - C,$$

откуда получим неравенство

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j \left(\beta_j - a_{ij} \right) \right\}.$$

По определению, величина β_j-a_{ij} выражает риск r_{ij}, поэтому из последнего неравенства получим оценку вида

$$C < \min_i \{\bar{r}_i\}.$$

Получаем следующий вывод: эксперимент целесообразно проводить в том случае, когда затраты на его осуществление меньше величины минимального среднего риска.

Пример 5

Рассматривается статистическая игра, условия которой заданы таблице. Определим, является ли целесообразным проведение "идеального" эксперимента, стоимость которого в тех же единицах, в которых выражен выигрыш, составляет 0,5.

A_i $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	9	4	1	5
A_2	3	8	3	4
A_3	2	6	4	6
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,2	0,5	0,2

Решение Платёжная матрица игры имеет вид

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица сожалений в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим значение среднего риска, для чего определим средние риски при всех состояниях «природы»

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1 = 2{,}5 = \bar{r}_1 \\ 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 2 = 1{,}5 = \bar{r}_2 \\ 0{,}1 \cdot 7 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 0 = 1{,}1 = \bar{r}_3 \end{array} \right.$$

Тогда $\min\limits_{1 \le i \le 3} \{\bar{r}_i\} = 1{,}1$. Поскольку $C = 0{,}5 < \min\limits_i \{\bar{r}_i\} = 1{,}1$ можно сделать вывод о целесообразности проведения идеального эксперимента.

1.5. Решение матричных игр

Рассмотрим конечную игру двух игроков A и B, в которой игрок A может применить одну из m стратегий

$$A_1, A_2, \ldots, A_m,$$

а игрок B - одну из n стратегий

$$B_1, B_2, ..., B_m.$$

Будем предполагать везде далее, что игрок A выигрывает, а игрок B проигрывает.

В теории матричных игр можно показать, что $\alpha \le \beta$ ($\alpha = \max\limits_{1\le i\le m}\left\{\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}\right\}$, $\beta = \min\limits_{1\le j\le n}\left\{\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}\right\}$). Решение матричной игры, т. е. нахождение наилучших способов её ведения, производится по–разному, в зависимости от того, $\alpha=\beta$ или $\alpha<\beta$. Рассмотрим эти случаи.

1. Если $\alpha = \beta$, то величина $\alpha = \beta = V$ называется ценой игры. Подобные игры называются играми с седловой точкой, а элемент платёжной матрицы a_{ij}, соответствующий максиминной (A_i) и минимаксной (B_j) стратегиям игроков, называется седловым элементом (седловой элемент - это элемент платёжной матрицы, наименьший в своей строке и наибольший в своём столбце).

Замечание 2 Оптимальные стратегии игроков в играх с седловой точкой обладают тем свойством, что отклонение от своей оптимальной стратегии только одного игрока может лишь ухудшить положение отклонившегося.

2. Решение матричной игры с $\alpha < \beta$ находят, используя так называемые смешанные стратегии игроков - случайное чередование отдельных чистых стратегий с определённой вероятностью.

Смешанную стратегию игрока A, состоящую из чистых стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$, будем обозначать как вектор

$$p=(p_1, p_2, ..., p_m).$$

Смешанную стратегию игрока B, состоящую из чистых стратегий $B_1, B_2, ..., B_n$ с соответствующими вероятностями $q_1, q_2, ..., q_n$ будем обозначать как вектор

$$q=(q_1, q_2, ..., q_m).$$

При этом, по свойствам вероятности случайного события, необходимо учитывать, что

$$p_i\ge 0,\ q_j\ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Применение игроком A отдельной чистой стратегии A_i ($i = \overline{1,m}$) можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии, в которой вероятность применения им стратегии A_i равна единице, а вероятности применения других стратегий равны нулю. Следовательно, величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B) является случайной величиной с возможными значениями a_{ij} элементов платёжной матрицы.

Определение 19

Средняя величина выигрыша (проигрыша) является функцией от смешанных стратегий и имеет вид

$$f\left(p,q\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j\ .$$

Данная функция называется платёжной функцией игры с платёжной матрицей $[a_{ij}]_{m\times n}$. Пусть $p^*=(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_m)$, $q^*=(q_1,\ q_2,\ ...,\ q_m)$ - оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно. Справедливы неравенства:

$$f(p,q^*)\le f(p^*,q^*)\le f(p^*,q),$$

которые означают, что применение игроком A оптимальной смешанной стратегии p^* гарантирует ему выигрыш, не меньший, чем при применении им любой другой стратегии p; в свою очередь, применение игроком B оптимальной смешанной стратегии q^* гарантирует ему проигрыш, не больший, чем при применении им любой другой стратегии q. Величина $\mathbf{V}=f(p^*,q^*)$ в этом случае определяет цену игры.

Определение 20

Совокупность оптимальных смешанных стратегий p^*, q^* и цены игры $\mathbf{V}$ составляет решение матричной игры.

Оптимальные стратегии и цена игры обладают следующими основными свойствами:

1) $\alpha\le\mathbf{V}\ge\beta$;
2) оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* в матричной игре с платёжной матрицей $[a_{ij}]_{m\times n}$ и ценой игры V будут оптимальными и в матричной игре с платёжной матрицей $[b\cdot a_{ij}+c]_{m\times n}$ и с ценой игры $b\cdot\mathbf{V}+c$, где b и c - постоянны числа, $b\neq0$;
3) применение игроком оптимальной смешанной стратегии, если только он придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, гарантирует ему неизменный выигрыш, равный цене игры, независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за рамки своих активных стратегий.

Замечание 3

На основании свойства 2) платёжную матрицу, содержащую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами.

Замечание 4

На основании свойства 3) матричную игру можно упростить, выявив доминирование одних стратегий над другими. Рассмотрим такую ситуацию.

Определение 21

Для игры с платёжной матрицей $[a_{ij}]_{m\times n}$ рассмотрим две стратегии игрока A: A_p и A_k такие, что

$$a_{pj}\ge a_{kj},\ \ j=\overline{1,n}\ .$$

Стратегия A_p называется доминирующей, а стратегия A_k - доминируемой. Если для той же матричной игры рассмотреть две стратегии игрока B: B_s и B_r такие, что

$$a_{is} \le a_{ir},\ i = \overline{1, m},$$

то стратегия B_s называется доминирующей, а стратегия B_r - доминируемой.

Определение 22

Если в платёжной матрице есть одинаковые строки (столбцы), то соответствующие стратегии игрока *A* (игрока *B*) называются дублирующими.

Определение 23

В матричной игре доминируемые и дублирующие стратегии называются излишними, поэтому их можно опускать, упрощая тем самым матричную игру. Для этого в платёжной матрице вычёркивают строки или столбцы, соответствующие излишним стратегиям игроков.

2. *Поиск экстремальный решений экономических задач*

В данном разделе рассматриваются несколько примеров постановки и решения экстремальных задач.

2.1. О методике оптимизации управления запасами промышленного предприятия

Необходимость максимизации прибыли приводит к необходимости составлять оптимальный план выпуска продукции при имеющихся запасах ресурсов и сокращения издержек. Одной из форм издержек является стоимость хранения запасов. С их увеличением увеличивается и данная стоимость. В тоже время уменьшение запасов ресурсов может привести к остановке производства. В этой ситуации в данной работе предлагается модель управления запасами предприятия. На базе данной модели получено компромиссное значение параметров, позволяющее минимизировать издержки, связанные с наличием запасов. Рассмотрим соотношение для определения издержек в следующей форме

$$I = \frac{ab}{x} + bc + d\,x, \tag{2.1}$$

где x - размер партии товара, a - организационные издержки, b - интенсивность спроса, c - стоимость товара, d - издержки содержания товара. Первое слагаемое функции (2.1) описывает общие организационные издержки, второе слагаемое функции (2.1) описывает стоимость товара, третье слагаемое функции (2.1) описывает общие издержки содержания запасов. Параметры a, b, c и d считается постоянными и известными параметрами. Величину партии товаров, соответствующую минимуму определим в рамках стандартной процедуры поиска экстремума функции, т.е. из условия равенства нулю производной функции издержек I по размеру партии товара x. Данное условие представимо в следующей форме

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{ab}{x^2} + d = 0. \tag{2.2}$$

Решением данного уравнения является следующая величина: $x = \sqrt{ab/d}$. Данный размер партии товаров соответствует минимуму издержек предприятия. Типичная зависимость функции издержек от размера партии товара приведена на рис. 2.1.

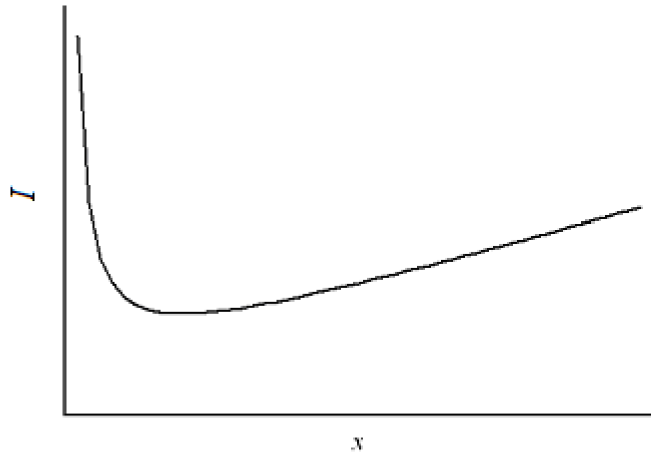

Рис. 2.1. Зависимость функции издержек от размера партии товара

2.2. О методике оптимизации производительности оборудования с учетом себестоимости продукции предприятия

Одним из основных факторов, оптимизирующих функционирование промышленных предприятий, является увеличение прибыли, а также уменьшение себестоимости производства. По этой причине необходима разработка эффективных методов инновационного развития, приводящего к уменьшению накладных расходов при производстве продукции. В данном разделе предложена модель прогнозирования выручки предприятий с учетом изменения объема производимой продукции. Также предложена аналитическая методика прогнозирования производительности оборудования с учетом себестоимости продукции предприятия и проведен ее анализ с целью уменьшения себестоимости. Себестоимость единицы выпускаемой продукции определим с помощью следующего соотношения

$$S = S_1 + S_2 V + S_3/V, \tag{2.3}$$

где V - производительность, считаемая постоянной в течение рабочего периода; коэффициенты S_1, S_2 и S_3 учитывают различные производственные факторы. Например, коэффициент S_1 определяется массой исходного сырья и массой готовой продукции, стоимостью единицы сырья, стоимостью потребляемой энергии; коэффициент S_2 определяется стоимостью используемого сырья; коэффициент S_3 определяется стоимостью потребляемой энергии и зарплатой персонала. Выбор оптимальной производительности определяется с помощью стандартной процедуры, т.е. из условия равенства нулю производной функции (2.3) по производительности предприятия V

$$\frac{\partial S}{\partial V} = S_2 - \frac{S_3}{V^2}. \quad (2.4)$$

Из условия равенства нулю производной (2.4) получаем оптимальное значение производительности

$$V = \sqrt{S_3 S_2^{-1}}. \quad (2.5)$$

В данном разделе проведем анализ производительности продукции в рамках рассматриваемой модели. На рис. 2.2 приведены типичные зависимости себестоимости единицы S выпускаемой продукции от производительности предприятия V при различных значениях коэффициентов S_i. Из данного рисунка следует, что рассматриваемая зависимость может иметь минимум. Координата минимума зависит от значений параметров S_2 и S_3. Данные зависимости являются монотонно возрастающей и монотонно убывающей, соответственно.

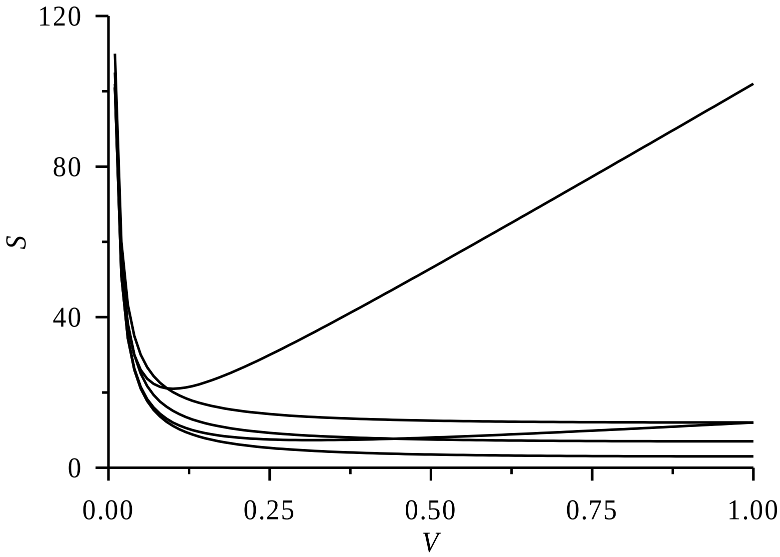

Рис. 2.2. Зависимости себестоимости единицы S выпускаемой продукции от производительности предприятия V при различных значениях коэффициентов S_i

2.3. Максимизация прибыли в условиях изменяющихся цен с учетом ее нелинейности

Необходимость максимизации прибыли приводит к необходимости составлять оптимальный план выпуска продукции при имеющихся запасах ресурсов. Изменение рыночной ситуации приводит к изменению цен в зависимости от объема товара на рынке. Из-за этого при решении задачи максимизации прибыли должна учитываться реакция рынка на выпуск новой партии изделий в виде изменения цен на данный товар (т.е. должна учитываться обратная связь). Данную обратную связь можно учесть как зависимость цен от количества выпущенной продукции в функции прибыли. В данной работе рассматривается максимизация прибыли предприятия, выпускающего несколько видов продукции. Данная максимизация проводится на примере выпуска трех видов продукции. Максимизация прибыли проводится с учетом возможности изменения цен на примере цен зависящих от количества продукции на рынке. В качестве примера рассматривается простейшая зависимость цен от количества продукции на рынке - линейная. Проведем анализ прибыли предприятия на основе изучения функции прибыли

$$L=p_1(x_1)\,x_1+p_2(x_2)\,x_2+p_3(x_3)\,x_3, \tag{2.6}$$

где x_i - количество выпускаемого i-го товара, $p_i(x_i)$ - цена на i-ый товар как функция его количества на рынке. В рамках данного раздела в качестве примера рассмотрим простейшую зависимость цены товара от его количества $p_i(x_i)=a_i-b_ix_i$. Данная зависимость позволяет учесть зависимость цены товара от его количества и одновременно уменьшить объем расчетов. В рамках данной работы рассмотрим ряд ограничений (данное соотношение показывает, что максимальный объем товаров на момент начала продажи фиксирован: например, объем склада ограничен)

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=d_1 \tag{2.7a}$$

и (данное соотношение показывает, что достигнут минимальный объем товаров, с которого начинаются собственное производство или поставки товаров извне)

$$c_4x_1+c_5x_2+c_6x_3=d_2. \tag{2.7b}$$

Далее рассмотрим максимизацию прибыли в рамках математически стандартной процедуры. На первом этапе запишем функцию Лагранжа

$$l=p_1(x_1)x_1+p_2(x_2)x_2+p_3(x_3)x_3+\lambda_1(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3-d_1)+\lambda_2(c_4x_1+c_5x_2+c_6x_3-d_2), \tag{2.8}$$

где λ_i - множители Лагранжа, являющиеся вспомогательным параметром. Далее максимальное значение прибыли определяем в рамках стандартной процедуры поиска условного экстремума, т.е. экстремума (в данном случае - максимума) функции прибыли (2.7) при условиях (2.8). В результате проведенных вычислений получаем координаты искомых максимумов

$$x_1=\left\lfloor a_1(c_2c_6-c_3c_5)^2+a_2(c_1c_6-c_3c_4)(c_2c_6-c_3c_5)+a_3(c_1c_5-c_2c_4)(c_2c_6-c_3c_5)+2b_2\times\right.$$
$$\left.\times(c_1c_6-c_3c_4)(d_1c_6-d_2c_3)+2b_3(c_1c_5-c_2c_4)(d_1c_5-d_2c_2)\right]\left\lfloor 2b_1(c_2c_6-c_3c_5)^2+2b_2\times\right.$$
$$\left.\times(c_1c_6-c_3c_4)^2+2b_3c_1c_5(c_1c_5-c_2c_4)^2\right]^{-1},$$

$$x_2=\left\{2b_1(c_6-c_3)d_1(c_2c_6-c_3c_5)+(c_3c_4-c_1c_6)\left[a_1(c_2c_6-c_3c_5)-(c_1c_6-c_3c_4)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times a_2+a_3(c_1c_5-c_2c_4)\right]+2b_3(c_1d_2-c_4d_1)(c_1c_5-c_2c_4)\right\}\left\lfloor 2b_1(c_2c_6-c_3c_5)^2+2b_3c_1c_5\times\right.$$
$$\left.\times(c_1c_5-c_2c_4)^2+2b_2(c_1c_6-c_3c_4)^2\right]^{-1},$$

$$x_3=\left\{(c_1c_5-c_2c_4)\left[a_1(c_2c_6-c_3c_5)-a_2(c_1c_6-c_3c_4)+a_3(c_1c_5-c_2c_4)\right]+2\,(c_2c_6-c_3c_5)\times\right.$$
$$\left.\times b_2d_1(c_2-c_5)+2b_2(c_1d_2-c_4d_1)(c_1c_6-c_3c_4)\right\}\left\lfloor\, 2b_1(c_2c_6-c_3c_5)^2+2b_2(c_1c_6-c_3c_4)^2+\right.$$

$$+2b_3\left(c_1c_5 - c_2c_4\right)^2\Big]^{-1}.$$

Данные координаты являются объемами продукции, соответствующими максимуму прибыли предприятия. Несколько типичных зависимостей функции прибыли (2.7) от объемов выпускаемых продукций x_i приведены на рисунках 2.3-2.5 при различных значениях параметров.

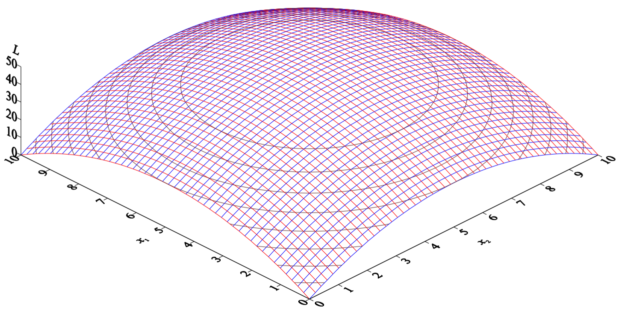

Рис. 2.3. Пример зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_1 и x_2

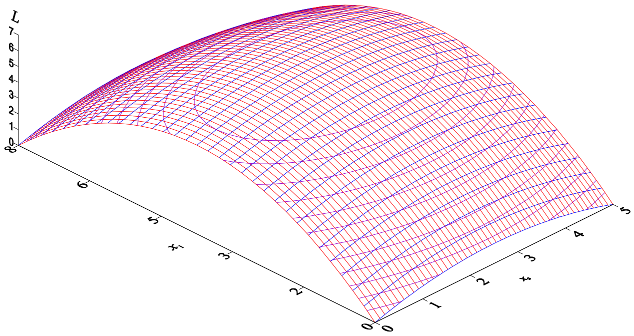

Рис. 2.4. Пример зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_1 и x_3

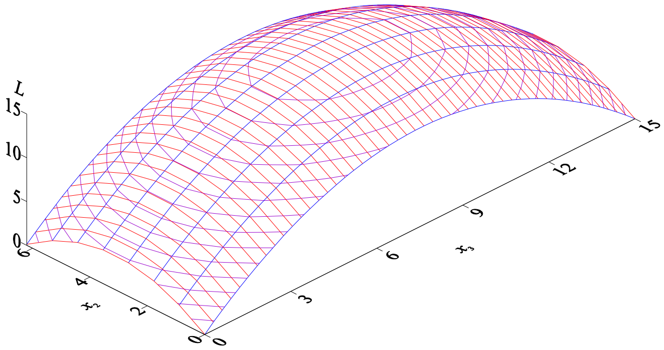

Рис. 2.5. Пример зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_2 и x_3

2.4. О модели прогноза выручки промышленных предприятий

Одним из основных факторов, оптимизирующих функционирование промышленных предприятий, является увеличение прибыли, а также уменьшение накладных расходов. По этой причине необходима разработка эффективных методов инновационного развития и изменения рыночной ситуации, приводящей к изменению цен в зависимости от объема товара на рынке. В данной работе предложена модель прогнозирования выручки предприятий с учетом изменения объема производимой продукции. Также предложена аналитическая методика анализа зависимости величины выручки от различных параметров. В данной работе в качестве модели выручки выберем следующее выражение

$$Q=V\cdot P-V\cdot R-V\cdot T-V\cdot S, \qquad (2.9)$$

где V - объем выпускаемой продукции; P - цена единицы продукции; R - цена сырья, расходуемого на единицу продукции; T - транспортные расходы на единицу продукции; S - зарплата сотрудникам, выплачиваемая за производство единицы продукции. Цена продукции может изменяться в зависимости от ее количества. В рамках данной статьи рассмотрим простейшую (линейную) модель такой зависимости $P(V)=A-B\cdot V$, где A и B - параметры аппроксимирующей функции, учитывающие фактическое изменение цены. С учетом данной аппроксимации соотношение (2.9) принимает следующий вид

$$Q=V\cdot(A-B\cdot V)-V\cdot R-V\cdot T-V\cdot S. \qquad (2.10)$$

Выручка Q зависит от параметров R, T, S, A, B монотонно. Зависимость выручки Q от объема выпускаемой продукции V может быть немонотонной. Экстремальное значение выручки может быть определено стандартно, т.е. из условия равенства нулю соответствующей частной производной: $\partial Q/\partial V=0$. С учетом соотношения (2.10) последнее соотношение имеет вид

$$\partial Q/\partial V=A-2B\cdot V-R-T-S=0. \qquad (2.11)$$

Из соотношения (2.11) можно получить экстремальное значение объема выпускаемой продукции V_{extr}

$$V_{extr}=(A-R-T-S)/2B. \qquad (2.12)$$

Зависимости объема выручки предприятия, а также экстремального значения объема выпускаемой продукции приведены ниже на рисунках. На рис. 2.6 приведены типичные зависимости объема выручки Q от объема выпускаемой продукции V при различных значениях параметров A и B. Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра A (рис. 2.6*а*) и B (рис. 2.6*б*). Зависимости объема выручки от объема выпускаемой продукции при различных значениях параметров R, T, S аналогичны зависимостям, представленным на рис. 2.6*а*. Из данных рисунков следует, что зависимости объема выручки от объема выпускаемой продукции при различных значениях параметров может быть как монотонной, так и немонотонной с явно выраженным экстремальным (в данном случае максимальным) значением, определяемым соотношением (2.12). На рис. 2.7 приведены зависимости объема выручки от параметров R, T, S, A и B. Все зависимости являются прямыми с разными угловыми коэффициентами. В зависимости от значений параметров прогнозируемая прибыль может быть как положительной, так и отрицательной, что соответствует убытку предприятия.

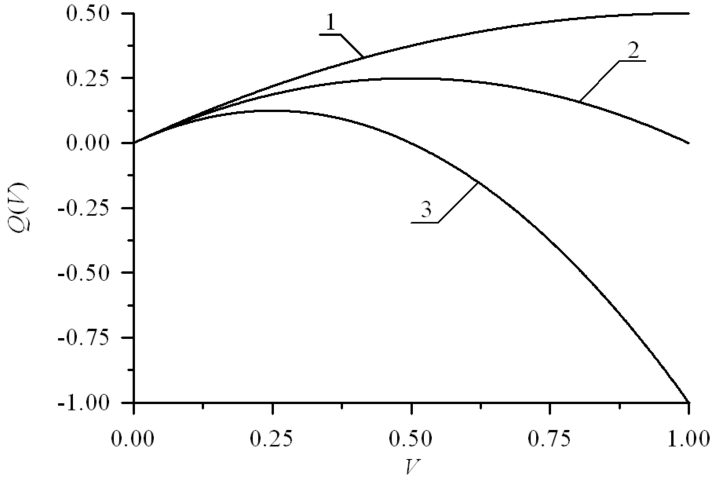

Рис. 2.6*а*. Зависимость выручки Q от объема выпускаемой продукции V при различных значениях параметров R, T, S, A (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра B

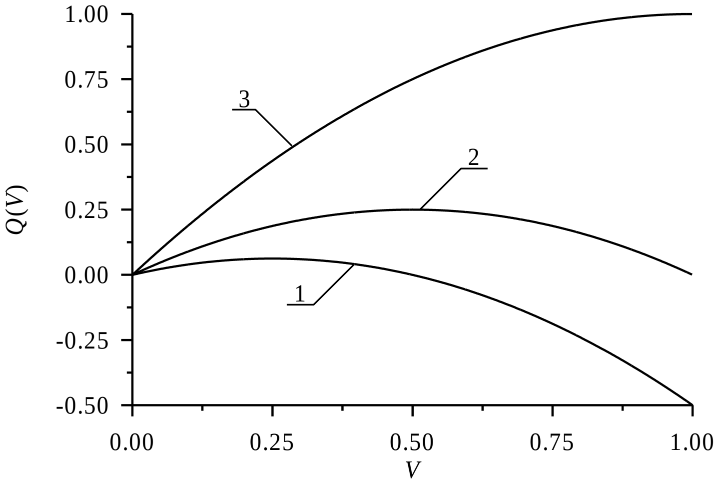

Рис. 2.6*б*. Зависимость выручки Q от объема выпускаемой продукции V при различных значениях параметров R, T, S, B (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра A

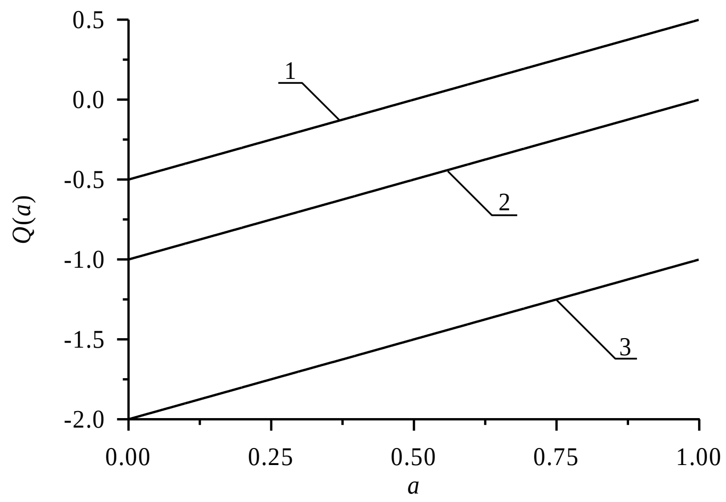

Рис. 2.7*а*. Зависимость выручки *Q* от величины параметра *A* при различных значениях параметров *R, T, S, B* (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра *V*

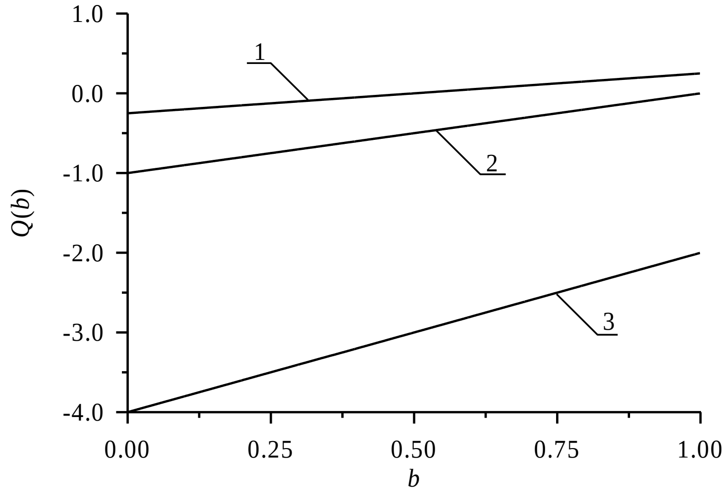

Рис. 2.7*б*. Зависимость выручки *Q* от величины параметра *B* при различных значениях параметров *R, T, S, A* (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра *V*

3. *Анализ изменения экономических процессов во времени*

В данном разделе рассматривается возможность анализа изменений во времени экономических процессов.

3.1. Об аналитической методике анализа активности промышленных предприятий

Одним из важнейших факторов, определяющих повышение конкурентоспособности и успешное функционирование промышленных предприятий, является развитие всех сфер своей деятельности. По этой причине предприятия должны разрабатывать эффективные методы и придерживаться стратегической концепции инновационного развития. В данном разделе предложена модель прогнозирования производственной активности предприятий с учетом изменения объема производимой продукции во времени, а также с учетом изменения ее отгрузки, и на ее основе проведен анализ ее изменения. Данная методика базируется на решении обыкновенного дифференциального уравнения. Описание искомых величин с помощью дифференциальных уравнений позволяет учитывать их мгновенные изменения по сравнению со стационарным описанием. Предложена аналитическая методика решения данного дифференциального уравнения. В рамках данной методики проведем анализ производственной активности предприятий с учетом отгрузки производимой продукции с помощью анализа следующей начальной задачи

$$\frac{dY(t)}{dt} = a \cdot Y(t) + b \cdot Y(t-\tau) + c(t) \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$Y(0)=0, \tag{3.2}$$

где $Y(t)$ - объем отгружаемой продукции; τ - задержка (т.е. $Y(t-\tau)$ - объем отгружаемой продукции с задержкой τ); a и b - коэффициента модели, определяемые эмпирическими данными; $c\,(t)$ - приращение объема продукции за счет ее производства. Данная задержка может быть вызвана ограниченной скоростью производства продукции, ограниченным объемом транспортных единиц и т.д. В рамках данного раздела рассмотрим простейший случай одной задержки. В рамках предложенной методики может быть учтено большее количество задержек. Далее уравнение (3.1) преобразуем к интегральной форме (3.1a)

$$Y(t) = a \cdot \int_0^t Y(\theta)\,d\theta + b \cdot \int_0^t Y(\theta-\tau)\,d\theta + \int_0^t c(\theta)\,d\theta\,. \tag{3.1a}$$

Решим уравнение (3.1) с помощью метода Бубнова-Галеркина. В рамках данного метода будем искать решение данного уравнения в виде суммы экспоненциальных функций

$$Y(t)=d_1e^{-at}+d_2e^{-bt}. \tag{3.3}$$

Данные функции являются наиболее естественными решениями уравнения (3.1) в рамках классической теории дифференциальных уравнений. Подстановка функции (3.3) в уравнение (3.1) позволяет получить

$$d_1e^{-at} + d_2e^{-bt} = a \cdot \int_0^t \left(d_1e^{-a\theta} + d_2e^{-b\theta}\right)d\theta + b \cdot \int_0^t \left(d_1e^{-a\theta}e^{a\tau} + d_2e^{-b\theta}e^{b\tau}\right)d\theta + \int_0^t c(\theta)\,d\theta\,. \tag{3.4}$$

Вычисление интегралов в правой части уравнения позволяет получить

$$d_1e^{-at} + d_2e^{-bt} = d_1\left(1-e^{-at}\right) + d_2\frac{a}{b}\left(1-e^{-bt}\right) +$$

$$+ d_1\frac{b}{a}\left(1-e^{-at}\right)e^{a\tau} + d_2\left(1-e^{-bt}\right)e^{b\tau} + \int_0^t c(\theta)\,d\theta\,. \tag{3.4a}$$

Умножаем левую и правую часть соотношения на e^{-at} или на e^{-bt} и интегрируем от 0 до ∞. В результате данной операции получаем уравнения для вычисления коэффициентов a и b

$$\begin{cases} d_1 \dfrac{b^2 e^{a\tau}}{a(a+b)} + d_2 \dfrac{b e^{b\tau}}{a+b} = -\int\limits_0^\infty e^{-at} c(t) dt \\ d_1 \dfrac{b}{a+b}\left(1 - \dfrac{a}{b} - e^{a\tau}\right) + d_2 \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{b} - e^{b\tau}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-bt} c(t) dt \end{cases} \tag{3.4b}$$

Решение данной системы уравнений приводит к следующему результату

$$d_1 = \frac{e^{a\tau}\int\limits_0^\infty e^{-bt}c(t)dt + a^{-1}b\left(1 - ab^{-1} - e^{a\tau}\right)\int\limits_0^\infty e^{-at}c(t)dt}{\dfrac{1}{2}e^{a\tau}\left(1 - a^{-1}b - e^{b\tau}\right) - \dfrac{e^{b\tau}}{1 + a^{-1}b}\left(1 - \dfrac{a}{b} - e^{a\tau}\right)}$$

(3.5)

$$d_2 = -\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b} + 1\right)\left(1 - \dfrac{a}{b} - e^{b\tau}\right)\int\limits_0^\infty e^{-at}c(t)dt + e^{b\tau}\int\limits_0^\infty e^{-bt}c(t)dt}{\dfrac{b e^{a\tau}}{2a}\left(1 - \dfrac{a}{b} - e^{b\tau}\right) - \dfrac{b e^{b\tau}}{a+b}\left(1 - \dfrac{a}{b} - e^{a\tau}\right)}$$

В простейшем случае при $c = c_0$ получаем

$$\begin{cases} d_1 = 2\dfrac{c_0}{a}\dfrac{(a+b)\left[a^2 e^{a\tau} + b\left(b - a - b e^{a\tau}\right)\right]}{e^{a\tau} b\,(a+b)\left(a - b - a e^{b\tau}\right) - 2a^2 e^{b\tau}\left(b - a - b e^{a\tau}\right)} \\ d_2 = -\dfrac{c_0}{b^2}\dfrac{(a+b)^2\left(b - a - b e^{b\tau}\right) + 2a e^{b\tau}}{e^{a\tau}(a+b)\left(b - a - b e^{b\tau}\right) - 2a e^{b\tau}\left(b - a - b e^{a\tau}\right)} \end{cases} \tag{3.5a}$$

Воспользуемся полученными соотношениями для анализа активности предприятий с учетом изменения объема производимой продукции, а также с учетом изменения ее отгрузки. На рис. 3.1 приведены типичные зависимости объема отгружаемой продукции от времени при различных значениях параметров a и b при постоянном приращении объема продукции c_0. На рис. 3.2 приведены типичные зависимости объема отгружаемой продукции от величины параметра a при различных значениях параметра b, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0. Аналогичными являются зависимости объема отгружаемой продукции от параметра b (см. рис. 3.3). Типичные зависимости объема отгружаемой продукции от задержки τ также являются убывающими функциям (см. рис. 3.4).

Таким образом, с ускорением вывоза отгружаемой продукции уменьшается его количество и необходимо увеличить ее производство. При уменьшении параметров a и b, а также задержки τ объем отгружаемой продукции увеличиваются, что соответствует накоплению объема продукции. В этой ситуации кривые на рисунках 3.1-3.4 будут возрастающими.

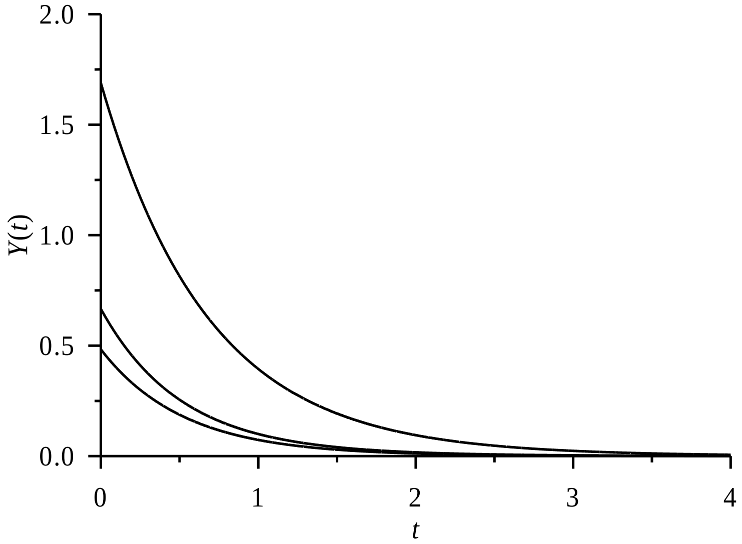

Рис. 3.1. Зависимости объема отгружаемой продукции от времени при различных значениях параметров a и b при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

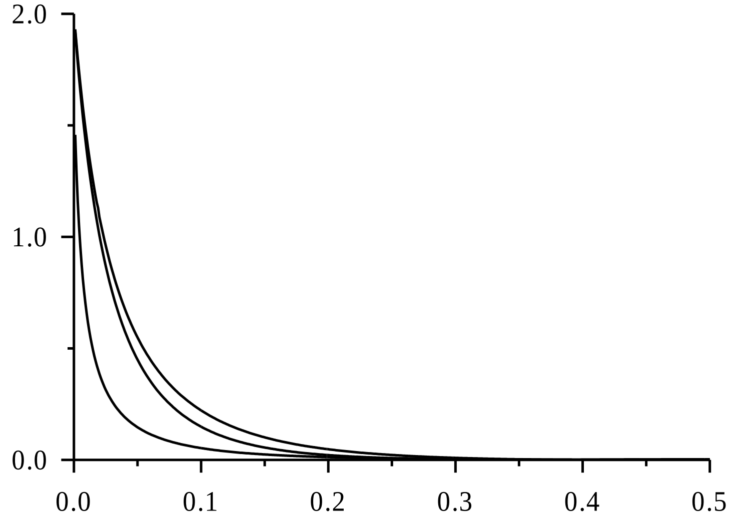

Рис. 3.2. Зависимости объема отгружаемой продукции от величины параметра a при различных значениях параметра b, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

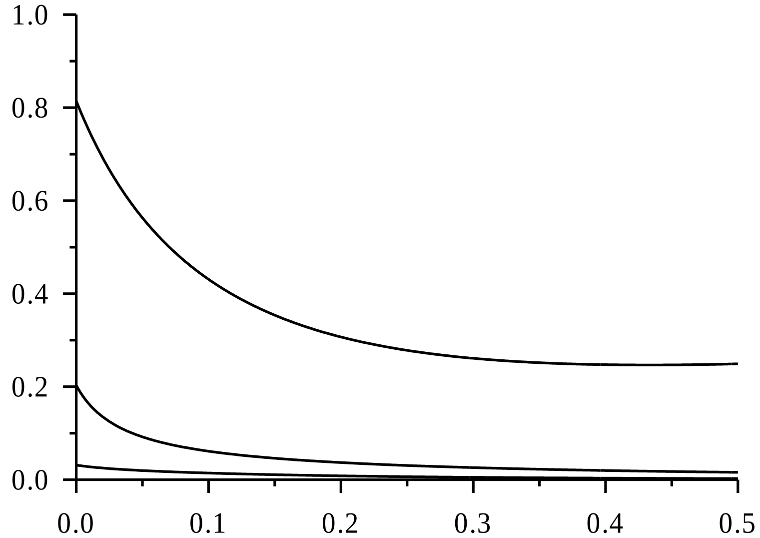

Рис. 3.3. Зависимости объема отгружаемой продукции от величины параметра b при различных значениях параметра a, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

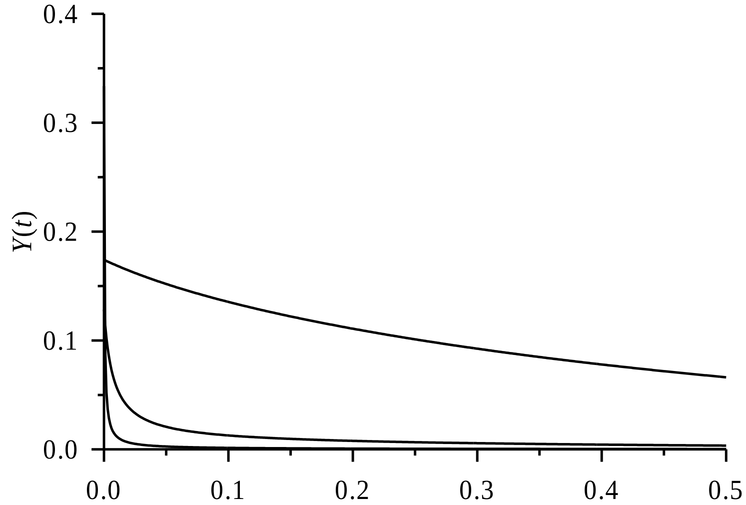

Рис. 3.4. Зависимости объема отгружаемой продукции от величины задержки τ при различных значениях параметров a и b, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0

3.2. Модель экономического роста с учетом влияния окружающей среды

Экологические проблемы являются одними из наиболее значимых для развития экономик: деградация окружающей среды тесно связана с интенсивностью промышленного производства и достигнутым уровнем жизни. В экономике природопользования известна связь воздействия человеческой деятельности на окружающую среду и достигнутого уровня жизни. Значительный интерес представляют математические модели экономического роста, позволяющие учесть экологические факторы. В данной работе предлагается одна из таких моделей. Динамику накопления капитала опишем следующим уравнением

$$\frac{d\,K(t)}{d\,t} = Y(t) - D(t) - a \cdot K(t) \tag{3.6}$$

с начальным условием

$$K(0)=K_0, \tag{3.7}$$

где $K(t)$ - запас капитала; $Y(t)$ - национальный ВВП; $D(t)$ - уровень потребления; a - коэффициент выведения капитала. Уровень потребления и накопление капитала связаны с национальным ВВП следующими соотношениями: $D(t)=d(t)Y(t)$ и $Y(t)=b\,K(t)$, где $d(t)$ - доля ВВП, направляемая на потребление; b - характеристика производительности капитала. С учетом последних соотношений уравнение (1) принимает следующий вид

$$\frac{d\,K(t)}{d\,t} = \{b\,[1-d(t)] - a\}\,K(t). \tag{3.6a}$$

Решение данного уравнения в рамках стандартной процедуры с учетом начального условия (3.7) приводит к следующему результату

$$K(t)=K_0 e^{\int_0^t \{b[1-d(t)]-a\}dt}. \quad (3.8)$$

Данное решение также может быть представлено в следующей форме

$$K(t)=\left\{\int_0^t [Y(\tau)-D(\tau)]e^{a\tau}d\tau+K_0\right\}e^{-at}. \quad (3.8a)$$

В процессе промышленного производства происходит изменение окружающей среды за счет добычи ресурсов и выбросов промышленных отходов. В качестве характеристики состояния окружающей среды используем функцию $E(t)$ под названием “качество окружающей среды”. Данная функция пропорционально объему производства с эластичностью γ

$$E(t)=E_0 Y^{-\gamma}(t). \quad (3.9)$$

В тоже время изменение качества окружающей среды определяется частью добычи ресурса, которая используется для борьбы против загрязнения $F(t)$, и интенсивностью добычи ресурса для экономического роста $G(t)$. Соответствующее уравнение представимо в следующей форме

$$\frac{dE(t)}{dt}=-F(t)-G(t). \quad (3.10)$$

Решение данного уравнения в рамках стандартной процедуры приводит к следующему результату

$$E(t)=E_0-\int_0^t F(\tau)d\tau-\int_0^t G(\tau)d\tau. \quad (3.11)$$

С другой стороны

$$Y(t)=\left[1-\frac{1}{E_0}\int_0^t F(\tau)d\tau-\frac{1}{E_0}\int_0^t G(\tau)d\tau\right]^{-\gamma}. \quad (3.12)$$

В таком случае накопление капитала описывается следующим соотношением

$$K(t)=\left\{\int_0^t\left[\frac{1}{\left[1-\frac{1}{E_0}\int_0^t F(\tau)d\tau-\frac{1}{E_0}\int_0^t G(\tau)d\tau\right]^{\gamma}}-D(\tau)\right]e^{a\tau}d\tau+K_0\right\}e^{-at}. \quad (3.8b)$$

В качестве примера при постоянных значениях функций в правой части соотношения (3.8*b*) $F(t)=F_0$, $G(t)=G_0$, $D(t)=D_0$ и $\gamma=1$ получаем следующую зависимость накопления капитала от времени

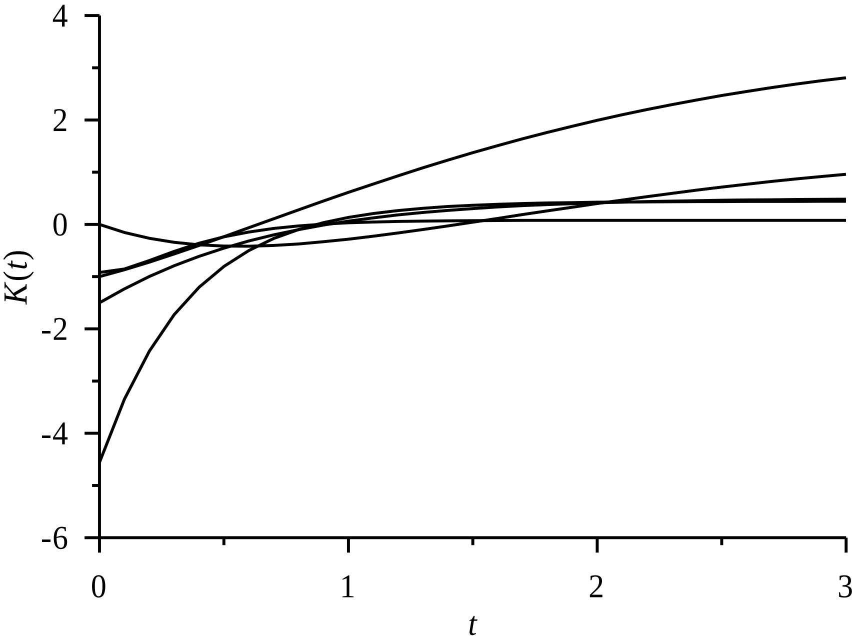

Рис. 3.5. Типичные зависимости величины капитала, описываемого соотношением (3.8с), от времени

$$K(t)=E_0e^{-at}\left[\frac{E_0}{F_0+G_0}\ln\left|1-\left(\frac{F_0+G_0}{E_0}\right)t\right|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_0^n t^n}{n!(F_0+G_0)^n}\right]+\frac{D_0}{a^2}+K_0e^{-at}. \quad (3.8c)$$

На рис. 3.5 приведены типичные зависимости величины капитала, описываемого соотношением (3.8с), от времени.

3.3. Об аналитической методике прогноза конкурентоспособности промышленных предприятий

В современной экономической теории научно-технологический прогресс рассматривается как один из актуальных факторов долговременного экономического роста. Влияние научно-технологического прогресса на отдельную отрасль экономики проявляется в создании новой продукции, которая имеет важные конкурентные преимущества перед уже существующей, или же в модификации (модернизации) уже производимой продукции. Часто новая продукция основана и на новых (инновационных) технологиях. Однако технологическое первенство требует своевременной модернизации производства и обучения персонала, то есть существенных финансовых и организационных вложений. В то же время отказ от перехода к инновационным технологиям может привести к ощутимым потерям рыночных позиций или даже к полному прекращению деятельности организации. В настоящее время одним из важных примеров рынков, для которых характерно вытеснение одних продуктов другими, более привлекательными с технологической точки зрения, является рынок информационно- телекоммуникационных технологий (рынок услуг передачи данных). Перед большинством руководителей предприятий, являющихся поставщиками товаров, и инвесторами актуальным является вопрос о конкурентоспособности предприятий перспективах их развития и его прогнозе. Конкурентоспособность предприятия определяется, в первую очередь, количеством произведенных и реализованных товаров, а также получаемой прибылью. Снижение издержек и расходов приводит к росту конкурентоспособности. На прибыль и издержки влияют множество факторов, изменяющихся во времени. В этой ситуации представляет интерес формирование методики прогноза конкурентоспособности предприятий. Целью данной работы и является формирование такой методики, позволяющей учитывать максимально возможное количество факторов одновременно. Рассмотрим модель конкурентноспособности J промышленных предприятий, выпускающих по одному товару в количестве N_i, где i - номер предприятия. Опишем изменение во времени t количеств товаров и прибылей предприятий $Q_i(t)$ с помощью следующей системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{dN_1(t)}{dt} = r_1 N_1(t) - \frac{1}{K_1} N_1(t) - \sum_{j=2}^{J} \gamma_j N_j(t) \\
\frac{dN_2(t)}{dt} = r_2 N_2(t) - \frac{1}{K_2} N_2(t) - \gamma_1 N_1(t) - \sum_{j=3}^{J} \gamma_j N_j(t) \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
\frac{dN_J(t)}{dt} = r_J N_J(t) - \frac{1}{K_J} N_J(t) - \sum_{j=1}^{J-1} \gamma_j N_j(t) \\
\frac{dQ_1(t)}{dt} = N_1(t) - a_1(t) - b_1(t) - c_1(t) - d_1(t) - e_1(t) - f_1(t) - g_1(t) \\
\frac{dQ_2(t)}{dt} = N_2(t) - a_2(t) - b_2(t) - c_2(t) - d_2(t) - e_2(t) - f_2(t) - g_2(t) \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
\frac{dQ_J(t)}{dt} = N_J(t) - a_J(t) - b_J(t) - c_J(t) - d_J(t) - e_J(t) - f_J(t) - g_J(t)
\end{gathered}
\qquad (3.13)
$$

В системе уравнений (3.13) введены следующие обозначения: K_j - емкость рынка для товара $N_j(t)$; r_j - параметр роста количества товаров; γ_j - параметр конкуренции товаров; $a_j(t)$ - транспортные расходы; $b_j(t)$ - энергетические расходы на производство; $c_j(t)$ - расходы на персонал (зарплата, расходы на обучение и лечение, но при этом $\sum_{j=1}^{J} c_j(t) = c$, т.е. количество сотрудников ограничено и они могут переходить из одной фирмы в другую); $d_j(t)$ - сырье ($\sum_{j=1}^{J} d_j(t) = d$, т.е. количество сырья ограничено); $e_j(t)$ - расходы на исследования (исследования рынка; исследования для развития технологии, в том числе учитывающие амортизацию); $f_j(t)$ - расходы на налоги; $g_j(t)$ - расходы на утилизацию отходов. Начальные условия для функций $N_j(t)$, $Q_j(t)$ представимы в следующей форме

$$N_j(0)=\hat{N}_j\,,\ Q_j(0)=0\,,\ j=\overline{1,n}\,. \qquad (3.14)$$

Решим систему уравнений (3.13) методом осреднения функциональных поправок. При этом в качестве примера анализа конкурентоспособности будем рассматривать простейший случай конкуренции двух предприятий (j =2). В этом случае анализ будет наиболее наглядным. При этом он в рамках изложенной далее процедуры обобщаем на случай большего количества конкурирующих фирм. На первом этапе решения системы уравнений (3.13) преобразуем их от дифференциальной форме к интегральной

$$N_1(t)=r_1\int_0^t N_1(\tau)d\tau-\frac{1}{K_1}\int_0^t N_1(\tau)d\tau-\gamma_2\int_0^t N_2(\tau)d\tau+\hat{N}_1 t$$

$$N_2(t)=r_2\int_0^t N_2(\tau)d\tau-\frac{1}{K_2}\int_0^t N_2(\tau)d\tau-\gamma_1\int_0^t N_1(\tau)d\tau+\hat{N}_2 t$$

$$Q_1(t)=\int_0^t N_1(\tau)d\tau-\int_0^t a_1(\tau)d\tau-\int_0^t b_1(\tau)d\tau-\int_0^t c_1(\tau)d\tau-\int_0^t d_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e_1(\tau)d\tau-\int_0^t f_1(\tau)d\tau-\int_0^t g_1(\tau)d\tau \quad (3.13a)$$

$$Q_2(t)=\int_0^t N_2(\tau)d\tau-\int_0^t a_2(\tau)d\tau-\int_0^t b_2(\tau)d\tau-\int_0^t c_2(\tau)d\tau-\int_0^t d_2(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e_2(\tau)d\tau-\int_0^t f_2(\tau)\,d\tau-\int_0^t g_2(\tau)d\tau$$

В рамках используемого метода заменим в правых частях рассматриваемых уравнений искомые функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ на их неизвестные пока средние значения α_{11} и α_{21}. Подстановка данных значений в рассматриваемые уравнения позволяет получить первые приближения изменений во времени количеств товаров $N_{11}(t)$ и $N_{21}(t)$

$$N_{11}(t)=r_1\alpha_{11}t-\frac{1}{K_1}\alpha_{11}t-\gamma_2\alpha_{12}t+\hat{N}_1 t\,,\ N_{12}(t)=r_2\alpha_{12}t-\frac{1}{K_2}\alpha_{12}t-\gamma_1\alpha_{11}t+\hat{N}_2 t \quad (3.15)$$

Неизвестные средние значения α_{i1} определим с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_{i1}=\frac{1}{\Theta}\int_0^\Theta N_{i1}(t)dt\,,\ i=1,2. \qquad (3.16)$$

Подстановка соотношений (3.15) в соотношение (3.16) позволяет получить следующую систему уравнений для определения искомых средних значений

$$\alpha_{11}=r_1\alpha_{11}\frac{\Theta}{2}-\frac{\alpha_{11}\Theta}{2K_1}-\gamma_2\alpha_{12}\frac{\Theta}{2}+\hat{N}_1\frac{\Theta}{2}\,,\ \alpha_{12}=r_2\alpha_{12}\frac{\Theta}{2}-\frac{\alpha_{12}\Theta}{2K_2}-\gamma_1\alpha_{11}\frac{\Theta}{2}+\hat{N}_2\frac{\Theta}{2}\,. \quad (3.17)$$

Система уравнений (3.17) имеет следующее решение

$$\alpha_{11} = \frac{\hat{N}_2 - \dfrac{\hat{N}_1}{\gamma_2}\left(\dfrac{2}{\Theta} - r_2 + \dfrac{1}{K_2}\right)}{\gamma_1 - \dfrac{1}{\gamma_2}\left(\dfrac{2}{\Theta} - r_1 + \dfrac{1}{K_1}\right)\left(\dfrac{2}{\Theta} + \dfrac{1}{K_2} - r_2\right)},$$

$$\alpha_{12} = \frac{\hat{N}_1}{\gamma_2} - \frac{\left(\dfrac{2}{\Theta} + \dfrac{1}{K_1} - r_1\right)\left[\hat{N}_2 - \dfrac{\hat{N}_1}{\gamma_2}\left(\dfrac{2}{\Theta} + \dfrac{1}{K_2} - r_2\right)\right]}{\gamma_1\gamma_2 - \left(\dfrac{2}{\Theta} - r_1 + \dfrac{1}{K_1}\right)\left(\dfrac{2}{\Theta} + \dfrac{1}{K_2} - r_2\right)}. \qquad (3.18)$$

Приближения второго и более высоких порядков искомых функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$ определяются с помощью их стандартной замены $N_{i1}(t) \to \alpha_{i1} + N_{i-11}(t)$ и $N_{i2}(t) \to \alpha_{i2} + N_{i-12}(t)$ в правой части первых двух уравнений системы (3.13*а*). Вторые приближения количеств определяются следующими соотношениями

$$N_{21}(t) = \alpha_{21} t\left(r_1 - \frac{1}{K_1}\right) + \alpha_{22} t\left(r_1 r_2 \frac{t}{2} - \gamma_2\right) + \alpha_{11}\frac{t^2}{2}\left(\gamma_2\gamma_1 - 2\frac{r_1}{K_1} - \frac{1}{K_1^2}\right) +$$

$$+ \alpha_{12}\gamma_2\frac{t^2}{2}\left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} - r_1 - r_2\right) + r_1\hat{N}_1\frac{t^2}{2} - \frac{\hat{N}_1 t^2}{2K_1} - \gamma_2\hat{N}_2\frac{t^2}{2} + \hat{N}_1 t \qquad (3.19)$$

$$N_{22}(t) = -\alpha_{21}\gamma_1 t + \alpha_{22} t\left(r_2 - \frac{1}{K_2}\right) + \alpha_{11}\frac{t^2}{2}\left(\gamma_1\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} - r_2\gamma_1 - r_1\gamma_1\right) +$$

$$+ \alpha_{12}\frac{t^2}{2}\left(r_2^2 - 2\frac{r_2}{K_2} + \frac{1}{K_2^2} + \gamma_1\gamma_2\right) + r_2\hat{N}_2\frac{t^2}{2} - \frac{\hat{N}_2 t^2}{2K_2} - \gamma_1\hat{N}_1\frac{t^2}{2} + \hat{N}_2 t.$$

Неизвестные средние значения α_{ij} (порядок приближения i ≥ 2) определим с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\left[N_{ij}(t) - N_{ij-1}(t)\right]dt;\ i \geq 2;\ j = 1,2. \qquad (3.20)$$

Подстановка соотношений (3.19) в соотношение (3.20) позволяет получить систему уравнений для определения искомых средних значений

$$\alpha_{21} = \alpha_{21}\frac{\Theta}{2}\left(r_1 - \frac{1}{K_1}\right) + \alpha_{22}\frac{\Theta}{2}\left(r_1 r_2\frac{\Theta}{3} - \gamma_2\right) + \alpha_{11}\frac{\Theta}{2}\left(\gamma_2\gamma_1\frac{\Theta}{3} - 2\frac{r_1\Theta}{3K_1} - \frac{\Theta}{3K_1^2} - r_1 + \frac{1}{K_1}\right) +$$

$$+ \alpha_{12}\gamma_2\frac{\Theta}{2}\left(\frac{\Theta}{3}\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} - r_1\frac{\Theta}{3} - r_2\frac{\Theta}{3} + 1\right) +$$

$$+ \hat{N}_1\frac{\Theta}{2} + r_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6} - \frac{\hat{N}_1\Theta^2}{6K_1} - \gamma_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6} - \hat{N}_1\frac{\Theta}{2} \qquad (3.21)$$

$$\alpha_{22}=-\alpha_{21}\gamma_1\frac{\Theta}{2}+\alpha_{22}\frac{\Theta}{2}\left(r_2-\frac{1}{K_2}\right)+\alpha_{11}\gamma_1\frac{\Theta}{2}\left(\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\frac{\Theta}{3}-r_2\frac{\Theta}{3}-r_1\frac{\Theta}{3}+1\right)+r_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6}+$$

$$+\alpha_{12}\frac{\Theta}{2}\left(r_2^2\frac{\Theta}{3}-2\frac{r_2\Theta}{3K_2}+\frac{\Theta}{3K_2^2}+\gamma_1\gamma_2\frac{\Theta}{3}-r_2+\frac{1}{K_2}\right)-$$

$$-\frac{\hat{N}_2\Theta^2}{6K_2}+\hat{N}_2\frac{\Theta}{2}+\gamma_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6}-\hat{N}_2\frac{\Theta}{2}.$$

Система уравнений (3.21) имеет следующее решение

$$\alpha_{21}=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ \alpha_{22}=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \tag{3.22}$$

где $a_{11}=1+\frac{\Theta}{2K_1}-r_1\frac{\Theta}{2}$, $a_{11}=\frac{\Theta}{2}\left(\gamma_2-r_1r_2\frac{\Theta}{3}\right)$, $a_{21}=\gamma_1\frac{\Theta}{2}$, $a_{22}=1+\frac{\Theta}{2K_2}-r_2\frac{\Theta}{2}$,

$$b_1=\alpha_{11}\frac{\Theta}{2}\left(\gamma_2\gamma_1\frac{\Theta}{3}-2\frac{r_1\Theta}{3K_1}-\frac{\Theta}{3K_1^2}-r_1+\frac{1}{K_1}\right)+\alpha_{12}\gamma_2\frac{\Theta}{2}\left(\frac{\Theta}{3}\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}-r_1\frac{\Theta}{3}-r_2\frac{\Theta}{3}+1\right)+$$

$$+r_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6}-\frac{\hat{N}_1\Theta^2}{6K_1}-\hat{N}_1\frac{\Theta}{2}-\gamma_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6}-\hat{N}_1\frac{\Theta}{2},\ b_2=\alpha_{11}\left(\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\frac{\Theta}{3}-r_2\frac{\Theta}{3}-r_1\frac{\Theta}{3}+1\right)\times$$

$$\times\gamma_1\frac{\Theta}{2}+\alpha_{12}\frac{\Theta}{2}\left(r_2^2\frac{\Theta}{3}-2\frac{r_2\Theta}{3K_2}+\frac{\Theta}{3K_2^2}+\gamma_1\gamma_2\frac{\Theta}{3}-r_2+\frac{1}{K_2}\right)+r_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6}-\frac{\hat{N}_2\Theta^2}{6\,K_2}+\hat{N}_2\frac{\Theta}{2}+$$

$$+\gamma_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6}-\hat{N}_2\frac{\Theta}{2}.$$

В рамках данной работы искомые количества товаров определены во втором приближении по методу осреднения функциональных поправок. Данного приближения обычно достаточно для получения качественных выводов и получения некоторых количественных результатов. Решение второй пары уравнений системы (3.13*a*) определяется интегрированием левых и правых частей. В результате данного интегрирования получаем

$$\begin{cases} Q_1(t)=\int\limits_0^t N_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t a_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t b_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t c_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t d_1(\tau)d\tau- \\ \qquad -\int\limits_0^t e_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t g_1(\tau)d\tau \\ Q_2(t)=\int\limits_0^t N_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t b_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t c_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t d_2(\tau)d\tau- \\ \qquad -\int\limits_0^t e_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t f_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t g_2(\tau)d\tau \end{cases} \tag{3.23}$$

Далее проведем анализ влияния различных параметров на изменение во времени количества производимых товаров и получаемых от их продажи прибыли. На рис. 3.6-3.8 приведены типичные качественные зависимости количества произведенного товара от различных параметров (от времени, емкости рынка, параметра роста количества товаров). Зависимости количества произведенного товара от параметра конкуренции двух товаров аналогичны его зависимостям параметра роста количества товаров. Прибыль со временем будет изменяться быстрее, чем количество произведенного товара. Ее зависимости от емкости рынка, параметра роста количества товаров и параметра конкуренции двух товаров являются аналогичными зависимостям, приведённым на рис. 3.6-3.8. В то же время возможны и качественно другие зависимости прибыли от параметров (см. 3.9-3.11). При этом в рамках предлагаемой модели прибыль может принимать и отрицательные значения. В таком случае приходится обсуждать убытки предприятия, а не его прибыль. Увеличение транспортных, энергетических и прочих расходов приводит к линейному уменьшению прибыли в зависимости от данных параметров. Убывания прибыли во времени зависит от аналогичного изменения рассмотренных расходов. Анализ зависимости прибыли от параметров показывает, что существуют комбинации параметров, при которых (*i*) прибыль предприятия всегда существует и возрастает; (*ii*) прибыль предприятия уменьшается и производство товара постепенно теряет рентабельность; (*iii*) производство бывает временно убыточным и постепенно становится прибыльным с развитием предприятия. При производстве товаров также выполняются естественные с экономической точки зрения частные случаи: (*i*) при удачно выбранной стратегии будет стабильный рост производства товаров; при менее удачно выбранной стратегии (*ii*) производство товаров прекратиться из-за насыщения рынка или из-за слишком высокой себестоимости товара, (*iii*) возможна также задержка в производстве товара из-за необходимости подготовки технологического процесса.

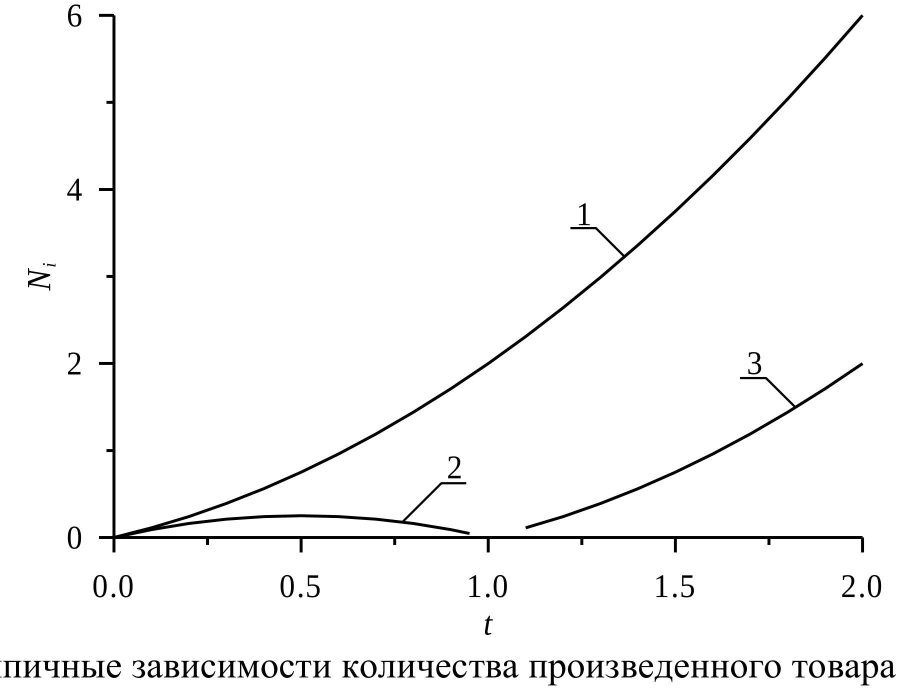

Рис. 3.6. Типичные зависимости количества произведенного товара от времени

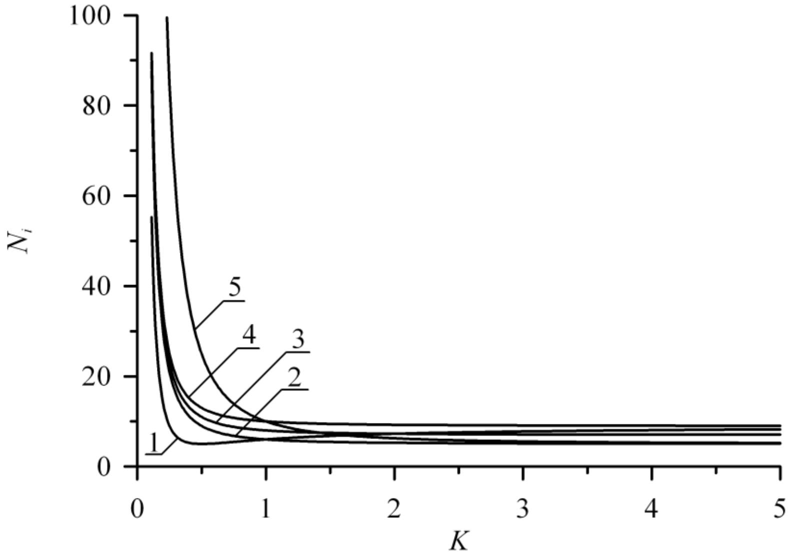

Рис. 3.7. Типичные зависимости количества произведенного товара от емкости рынка

4. *Введение в регрессионный анализ*

Одним способом анализа взаимосвязи исследуемых величин является регрессионный анализ. С помощью регрессионного анализ на основе уже имеющихся экспериментальных данных можно прогнозировать значения исследуемых экономических (и не только экономических) величин. Проиллюстрируем регрессионный анализ на нескольких примерах.

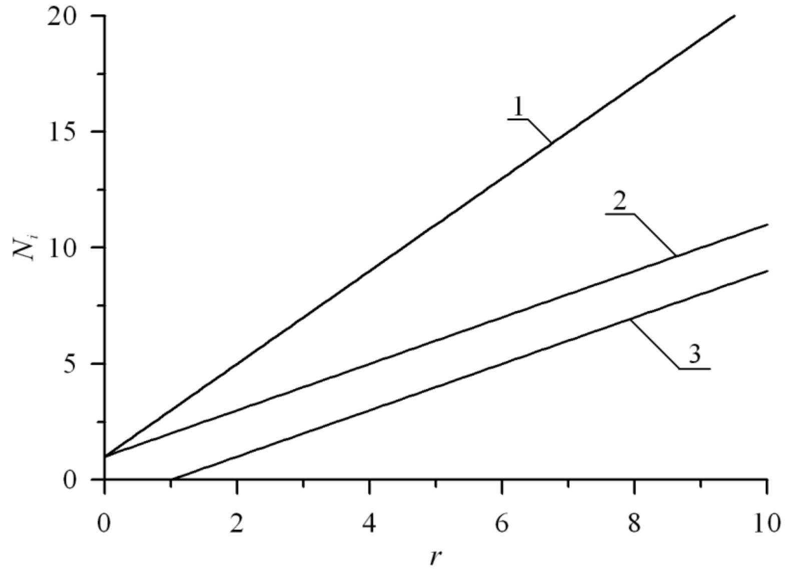

Рис. 3.8. Типичные зависимости количества произведенного товара от параметра роста количества товаров

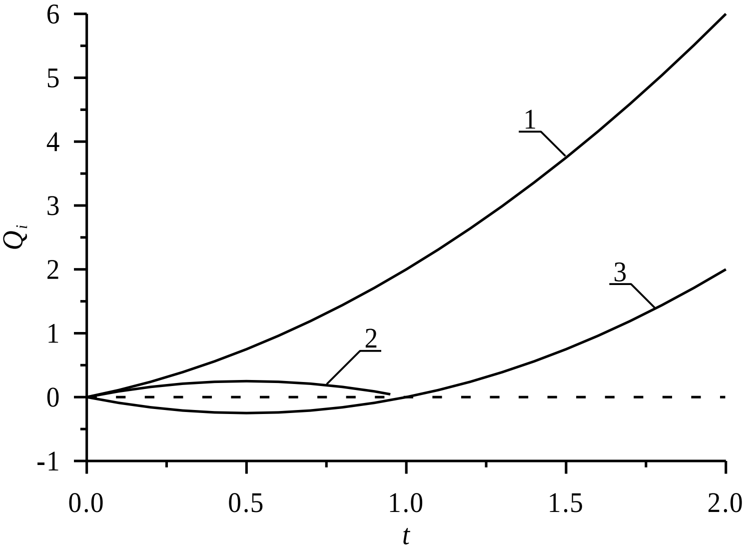

Рис. 3.9. Типичные зависимости прибыли от времени

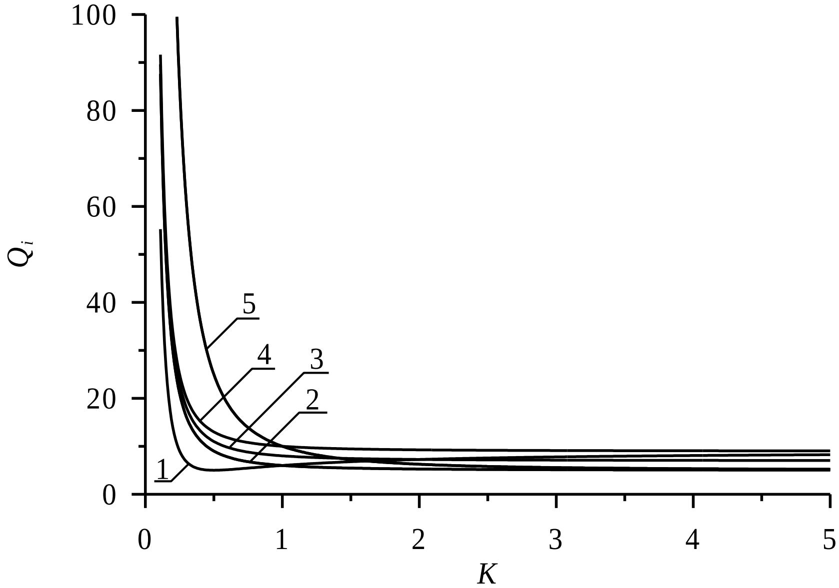

Рис. 3.10. Типичные зависимости прибыли от емкости рынка

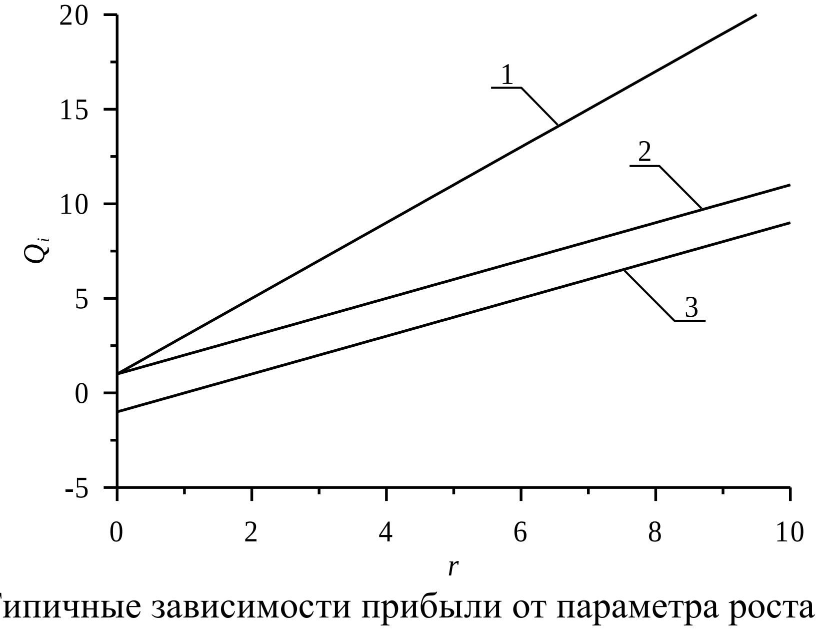

Рис. 3.11. Типичные зависимости прибыли от параметра роста количества товаров

Пример 6

В качестве простейшего примера регрессии рассмотрим линейную зависимость между двумя величинами x и y: $y_i=a\cdot x_i+b$, где a и b - обычно неизвестные (искомые) параметры. Для определения параметров a и b часто из-за простоты этого способа используется минимизация среднеквадратической ошибки

$$U=\sum_{i=1}^{k}\left(y_i-a\sum_{i=1}^{k}x_i-k\cdot b\right)^2. \tag{4.1}$$

Минимизация данной ошибки приводит к необходимости решения следующей системы уравнений для определения параметров a и b:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}y_i=a\sum_{i=1}^{k}x_i+k\cdot b\\ \sum_{i=1}^{k}x_i\cdot y_i=a\sum_{i=1}^{k}x_i^2+b\sum_{i=1}^{k}x_i\end{cases}. \tag{4.2}$$

Решением полученной системы уравнений (4.2) являются следующие значения параметров a и b:

$$a=\frac{k\left(\sum_{i=1}^{k}x_iy_i\right)-\sum_{i=1}^{k}x_i\sum_{i=1}^{k}y_i}{k\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2},\ b=\frac{\sum_{i=1}^{k}y_i\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k}x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)}{k\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2}. \tag{4.3}$$

В итоге получаем линейную модель регрессии:

$$\hat{y}_i=\frac{k\left(\sum_{i=1}^{k}x_iy_i\right)-\sum_{i=1}^{k}x_i\sum_{i=1}^{k}y_i}{k\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2}x_i+\frac{\sum_{i=1}^{k}y_i\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k}x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)}{k\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2}. \tag{4.4}$$

Пример 7

В данном примере регрессии рассмотрим экспоненциальную зависимость между двумя величинами x и y: $y_i=a\cdot exp(x_i)+b$, где a и b - обычно неизвестные (искомые) параметры. Для определения параметров a и b часто из-за простоты этого способа используется минимизация среднеквадратической ошибки. Минимизация данной ошибки приводит к необходимости решения следующей системы уравнений для определения параметров a и b:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}y_i=a\sum_{i=1}^{k}\exp(x_i)+k\cdot b\\ \sum_{i=1}^{k}y_i\cdot\exp(x_i)=a\sum_{i=1}^{k}\exp(2x_i)+b\sum_{i=1}^{k}\exp(x_i)\end{cases} \tag{4.5}$$

Решением полученной системы уравнений (4.5) являются следующие значения параметров a и b:

$$a=\frac{k\left(\sum_{i=1}^{k}y_i\exp(x_i)\right)-\sum_{i=1}^{k}\exp(x_i)\sum_{i=1}^{k}y_i}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\exp(2x_i)},$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{k}y_i\sum_{i=1}^{k}\exp(2x_i)-\left(\sum_{i=1}^{k}y_i\cdot\exp(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\exp(x_i)\right)}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\exp(2x_i)}. \tag{4.6}$$

В итоге получаем экспоненциальную модель регрессии:

$$\hat{y}_i=\frac{k\left(\sum_{i=1}^{k}y_i\exp(x_i)\right)-\sum_{i=1}^{k}\exp(x_i)\sum_{i=1}^{k}y_i}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\exp(2x_i)}\exp(x_i)+$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{k}y_i\sum_{i=1}^{k}\exp(2x_i)-\left[\sum_{i=1}^{k}y_i\cdot\exp(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\exp(x_i)\right]}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\exp(2x_i)}. \tag{4.7}$$

Оценка точности модели

Для оценки точности модели определяют среднюю ошибку аппроксимации, т.е. среднее отклонение расчетных данных от фактически имеющихся. Уменьшение данной ошибки характеризует приближение теоретических значений к имеющимся эмпирическим данным. Средняя ошибку аппроксимации определяется с помощью следующего соотношения:

$$\overline{M}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{y_i-\hat{y}_i}{y_i}\right|\cdot 100\,\%. \tag{4.8}$$

5. ***Модели экономических систем, основанные на случайных процессах***

Экономические системы подвержены влиянию большого числа неуправляемых внешних факторов (погодные условия, внешняя политика, социальные факторы, преднамеренное искажение и сокрытие информации с целью экономической диверсии и т. д.). В этой ситуации параметры в соотношениях разделов 2 и 3 могут принимать случайные значения. Для описания случайных процессов используются различные методы. Один из - описание с помощью моментов. Для его иллюстрации рассмотрим соотношение (2.1) из раздела 2.1, описывающее издержки, возникающие во время выпуска продукции. Размер партии и стоимость товара производитель имеет возможность определять самостоятельно. Остальные параметры могут принимать случайные значения. Будем считать организационные издержки, интенсивность спроса и издержки содержания товара известными случайными величинами. Характеристики издержек, возникающих во время выпуска продукции попробуем определить. На первом этапе определим среднее значение рассматриваемых издержек I

$$\langle I\rangle=\left\langle\frac{ab}{x}+bc+dx\right\rangle. \tag{5.1}$$

С учетом свойств среднего значения правая часть соотношения (5.1) преобразуется к следующей форме

$$\left\langle I \right\rangle = \frac{\left\langle ab \right\rangle}{x} + c\left\langle b \right\rangle + x\left\langle d \right\rangle . \qquad (5.2)$$

Средний квадрат издержек I определяется соотношением

$$\left\langle I^2 \right\rangle = \left\langle \frac{a^2 b^2}{x^2} + b^2 c^2 + d^2 x^2 + 2\frac{ab^2 c}{x} + 2abd + 2bcd\,x \right\rangle . \qquad (5.3)$$

С учетом свойств среднего значения правая часть соотношения (5.3) преобразуется к следующей форме

$$\left\langle I^2 \right\rangle = \frac{\left\langle a^2 b^2 \right\rangle}{x^2} + c^2\left\langle b^2 \right\rangle + x^2\left\langle d^2 \right\rangle + 2\frac{c}{x}\left\langle ab^2 \right\rangle + 2\left\langle abd \right\rangle + 2cx\left\langle bd \right\rangle . \qquad (5.4)$$

Аналогично можно определить средние значения рассматриваемых издержек следующих порядков. При этом информация о случайных величинах a, b и d должна быть полной. Случайный процесс также может быть описан с помощью плотности вероятности. Рассмотрим случайный процесс $\xi\,(t)$. Зафиксируем моменты времени t_1, t_2, ..., t_n. Вероятность того, что значение $\xi(t_n)$ находится в интервале $\xi(t_n)\in[x_n, x_n+d\,x_n]$, если в момент времени t_1 случайный процесс имеет значение x_1, в момент времени t_2 случайный процесс имеет значение x_2, ..., в момент времени t_{n-1} случайный процесс имеет значение x_{n-1}, равна произведению условной плотности вероятности на длину интервала: $P=W(x_1,t_1; x_2,t_2; ...; x_{n-1},t_{n-1}|\, x_n,t_n)\,d\,x_n$. В общем случае рассматриваемая вероятность зависит от всех значений x_n,t_n. С одной стороны имеется более точная модель случайного процесса, но ее тяжелее исследовать. В этой ситуации представляют компромиссные модели, позволяющие упростить описание процессов и максимально сохранить его адекватность. В качестве одной из наиболее простых моделей рассматривается марковский процесс: при анализе марковских процессов учитывается только одно его предыдущее значение x_{n-1}. Его плотность вероятности описывается с помощью уравнения Фокера-Планка

$$\frac{\partial\, W(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \left[D(x,t)\, W(x,t) \right]}{\partial x^2} - \frac{\partial \left[K(x,t)\, W(x,t) \right]}{\partial x}, \qquad (5.5)$$

где $D\,(x,t)$ - коэффициент диффузии, $K\,(x,t)$ - коэффициент сноса. При постоянных значениях коэффициентов диффузии D_0 и сноса K_0 уравнение (5.5) упрощается

$$\frac{\partial\, W(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - K_0 \frac{\partial\, W(x,t)}{\partial x} . \qquad (5.5a)$$

Существуют различные методы решения дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим метод разделения переменных Фурье. Предварительно необходимо дополнить уравнение (5.5) граничными и начальным условием. В качестве примера используем следующие условия: $W\,(0,t)=0$; $W(L,t)=0$; $W(x,0)=f(x)$. Далее будем искать решение уравнения (5.5*a*) в виде произведения: $W(x,t)=A(x)\,B(t)$. Подстановка данного произведения в уравнение (5.5*а*) позволяет получить

$$A(x)\frac{\partial\, B(t)}{\partial t}=D_0 B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}-K_0 B(t)\frac{\partial\, A(x)}{\partial x}. \qquad (5.6)$$

Далее разделим обе части уравнения (5.6) на произведение функций $A(x)B(t)$. В результате этого деления получаем следующее уравнение

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial\, B(t)}{\partial t}=\frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}-\frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial\, A(x)}{\partial x}. \qquad (5.7)$$

Теперь переменные разделены: левая часть уравнения зависит только от переменной t, а правая - только от переменной x. Это возможно только тогда, когда обе части уравнений имеют постоянное значение. Пусть постоянное значение будет обозначено как γ, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial\, B(t)}{\partial t}=\frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}-\frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial\, A(x)}{\partial x}=\gamma .$$

Полученное соотношение представляет собой два уравнения: одно - для функции $A(x)$, другое - для функции $B(t)$, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial\, B(t)}{\partial t}=\gamma;\quad \frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}-\frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial\, A(x)}{\partial x}=\gamma .$$

Решения этих уравнений представимы в следующей форме

$$B(t)=C_B e^{\gamma t},$$

$$A(x)=C_{A1}\exp\left[t\frac{K_0}{D_0}\left(1+\sqrt{1+4\gamma\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right]+C_{A2}\exp\left[t\frac{K_0}{D_0}\left(1-\sqrt{1+4\gamma\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right],$$

где C_B, C_{A1} и C_{A2} - постоянные интегрирования. Следует заметить, что неограниченный рост величин невозможен. По этой причине будем считать, что постоянная разделения может принимать только γ отрицательные значения, т.е. $\gamma = -|\beta|$. Далее знак модуля будем опускать подразумевая параметр β положительным. Такое же ограничение имеется на функциональную зависимость решения от переменной x. Тогда

$$B(t)=C_B e^{-\beta t},$$

$$A(x)=C_{A1}\exp\left[x\frac{K_0}{D_0}\left(1+\sqrt{1-4\beta\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right]+C_{A2}\exp\left[x\frac{K_0}{D_0}\left(1-\sqrt{1-4\beta\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right].$$

Далее определим постоянные интегрирования. Для этого функцию $A(x)$ представим с использованием гармонических функций, т.е.

$$A(x)=C_{A1}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\cos\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)+C_{A2}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right).$$

В окончательной форме плотность вероятности $W(x,t)$ представима в следующей форме

$$W\left(x,t\right)=C_B e^{-\beta t}\left[C_{A1}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\cos\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)+\right.$$

$$\left.+C_{A2}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)\right].$$

Далее постоянные интегрирования определим с помощью граничных условий. На первом этапа воспользуемся условием в точке x=0. Тогда

$$W\left(0,t\right)=C_B e^{-\beta t}\left[C_{A1}+0\right]=0.$$

В этом случае произведение постоянных интегрирования C_B и C_{A1} равно нулю. Тогда выражение для плотности вероятности упрощается

$$W\left(x,t\right)=C_B C_{A2} e^{-\beta t}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right).$$

Далее воспользуемся вторым граничным условием в точке x $=L$. Его использование приводит к следующему соотношению

$$W\left(L,t\right)=C_B C_{A2} e^{-\beta t}\exp\left(L\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{L}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)=0.$$

Из данного соотношения определяется модуль постоянной разделения β из соотношения $\sin\left(LD_0^{-1}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)=0$, что эквивалентно соотношению $LD_0^{-1}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}=\pi n$, где n=1, 2, 3, ...

$$\beta_n=\frac{\pi^2 n^2 D_0^2 L^{-2}+K_0^2}{4D_0}.$$

Получили бесконечный набор дискретных значений модуля постоянной разделения β. В этом случае плотность вероятности $W(x,t)$ представляется в виде ряда, учитывающего все значения β_n, т.е.

$$W\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{Bn}C_{A2n}e^{-t\frac{\pi^2 n^2 D_0^2+K_0^2 L^2}{4D_0 L^2}}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Неизвестным пока остается произведение постоянных интегрирования C_{Bn} и C_{A2n}. Для определения этого произведения используется начальное условие. Предварительно представим начальное распределение плотности вероятности в виде ряда Фурье

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L f\left(x\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Тогда из равенства $W(x,0)=f(x)$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{Bn} C_{A2n} \exp\left(x \frac{K_0}{D_0} \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{L} \right) \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L} \right) d\, x .$$

Приравнивая члены ряда при одинаковых значениях их номера *n* получаем

$$C_{Bn} C_{A2n} = \exp\left(-x \frac{K_0}{D_0} \right) \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L} \right) d\, x .$$

В окончательной форме получаем плотность вероятности в следующей форме

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t \frac{\pi^2 n^2 D_0^2 + K_0^2 L^2}{4 D_0 L^2}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L} \right) \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L} \right) d\, x .$$

При постоянных значениях коэффициентов диффузии и сноса уравнение (5.5) точное решение удается получить редко. Рассмотрим приближенные методы решения данного уравнения. Для этого предварительно представим коэффициенты $D(x,t)$ и $K(x,t)$ в виде следующих сумм:

$$D(x,t)=D_0[1+\varepsilon\cdot g(x,t)],\ K(x,t)=K_0[1+\xi\cdot h(x,t)], \tag{5.6}$$

где $|g(x,t)|\leq 1$, $|h(x,t)|\leq 1$, $0\leq \varepsilon <1$, $0\leq \xi <1$, D_0 и K_0 - средние значения рассматриваемых коэффициентов. Далее будем искать решение уравнения (5.5) в виде следующего ряда

$$W(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l W_{kl}(x,t). \tag{5.7}$$

Подстановка данного ряда и соотношений (5.6) в уравнение (5.5) позволяет получить следующий результат

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l \frac{\partial W_{kl}(x,t)}{\partial t} = D_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l \frac{\partial^2 \{[1+\varepsilon \cdot g(x,t)] W_{kl}(x,t)\}}{\partial x^2} -$$

$$- K_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l \frac{\partial \{[1+\xi \cdot h(x,t)] W_{kl}(x,t)\}}{\partial x}. \tag{5.8}$$

Группировка коэффициентов при одинаковых степенях параметров ε и ξ позволяет получить уравнения для функций $W_{kl}(x,t)$

$$\frac{\partial W_{kl}(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 W_{kl}(x,t)}{\partial x^2} + D_0 \frac{\partial^2 [g(x,t) \cdot W_{k-1l}(x,t)]}{\partial x^2} -$$

$$- K_0 \frac{\partial W_{kl}(x,t)}{\partial x} - K_0 \frac{\partial [h(x,t) \cdot W_{kl-1}(x,t)]}{\partial x},\ k\geq 0,\ l\geq 0. \tag{5.9}$$

Граничные и начальные условия для функций, описываемых полученными уравнениями, имеют следующий вид

$$W_{kl}(0,t)=0,\ W_{kl}(L,\mathrm{t})=0,\ k\geq 0,\ l\geq 0;\ W_{00}(x,0)=f(x),\ W_{kl}(x,\mathrm{t})=0,\ k\geq 1,\ l\geq 1. \tag{5.10}$$

Уравнения для функций $W_{kl}(x,t)$ могут быть решены методом разделения переменных Фурье, а также другими методами.

ПРИЛОЖЕНИЕ К РАЗДЕЛУ 5

В данном разделе приведены наиболее распространенные для описания экономических процессов плотности вероятности.

Гамма-распределение

Для прогноза распределения убытка при страховании часто используется гамма -распределение с параметризацией с участием математического ожидания μ. Плотность вероятности в данном случае описывается с помощью следующей функции:

$$f\left(x\right)=\frac{x^{a-1}}{\Gamma\left(a\right)}\left(\frac{a}{\mu}\right)^{a}e^{-\frac{a\,x}{\mu}},\ x>0, \qquad (\Pi.1)$$

где a - параметр формы ($a>0$, рис. П.1).

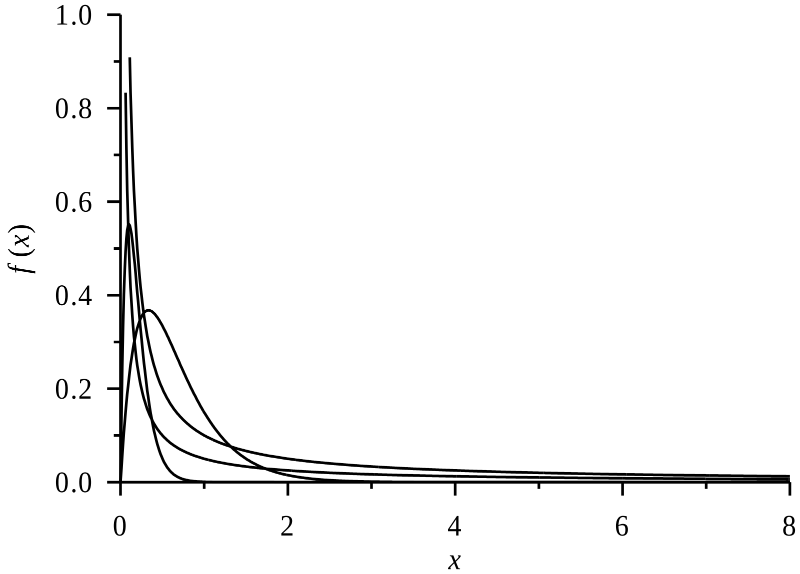

Рис. П.1. Плотность вероятности гамма-распределения в зависимости от параметра формы a

В соотношении (П.1) использована гамма-функция Эйлера, определяемая с помощью следующего соотношения: $\Gamma\left(a\right)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}t^{a-1}d\,t$. Гамма-функция обладает следующими свойствами:

1) $\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a)$ для любых $a>0$;

2) если a - натуральное число, то: $\Gamma(a+1)=a!$;

3) $\Gamma(1)=1$; $\Gamma\left(0{,}5\right)=\sqrt{\pi}$.

Основные характеристики гамма-распределения с параметризацией:

- среднее значение равно $<x>=\mu$;
- дисперсия $D(x)=\mu^2/a$;
- коэффициент вариации $K=1\big/\sqrt{a}$;
- коэффициент асимметрии $A=2\big/\sqrt{a}$.

Оценки параметров методом моментов по выборочным данным находят как: $\hat{\mu} = \hat{x}$, $\hat{a} = \dfrac{\hat{x}^2}{\hat{D}}$, где $\hat{x}$ - среднее арифметическое (выборочная средняя) ущерба; $\hat{D}$ -выборочная дисперсия ущерба. Гамма-распределение может считаться вполне реалистичной моделью для совокупного и нормированного убытков группы одинаково распределенных независимых рисков. Гамма-распределение обладает следующим свойством: сумма независимых гамма-распределенных рисков имеет гамма-распределение и в том случае, если параметры μ_i и a_i не одинаковы для всех рисков, но постоянно их отношение μ_i/a_i. Это дает возможность прогнозировать общий убыток группы рисков с разными страховыми суммами с помощью гамма-распределений.

Обратное нормальное (гауссовское) распределение

Обратное нормальное (гауссовское) распределение применяется для моделирования неотрицательных случайных величин, у которых правая сторона кривой распределения имеет более пологий вид, чем левая. В то время как нормальная случайная величина, может принимать и отрицательные значения. При моделировании убытка, возникающего при страховании, часто используют обратное гауссовское распределение с параметризацией с участием математического ожидания μ, плотность вероятности которого имеет вид, приведенный на рис. П.2:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\mu a}}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\left(\sqrt{\frac{x}{\mu}}-\sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)^2 \frac{a}{2}},\ a>0,\ \mu>0,\ x>0. \qquad (\text{П.2})$$

Случайная величина, распределенная по обратному гауссовскому закону, может принимать только положительные значения. Параметр μ - параметр положения, совпадающий с математическим ожиданием случайной величины так же, как и для нормального закона распределения. Параметр a - параметр формы, при увеличении которого $a \to \infty$ кривая плотности обратного нормального распределения становится больше похожа на нормальное распределение. Поэтому в актуарных расчетах, как и в случае с гамма-распределением, используется a <1. Основные характеристики обратного гауссовского распределения с параметризацией:

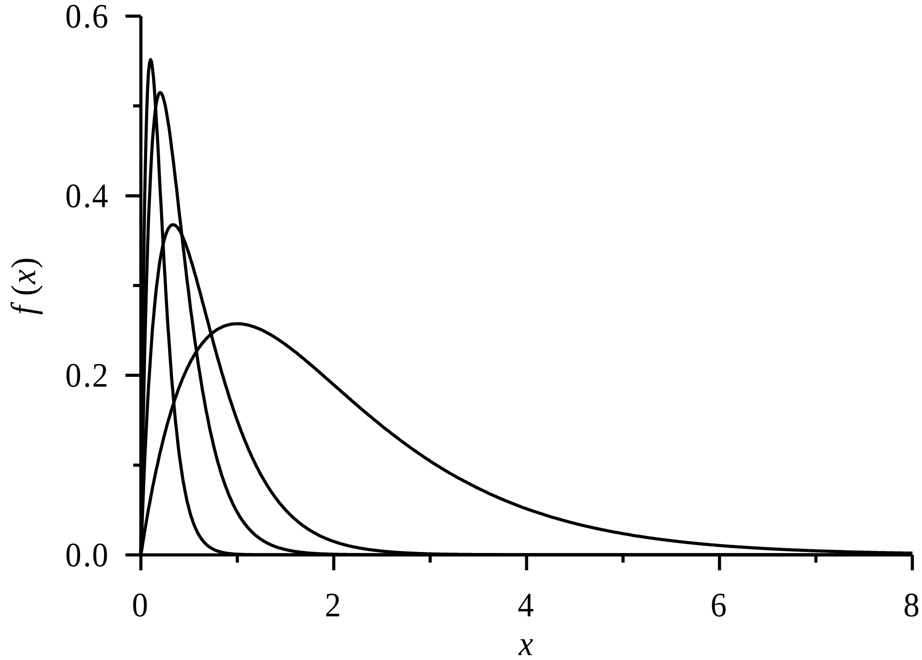

Рис. П.2. Плотность вероятности обратного гауссовского распределения

- среднее значение равно $\langle x \rangle = \mu$;
- дисперсия $D(x)=\mu^2/a$;
- коэффициент вариации $K = 1/\sqrt{a}$;
- коэффициент асимметрии $A = 3/\sqrt{a}$.

Оценки параметров методом моментов определяются с помощью следующих соотношений: $\hat{\mu} = \hat{x}$, $\hat{a} = \hat{x}^2/\hat{D}$.

Обратное гауссовское распределение также может считаться вполне реалистичной моделью для совокупного и нормированного убытков группы одинаково распределенных независимых рисков и во многом схоже с гамма-распределением. Как и гамма-распределение, обратное гауссовское подходит для моделирования распределения совокупного убытка с разными страховыми суммами. Одно из преимуществ по сравнению с гамма-распределением - возможность выражения функции распределения через стандартное нормальное распределение и его табулированную функцию распределения:

$$F(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{a\,x}{\mu}} - \sqrt{\frac{a\,\mu}{x}}\right) + e^{2a} \cdot \Phi\left(-\sqrt{\frac{a\,x}{\mu}} - \sqrt{\frac{a\,\mu}{x}}\right).$$

<u>Логнормальное распределение</u>

Непрерывная случайная величина X имеет логарифмически нормальное (логнормальное) распределение с параметрами μ и σ, если ее логарифм подчинен нормальному закону, и функция плотности вероятностей имеет вид (рис. П.3):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[\ln(x)-\mu]^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}. \qquad (\text{П.3})$$

Логарифмически нормальная величина принимает только положительные значения. Поскольку при $X>0$ неравенства $X<x$ и $ln(X)<ln(x)$ равносильны, то функция распределения логнормального распределения совпадет с функцией нормального распределения случайной величины $ln(x)$:

$$F(x)=P(X<x)=P(\ln(X)<\ln(x))=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln(x)}e^{-\frac{[t-\mu]^2}{2\sigma^2}}dt=\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi\ (t)$ - функция распределения стандартной нормальной величины следующего вида: $\Phi\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

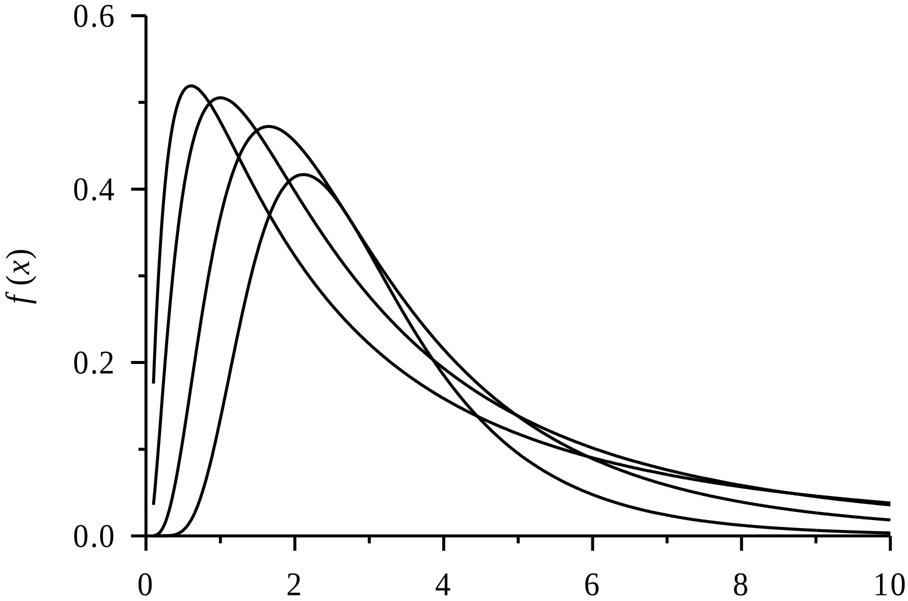

Рис. П.3. Плотность вероятности логнормального распределения

Параметр μ - параметр масштаба. Если в нормальном законе распределения параметр μ выступает в качестве среднего значения случайной величины *X*, то в логнормальном - в качестве медианы случайной величины *X*. Как и в случае нормального распределения, плотность вероятности логнормального распределения нельзя проинтегрировать для получения функции распределения вероятностей в явном виде. Однако значения интегральной функции логнормального распределения можно найти, используя значения интегральной функции стандартного нормального распределения. Логнормальное распределение имеет крутой левый и пологий правый спуск, т.е. положительную асимметрию. При увеличении параметра μ кривая плотности распределения вероятности будет сдвигаться вправо, приближаясь к нормальной кривой. Параметр σ - стандартное отклонение величины $ln\,(x)$ - параметр формы. Чем меньше σ, тем асимметричнее кривая, поэтому в актуарных расчетах логнормальное распределение применимо, только если σ принимает небольшие значения, меньше параметра μ. Основные количественные характеристики логнормальной величины:

- математическое ожидание равно $<x>=exp(\mu+\sigma^2/2)$;
- дисперсия $D(x)=exp(2\mu+\sigma^2)[\,exp(\sigma^2)-1]$;
- коэффициент вариации $K=\sqrt{\exp\left(\sigma^2\right)-1}$;
- коэффициент асимметрии $A=\left[\exp\left(\sigma^2\right)+2\right]\sqrt{\exp\left(\sigma^2\right)-1}$.

Статистические оценки параметров μ и σ логнормального распределения на основе данных выборки можно определить методом моментов: $\hat{\mu}=\overline{\ln(x)}$, $\hat{\sigma}=\sqrt{\overline{D(x)}}$.

Логнормальное распределение образуется в результате умножения большого количества независимых или слабо зависимых неотрицательных случайных величин, дисперсия каждой из которых мала по сравнению с дисперсией результата. В основе логарифмически-нормального распределения лежит мультипликативный процесс формирования случайных величин, т.е. такой, в котором действие каждого добавочного фактора на случайную величину пропорционально ее достигнутому уровню. Логнормальное распределение не инвариантно относительно свертки в отличие от гамма-распределения и обратного гауссовского распределения и хорошо подходит для моделирования размера убытков в отдельном страховом случае.

<u>Пуассоновское распределение</u>

Закон Пуассона используется, если вероятность появления события в каждом договоре мала, а количество договоров велико (закон редких событий) и является приближением биномиального распределения при $n\to\infty$. Страховые случаи наступают независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью. Классическая модель поступления исков предполагает следующие допущения:

(*i*) анализируется фиксированный промежуток времени;
(*ii*) число договоров n фиксировано и неслучайно;
(*iii*) риски попарно независимы, т.е. наступление страхового случая по одному договору не влияет на наступление страховых случаев по другим договорам;
(*iv*) договоры однородны, т.е. вероятность наступления страхового случая p одна и та же для всех договоров.

Пуассоновское распределение вообще играет ведущую роль в теме моделирования распределения числа страховых случаев, так как если оно не используется непосредственно, то служит основой для построения смешанных пуассоновских распределений. При моделировании количества страховых случаев пуассоновское распределение может применяться для однородного портфеля в том случае, если по договору может быть предъявлено несколько исков (не одновременно), - в имущественном, автомобильном, медицинском страховании.

Дискретная случайная величина k - число страховых исков в заданный год или в отдельном договоре страхования имеет распределение Пуассона, если вероятность наступления k страховых случаев в одном договоре страхования вычисляется по формуле

$$p_k = \frac{\lambda^k \cdot \exp(-\lambda)}{k!};\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Параметр $\lambda>0$ называют интенсивностью, он равен количеству наблюдений случайной величины, умноженному на вероятность успеха в одном испытании:

$$\lambda=np.$$

Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения при $p\to0$, $n\to\infty$. Отсюда следует, что распределение Пуассона с параметром $\lambda = n\ p$ можно применять вместо биномиального, когда число опытов n достаточно велико, а вероятность p - достаточно мала, т.е. в каждом отдельном опыте интересующее событие происходит крайне редко.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Задача на нахождение оптимальных чистых стратегий

По платёжной матрице найти оптимальные чистые стратегии, используя принцип строгого доминирования.

Вариант 1

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	3	4	2
B_2	7	5	1	4
B_3	5	1	0	6
B_4	-1	2	4	7

Вариант 2

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	2	7	1
B_2	-2	4	3	0
B_3	2	7	1	4
B_4	8	5	-3	4

Вариант 3

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	4	3	1	1
B_2	2	3	-2	1
B_3	5	2	1	4
B_4	2	0	3	2

Вариант 4

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	1	0	-3
B_2	-3	5	1	4
B_3	2	2	1	5
B_4	4	2	1	0

Вариант 5

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	2	0	1
B_2	4	3	1	1
B_3	0	3	2	-3
B_4	2	3	-3	2

Вариант 6

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	1	3	5
B_2	-1	0	2	2
B_3	-3	-1	2	4
B_4	2	3	0	1

Вариант 7

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	2	-2	4
B_2	4	0	0	3
B_3	2	3	1	2
B_4	2	4	1	0

Вариант 8

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	3	1	4
B_2	3	2	0	-2
B_3	1	1	-3	2
B_4	2	-1	0	0

Вариант 9

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	8	1	3
B_2	3	4	2	2
B_3	7	2	1	4
B_4	1	5	3	6

Вариант 10

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	1	1	4	3
B_2	3	-2	2	1
B_3	-2	0	7	2
B_4	0	4	3	1

Вариант 11

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	4	3	-1
B_2	2	1	-1	2
B_3	1	2	2	5
B_4	3	5	4	8

Вариант 12

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	1	0	3	5
B_2	2	-1	2	3
B_3	5	2	1	1
B_4	3	4	1	-2

Вариант 13

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	1	0	2
B_2	3	6	3	1
B_3	0	4	1	-3

Вариант 14

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	2	1	2
B_2	-1	0	3	0
B_3	1	5	7	3

Вариант 15

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	2	2	3
B_2	4	1	0	1
B_3	1	-3	-1	2

Вариант 16

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	-2	1	2	3
B_2	0	2	7	-2
B_3	2	5	1	4

B_4	7	3	-3	4

B_4	2	-3	0	1

B_4	2	4	4	5

B_4	1	-1	-2	0

Вариант 17

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	2	0	2
B_2	3	1	3	1
B_3	1	0	2	0
B_4	2	3	1	-2

Вариант 18

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	1	1	3	2
B_2	-1	0	-2	0
B_3	3	2	1	1
B_4	2	1	0	-1

Вариант 19

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	-2	2	2
B_2	-4	0	3	3
B_3	1	1	0	1
B_4	0	4	1	0

Вариант 20

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	1	1	-1	2
B_2	-2	0	0	-2
B_3	0	-1	3	1
B_4	2	2	5	-3

Вариант 21

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	2	1	2
B_2	1	3	0	1
B_3	0	5	-2	3
B_4	2	4	3	-2

Вариант 22

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	1	2	5
B_2	3	3	1	-2
B_3	1	8	6	2
B_4	-2	4	3	0

Вариант 23

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	1	2	3	1
B_2	4	1	0	3
B_3	3	3	2	0
B_4	2	-4	1	-2

Вариант 24

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	1	1	1
B_2	3	2	2	2
B_3	2	0	-3	-2
B_4	-2	-1	3	0

Вариант 25

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	1	2	0	3
B_2	3	1	0	1
B_3	0	1	2	-2
B_4	2	3	3	2

Вариант 26

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	2	3	5
B_2	0	0	1	-2
B_3	-3	3	2	1
B_4	2	3	0	1

Вариант 27

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	-1	2	2
B_2	4	1	0	1
B_3	1	-2	3	-2
B_4	2	1	-1	0

Вариант 28

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	-1	1	3
B_2	3	5	0	-2
B_3	1	0	2	1
B_4	2	-1	0	0

Вариант 29

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	2	-2	1
B_2	1	-2	0	1
B_3	0	1	1	-3
B_4	2	0	-3	2

Вариант 30

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	1	4	7	2
B_2	0	1	2	-1
B_3	-3	-2	3	3
B_4	2	3	0	1

Вариант 31

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	0	3	1
B_2	3	-1	0	3
B_3	0	2	-1	-1
B_4	-2	1	2	0

Вариант 32

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	-2	4	1	-3
B_2	1	7	2	4
B_3	0	0	-3	1
B_4	2	-1	1	0

II) <u>Задача на нахождение нижней и верхней цен игры</u>

По платёжной матрице найти нижнюю и верхнюю цену игры. При наличии седловой точки записать векторы оптимальных чистых стратегий P^*, Q^*.

Вариант 1

	R_1	R_2	R_3
S_1	3	2	4
S_2	7	3	0
S_3	2	1	1

Вариант 2

	R_1	R_2	R_3
S_1	2	1	-3
S_2	4	0	2
S_3	6	4	3

Вариант 3

	R_1	R_2	R_3
S_1	0	2	6
S_2	1	7	0
S_3	2	-4	4

Вариант 4

	R_1	R_2	R_3
S_1	2	1	-3
S_2	4	0	2
S_3	6	4	3

Вариант 5

	R_1	R_2	R_3
S_1	7	3	2
S_2	4	0	1
S_3	6	2	2

Вариант 6

	R_1	R_2	R_3
S_1	5	4	3
S_2	2	1	-4
S_3	3	4	1

Вариант 7

	R_1	R_2	R_3
S_1	2	4	8
S_2	3	0	3
S_3	2	7	2

Вариант 8

	R_1	R_2	R_3
S_1	5	1	7
S_2	4	2	1
S_3	6	3	5

Вариант 9

	R_1	R_2	R_3
S_1	2	2	-2
S_2	1	-2	0
S_3	0	1	1

Вариант 10

	R_1	R_2	R_3
S_1	-2	0	1
S_2	1	1	-3
S_3	0	-3	2

Вариант 11

	R_1	R_2	R_3
S_1	1	-2	0
S_2	0	1	1
S_3	2	0	-3

Вариант 12

	R_1	R_2	R_3
S_1	-2	0	1
S_2	1	1	-3
S_3	0	-3	2

Вариант 13 Вариант 14 Вариант 15 Вариант 16

	R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3
S_1	1	4	7	S_1	0	1	2	S_1	1	2	-1	S_1	4	7	2
S_2	0	1	2	S_2	-3	-2	3	S_2	-2	3	3	S_2	1	2	-1
S_3	-3	-2	3	S_3	2	3	0	S_3	3	0	1	S_3	-2	3	3

Вариант 17 Вариант 18 Вариант 19 Вариант 20

	R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3
S_1	-1	0	3	S_1	5	0	3	S_1	0	3	1	S_1	3	-1	0
S_2	2	-1	-1	S_2	3	-1	0	S_2	-1	0	3	S_2	0	2	-1
S_3	1	2	0	S_3	0	2	-1	S_3	2	-1	-1	S_3	-2	1	2

Вариант 21 Вариант 22 Вариант 23 Вариант 24

	R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3
S_1	4	1	-3	S_1	1	7	2	S_1	-2	4	1	S_1	4	1	-3
S_2	7	2	4	S_2	0	0	-3	S_2	1	7	2	S_2	7	2	4
S_3	0	-3	1	S_3	2	-1	1	S_3	0	0	-3	S_3	0	-3	1

Вариант 25 Вариант 26 Вариант 27 Вариант 28

	R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3
S_1	1	2	0	S_1	1	0	1	S_1	2	0	3	S_1	3	1	0
S_2	3	1	0	S_2	1	2	-2	S_2	1	0	1	S_2	0	1	2
S_3	0	1	2	S_3	3	3	2	S_3	1	2	-2	S_3	2	3	3

Вариант 29 Вариант 30 Вариант 31 Вариант 32

	R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3		R_1	R_2	R_3
S_1	2	3	5	S_1	0	1	-2	S_1	2	2	3	S_1	0	0	1
S_2	0	1	-2	S_2	3	2	1	S_2	0	0	1	S_2	-3	3	2
S_3	3	2	1	S_3	3	0	1	S_3	-3	3	2	S_3	2	3	0

III) <u>Задача на нахождение векторов оптимальных стратегий</u>

По платёжной матрице найти векторы оптимальных стратегий P^*, Q^*и цену игры. Кто из игроков оказывается в выигрыше?

Вариант 1 Вариант 2 Вариант 3 Вариант 4

	R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	3	1	4	S_1	3	2	5	4	S_1	4	5	3	1	S_1	5	2	1	3
S_2	3	-2	1	0	S_2	-3	0	2	1	S_2	0	2	4	-3	S_2	4	3	0	2

Вариант 5 Вариант 6 Вариант 7 Вариант 8

	R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	4	2	5	6	S_1	6	4	8	-3	S_1	3	2	1	4	S_1	2	7	5	4
S_2	-3	0	-1	4	S_2	2	7	1	4	S_2	5	7	9	-2	S_2	-3	2	1	6

Вариант 9 Вариант 10 Вариант 11 Вариант 12

	R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	2	2	-2	1	S_1	-2	0	1	2	S_1	1	-2	0	3	S_1	-2	0	1	2
S_2	1	-2	0	4	S_2	1	1	-3	1	S_2	0	1	1	2	S_2	1	1	-3	1

Вариант 13 Вариант 14 Вариант 15 Вариант 16

	R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4		R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	2	5	3	0	S_1	3	1	0	2	S_1	5	6	5	5	S_1	4	2	5	4
S_2	3	1	4	5	S_2	2	5	1	-1	S_2	1	3	4	2	S_2	1	3	1	3

Вариант 17 Вариант 18 Вариант 19 Вариант 20

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	1	-2	4	0
S_2	0	3	1	3

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	2	1	2	0
S_2	6	3	-1	3

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	1	4	3	1
S_2	2	1	0	2

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	1	3	2	1
S_2	2	-1	4	5

Вариант 21

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	0	-1	1
S_2	1	3	3	2

Вариант 22

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	4	1	2	1
S_2	2	3	5	4

Вариант 23

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	3	7	1	2
S_2	2	5	3	-1

Вариант 24

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	4	6	1	2
S_2	1	2	0	4

Вариант 25

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	1	0	4	2
S_2	3	5	3	1

Вариант 26

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	0	-1	4
S_2	1	2	1	2

Вариант 27

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	2	5	7	0
S_2	1	1	3	2

Вариант 28

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	3	4	1
S_2	2	1	3	2

Вариант 29

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	2	7	1	3
S_2	0	1	2	4

Вариант 30

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	2	5	2
S_2	3	4	1	6

Вариант 31

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	4	-2	0
S_2	3	1	3	4

Вариант 32

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	-2	3	2	6
S_2	0	1	5	1

IV) Задача на определение оптимальной стратегии

Планируется проведение операции в заранее неясных условиях, относительно которых можно сделать различные предположения $П_1$, $П_2$, $П_3$. Задана платёжная матрица. Найти оптимальную стратегию, пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и критерием Гурвица при заданном λ. Платёжные матрицы:

Вариант 1

$$\begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}12 & 0{,}23 \\ 0{,}27 & 0{,}43 & 0{,}35 \\ 0{,}45 & 0{,}50 & 0{,}65 \\ 0{,}22 & 0{,}25 & 0{,}53 \end{pmatrix};$$

Вариант 2

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}23 \\ 0{,}03 & 0{,}37 & 0{,}45 \\ 0{,}22 & 0{,}13 & 0{,}40 \\ 0{,}23 & 0{,}35 & 0{,}82 \end{pmatrix};$$

Вариант 3

$$\begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}35 & 0{,}24 \\ 0{,}43 & 0{,}42 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}20 \end{pmatrix};$$

Вариант 4

$$\begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}23 & 0{,}14 \\ 0{,}27 & 0{,}28 & 0{,}40 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}30 \end{pmatrix};$$

Вариант 5

$$\begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}38 & 0{,}15 \\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}35 \\ 0{,}55 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}14 & 0{,}11 & 0{,}55 \end{pmatrix};$$

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}30 \\ 0{,}15 & 0{,}17 & 0{,}23 \\ 0{,}20 & 0{,}19 & 0{,}26 \end{pmatrix};$$

Вариант 7

$$\begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}11 & 0{,}15 \\ 0{,}27 & 0{,}33 & 0{,}40 \\ 0{,}02 & 0{,}53 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}40 & 0{,}35 \end{pmatrix};$$

Вариант 8

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}20 \\ 0{,}14 & 0{,}11 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}55 \\ 0{,}10 & 0{,}09 & 0{,}26 \end{pmatrix};$$

Вариант 9

$$\begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}36 & 0{,}15 \\ 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}24 \\ 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}12 \\ 0{,}14 & 0{,}11 & 0{,}55 \end{pmatrix};$$

Вариант 10

$$\begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}10 & 0{,}03 \\ 0{,}13 & 0{,}22 & 0{,}32 \\ 0{,}15 & 0{,}43 & 0{,}17 \\ 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}14 \end{pmatrix};$$

Вариант 11

$$\begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}17 & 0{,}15 \\ 0{,}23 & 0{,}14 & 0{,}32 \\ 0{,}06 & 0{,}53 & 0{,}22 \\ 0{,}17 & 0{,}42 & 0{,}23 \end{pmatrix};$$

Вариант 12

$$\begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}35 & 0{,}23 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}32 \\ 0{,}14 & 0{,}12 & 0{,}45 \\ 0{,}11 & 0{,}29 & 0{,}23 \end{pmatrix};$$

Вариант 13

Вариант 14

Вариант 15

Вариант 16

$$\begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}43 & 0{,}22 \\ 0{,}14 & 0{,}16 & 0{,}15 \\ 0{,}22 & 0{,}23 & 0{,}43 \\ 0{,}17 & 0{,}12 & 0{,}29 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}19 & 0{,}13 & 0{,}11 \\ 0{,}23 & 0{,}17 & 0{,}27 \\ 0{,}18 & 0{,}22 & 0{,}38 \\ 0{,}31 & 0{,}24 & 0{,}14 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}16 \\ 0{,}14 & 0{,}25 & 0{,}19 \\ 0{,}32 & 0{,}43 & 0{,}37 \\ 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}29 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}37 & 0{,}47 \\ 0{,}13 & 0{,}26 & 0{,}32 \\ 0{,}27 & 0{,}11 & 0{,}52 \\ 0{,}34 & 0{,}29 & 0{,}27 \end{pmatrix};$$

Вариант 17 Вариант 18 Вариант 19 Вариант 20

$$\begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}35 & 0{,}12 \\ 0{,}37 & 0{,}13 & 0{,}11 \\ 0{,}51 & 0{,}16 & 0{,}35 \\ 0{,}17 & 0{,}21 & 0{,}52 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}43 & 0{,}01 & 0{,}12 \\ 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}36 \\ 0{,}17 & 0{,}22 & 0{,}24 \\ 0{,}20 & 0{,}17 & 0{,}62 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}39 & 0{,}12 & 0{,}15 \\ 0{,}22 & 0{,}34 & 0{,}42 \\ 0{,}12 & 0{,}23 & 0{,}25 \\ 0{,}16 & 0{,}40 & 0{,}35 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}23 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}14 & 0{,}12 \\ 0{,}11 & 0{,}03 & 0{,}26 \\ 0{,}13 & 0{,}26 & 0{,}33 \end{pmatrix};$$

Вариант 21 Вариант 22 Вариант 23 Вариант 24

$$\begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}36 & 0{,}15 \\ 0{,}11 & 0{,}23 & 0{,}32 \\ 0{,}17 & 0{,}14 & 0{,}11 \\ 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}56 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}41 & 0{,}22 & 0{,}16 \\ 0{,}21 & 0{,}34 & 0{,}30 \\ 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}14 \\ 0{,}23 & 0{,}27 & 0{,}23 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}12 & 0{,}14 \\ 0{,}17 & 0{,}23 & 0{,}37 \\ 0{,}27 & 0{,}17 & 0{,}42 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}24 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}13 & 0{,}03 \\ 0{,}19 & 0{,}21 & 0{,}16 \\ 0{,}27 & 0{,}07 & 0{,}35 \\ 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}27 \end{pmatrix};$$

Вариант 25 Вариант 26 Вариант 27 Вариант 28

$$\begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}03 \\ 0{,}12 & 0{,}83 & 0{,}17 \\ 0{,}23 & 0{,}74 & 0{,}19 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}12 & 0{,}23 \\ 0{,}13 & 0{,}37 & 0{,}03 \\ 0{,}27 & 0{,}12 & 0{,}29 \\ 0{,}12 & 0{,}24 & 0{,}16 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}41 & 0{,}17 \\ 0{,}24 & 0{,}37 & 0{,}16 \\ 0{,}11 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}17 & 0{,}26 & 0{,}24 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}26 & 0{,}32 \\ 0{,}19 & 0{,}17 & 0{,}41 \\ 0{,}22 & 0{,}05 & 0{,}27 \\ 0{,}17 & 0{,}29 & 0{,}39 \end{pmatrix};$$

Вариант 29 Вариант 30 Вариант 31 Вариант 32

$$\begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}19 & 0{,}05 \\ 0{,}26 & 0{,}43 & 0{,}23 \\ 0{,}51 & 0{,}01 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}47 & 0{,}32 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}01 & 0{,}12 \\ 0{,}27 & 0{,}21 & 0{,}24 \\ 0{,}43 & 0{,}36 & 0{,}17 \\ 0{,}24 & 0{,}23 & 0{,}26 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}13 & 0{,}16 \\ 0{,}32 & 0{,}27 & 0{,}23 \\ 0{,}18 & 0{,}42 & 0{,}12 \\ 0{,}23 & 0{,}16 & 0{,}34 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}42 & 0{,}39 \\ 0{,}22 & 0{,}01 & 0{,}26 \\ 0{,}28 & 0{,}14 & 0{,}31 \\ 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}18 \end{pmatrix};$$

λ=0,5; λ=0,4; λ=0,3; λ=0,7; λ=0,35; λ=0,25; λ=0,7; λ=0,8.

V) Задача на определение целесообразности проведения "идеального" эксперимента

Рассматривается статистическая игра, условия которой заданы таблице. Определим, является ли целесообразным проведение "идеального" эксперимента, стоимость которого в тех же единицах, в которых выражен выигрыш, составляет V.

Вариант 1

A_i, $П_j$, V=0,3	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	6	8
A_2	5	7	1	9
A_3	8	3	2	1
Вероятности состояний "природы" q_j	0,4	0,7	0,3	0,1

Вариант 2

A_i, $П_j$, V=0,3	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$

A_1	2	5	7	4
A_2	3	6	2	1
A_3	4	7	1	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,5	0,2	0,1	0,3

Вариант 3

A_i, $П_j$, V=0,2	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	6	3	1	4
A_2	7	5	4	2
A_3	5	6	4	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,1	0,15	0,2

Вариант 4

A_i, $П_j$, V=0,1	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	4	3	2	1
A_2	5	7	4	3
A_3	6	2	2	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,1	0,4	0,4

Вариант 5

A_i, $П_j$, V=0,6	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	3	5	6
A_2	3	1	2	4
A_3	5	4	6	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 6

A_i, $П_j$, V=0,6	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	8	4
A_2	7	2	3	1
A_3	3	6	2	5
Вероятности состояний "природы" q_j	0,2	0,3	0,3	0,2

Вариант 7

A_i, $П_j$, V=0,6	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	2	1	7
A_2	3	4	3	1
A_3	6	5	2	5
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,7	0,1	0,1

Вариант 8

A_i, $П_j$, V=0,6	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	2	1	3
A_2	4	1	4	5
A_3	2	5	7	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,5	0,1	0,2	0,2

Вариант 9

A_i, $П_j$, V=0,5	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	7	3	2
A_2	4	4	0	1

A_3	2	6	2	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,4	0,15	0,2	0,25

Вариант 10

A_i, $П_j$, V=0,4	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	7	3	2	3
A_2	3	0	1	5
A_3	6	1	2	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,5	0,2	0,1	0,2

Вариант 11

A_i, $П_j$, V=0,45	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	7	1	2	3
A_2	2	1	4	5
A_3	5	1	3	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,2	0,1	0,4

Вариант 12

A_i, $П_j$, V=0,35	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	3	2	3
A_2	3	0	3	5
A_3	1	3	1	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,5	0,1	0,3	0,1

Вариант 13

A_i, $П_j$, V=0,1	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	3	2	3
A_2	5	0	3	2
A_3	1	4	2	5
Вероятности состояний "природы" q_j	0,2	0,6	0,1	0,1

Вариант 14

A_i, $П_j$, V=0,2	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	3	2	3
A_2	3	2	1	5
A_3	6	5	3	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,1	0,4	0,2

Вариант 15

A_i, $П_j$, V=0,4	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	3	2	4
A_2	3	5	1	2
A_3	6	4	3	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,6	0,05	0,15	0,2

Вариант 16

A_i, $П_j$, V=0,25	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	3	2	3
A_2	2	1	3	1
A_3	6	6	4	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,2	0,5	0,1	0,2

Вариант 17

A_i, $П_j$, V=0,15	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	3	1	3
A_2	5	1	3	4
A_3	1	4	2	0
Вероятности состояний "природы" q_j	0,4	0,4	0,15	0,05

Вариант 18

A_i, $П_j$, V=0,5	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	5	3	2	3
A_2	3	0	6	5
A_3	1	4	3	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,5	0,05	0,2	0,25

Вариант 19

A_i, $П_j$, V=0,4	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	7	3	3	3
A_2	3	2	1	0
A_3	6	0	2	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,3	0,55	0,05

Вариант 20

A_i, $П_j$, V=0,45	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	2	5	1
A_2	1	0	4	5
A_3	2	3	2	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,3	0,2	0,4

Вариант 21

A_i, $П_j$, V=0,3	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	2	5	1
A_2	1	5	1	3
A_3	0	4	2	0
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,3	0,2	0,4

Вариант 22

A_i, $П_j$, V=0,25	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	1	3	1
A_2	4	3	1	3
A_3	5	2	4	1
Вероятности состояний "природы" q_j	0,2	0,1	0,4	0,3

Вариант 23

A_i, $П_j$, V=0,2	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	8	5	5	1
A_2	4	2	3	2
A_3	0	1	2	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,25	0,05	0,4

Вариант 24

A_i, $П_j$, V=0,6	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$

A_1	0	1	3	3
A_2	5	2	4	4
A_3	2	3	1	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,4	0,1	0,3	0,2

Вариант 25

A_i, $П_j$, V=0,5	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	2	5	1
A_2	4	3	2	1
A_3	1	1	3	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,3	0,2	0,4

Вариант 26

A_i, $П_j$, V=0,4	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	4	2	1	2
A_2	1	1	3	4
A_3	3	0	2	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,2	0,05	0,25	0,5

Вариант 27

A_i, $П_j$, V=0,4	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	1	1
A_2	0	2	4	3
A_3	2	3	2	0
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,2	0,25	0,45

Вариант 28

A_i, $П_j$, V=0,1	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	1	5	3
A_2	3	6	3	4
A_3	2	3	1	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,2	0,1	0,6	0,1

Вариант 29

A_i, $П_j$, V=0,3	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	1	2	3
A_2	1	4	3	6
A_3	2	3	5	0
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,3	0,2	0,4

Вариант 30

A_i, $П_j$, V=0,45	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	2	1	0
A_2	1	4	4	2
A_3	5	1	2	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,25	0,35	0,2	0,2

Вариант 31

A_i, $П_j$, V=0,3	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	2	1	1
A_2	3	0	3	0

A_3	5	3	1	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,3	0,2	0,2

Вариант 32

A_i, $П_j$, V=0,4	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	2	2	5
A_2	2	1	3	3
A_3	4	6	2	1
Вероятности состояний "природы" q_j	0,2	0,4	0,3	0,1

VI) Построить графики зависимости издержек от размера партии товара x при различных значениях параметров a, b, c, d

Вариант 1: a=1, b=3, c=2, d=5.
Вариант 2: a=2, b=4, c=1, d=2.
Вариант 3: a=7, b=1, c=3, d=3.
Вариант 4: a=3, b=2, c=5, d=1.
Вариант 5: a=2, b=5, c=4, d=4.
Вариант 6: a=4, b=8, c=3, d=7.
Вариант 7: a=5, b=1, c=2, d=3.
Вариант 8: a=3, b=2, c=8, d=1.
Вариант 9: a=2, b=4, c=3, d=2.
Вариант 10: a=5, b=1, c=5, d=3.
Вариант 11: a=1, b=2, c=3, d=1.
Вариант 12: a=3, b=1, c=0, d=3.
Вариант 13: a=6, b=3, c=1, d=4.
Вариант 14: a=5, b=4, c=3, d=7.
Вариант 15: a=1, b=2, c=4, d=5.
Вариант 16: a=4, b=5, c=4, d=1.
Вариант 17: a=3, b=3, c=1, d=4.
Вариант 18: a=2, b=4, c=5, d=2.
Вариант 19: a=1, b=0, c=4, d=1.
Вариант 20: a=4, b=3, c=7, d=7.
Вариант 21: a=3, b=6, c=0, d=2
Вариант 22: a=5, b=4, c=2, d=3
Вариант 23: a=4, b=5, c=5, d=0
Вариант 24: a=2, b=1, c=4, d=5
Вариант 25: a=8, b=3, c=1, d=2
Вариант 26: a=4, b=2, c=0, d=5
Вариант 27: a=1, b=1, c=3, d=2
Вариант 28: a=3, b=5, c=1, d=3
Вариант 29: a=2, b=3, c=3, d=4.
Вариант 30: a=5, b=4, c=5, d=0
Вариант 31: a=3, b=2, c=3, d=6.
Вариант 32: a=5, b=1, c=4, d=1.

VII) Построить зависимости себестоимости единицы S выпускаемой продукции от производительности предприятия V при различных значениях коэффициентов S_i

Вариант 1: S_1=1, S_2=3, S_3=2.
Вариант 2: S_1=2, S_2=4, S_3=1.
Вариант 3: S_1=7, S_2=1, S_3=3.
Вариант 4: S_1=3, S_2=2, S_3=5.
Вариант 5: S_1=2, S_2=5, S_3=4.
Вариант 6: S_1=4, S_2=8, S_3=3.
Вариант 7: S_1=5, S_2=1, S_3=2.
Вариант 8: S_1=3, S_2=2, S_3=8.
Вариант 9: S_1=2, S_2=3, S_3=1.
Вариант 10: S_1=4, S_2=1, S_3=5.
Вариант 11: S_1=5, S_2=4, S_3=1.
Вариант 12: S_1=8, S_2=7, S_3=3.
Вариант 13: S_1=5, S_2=1, S_3=3.
Вариант 14: S_1=7, S_2=3, S_3=2.
Вариант 15: S_1=5, S_2=6, S_3=8.
Вариант 16: S_1=4, S_2=5, S_3=1.
Вариант 17: S_1=3, S_2=6, S_3=5.
Вариант 18: S_1=4, S_2=2, S_3=5.
Вариант 19: S_1=2, S_2=5, S_3=8.
Вариант 20: S_1=1, S_2=3, S_3=4.
Вариант 21: S_1=5, S_2=3, S_3=1.
Вариант 22: S_1=4, S_2=2, S_3=6.
Вариант 23: S_1=3, S_2=7, S_3=5.
Вариант 24: S_1=1, S_2=4, S_3=3.
Вариант 25: S_1=5, S_2=1, S_3=2.
Вариант 26: S_1=8, S_2=4, S_3=5.
Вариант 27: S_1=6, S_2=3, S_3=1.
Вариант 28: S_1=3, S_2=2, S_3=5.
Вариант 29: S_1=4, S_2=3, S_3=7.
Вариант 30: S_1=2, S_2=5, S_3=1.

Вариант 31: S_1=5, S_2=4, S_3=2.

Вариант 32: S_1=1, S_2=3, S_3=6.

VIII) <u>Построить зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_1 и x_2; x_2 и x_3; x_1 и x_3</u>

Вариант 1: a_1=1, a_2=3, a_3=2, b_1=0.5, b_2 =2.5, b_3=1, c_1=3, c_2=5, c_3=1, c_4=6, c_5=9, c_6=4, d_1=3, d_2=1.5

Вариант 2: a_1=2, a_2=4, a_3=3, b_1=1, b_2=3, b_3=0, c_1=2, c_2=1, c_3=4, c_4=7, c_5=2, c_6=1, d_1=5, d_2=1

Вариант 3: a_1=4, a_2=7, a_3=1, b_1=3, b_2=5, b_3=2, c_1=4, c_2=1, c_3=3, c_4=2, c_5=6, c_6=5, d_1=2, d_2=4

Вариант 4: a_1=6, a_2=8, a_3=3, b_1=1, b_2=3, b_3=4, c_1=6, c_2=7, c_3=2, c_4=5, c_5=0, c_6=3, d_1=7, d_2=5

Вариант 5: a_1=8, a_2=4, a_3=7, b_1=1, b_2=4, b_3=7, c_1=2, c_2=6, c_3=3, c_4=5, c_5=3.5, c_6=7, d_1=2, d_2=4

Вариант 6: a_1=1, a_2=3, a_3=2, b_1=0.5, b_2 =2.5, b_3=1, c_1=3, c_2=5, c_3=1, c_4=6, c_5=9, c_6=4, d_1=3, d_2=1.5

Вариант 7: a_1=2, a_2=8, a_3=7, b_1=4, b_2=3, b_3=2, c_1=6, c_2=4, c_3=5, c_4=2, c_5=4.5, c_6=0, d_1=2, d_2=6

Вариант 8: a_1=4, a_2=9, a_3=5, b_1=3, b_2=1, b_3=2, c_1=4, c_2=3, c_3=7, c_4=2, c_5=0, c_6=3, d_1=1, d_2=3

Вариант 9: a_1=4, a_2=8, a_3=3, b_1=5, b_2=1, b_3=7, c_1=4, c_2=8, c_3=0, c_4=2, c_5=1, c_6=3, d_1=0, d_2=5

Вариант 10: a_1=8, a_2=6, a_3=5, b_1=4, b_2 =3, b_3=7, c_1=2, c_2=4, c_3=5, c_4=3, c_5=1, c_6=4, d_1=8, d_2=3

Вариант 11: a_1=3, a_2=7, a_3=1, b_1=4, b_2 =7, b_3=5, c_1=3, c_2=2, c_3=6, c_4=4, c_5=0, c_6=5, d_1=3 d_2=1

Вариант 12: a_1=2, a_2=6, a_3=5, b_1=3, b_2 =1, b_3=5, c_1=2, c_2=7, c_3=4, c_4=8, c_5=5, c_6=6, d_1=1, d_2=3

Вариант 13: a_1=2, a_2=5, a_3=3, b_1=1, b_2 =8, b_3=6, c_1=4, c_2=3, c_3=1, c_4=5, c_5=7, c_6=1, d_1=3, d_2=2

Вариант 14: a_1=4, a_2=9, a_3=5, b_1=1, b_2 =3, b_3=2, c_1=5, c_2=3, c_3=6, c_4=9, c_5=8, c_6=0, d_1=3, d_2=2

Вариант 15: a_1=8, a_2=5, a_3=4, b_1=3, b_2 =7, b_3=2, c_1=5, c_2=1, c_3=3, c_4=0, c_5=8, c_6=5, d_1=4, d_2=9

Вариант 16: a_1=2, a_2=5, a_3=7, b_1=9, b_2 =4, b_3=9, c_1=2.5, c_2=8, c_3=3, c_4=2, c_5=1, c_6=2, d_1=4, d_2=6

Вариант 17: a_1=5, a_2=3, a_3=1, b_1=2, b_2 =4, b_3=6, c_1=4, c_2=9, c_3=7, c_4=5, c_5=1, c_6=9, d_1=3, d_2=1

Вариант 18: a_1=3, a_2=4, a_3=6, b_1=5, b_2 =1, b_3=3, c_1=8, c_2=7, c_3=1, c_4=4, c_5=5, c_6=3, d_1=6, d_2=2

Вариант 19: a_1=3, a_2=6, a_3=1, b_1=2, b_2 =3, b_3=9, c_1=4, c_2=0, c_3=5, c_4=7, c_5=1, c_6=4, d_1=9, d_2=2

Вариант 20: a_1=2, a_2=7, a_3=1, b_1=3, b_2 =5, b_3=9, c_1=4, c_2=1, c_3=6, c_4=5, c_5=2, c_6=4, d_1=9, d_2=3

Вариант 21: a_1=4, a_2=9, a_3=3, b_1=1, b_2 =2, b_3=9, c_1=5, c_2=0, c_3=3, c_4=4, c_5=7, c_6=5, d_1=3, d_2=4

Вариант 22: a_1=4, a_2=3, a_3=7, b_1=2, b_2 =0, b_3=1, c_1=3, c_2=4, c_3=2, c_4=1, c_5=7, c_6=2, d_1=1, d_2=3

Вариант 23: a_1=2, a_2=6, a_3=4, b_1=2, b_2 =3, b_3=4, c_1=9, c_2=3, c_3=1, c_4=6, c_5=3, c_6=2, d_1=1, d_2=4

Вариант 24: a_1=5, a_2=7, a_3=1, b_1=3, b_2 =4, b_3=2, c_1=0, c_2=2, c_3=7, c_4=1, c_5=3, c_6=2, d_1=6, d_2=1

Вариант 25: a_1=2, a_2=4, a_3=8, b_1=3, b_2 =5, b_3=9, c_1=1, c_2=3, c_3=5, c_4=9, c_5=2, c_6=4, d_1=7, d_2=5

Вариант 26: a_1=2, a_2=7, a_3=5, b_1=3, b_2 =9, b_3=2, c_1=7, c_2=2, c_3=5, c_4=3, c_5=9, c_6=4, d_1=2, d_2=3

Вариант 27: a_1=2, a_2=4, a_3=3, b_1=2, b_2

Вариант 28: a_1=2, a_2=4, a_3=3, b_1=1, b_2

=8, b_3=6, c_1=1, c_2=0, c_3=4, c_4=2, c_5=7, c_6=4, d_1=2, d_2=3

=6, b_3=5, c_1=0, c_2=3, c_3=4, c_4=9, c_5=5, c_6=3, d_1=4, d_2=5

Вариант 29: a_1=8, a_2=4, a_3=9, b_1=3, b_2=5, b_3=8, c_1=7, c_2=1, c_3=2, c_4=5, c_5=7, c_6=3, d_1=4, d_2=8

Вариант 30: a_1=3, a_2=5, a_3=2, b_1=1, b_2=6, b_3=3, c_1=5, c_2=2, c_3=4, c_4=6, c_5=1, c_6=7, d_1=3, d_2=2

Вариант 31: a_1=4, a_2=9, a_3=5, b_1=3, b_2=1, b_3=8, c_1=6, c_2=4, c_3=9, c_4=3, c_5=7, c_6=5, d_1=1, d_2=3

Вариант 32: a_1=2, a_2=7, a_3=9, b_1=1, b_2=3, b_3=5, c_1=3, c_2=7, c_3=9, c_4=3, c_5=6, c_6=5, d_1=4, d_2=8

IX) Определить экстремальное значение объема выпускаемой продукции V_{extr}

Вариант 1: A=1, B=3, R=2, T=5, S=3.
Вариант 2: A=2, B=4, R=1, T=2, S=3.
Вариант 3: A=7, B=1, R=3, T=3, S=1.
Вариант 4: A=3, B=2, R=5, T=1, S=1.
Вариант 5: A=2, B=5, R=4, T=4, S=2.
Вариант 6: A=4, B=8, R=3, T=7, S=2.
Вариант 7: A=5, B=1, R=2, T=3, S=5.
Вариант 8: A=3, B=2, R=8, T=1, S=4.
Вариант 9: A=2, B=3, R=4, T=5, S=1.
Вариант 10: A=5, B=1, R=7, T=2, S=0.
Вариант 11: A=2, B=1, R=4, T=7, S=2.
Вариант 12: A=3, B=7, R=9, T=3, S=5.
Вариант 13: A=0, B=2, R=5, T=1, S=4.
Вариант 14: A=5, B=3, R=3, T=2, S=3.
Вариант 15: A=4, B=8, R=7, T=5, S=0.
Вариант 16: A=2, B=1, R=2, T=3, S=1.
Вариант 17: A=1, B=3, R=1, T=4, S=1.
Вариант 18: A=6, B=9, R=3, T=8, S=4.
Вариант 19: A=9, B=4, R=5, T=3, S=3.
Вариант 20: A=7, B=2, R=9, T=1, S=6.
Вариант 21: A=1, B=1, R=1, T=3, S=2.
Вариант 22: A=3, B=2, R=2, T=8, S=2.
Вариант 23: A=1, B=7, R=7, T=6, S=1.
Вариант 24: A=5, B=4, R=1, T=3, S=3.
Вариант 25: A=7, B=3, R=2, T=2, S=0.
Вариант 26: A=1, B=5, R=5, T=5, S=1.
Вариант 27: A=3, B=2, R=1, T=7, S=3.
Вариант 28: A=8, B=3, R=0, T=0, S=4.
Вариант 29: A=4, B=4, R=2, T=1, S=1.
Вариант 30: A=1, B=2, R=1, T=3, S=0.
Вариант 31: A=4, B=5, R=2, T=4, S=4.
Вариант 32: A=7, B=3, R=6, T=1, S=5.

X) Построить зависимости объема отгружаемой продукции от времени при различных значениях параметров a и b при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

Вариант 1: a=1, b=3, c_0=2, τ=5.
Вариант 2: a=2, b=4, c_0=1, τ=2.
Вариант 3: a=7, b=1, c_0=3, τ=3.
Вариант 4: a=3, b=2, c_0=5, τ=1.
Вариант 5: a=2, b=5, c_0=4, τ=4.
Вариант 6: a=4, b=8, c_0=3, τ=7.
Вариант 7: a=5, b=1, c_0=2, τ=3.
Вариант 8: a=3, b=2, c_0=8, τ=1.
Вариант 9: a=2, b=3, c_0=4, τ=5.
Вариант 10: a=5, b=1, c_0=7, τ=2.
Вариант 11: a=2, b=1, c_0=4, τ=7.
Вариант 12: a=3, b=7, c_0=9, τ=3.
Вариант 13: a=0, b=2, c_0=5, τ=1.
Вариант 14: a=5, b=3, c_0=3, τ=2.
Вариант 15: a=4, b=8, c_0=7, τ=5.
Вариант 16: a=2, b=1, c_0=2, τ=3.
Вариант 17: a=1, b=3, c_0=1, τ=4.
Вариант 18: a=6, b=9, c_0=3, τ=8.
Вариант 19: a=9, b=4, c_0=5, τ=3.
Вариант 20: a=7, b=2, c_0=9, τ=1.
Вариант 21: a=1, b=1, c_0=1, τ=3.
Вариант 22: a=3, b=2, c_0=2, τ=8.
Вариант 23: a=1, b=7, c_0=7, τ=6.
Вариант 24: a=5, b=4, c_0=1, τ=3.
Вариант 25: a=7, b=3, c_0=2, τ=2.
Вариант 26: a=1, b=5, c_0=5, τ=5.

Вариант 27: a=3, b=2, c_0=1, τ=7. Вариант 28: a=8, b=3, c_0=0, τ=0.
Вариант 29: a=4, b=4, c_0=2, τ=1. Вариант 30: a=1, b=2, c_0=1, τ=3.
Вариант 31: a=4, b=5, c_0=2, τ=4. Вариант 32: a=7, b=3, c_0=6, τ=1.

XI) Построить зависимости величины капитала, описываемого соотношением (3.8c), от времени при различных значениях параметров F_0, G_0, D_0, E_0 и γ

Вариант 1: F_0=1, G_0=3, D_0=2, E_0=5, a=1, γ=2.
Вариант 2: F_0=2, G_0=4, D_0=1, E_0=2, a=1.5, γ=3.
Вариант 3: F_0=7, G_0=1, D_0=3, E_0=3, a=4, γ=1.
Вариант 4: F_0=3, G_0=2, D_0=5, E_0=1, a=2, γ=3.
Вариант 5: F_0=2, G_0=5, D_0=4, E_0=4, a=4, γ=1.
Вариант 6: F_0=4, G_0=8, D_0=3, E_0=7, a=5, γ=3.
Вариант 7: F_0=5, G_0=1, D_0=2, E_0=3, a=3, γ=1.5.
Вариант 8: F_0=3, G_0=2, D_0=8, E_0=1, a=2, γ=1.
Вариант 9: F_0=7, G_0=5, D_0=1, E_0=5, a=3, γ=1.
Вариант 10: F_0=2, G_0=4, D_0=3, E_0=4, a=6, γ=0.5.
Вариант 11: F_0=5, G_0=1, D_0=4, E_0=3, a=4, γ=2.
Вариант 12: F_0=1, G_0=6, D_0=2, E_0=4, a=1, γ=3.
Вариант 13: F_0=3, G_0=0, D_0=5, E_0=1, a=2, γ=5.
Вариант 14: F_0=7, G_0=3, D_0=1, E_0=5, a=6, γ=3.
Вариант 15: F_0=0, G_0=4, D_0=3, E_0=8, a=0, γ=1.
Вариант 16: F_0=5, G_0=1, D_0=4, E_0=3, a=2, γ=0.
Вариант 17: F_0=2, G_0=5, D_0=1, E_0=6, a=5, γ=7.
Вариант 18: F_0=6, G_0=4, D_0=7, E_0=3, a=2, γ=4.
Вариант 19: F_0=3, G_0=3, D_0=0, E_0=2.
Вариант 20: F_0=5, G_0=2, D_0=9, E_0=5, a=1, γ=2.
Вариант 21: F_0=2, G_0=1, D_0=5, E_0=1, a=5, γ=2.
Вариант 22: F_0=3, G_0=3, D_0=3, E_0=7, a=4, γ=3.
Вариант 23: F_0=5, G_0=9, D_0=7, E_0=3, a=3, γ=1.
Вариант 24: F_0=8, G_0=1, D_0=9, E_0=9, a=3, γ=6.
Вариант 25: F_0=4, G_0=4, D_0=8, E_0=6, a=3, γ=8.
Вариант 26: F_0=3, G_0=0, D_0=2, E_0=3, a=5, γ=1.
Вариант 27: F_0=1, G_0=5, D_0=0, E_0=5, a=5, γ=1.
Вариант 28: F_0=5, G_0=7, D_0=1, E_0=2, a=4, γ=0.5.
Вариант 29: F_0=2, G_0=1, D_0=4, E_0=3, a=1, γ=5.
Вариант 30: F_0=4, G_0=3, D_0=9, E_0=5, a=2, γ=7.
Вариант 31: F_0=3, G_0=5, D_0=4, E_0=3, a=6, γ=9.
Вариант 32: F_0=7, G_0=6, D_0=9, E_0=1, a=3, γ=8.

XII) Построить зависимости количества произведенного товара от времени при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

Вариант 1: r_1=2, r_2=1, K_1=3, K_2=1,
Вариант 2: r_1=2, r_2=3, K_1=5, K_2=7,

$\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

$\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

Вариант 3: r_1=5, r_2=3, K_1=6, K_2=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 4: r_1=2, r_2=5, K_1=1, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

Вариант 5: r_1=5, r_2=3, K_1=1, K_2=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 6: r_1=2, r_2=3, K_1=1, K_2=7, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

Вариант 7: r_1=2, r_2=3, K_1=6, K_2=9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 8: r_1=2, r_2=3, K_1=8, K_2=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

Вариант 9: r_1=2, r_2=6, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 10: r_1=2, r_2=7, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

Вариант 11: r_1=2, r_2=7, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 12: r_1=6, r_2=5, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

Вариант 13: r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

Вариант 14: r_1=5, r_2=4, K_1=9, K_2=8, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

Вариант 15: r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 16: r_1=3, r_2=1, K_1=7, K_2=9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

Вариант 17: r_1=2, r_2=5, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

Вариант 18: r_1=2, r_2=4, K_1=3, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

Вариант 19: r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 20: r_1=3, r_2=7, K_1=2, K_2=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

Вариант 21: r_1=5, r_2=3, K_1=2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

Вариант 22: r_1=6, r_2=9, K_1=2, K_2=1, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

Вариант 23: r_1=4, r_2=6, K_1=9, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.

Вариант 24: r_1=2, r_2=1, K_1=7, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.

Вариант 25: r_1=8, r_2=2, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.

Вариант 26: r_1=2, r_2=5, K_1=3, K_2=6, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 5$, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.

Вариант 27: r_1=3, r_2=4, K_1=5, K_2=2,

Вариант 28: r_1=4, r_2=1, K_1=8, K_2=3,

$\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.

$\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.

Вариант 29: r_1=3, r_2=2, K_1=6, K_2=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.

Вариант 30: r_1=7, r_2=1, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

Вариант 31: r_1=2, r_2=7, K_1=4, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=1, d_0=8, e_0=9, f_0=5, g_0=4.

Вариант 32: r_1=6, r_2=9, K_1=5, K_2=4, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=8, b_0=3, c_0=1, d_0=7, e_0=5, f_0=4, g_0=3.

XIII) Построить зависимости количества произведенного товара от емкости рынка при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

Вариант 1: r_1=2, r_2=1, t=3, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

Вариант 2: r_1=2, r_2=3, t=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

Вариант 3: r_1=5, r_2=3, t=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 4: r_1=2, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

Вариант 5: r_1=5, r_2=3, t=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 6: r_1=2, r_2=3, t=1, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

Вариант 7: r_1=2, r_2=3, t=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 8: r_1=2, r_2=3, t=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

Вариант 9: r_1=2, r_2=6, t=4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 10: r_1=2, r_2=7, t=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

Вариант 11: r_1=2, r_2=7, t=4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 12: r_1=6, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

Вариант 13: r_1=6, r_2=1, t=5, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

Вариант 14: r_1=5, r_2=4, t=9, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

Вариант 15: r_1=2, r_2=7, t=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 16: r_1=3, r_2=1, t=7, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

Вариант 17: r_1=2, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 6$,

Вариант 18: r_1=2, r_2=4, t=3, $\hat{N}_1 = 5$,

$\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

$\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

Вариант 19: r_1=2, r_2=7, t=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 20: r_1=3, r_2=7, t=2, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

Вариант 21: r_1=5, r_2=3, t=2, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

Вариант 22: r_1=6, r_2=9, t=2, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

Вариант 23: r_1=4, r_2=6, t=9, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.

Вариант 24: r_1=2, r_2=1, t=7, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.

Вариант 25: r_1=8, r_2=2, t=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.

Вариант 26: r_1=2, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 5$, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.

Вариант 27: r_1=3, r_2=4, t=5, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.

Вариант 28: r_1=4, r_2=1, t=8, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.

Вариант 29: r_1=3, r_2=2, t=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.

Вариант 30: r_1=7, r_2=1, t=3, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

Вариант 31: r_1=2, r_2=7, t=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=1, d_0=8, e_0=9, f_0=5, g_0=4.

Вариант 32: r_1=6, r_2=9, t=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=8, b_0=3, c_0=1, d_0=7, e_0=5, f_0=4, g_0=3.

XIV) Построить зависимости количества произведенного товара от параметра роста количества товаров при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

Вариант 1: t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

Вариант 2: t=3, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

Вариант 3: t=1, K_1=6, K_2=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 4: t=4, K_1=1, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

Вариант 5: t=5, K_1=1, K_2=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 6: t=2, K_1=1, K_2=7, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

Вариант 7: t=2, K_1=6, K_2=9, $\hat{N}_1 = 4$,

Вариант 8: t=2, K_1=8, K_2=6, $\hat{N}_1 = 4$,

$\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 9: t=2, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 11: t=7, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 13: r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

Вариант 15: t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 17: t=5, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

Вариант 19: t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 21: t=3, K_1=2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

Вариант 23: t=6, K_1=9, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.

Вариант 25: t=8, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.

Вариант 27: t=3, K_1=5, K_2=2, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.

Вариант 29: t=2, K_1=6, K_2=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.

$\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

Вариант 10: t=7, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

Вариант 12: t=6, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

Вариант 14: r_1=5, r_2=4, K_1=9, K_2=8, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

Вариант 16: t=3, K_1=7, K_2=9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

Вариант 18: t=4, K_1=3, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

Вариант 20: t=7, K_1=2, K_2=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

Вариант 22: t=9, K_1=2, K_2=1, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

Вариант 24: t=2, K_1=7, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.

Вариант 26: t=5, K_1=3, K_2=6, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 5$, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.

Вариант 28: t=4, K_1=8, K_2=3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.

Вариант 30: t=7, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

Вариант 31: t=7, K_1=4, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=1, d_0=8, e_0=9, f_0=5, g_0=4.

Вариант 32: t=6, K_1=5, K_2=4, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=8, b_0=3, c_0=1, d_0=7, e_0=5, f_0=4, g_0=3.

XV) Построить зависимости прибыли от времени при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

Вариант 1: r_1=2, r_2=1, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

Вариант 2: r_1=2, r_2=3, K_1 =5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

Вариант 3: r_1=2, r_2=1, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

Вариант 4: r_1=5, r_2=3, K_1 =6, K_2=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 5: r_1=2, r_2=5, K_1 =1, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

Вариант 6: r_1=5, r_2=3, K_1 =6, K_2=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 7: r_1=5, r_2=3, K_1 =1, K_2=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 8: r_1=2, r_2=3, K_1 =1, K_2=7, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

Вариант 9: r_1=5, r_2=3, K_1 =1, K_2=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 10: r_1=2, r_2=3, K_1 =6, K_2=9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 11: r_1=2, r_2=3, K_1 =8, K_2=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

Вариант 12: r_1=2, r_2=3, K_1 =6, K_2=9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 13: r_1=2, r_2=6, K_1 =4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 14: r_1=2, r_2=7, K_1 =5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

Вариант 15: r_1=2, r_2=6, K_1 =4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 16: r_1=2, r_2=7, K_1 =4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 17: r_1=6, r_2=5, K_1 =3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

Вариант 18: r_1=2, r_2=7, K_1 =4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 19: r_1=6, r_2=1, K_1 =5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

Вариант 20: r_1=5, r_2=4, K_1 =9, K_2=8, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

Вариант 21: r_1=6, r_2=1, K_1 =5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

Вариант 22: r_1=2, r_2=7, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 23: r_1=3, r_2=1, K_1 =7, K_2=9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

Вариант 24: r_1=2, r_2=7, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 25: r_1=2, r_2=5, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$,

Вариант 26: r_1=2, r_2=4, K_1 =3, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$,

Вариант 27: r_1=2, r_2=5, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$,

a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

Вариант 28: r_1=2, r_2=7, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 29: r_1=3, r_2=7, K_1 =2, K_2=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

Вариант 30: r_1=2, r_2=7, K_1 =3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 31: r_1=5, r_2=3, K_1 =2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

Вариант 32: r_1=6, r_2=9, K_1 =2, K_2=1, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

Вариант 33: r_1=5, r_2=3, K_1 =2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

XVI) <u>Построить зависимости прибыли от емкости рынка при постоянных значениях рассматриваемых рассходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0</u>

Вариант 1: r_1=2, r_2=1, t =3, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

Вариант 2: r_1=2, r_2=3, t =5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

Вариант 3: r_1=2, r_2=1, t =3, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

Вариант 4: r_1=5, r_2=3, t =6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 5: r_1=2, r_2=5, t =3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

Вариант 6: r_1=5, r_2=3, t =6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 7: r_1=5, r_2=3, t =1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 8: r_1=2, r_2=3, t =1, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

Вариант 9: r_1=5, r_2=3, t =1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 10: r_1=2, r_2=3, t =6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 11: r_1=2, r_2=3, t =2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

Вариант 12: r_1=2, r_2=3, t =6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 13: r_1=2, r_2=6, t =4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 14: r_1=2, r_2=7, t =5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

Вариант 15: r_1=2, r_2=6, t =4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 16: r_1=2, r_2=7, t =4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 17: r_1=6, r_2=5, t =3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

Вариант 18: r_1=2, r_2=7, t =4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 19: r_1=6, r_2=1, t =5, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

Вариант 20: r_1=5, r_2=4, t =9, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

Вариант 21: r_1=6, r_2=1, t =5, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

Вариант 22: r_1=2, r_2=7, t =3, $\hat{N}_1=2$, $\hat{N}_2=4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 23: r_1=3, r_2=1, t =7, $\hat{N}_1=3$, $\hat{N}_2=7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

Вариант 24: r_1=2, r_2=7, t =3, $\hat{N}_1=2$, $\hat{N}_2=4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 25: r_1=2, r_2=5, t =3, $\hat{N}_1=6$, $\hat{N}_2=4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

Вариант 26: r_1=2, r_2=4, t =3, $\hat{N}_1=5$, $\hat{N}_2=1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

Вариант 27: r_1=2, r_2=5, t =3, $\hat{N}_1=6$, $\hat{N}_2=4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

Вариант 28: r_1=2, r_2=7, t =3, $\hat{N}_1=4$, $\hat{N}_2=2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 29: r_1=3, r_2=7, t =2, $\hat{N}_1=1$, $\hat{N}_2=8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

Вариант 30: r_1=2, r_2=7, t =3, $\hat{N}_1=4$, $\hat{N}_2=2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 31: r_1=5, r_2=3, t =2, $\hat{N}_1=1$, $\hat{N}_2=4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

Вариант 32: r_1=6, r_2=9, t =2, $\hat{N}_1=3$, $\hat{N}_2=9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

Вариант 33: r_1=5, r_2=3, t =2, $\hat{N}_1=1$, $\hat{N}_2=4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

XVII) Построить зависимости прибыли от параметра роста количества товаров при постоянных значениях рассматриваемых рассходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

Вариант 1: t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1=1$, $\hat{N}_2=4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

Вариант 2: t=3, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1=4$, $\hat{N}_2=6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

Вариант 3: t=1, K_1=6, K_2=2, $\hat{N}_1=4$, $\hat{N}_2=3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

Вариант 4: t=4, K_1=1, K_2=3, $\hat{N}_1=2$, $\hat{N}_2=1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

Вариант 5: t=5, K_1=1, K_2=4, $\hat{N}_1=2$, $\hat{N}_2=3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

Вариант 6: t=2, K_1=1, K_2=7, $\hat{N}_1=9$, $\hat{N}_2=4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

Вариант 7: t=2, K_1=6, K_2=9, $\hat{N}_1=4$, $\hat{N}_2=7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

Вариант 8: t=2, K_1=8, K_2=6, $\hat{N}_1=4$, $\hat{N}_2=7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

Вариант 9: t=2, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1=3$, $\hat{N}_2=1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

Вариант 10: t=7, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1=4$, $\hat{N}_2=2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

Вариант 11: t=7, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1=3$, $\hat{N}_2=1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

Вариант 12: t=6, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1=5$, $\hat{N}_2=1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

Вариант 13: r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2=3,

Вариант 14: r_1=5, r_2=4, K_1=9, K_2=8,

$\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

$\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

Вариант 15: t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

Вариант 16: t=3, K_1=7, K_2=9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

Вариант 17: t=5, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

Вариант 18: t=4, K_1=3, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

Вариант 19: t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

Вариант 20: t=7, K_1=2, K_2=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

Вариант 21: t=3, K_1=2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

Вариант 22: t=9, K_1=2, K_2=1, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

Вариант 23: t=6, K_1=9, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.

Вариант 24: t=2, K_1=7, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.

Вариант 25: t=8, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.

Вариант 26: t=5, K_1=3, K_2=6, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 5$, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.

Вариант 27: t=3, K_1=5, K_2=2, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.

Вариант 28: t=4, K_1=8, K_2=3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.

Вариант 29: t=2, K_1=6, K_2=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.

Вариант 30: t=7, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

Вариант 31: t=7, K_1=4, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=1, d_0=8, e_0=9, f_0=5, g_0=4.

Вариант 32: t=6, K_1=5, K_2=4, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=8, b_0=3, c_0=1, d_0=7, e_0=5, f_0=4, g_0=3.

XVIII) Получить уравнения линейной регрессии для следующих данных

Вариант	x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	y_i	2,7	6,4	21,7	12,2	20,1	19,7	10,1	3,6	1,4
Вариант	x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19
2	y_i	3,1	4,6	21,4	11,9	20,1	19,1	10,1	3,5	0,9
Вариант	x_i	11	13	15	17	14	11	8	5	2
3	y_i	3,2	5,9	21,6	12,2	20,1	19,6	10,3	3,7	1,5

Вариант	x_i	5	9	7	8	11	13	15	21	29
4	y_i	1,9	6,2	21,2	12,5	20,1	19,1	10,4	3,1	1,2
Вариант	x_i	2	3	1	7	4	2	6	9	5
5	y_i	1,7	6,4	20,7	12,7	20,1	19,1	10,4	3,2	1,4
Вариант	x_i	2	3	7	1	4	9	5	12	6
6	y_i	2,3	6,7	20,4	12,6	17,2	19,2	8,5	3,2	1,2
Вариант	x_i	7	4	1	2	3	4	5	6	7
7	y_i	1,3	6,5	21,2	12,1	20,8	18,6	10,2	3,3	1,1
Вариант	x_i	2	6	10	14	18	22	26	30	34
8	y_i	1,7	6,3	21,3	12,2	20,2	19,3	10,0	3,3	1,4
Вариант	x_i	1	7	13	19	25	31	37	43	49
9	y_i	2,2	6,1	19,2	11,6	22,1	19,1	10,4	4,1	1,2
Вариант	x_i	3	7	9	10	14	17	21	26	33
10	y_i	2,6	5,8	20,8	12,6	19,7	19,5	10,2	3,5	1,0
Вариант	x_i	11	13	15	17	14	11	8	5	2
11	y_i	2,7	6,4	21,7	12,2	20,1	19,7	10,1	3,6	1,4
Вариант	x_i	2	3	1	7	4	2	6	9	5
12	y_i	3,1	4,6	21,4	11,9	20,1	19,1	10,1	3,5	0,9
Вариант	x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15
13	y_i	3,2	5,9	21,6	12,2	20,1	19,6	10,3	3,7	1,5
Вариант	x_i	2	3	7	1	4	9	5	12	6
14	y_i	1,9	6,2	21,2	12,5	20,1	19,1	10,4	3,1	1,2
Вариант	x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19
15	y_i	1,7	6,4	20,7	12,7	20,1	19,1	10,4	3,2	1,4
Вариант	x_i	5	9	7	8	11	13	15	21	29
16	y_i	2,3	6,7	20,4	12,6	17,2	19,2	8,5	3,2	1,2
Вариант	x_i	3	7	9	10	14	17	21	26	33
17	y_i	1,3	6,5	21,2	12,1	20,8	18,6	10,2	3,3	1,1
Вариант	x_i	1	7	13	19	25	31	37	43	49
18	y_i	1,7	6,3	21,3	12,2	20,2	19,3	10,0	3,3	1,4
Вариант	x_i	2	6	10	14	18	22	26	30	34
19	y_i	2,2	6,1	19,2	11,6	22,1	19,1	10,4	4,1	1,2
Вариант	x_i	7	4	1	2	3	4	5	6	7
20	y_i	2,6	5,8	20,8	12,6	19,7	19,5	10,2	3,5	1,0
Вариант	x_i	5	8	11	14	17	20	23	26	29
21	y_i	3,4	6,2	21,1	13,1	19,6	19,3	11,1	4,7	1,2
Вариант	x_i	9	8	7	6	5	4	3	2	1
22	y_i	2,9	3,8	20,4	12,6	20,2	19,2	9,8	3,3	1,9
Вариант	x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18
23	y_i	4,5	4,8	19,4	12,7	21,1	19,6	11,8	2,7	1,5
Вариант	x_i	3	8	9	14	12	11	4	3	7
24	y_i	1,7	5,1	22,1	12,5	18,1	19,2	11,2	4,5	1,1
Вариант	x_i	5	7	3	1	4	2	8	5	3
25	y_i	0,7	6,7	20,5	13,0	20,5	19,1	10,4	3,2	1,4

Вариант	x_i	3	2	5	8	4	6	1	9	7
26	y_i	0,5	4,3	20,9	13,1	17,7	19,7	9,0	3,7	3,4
Вариант	x_i	3	5	7	12	14	19	4	6	7
27	y_i	0,3	6,7	21,4	12,3	20,5	18,3	10,4	4,3	1,1
Вариант	x_i	3	7	8	5	4	2	8	6	2
28	y_i	1,2	4,3	22,4	12,6	20,5	19,8	9,3	3,8	1,6
Вариант	x_i	2	7	8	6	4	9	3	5	1
29	y_i	1,4	6,5	19,6	12,6	19,1	18,1	12,4	5,1	1,2
Вариант	x_i	7	4	1	2	3	4	5	6	7
30	y_i	2,9	6,1	18,2	13,6	17,7	16,5	11,2	7,5	2,0
Вариант	x_i	5	3	2	4	5	3	1	2	8
31	y_i	3,2	4,2	15,2	11,6	14,7	12,1	17,2	6,8	3,2
Вариант	x_i	5	2	3	1	4	6	7	3	5
32	y_i	3,1	5,3	12,2	14,2	15,2	11,3	13,5	8,2	1,8

XIX) Найти плотность вероятности $W(x,t)$ при постоянных коэффициентах диффузии и сноса следующих значениях параметров

Вариант 1: D_0=2, K_0=-1, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;
Вариант 2: D_0=3, K_0=-5, $L=\pi/3$, $f(x)=2sin(3x)$;
Вариант 3: D_0=2, K_0=-4, L=2, $f(x)$=8-2x^2;
Вариант 4: D_0=1, K_0=-3, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;
Вариант 5: D_0=3, K_0=1, $L=2\pi$, $f(x)=4sin(x/2)$;
Вариант 6: D_0=2, K_0=-7, $L=5\pi$, $f(x)=4sin(x/5)$;
Вариант 7: D_0=2, K_0=-0.1, $L=\pi/5$, $f(x)=4sin(5x)$;
Вариант 8: D_0=0.3, K_0=-5, L=5, $f(x)$=125-5$(x$-5$)^2$;
Вариант 9: D_0=0.3, K_0=-5, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;
Вариант 10: D_0=1, K_0=-3, L=5, $f(x)$=125-5$(x$-5$)^2$;
Вариант 11: D_0=2, K_0=-2, $L=5\pi$, $f(x)=4sin(x/5)$;
Вариант 12: D_0=4, K_0=1, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;
Вариант 13: D_0=2, K_0=-1, $L=\pi/5$, $f(x)=4sin(5x)$;
Вариант 14: D_0=2, K_0=-5, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;
Вариант 15: D_0=3, K_0=-1, L=2, $f(x)$=8-2x^2;
Вариант 16: D_0=4, K_0=-3, L=2, $f(x)$=8-2x^2;
Вариант 17: D_0=1, K_0=4, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;
Вариант 18: D_0=3, K_0=-5, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;
Вариант 19: D_0=2, K_0=-3, $f(x)=2cos(3x+1)$;
Вариант 20: D_0=1, K_0=3, $L=\pi/5$, $f(x)=4sin(5x)$;
Вариант 21: D_0=1, K_0=2, $L=\pi/3$, $f(x)=2sin(3x)$;
Вариант 23: D_0=5, K_0=-2, $L=\pi/3$, $f(x)=2sin(3x)$;
Вариант 24: D_0=4, K_0=-5, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;
Вариант 25: D_0=3, K_0=-3, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;
Вариант 25: D_0=1, K_0=-2, L=2, $f(x)$=8-2x^2;
Вариант 26: D_0=5, K_0=-4, $L=\pi/5$, $f(x)=4sin(5x)$;
Вариант 27: D_0=3, K_0=1, L=2, $f(x)$=8-2x^2;
Вариант 28: D_0=1, K_0=-3, $L=2\pi$, $f(x)=4sin(x/2)$;
Вариант 29: D_0=2, K_0=-5, $L=\pi/3$, $f(x)=2sin(3x)$;
Вариант 30: D_0=3, K_0=-2, L=2, $f(x)$=8-2x^2;
Вариант 31: D_0=2, K_0=-1, $L=\pi/3$, $f(x)=2sin(3x)$;
Вариант 32: D_0=1, K_0=-6, L=5, $f(x)$=125-5$(x$-5$)^2$;
Вариант 33: D_0=5, K_0=-3, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$.

XX) Найти плотность вероятности $W(x,t)$ при переменных коэффициентах диффузии и сноса для параметров, приведённых в задании XVIII и $g(x,t)$=(1-x/L)(1-D_0t/L^2), $h(x,t)$=(1-x/L)(1-K_0t/L).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Мазалов. Математическая теория игр и приложения. - Санкт-Петербург: Ланью 2017.

2. Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Шевкопляс. Теория игр. - Санкт-Петербург: БХВ-Петербург. 2012.

3. Н.П. Горидько, Р.М. Нижегородцев. Современный экономический рост: теория и регрессионный анализ. - М.: Инфра-М, 2017.

4. Н. Дрейпер. Прикладной регрессионный анализ. - М.: Вильямс И.Д., 2019.

5. Г.А. Соколов. Теория случайных процессов для экономистов. Санкт-Петербург: Лань. 2010.

6. В.И. Богачев, Н. Крылов, М. Рёкнер, С. Шапошников. Уравнение Фоккера - Планка - Колмогорова. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2013.

Евгений Леонидович **Панкратов**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.