МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского**

**А.Ю Чирков
С.В. Сидоров
Д.Б. Мокеев
Е.М. Макаров**

# Задачи по дискретной математике (I семестр)

*Учебно-методическое пособие*

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижний Новгород, 2021

УДК 519.1(076)
ББК В22.12
Ч-64

Ч-64 А.Ю Чирков, С.В. Сидоров, Д.Б. Мокеев, Е.М. Макаров Задачи по дискретной математике (I семестр): учебно-методическое пособие. — [электронный ресурс] – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 84 с.

Рецензент: д. ф.-м. н., доц. **А. В. Калинин**

В настоящем учебно-методическом пособии представлен необходимый теоретический материал для решения ряда задач из различных разделов дискретной математики. Для самостоятельной работы студентов в него включено множество заданий разных типов и уровня сложности, а так же примеры решений основных типов задач.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы». Рекомендуется при изучении дисциплины «Дискретная математика».

УДК 519.1(076)
ББК В22.12

# Оглавление

# 1. Множества, операции с ними

Множество, которое можно задать полным списком элементов, называется **конечным**. Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** (обозначение – $\emptyset$ ). Для некоторых бесконечных множеств имеются обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел.

Записи $x \in M$ и $x \notin M$ означают, что элемент $x$ **принадлежит** и, соответственно, **не принадлежит** множеству $M$. Говорят, что множество $S$ является **подмножеством** множества $M$, или включено в $M$, если каждый элемент множества $S$ принадлежит множеству $M$. Запись $S \subseteq M$ означает, что $S$ — подмножество $M$. Пустое множество является подмножеством любого множества. Множества $S$ и $M$ **равны**, если $S \subseteq M$ и $M \subseteq S$. Если $S \subseteq M$ и $S \neq M$, то множество $S$ строго включено в $M$ ($S \subset M$ ). Множество всех подмножеств множества $M$ обозначают $2^M$ и называют **булеаном множества** $M$. Записи $S \in 2^M$ и $S \subseteq M$ являются равносильными.

Пусть конечное множество $M$ задано списком элементов $m_1, \ldots, m_k$. Подмножеству $S$ множества $M$ поставим в соответствие набор $X(S) = (x_1, \ldots, x_k)$ из нулей и единиц, $j$-я компонента которого равна 1, если $m_j \in S$, и 0, если $m_j \notin S$. Набор $X(S)$ называется **характеристическим вектором** множества $S$.

***Операции с множествами***

**Объединением** множеств $M$ и $T$ называется множество $M \cup T$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

**Пересечением** множеств $M$ и $T$ называется множество $M \cap T$, элементы которого принадлежат каждому из этих множеств.

**Разностью** множеств $M \setminus T$ называется множество, элементы которого принадлежат $M$, но не принадлежащих $T$. Разность $M \setminus T$ также называют **дополнением** множества $T$ до множества $M$. Если множество $M$ определено из контекста, то разность $M \setminus T$ обозначают $\overline{T}$.

**Симметрической разностью** множеств $M$ и $T$ называется множество $M \otimes T$, элементы которого принадлежат ровно одному из этих множеств ($M \otimes T = (M \setminus T) \cup (T \setminus M)$).

Последовательность выполнения операций над множествами, как и обычно, может быть задана скобками. При отсутствии скобок сначала выполняются унарные операции (дополнение), затем — пересечения, затем — объединения, разности и симметрической разности (приоритет последних трех операций одинаков).

**Декартовым произведением** множеств $M$ и $T$ называется множество $M \times T$, составленное из всех пар $(x, y)$, где $x \in M$, а $y \in T$. Декартово произведение множества самого на себя называется **декартовой степенью** $A^n = \overbrace{A \times \cdots \times A}^{n}$.

**Диаграммой Венна-Эйлера** называется схематическое изображение множеств в виде кругов (круги Эйлера) или какой-то другой области. Диаграммы Венна-Эйлера позволяют наглядно проводить доказательство тождеств теории множеств. По сути, доказательство сводится к построению диаграмм для обеих частей тождества и сравнению диаграмм.

## Задачи для практики и самостоятельной работы

1.1. Какие из следующих соотношений верны:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $a \subseteq \{a, b\}$; | 5. $\{a\} \subset \{\{a\}, b\}$; | 9. $\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$; | 13. $\emptyset \in \{\emptyset\}$; |
| 2. $a \subset \{a, b\}$; | 6. $a \in \{\{a\}, b\}$; | 10. $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{b\}\}$; | 14. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$; |
| 3. $\{a\} \subseteq \{a, b\}$; | 7. $\{a\} \in \{\{a\}, b\}$; | 11. $\emptyset \subset \{a, b\}$; | 15. $\emptyset \in \emptyset$; |
| 4. $a \in \{a, b\}$; | 8. $\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, b\}$; | 12. $\emptyset \in \{a, b\}$; | 16. $\emptyset \subseteq \emptyset$. |

1.2. Пусть $L$ -латинский алфавит. Какой из знаков $\{\in, \notin, \subseteq\}$ можно поставить вместо $\circ$ для получения верного высказывания?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $a \circ L$; | 5. $\{a\} \circ L$; | 9. $L \circ 2^L$; | 13. $\{h\} \circ 2^L$; |
| 2. $1 \circ L$; | 6. $L \circ L$; | 10. $\{f, i, n\} \circ 2^L$; | 14. $\{a, b\} \circ L^2$; |
| 3. $\emptyset \circ L$; | 7. $\emptyset \circ 2^L$; | 11. $1 \circ 2^L$; | 15. $(a, b) \circ L^2$; |
| 4. $\{a, x, q\} \circ L$; | 8. $\{\emptyset\} \circ 2^L$; | 12. $h \circ 2^L$; | 16. $(a, b) \circ L \times \{b, c\}$. |

1.3. Какие из приведенных соотношений правильные?

| | |
|---|---|
| 1. $\{\{1, 2\}, 3\} = \{1, 2, 3\}$; | 4. $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$; |
| 2. $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; | 5. $\{\emptyset\} = \emptyset$; |
| 3. $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$; | 6. $\{\emptyset\} \in 2^{\emptyset}$. |

1.4. Задайте множество списком элементов:

1. $\{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0,\ x \in \mathbb{N}\}$;
2. $\{x \mid x^2 + x \le 2,\ x \in \mathbb{N}\}$;
3. $\{x \mid 2x^2 - 5x = 2,\ x \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$;
5. $\{x \mid x^2 - 2 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$;
6. $\{x \mid x^3 - 2x + 1 \le 10,\ x \in \mathbb{N}\}$;
7. $\{x \mid 2^x - 3x \le 10,\ x \in \mathbb{Z}\}$;
8. $\{x \mid |x| \le 5,\ \cos x = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$;
9. $\{x \mid |x| + |2x - 3| = 2,\ x \in \mathbb{R}\}$;
10. $\{x \mid \max\{|x+1|, 2x+5\} = 2,\ x \in \mathbb{R}\}$
11. $\{x \mid x -$ делитель $24,\ x \in \mathbb{N}\}$;
12. $\{x \mid x -$ гласная буква русского алфавита$\}$;
13. $\{x \mid x -$ четная цифра$\}$;
14. $\{x \mid x -$ остаток от деления на $5\}$.

1.5. Задайте множество списком элементов:

1. $2^{\{a\}}$; 2. $2^{\emptyset}$; 3. $2^{2^{\emptyset}}$; 4. $2^{2^{2^{\emptyset}}}$.

1.6. Задайте декартово произведение множеств $A \times B$ списком элементов:

1. $A = \{0, 1\},\ B = \{2, 3\}$; 2. $A = \{a, b\},\ B = \{1, 2, 3\}$.

1.7. Описать множество точек числовой прямой, используя обозначения отрезка, полуинтервала, и интервала:

1. $\{\ x \mid 2 \le x \le 3\}$;
2. $\{\ x \mid -1 < x \le 4\}$;
3. $\{\ x \mid x \le 1\}$;
4. $\{\ x \mid x > 5\}$;
5. $\{\ x \mid |x| \ge 2\}$;
6. $\{\ x \mid |x| - |2x + 6| < 3\}$.

1.8. Описать множество точек плоскости, если $A, B, C$ – заданные точки, не лежащие на одной прямой:

1. $\{\ X \mid |AX| = 3\}$;
2. $\{\ X \mid |AX| \le 4\}$;
3. $\{\ X \mid |AX| > 1\}$;
4. $\{\ X \mid |AX| = |BX|\}$;
5. $\{\ X \mid |AX| \le |BX|\}$;
6. $\{\ X \mid |AX| + |BX| = |AB|\}$;
7. $\{\ X \mid |AX| + |AB| = |BX|\}$;
8. $\{\ X \mid |AX| = |BX| = |CX|\}$;
9. $\{\ X \mid |AX| = |BX| \le |CX|\}$.

1.9. Найдите характеристический вектор подмножества $A$ множества $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

1. $A = \{\ x \mid x^2 - 6x + 8 = 0,\ x \in M\}$;
2. $A = \{\ x \mid |x| \le 3,\ x \in M\}$;
3. $A = \{\ x \mid |x - 3| > 1,\ x \in M\}$;
4. $A = \{x \mid x -$ делитель $24,\ x \in M\}$;
5. $A = \{x \mid x -$ простое число, $x \in M\}$; ;
6. $A = \{\ x \mid (-1)^{\frac{x(x-1)}{2}} = 1,\ x \in M\}$.

1.10. Выпишите все характеристические векторы подмножеств множества $M = \{1, 2\}$ и для каждого характеристического вектора укажите то подмножество $M$, которое ему соответствует.

1.11. Найдите объединение множеств $A$ и $B$ ($A \cup B$):

1. $A = \{x \mid x^2 = 1\}$, $B = \{0, 1\}$;
2. $A = \{0, 1\}^2$, $B = \{1, 2\} \times \{0, 1\}$;
3. $A = 2^{\{a,b\}}$, $B = 2^{\{a,c\}}$;
4. $A = [1; 2]$, $B = (2; 7)$;
5. $A = (-\infty; 3]$, $B = (2; 5]$;
6. $A = [0, 1) \times [-1, 0]$, $B = [1, 2] \times [-1, 0]$;
7. $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$;
8. $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = [-1, 1]^2$;
9. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$, $B = [-1, 1]^3$.

1.12. Найдите пересечение множеств $A$ и $B$ ($A \cap B$):

1. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$;
2. $A = \{0, 1\}^2$, $B = \{1, 2\} \times \{0, 1\}$;
3. $A = 2^{\{a,b\}}$, $B = 2^{\{a,c\}}$;
4. $A = [1; 3]$, $B = (2; 7)$;
5. $A = [0, \infty)$, $B = (-1, 1)$;
6. $A = [0, 1] \times [-1, 0]$, $B = [1, 2] \times [-1, 0]$;
7. $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$;
8. $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = [-1, 1]^2$;
9. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$, $B = [-1, 1]^3$.

1.13. Найдите разность множеств $A$ и $B$ ($A \setminus B$):

1. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$;
2. $A = \{0, 1\}^2$, $B = \{1, 2\} \times \{0, 1\}$;
3. $A = 2^{\{a,b\}}$, $B = 2^{\{a,c\}}$;
4. $A = [1; 3]$, $B = (2; 7)$;
5. $A = [0, \infty)$, $B = (-1, 1)$;
6. $A = [0, 2] \times [-1, 0]$, $B = [1, 3] \times [-1, 0]$.

1.14. Найдите симметрическую разность множеств $A$ и $B$ ($A \otimes B$):

1. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$;
2. $A = \{0, 1\}^2$, $B = \{1, 2\} \times \{0, 1\}$;
3. $A = 2^{\{a,b\}}$, $B = 2^{\{a,c\}}$;
4. $A = [1; 3]$, $B = (2; 7)$;
5. $A = [0, \infty)$, $B = (-1, 1)$;
6. $A = [0, 2] \times [-1, 0]$, $B = [1, 3] \times [-1, 0]$.

1.15. Найдите дополнение множества $A$ в универсе $U$ ($\overline{A}$):

1. $A = \{1, 2, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2. $A = \{0, 1\}^2$, $U = \{0, 1, 2\}^2$;
3. $A = 2^{\{a,b\}}$, $U = 2^{\{a,b,c\}}$;
4. $A = [1; 3]$, $U = (0; 4)$;
5. $A = [0, \infty)$, $U = R$;
6. $A = [0, 1]^2$, $B = [0, 3]^2$.

1.16. Определить последовательность выполнения операций и расставить скобки в правильном порядке:

1. $A \cup B \otimes C \setminus A \cap D$;
2. $A \cap \overline{B \cup C \setminus D} \setminus D$;
3. $AB \setminus CD \otimes \overline{A \cup D}$;
4. $A \setminus \overline{B \setminus \overline{C \cup D} \cap A} \cup \overline{\overline{A} \cup C}$.

1.17. Избавиться в выражении от лишних скобок:

1. $(A \setminus B) \cup ((C \cap B) \setminus D)$;
2. $\overline{((A \cap B) \otimes C)} \cup (\overline{((B \setminus C) \cup D)}$;
3. $((A \cup B) \setminus ((C \cap D) \setminus B)) \otimes \overline{(A \cap D)}$;
4. $((A \setminus B) \cap (B \setminus D)) \cup ((B \setminus (C \setminus D)) \otimes \overline{AB})$.

1.18. Какие из следующих высказываний верны, если $a \in A$, и $A \subset B$:

1. $a \notin B$;
2. $a \in B$;
3. $A \in B$;
4. $a \in A \cup B$;
5. $a \notin A \cap B$;
6. $a \in A \setminus B$;
7. $a \in A \otimes B$;
8. $a \notin \overline{B}$;
9. $\{a\} \in 2^B$;
10. $\{a\} \subseteq A$;
11. $a \in \overline{B \setminus A}$;
12. $a \in 2^A$.

1.19. Какие из следующих высказываний верны, если $a \in A$, $a \notin B$ и $B \subseteq A \subseteq C$:

1. $a \notin C$;
2. $a \in C$;
3. $a \in A \cap B$;
4. $a \in A \cup B$;
5. $a \in A \setminus B$;
6. $a \in B \setminus A$;
7. $a \in A \otimes B$;
8. $a \in B \cup C$;
9. $a \in A \setminus C$;
10. $a \in \overline{B}$;
11. $a \in B \times C$;
12. $(a, a) \in C^2$;
13. $a \in B \cap (A \cup C)$;
14. $a \in (B \cap A) \cup C$;
15. $\{a\} \subseteq B \cup (C \setminus A)$;
16. $\{a\} \subseteq A \cap (C \setminus B)$.

1.20. Характеристические векторы множеств $A$ и $B$ равны, соответственно, (01101) и (00110). Найти характеристические векторы множеств:

1. $A \cup B$;
2. $A \cap B$;
3. $A \setminus B$;
4. $B \setminus A$;
5. $A \otimes B$;
6. $\overline{A}$;
7. $A \cap \overline{B}$;
8. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

1.21. Известно, что характеристический вектор множества $A$ содержит ровно 4 единицы, а характеристический вектор множества $B$ содержит ровно 5 единиц. Сколько единиц может содержать характеристический вектор множества:

1. $A \cup B$;
2. $A \cap B$;
3. $A \setminus B$;
4. $B \setminus A$;
5. $A \otimes B$;
6. $A \times B$

1.22. Пусть $M_5$, $M_6$, $M_7$ обозначают подмножества целых чисел, состоящие соответственно из всех чисел, кратных 5, 6 и 7. С помощью операций над множествами выразите через них множества чисел:

1. Все числа, кратные 210;
2. Все числа, кратные 5, но не кратные 42;
3. Все числа, взаимно простые с 35 и кратные 6.

1.23. Какие из приведенных ниже соотношений верны?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $A \times \emptyset = A$; | 4. $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$; | 7. $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$; | 10. $2^{A \otimes B} \subseteq 2^A \otimes 2^B$; |
| 2. $\emptyset \times A = \emptyset$; | 5. $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$; | 8. $2^{A \setminus B} \subseteq 2^A \setminus 2^B$; | 11. $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$; |
| 3. $2^{\emptyset} = \emptyset$; | 6. $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$; | 9. $2^{A \otimes B} = 2^A \otimes 2^B$; | 12. $2^{\overline{A}} = \overline{2^A}$. |

1.24. Доказать тождество:

| | |
|---|---|
| 1. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$; | 5. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$; |
| 2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; | 6. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$; |
| 3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; | 7. $(A \setminus B)^2 = A^2 \setminus (A \times B) \setminus (B \times A)$; |
| 4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; | 8. $(A \otimes B) \times C = (A \times C) \otimes (B \times C)$. |

1.25. Доказать включение (тождество):

| | | |
|---|---|---|
| 1. $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$; | 3. $2^{\overline{A}} \subseteq \overline{2^A}$; | 5. $2^{A - B} \subseteq 2^A \setminus 2^B$; |
| 2. $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$; | 4. $2^{A \setminus B} = 2^A \cap 2^{\overline{B}}$; | 6. $2^{A \cup B} \cap 2^{\overline{A \cap B}} = 2^{A \otimes B}$. |

1.26. Доказать тождество, используя диаграммы Венна–Эйлера:

| | |
|---|---|
| 1. $\overline{\overline{A}} = A$; | 7. $\overline{A \otimes B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$; |
| 2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; | 8. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; |
| 3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; | 9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; |
| 4. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; | 10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; |
| 5. $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$; | 11. $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; |
| 6. $A \otimes B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$; | 12. $A \setminus (B \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)$. |

1.27. Доказать или опровергнуть соотношение:

1. $(A \otimes (B \cap C)) \otimes ((B \cap C) \otimes (A \otimes B)) = B$;
2. $(\overline{C} \otimes B) \otimes \overline{A} = (C \otimes B) \otimes A$;
3. $C \otimes \overline{ABC} = (\overline{C} \otimes \overline{BC}) \otimes (\overline{AB} \otimes ABC)$;
4. $ABC \cup \overline{ABC} = ABC \otimes \overline{ABC}$.

1.28. Существуют ли такие множества $A$, $B$ и $C$, что выполнены следующие условия:

1. $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$;
2. $A \otimes B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$;
3. $B \setminus A = \emptyset$, $\overline{B \cup C} = \emptyset$, $\overline{A} \cap \overline{C} \neq \emptyset$;
4. $A \setminus B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$.

1.29. Показать, что для любых множеств $A, B, C$ из выполнения включения слева следует выполнение включения справа:

1. $A \subseteq B \cup C \to A \cup B \subseteq B \cup C$;
2. $A \subseteq B \cup C \to (A \setminus B) \cup (A \cap C) \subseteq C$;
3. $B \setminus C \subseteq A \to B \subseteq C \cup (B \cap A)$;
4. $B \subseteq C \setminus A \to A \cup (B \setminus C) \subseteq A \setminus B$.

1.30. Показать равносильность равенства и включения:

1. $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$;
2. $A \cup B = A \leftrightarrow B \subseteq A$;
3. $A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$;
4. $A \setminus B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq B$;
5. $A \otimes B = \emptyset \leftrightarrow A = B$.

1.31. Проверить равносильность равенства и включения:

1. $A \subseteq B \setminus C \leftrightarrow B = (A \otimes B) \cup (A \setminus C)$;
2. $A \subseteq BC \leftrightarrow A \cup B = (B \cap C) \cup (B \setminus A)$;
3. $A \cup B \subseteq C \leftrightarrow B \otimes C = (A \setminus B) \cup (C \setminus B)$;
4. $A \cup B \subseteq C \leftrightarrow A \cup B = (A \otimes B) \cup (B \cap C)$.

1.32. Выяснить, равносильны ли следующие системы условий:

1. $\begin{cases} A \subseteq B \subseteq \overline{C} \\ D \subseteq C \\ A \cup D = B \cup C \end{cases}, \quad \begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases};$

2. $\begin{cases} A \cap B \subseteq C \cap D \\ A \cap C \subseteq B \cup D \\ A \subseteq B \cup C \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{A} \subseteq C \cap D \\ B \setminus C \subseteq \overline{A} \\ A \subseteq C \cup D \end{cases};$

3. $\begin{cases} C \otimes D \subseteq A \\ B \cup D \subseteq A \cup C \\ A \setminus D \subseteq C \setminus B \end{cases}, \quad \begin{cases} A \setminus C \subseteq C \setminus D \\ A \cap B \subseteq C \cap D \\ A \subseteq \overline{C} \cup D \end{cases}.$

1.33. Решить систему уравнений относительно множества $X$ и указать условия совместности системы или доказать её несовместность:

1. $\begin{cases} B \setminus X = A \cap C \\ A \setminus X = C \setminus B \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases};$ 2. $\begin{cases} B \cup X = B \cap C \\ A \cup C = C \cap X \\ A \cup B = X \cap C \end{cases};$ 3. $\begin{cases} C \setminus A = B \otimes X \\ C \setminus X = B \setminus A \\ A \cap X = B \cap C \end{cases}.$

# 2. Отношения

**Отношением** называют любое подмножество $\rho$ декартового произведения $M_1 \times \cdots \times M_n$. Число $n$ определяет арность (местность) отношения. В зависимости от местности отношения имеют названия: $n = 1$ – унарное (одноместное) отношение, $n = 2$ – бинарное (двуместное) отношение, $n = 3$ – тернарное (трехместное) отношение, $n > 3$ – $n$ - арное (или $n$-местное) отношение. Говорят, что $n$-арное отношение $\rho$ **определено на множестве** $M$, если $\rho \subseteq M^n$.

Операции над множествами индуцируют операции над отношениями. Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ и $\tau \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$. Тогда определены отношения:

*объединение* — $\rho \cup \tau = \{(m_1, \ldots, m_n) |\, (m_1, \ldots, m_n) \in \rho$ или $(m_1, \ldots, m_n) \in \tau\}$,

*пересечение* — $\rho \cap \tau = \{(m_1, \ldots, m_n) |\, (m_1, \ldots, m_n) \in \rho$ и $(m_1, \ldots, m_n) \in \tau\}$,

*разность* — $\rho \setminus \tau = \{(m_1, \ldots, m_n) |\, (m_1, \ldots, m_n) \in \rho$ и $(m_1, \ldots, m_n) \notin \tau\}$,

*симметрическая разность* — $\rho \otimes \tau = (\rho \setminus \tau) \cup (\tau \setminus \rho)$,

*дополнение* — $\overline{\rho} = \{(m_1, \ldots, m_n) |\, (m_1, \ldots, m_n) \notin \rho\}$.

**Бинарное отношение**: для бинарного отношения записи $(m_1, m_2) \in \rho$ и $m_1 \rho\, m_2$ эквивалентны. Дополнительно определяются операции:

*произведение* $\rho_1 \subseteq A \times B$ и $\rho_2 \subseteq B \times C$ – бинарное отношение $\rho_1 \cdot \rho_2 \subseteq A \times C$, образованное такими парами $(a, c)$, что найдется $b \in B$, для которого $a\rho_1 b$ и $b\rho_2 c$;

*обратное* к отношению $\rho$ – отношение $\rho^{-1} = \{(a, b) |\; (b, a) \in \rho\}$.

**Виды бинарных отношений:** отношение $\rho$, определеное на $M$, называют

1. рефлексивным, если $a\rho a$ для любого $a \in M$;
2. антирефлексивным, если $(a, a) \notin \rho$ для любого $a \in M$ (т.е. $\overline{\rho}$ рефлексивно);
3. симметричным, если из $a\rho b$ следует $b\rho a$;
4. антисимметричным, если из условий $a\rho b$ и $b\rho a$ следует $a = b$;
5. транзитивным, если из условий $a\rho b$ и $b\rho c$ следует $a\rho c$;
6. полным (линейным), если для любых $a, b \in M$, либо $a\rho b$, либо $b\rho a$.

Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение называют **отношением эквивалентности**. Под **классом эквивалентности** элемента $a \in M$ относительно отношения эквивалентности $\rho$ понимаем множество $[a] = \{b|\ (a,b) \in \rho\}$. Отношение эквивалентности $\rho$ задает разбиение множества $M$ на непересекающиеся классы эквивалентности. Множество всех классов эквивалентности называют **фактор множеством** и обозначают $M/\rho$.

Антисимметричное, транзитивное отношение называют **отношением порядка**. Рефлексивное отношение порядка называют **отношением частичного порядка**, а антирефлексивное отношение – **отношение строгого порядка**. Полное отношение порядка назывют полным (линейным) порядком.

**Диаграммой** бинарного отношения $\rho$, определенного на $M$, называют схему, в которой каждый элемент множества $M$ изображается точкой на плоскости, и если $a\rho b$, то точки $a$ и $b$ соединяют направленной дугой (стрелкой). Если $a\rho b$ и $b\rho a$, то две направленные в противоположных направлениях дуги, соединяющие $a$ и $b$, могут быть заменены одной не направленной дугой.

Пусть $\rho$ – отношение частичного порядка. Говорят, что $a \in M$ покрывается $b \in M,\ b \neq a$, если из $a\rho c$ и $c\rho b$ следует одно из равенств, либо $a = c$, либо $b = c$. **Диаграммой Хассе** называют схему, в которой каждый элемент множества $M$ изображается точкой на плоскости, и если $a$ покрывает $b$, то точки $a$ и $b$ соединяют отрезком, причем точку, соответствующую $a$, располагают выше $b$.

## Задачи для практики и самостоятельной работы

2.1. Пусть $n$-местные отношения $\rho$ и $\tau$ определены на $M$. Построить отношения $\rho \cup \tau$, $\rho \cap \tau$, $\rho - \tau$, $\rho \otimes \tau$, $\overline{\rho}$:

1. $n = 1,\ M = \mathbb{R},\ \rho = [1;5),\ \tau = (2;7]$;
2. $n = 2,\ M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b)|\, a < 3b\},\ \tau = \{(a,b)|\, a < 2b + 3\}$;
3. $n = 3,\ M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b,c)|ab < c\},\ \tau = \{(a,b,c)|\, a + b < c\}$;
4. $n = 3,\ M = \mathbb{Z},\ \rho = \{(a,b,c)|\, a = b\},\ \tau = \{(a,b,c)|\, b = c\}$;
5. $n = 3,\ M = 2^A,\ \rho = \{(x,y,z)|\ x \cup y \subseteq z\},\ \tau = \{(x,y,z)|\ x \cap y \subseteq z\}$.

2.2. Пусть $n$-местные отношения $\rho \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ и $\tau \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$. Доказать равенства:

1. $\overline{\overline{\rho}} = \rho$; 3. $\overline{\rho \cap \tau} = \overline{\rho} \cap \overline{\tau}$; 5. $\overline{\rho \setminus \tau} = \overline{\rho} \cup \tau$;
2. $\overline{\rho \cup \tau} = \overline{\rho} \cap \overline{\tau}$; 4. $\rho \setminus \tau = \rho \cap \overline{\tau}$; 6. $\rho \otimes \tau = (\rho \cup \tau) \cap (\overline{\rho \cap \tau})$.

2.3. Бинарные отношения $\rho$ и $\tau$ определены на множестве $M$. Построить отошения $\rho \cdot \tau$ и $\tau \cdot \rho$:

1. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(x, y)|\, y = x^2\},\ \tau = \{(x, y)|\, y = 2^x\}$;
2. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(x, y)|\, y = x + 1\},\ \tau = \{(x, y)|\, y = \operatorname{tg} x\}$;
3. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(x, y)|\, y = x^3\},\ \tau = \{(x, y)|\, x < y\}$;
4. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(x, y)|\, x \le y\},\ \tau = \{(x, y)|\, x < y\}$;
5. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(x, y)|\, y$ кратно $x\},\ \tau = \{(x, y)|\, x$ взаимно простое с $y\}$;
6. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(x, y)|\, y$ кратно $x\},\ \tau = \{(x, y)|\, x \le y\}$;
7. $B \subset A$, $M = 2^A$, $\rho = \{(x, y)|\, y = A - x\},\ \tau = \{(x, y)|\, y = x \cap B\}$.

2.4. Для бинарного отношения $\rho$, определенного на множестве $M$, построить отношения $\rho^{-1}$ и $\rho^2$:

1. $M = \{1, 2, 3\}, \rho = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3)\}$;
2. $M = \mathbb{N}, \rho = \{(a, b)|\, a < b\}$;
3. $M = \mathbb{R}, \rho = \{(a, b)|\, a < b\}$;
4. $M = \mathbb{N}, \rho = \{(x, y)\,|\, x$ кратно $y\}$;
5. $M = \mathbb{R}, \rho = \{(x, y)\,|\,|x| \le y\}$;
6. $M = \mathbb{Q}, \rho = \{(x, y)\,|\, xy = 0\}$;
7. $M = 2^A, \rho = \{(x, y)|\, y = \overline{x}\}$;
8. $M = 2^A, \rho = \{(x, y)|\, x \cup y = A\}$.

2.5. Пусть бинарные отношения $\rho$, $\tau$, $\mu$ определены на $M$. Доказать соотношения:

1. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
2. $\overline{\rho^{-1}} = \overline{\rho}^{-1}$;
3. $(\rho \cup \tau)^{-1} = \rho^{-1} \cup \tau^{-1}$;
4. $(\rho \cap \tau)^{-1} = \rho^{-1} \cap \tau^{-1}$;
5. $(\rho \setminus \tau)^{-1} = \rho^{-1} \setminus \tau^{-1}$;
6. $(\rho \otimes \tau)^{-1} = \rho^{-1} \otimes \tau^{-1}$;
7. $(\rho \cdot \tau) \cdot \mu = \rho \cdot (\tau \cdot \mu)$;
8. $(\rho \cdot \tau)^{-1} = \tau^{-1} \cdot \rho^{-1}$.
9. $(\rho \cup \tau) \cdot \mu = \rho \cdot \mu \cup \tau \cdot \mu$;
10. $(\rho \cap \tau) \cdot \mu \subseteq \rho \cdot \mu \cap \tau \cdot \mu$;
11. $(\rho - \tau) \cdot \mu \subseteq \rho \cdot \mu \cap \overline{\tau} \cdot \mu$;

2.6. Проверить, является ли бинарное отношение $\rho$, определенное на $M$, рефлексивным или антирефлексивным:

1. $M = \{1; 2; 3\},\ \rho = \{(1, 1);\ (1, 3);\ (2, 3)\}$;
2. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a, b)|\, a < b\}$;
3. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a, b)|\, a$ кратно $b\}$;
4. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(a, b)|\, a - b \in \mathbb{Z}\}$;
5. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(a, b)|\, a + b \in \mathbb{Z}\}$;
6. $M = 2^A,\ \rho = \{x, y)|\, x \subseteq y\}$.

2.7. Доказать:

1. если рефлексивны отношения $\tau$ и $\mu$, то рефлексивны отношения $\tau^{-1}$, $\tau \cdot \mu$, $\tau \cup \mu$, $\tau \cap \mu$;
2. если антирефлексивны отношения $\tau$ и $\mu$, то антирефлексивны отношения $\tau^{-1}$, $\tau \cup \mu$, $\tau \cap \mu$, $\tau \setminus \mu$, $\tau \otimes \mu$;

3. найдутся антирефлексивные отношения $\tau$ и $\mu$, произведение которых не является антирефлексивным.

2.8. Проверить, является ли бинарное отношение $\rho$, определенное на $M$, симметричным или антисимметричным:

1. $M = \{1; 2; 3\},\ \rho = \{(1,1);\ (1,3);\ (2,1)\}$;
2. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b) |\, a < b\}$;
3. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b) |\, a$ кратно $b\}$;
4. $M = \mathbb{Z},\ \rho = \{(a,b) |\, a$ кратно $b\}$;
5. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(a,b) |\, a - b \in \mathbb{Z}\}$;
6. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(a,b) |\, a + b \in \mathbb{Z}\}$;
7. $M = 2^A,\ \rho = \{x,y) |\, x \subseteq y\}$;
8. $M = 2^A,\ \rho = \{x,y) |\, x \cup y = A\}$.

2.9. Доказать:

1. если отношения $\tau$ и $\mu$ симметричны, то симметричны отношения $\tau^{-1}$, $\tau \cap \mu$, $\tau \cup \mu$, $\tau \setminus \mu$, $\tau \otimes \mu$, $\tau \cdot \mu \cup \mu \cdot \tau$;
2. если отношения $\tau$ и $\mu$ антисимметричны, то антисимметричны отношения $\tau^{-1}$, $\tau \cap \mu$;
3. найдутся симметричные отношения $\tau$ и $\mu$, произведение которых не является симметричным;
4. найдутся антисимметричные отношения $\tau$ и $\mu$, произведение которых не является антисимметричным.

2.10. Проверить, является ли бинарное отношение $\rho$, определенное на $M$, транзитивным:

1. $M = \{1; 2; 3\},\ \rho = \{(1,1);\ (1,3);\ (2,1)\}$;
2. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b) |\, a < b\}$;
3. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b) |\, b$ кратно $a\}$;
4. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b) |\, a, b$ – взаимно простые$\}$;
5. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(a,b) |\, a + 2b$ кратно $3\}$;
6. $M = \mathbb{R},\ \rho = \{(a,b) |\, a - b \in \mathbb{Z}\}$;
7. $M = 2^A,\ \rho = \{x,y) |\, x \subseteq y\}$;
8. $M = 2^A,\ \rho = \{x,y) |\, x \cap y = \emptyset\}$.

2.11. Доказать, если отношения $\tau$ и $\mu$ транзитивны, то транзитивны отношения $\tau^{-1}$, $\tau \cap \mu$. Привести пример транзитивных отношений $\tau$ и $\mu$, что отношения $\tau \cup \mu$ и $\tau\mu$ не являются транзитивными.

2.12. На множестве $\{a, b, c\}$ построить бинарное отношение, удовлетворяющее условиям:

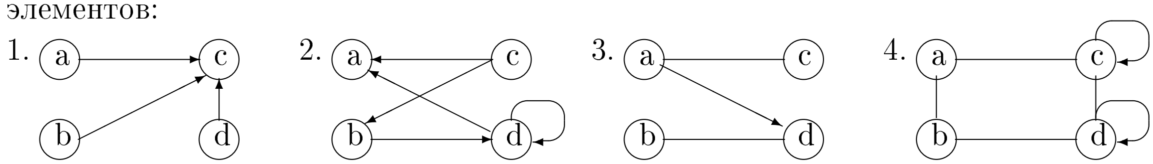
1. рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

2. рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;
3. рефлексивное, не симметричное, транзитивное;
4. не рефлексивное, антисимметричное, транзитивное;
5. не рефлексивное, симметричное, транзитивное.

2.13. Построить диаграмму бинарного отношения $\rho$, заданного на множестве $\{1, 2, \ldots, 6\}$:

1. $\rho = \{(a, b) |\, a < b\}$;
2. $\rho = \{(a, b) |\, a \geq b\}$;
3. $\rho = \{(a, b) |\, b$ кратно $a\}$;
4. $\rho = \{(a, b) |\, a$ взаимно простое с $b\}$;
5. $\rho = \{(a, b) |\, a - b$ кратно $3\}$;
6. $\rho = \{(a, b) |\, a = b - 2\}$.

2.14. По диаграмме бинарного отношения построить его описание в виде множества пар элементов:




2.15. Убедиться, что отношение $\rho$, определенное на $M$, являтся отношением эквивалентности. Построить фактор–множество $M/\rho$:

1. $M = \mathbb{N},\ \rho = \{(x, y) |\, \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}\}$;
2. $M = \mathbb{Z},\ \rho\{(x, y) |\, \frac{x^3 - y}{3} \in \mathbb{Z}\}$;
3. $M = \mathbb{R}, \rho = \{(a, b) \,|\, a - b \in \mathbb{Z}\}$;
4. $M = \mathbb{R}, \rho = (-\infty, 1]^2 \cup (1, \infty)^2$;
5. $M = 2^A,\ B \subset A,\ \rho = \{(x, y) \,|\, x \cup B = y \cup B\}$;
6. $M = 2^A,\ B \subset A,\ \rho = \{(x, y) \,|\, x - B = y - B\}$;
7. $M = 2^A,\ B \subset A,\ \rho = \{(x, y) \,|\, x \cap B = y \cap B\}$;
8. $M = 2^A,\ B \subset A,\ \rho = B^2 \cup \overline{B}^2$.

2.16. Пусть $\tau$ и $\mu$ — отношения эквивалентности. Доказать, что $\tau^{-1}$, $\tau^2$, $\tau \cap \mu$ — отношения эквивалентности. Привести примеры, когда $\tau \cup \mu$ и $\tau \cdot \mu$ не являются отношениями эквивалентности.

2.17. Пусть $\rho \subseteq M^2$ — отношение эквивалентности. Доказать:

1. для любых $a, b \in M$ либо $[a] = [b]$, либо $[a] \cap [b] = \emptyset$ (где $[a] = \{x |\, x\rho a\}$ — класс эквивалентности $a$);
2. если $P \subseteq M$ — множество, составленное из представителей классов эквивалентности (из класса эквивалентности берется ровно один элемент), то $M = \cup_{a \in P}[a]$ — разбиение $M$ на непересекающиеся множества и $\rho = \cup_{a \in P}[a]^2$.

2.18. Пусть $M = \cup_{i=1}^{k} A_i$ — разбиение $M$ на $k$ непересекающихся множеств. Показать, что $\rho = \cup_{i=1}^{k} A_i^2$ является отношением эквивалентности с классами эквивалентности $A_i$, где $i = 1, \ldots, k$.

2.19. Множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ отношением эквавалентности $\rho$ разбивается на три класса эквивалентности $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{4\}$. Задать $\rho$ перечислением.

2.20. Каким свойством обладает диаграмма отношения эквивалентности? Используя это свойство, перечислите все возможные диаграммы отношения эквивалентности на множестве из $n$ элементов, где $n \in \{2, 3, 4\}$.

2.21. Проверить, образует отношение $\rho$, определенное на $M$, порядок, частичный порядок, линейный порядок:

1. $M = \mathbb{N}, \rho = \{(x, y) \mid \frac{x}{y} \in N\}$;
2. $M = \mathbb{Z}, \rho = \{(x, y) \mid x < y\}$;
3. $M = \mathbb{Q}, \rho = \{(x, y) \mid x \geq y\}$;
4. $M = \mathbb{R}, \rho = \{(x, y) \mid x^2 \geq y\}$;
5. $M = \mathbb{R}, \rho = \{(x, y) \mid |x| \leq |y|\}$;
6. $M = \mathbb{N}^2, \rho = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mid x_1 x_2 \geq y_1 y_2\}$;
7. $M = 2^A, \rho = \{(x, y) \mid x \subseteq y\}$;
8. $M = 2^A, B \subset A, \rho = \{(x, y) \mid x \cap B \subset y \cap B\}$;
9. $M = 2^A, B \subset A, \rho = \{(x, y) \mid x \cup B \subseteq y\}$;
10. $M = 2^A, \rho = \{(x, y) \mid |x| \leq |y|\}$.

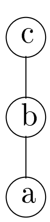
2.22. Пусть $\tau$ и $\mu$ — отношения частичного порядка. Доказать, что $\tau^{-1}$, $\mu^2$, $\tau \cap \mu$ — отношения частичного порядка. Привести примеры, когда $\tau \cup \mu$ и $\tau \cdot \mu$ не являются отношениями частичного порядка.

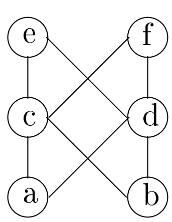
2.23. Каким свойством обладает диаграмма отношения частичного порядка? Используя это свойство, перечислите все возможные диаграммы отношения частичного порядка на множестве из $n$ элеметов, где $n \in \{2, 3\}$.

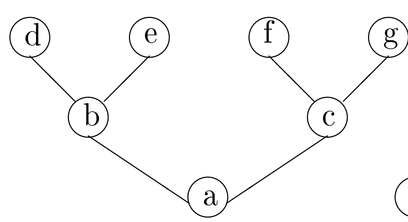
2.24. На множестве $\{1, 2, \ldots, 6\}$ задано отношение частичного порядка $\rho$. Построить диаграмму Хассе для $\rho$:

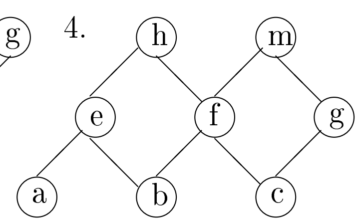
1. $\rho = \{(x, y) \mid y$ кратно $x\}$;
2. $\rho = \{(x, y) \mid x \leq y\}$;
3. $\rho = \{(x, y) \mid x = y$ или $x \leq y - 2\}$;
4. $\rho = \{(x, y) \mid 2x \leq y$ или $x = y\}$.

2.25. По диаграмме Хассе восстановить отношение частичного порядка:

1. 


2. 


3. 


4. 

# 3. Функции, операции

**Функцией** (операцией) $f$ с **областью определения** $X$ и **областью значения** $Y$ является бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$. Элементы множества $X$ называются **аргументами**, а элемент $y \in Y$, для которого найдется такой $x \in X$, что $(x, y) \in f$, называется **значением** функции $f$ от аргумента $x$, и обозначается $f(x)$. Записи $(x, y) \in f$ и $y = f(x)$ эквивалентны. Множество всех элементов $y \in Y$, для каждого из которых найдется такой $x \in X$, что пара $(x, y) \in f$, называется **множеством значений функции на множестве** $X$ и обозначается $f(X)$. Если $X = M_1 \times \cdots \times M_k$, то функция $f$ называется $k$ - арной (местной). Если $X = M^k$, то говорят, что $k$-арная функция $f$ определена на $M$. При $k = 2$ функция называется бинарной.

Функция $f$ называется **всюду определенной** на $X$, если для любого $x \in X$ найдется такой $y \in Y$, что $y = f(x)$ $((x, y) \in f)$. Функция, не являющаяся всюду определенной, называется **частично определенной**. Множество аргументов, для которых определено значение функции $f$, называют **областью определения** функции и обозначают $D_f$. Функция $f$ всюду определена на $X$, если $D_f = X$, и частично определена, если $D_f \subset X$.

Функция $f$ называется **однозначной**, если для каждого аргумента найдется не более одного значения функции. В противном случае функция называется **многозначной**. Если не оговорено противное, функция считается всюду определенной и однозначной. Множество всюду определенных на $X$ и однозначных функций с областью значений $Y$ обозначают $Y^X$. Пусть $f \in Y^X$ и $g \in Z^Y$. **Композицией функциий** $f \cdot g$ называется функция $g(f(x)) \in Z^X$ (сравните с определением композиции бинарных отношений).

Функция $f \in Y^X$ называется **сюръективной**, если $f(X) = Y$, т.е. область значений и множество значений функции совпадают.

Функция $f$ называется **инъективной**, если из совпадений значений следует равенство аргументов.

Функция называется **биективной** (биекция), если она одновременно сюръективна и инъективна. Для биективной функции $f \in Y^X$ определена **обратная функция** $f^{-1} \in X^Y$: $x = f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, когда $y = f(x)$ (сравните с определением обратного отношения).

Множества $X$ и $Y$ называются **равномощными**, если существует биекция $f \in Y^X$. Факт, что множества равномощны, обозначают равенством $|X| = |Y|$. Равномощные конечные множества имеют одинаковое количество элементов. Факт, что множество $X$ равномощно некоторому подмножеству множества $Y$, записывают в виде не строго неравенства $|X| \leq |Y|$. Если, кроме того, $X$ не равномощно $Y$, то неравенство строгое $|X| < |Y|$. По теореме Кантора выполняется неравенство $|X| < |2^X|$.

Множество называется **счетным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел (т.е. элементы множества можно перенумеровать). Мощность множества называется **континуум**, если оно равномощно множеству вещественных чисел. Справедливо неравенство $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Для бинарной функции $f$, определенной на $M$, записи $f(x,y)$ и $xfy$ равнозначны. Бинарная операция $\circ$ называется **ассоциативной**, если $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для всех $a, b, c \in M$. Операция $\circ$ называется **коммутативной**, если $a \circ b = b \circ a$ для всех $a, b \in M$.

В курсе алгебры большое внимание уделяется изучению множеств с определенными на них бинарными операциями. Множество с определенной на нем ассоциативной операцией называется **полугруппой**. Элемент полугруппы $e \in M$ называется **нейтральным** (нулевым), если для всех $a \in M$ справедливо $a \circ e = e \circ a = a$. Элемент полугруппы $b \in M$ называется обратным к элементу $a$, если $a \circ b = b \circ a = e$. Обратный элемент к $a$ обозначают $a^{-1}$. Полугруппа с нейтральным элементом, в которой для каждого элемента существует обратный, называется **группой**. Группа называется **абелевой** (коммутативной), если операция коммутативна. При записи абелевой группы приняты следующие обозначения: $+$ – обозначение операции, $0$ – обозначение нейтрального элемента, $-a$ - обозначение обратного элемента к $a$.

Множество $K$ с определенными на нем бинарными операциями $+$ и $\circ$ назывется **кольцом**, если $K$ с операцией $+$ образует абелеву группу, $K$ с операцией $\circ$ образует полугруппу и операции $+$ и $\circ$ связаны законами **дистрибутивности** $(a+b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ и $c \circ (a+b) = c \circ a + c \circ b$. Кольцо $P$ с операциями $+$ и $\circ$ назывется **полем**, если $P - \{0\}$ с операцией $\circ$ образует абелеву группу.

## Задачи для практики и самостоятельной работы

3.1. Бинарное отношение $\phi \subseteq \mathbb{R}^2$ определяет функцию $f$. Является ли функция $f$ всюду определенной или частично определенной? Если функция $f$ частично определена, то найти ее область определения. Опишите множество значений функции $f$. Определите, является ли функция $f$ однозначной, или многозначной? Принадлежит ли $f$ множеству $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

1. $\phi = \{(a, -a) | a \in \mathbb{R}\}$; 6. $\phi = \{(a + b, ab)) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$;
2. $\phi = \{(a, 2a) | \, a \in \mathbb{R}\}$; 7. $\phi = \{(a + b, a - b)) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$;
3. $\phi = \{(2a, a) | \, a \in \mathbb{R}\}$; 8. $\phi = \{(ab, ab + 1)) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$;
4. $\phi = \{(a, a^2) | \, a \in \mathbb{R}\}$; 9. $\phi = \{(a, b)) | \, a < b, \, a, b \in \mathbb{R}\}$.
5. $\phi = \{(a^2, a) | \, a \in \mathbb{R}\}$;

3.2. Выпишите все различные функции из множества $\{0, 1\}^{\{0,1\}}$; $\{0, 1, 2\}^{\{0,1\}}$; $\{0, 1\}^{\{0,1,2\}}$.

3.3. Доказать соотношение:

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; 3. $f(A - B) \subseteq f(A) - f(B)$;
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; 4. $f(A \otimes B) \subseteq f(A) \otimes f(B)$.

3.4. Проверить, является ли функция $f \in B^A$ сюръективной?

1. $A = B = \mathbb{R}, \; f(x) = |x|$; 5. $A = \mathbb{N}^2, \; B = \mathbb{N}, \; f(x, y) = \max\{x, y\}$;
2. $A = B = \mathbb{R}, \; f(x) = x^3$; 6. $A = \mathbb{N}^2, \; B = \mathbb{N}, \; f(x, y) = x(y + 1)$;
3. $A = B = \mathbb{Z}, \; f(x) = 2x$; 7. $A = \mathbb{N}^2, \, B = \mathbb{N}, \, f(x, y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + x$.
4. $A = B = \mathbb{R}, \; f(x) = 2x$;

3.5. Выпишите все сюрьективные функции из множеств $\{0, 1\}^{\{0,1\}}$; $\{0, 1\}^{\{0,1,2\}}$.

3.6. Проверить, является ли $f \in B^A$ инъективной?

1. $A = B = \mathbb{N}, \; f(x) = 2x$; 4. $A = B = \mathbb{N}^2, \; f(x, y) = (\max\{x, y\}, \min\{x, y\})$;
2. $A = B = \mathbb{R}, \; f(x) = x^2$; 5. $A = \mathbb{N}^2, \; B = \mathbb{N}, \; f(x, y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + x$;
3. $A = B = \mathbb{N}, \; f(x) = x^2$; 6. $A = B = \mathbb{N}^2 \; f(x, y) = (3x + y, x + 2y)$.

3.7. Выпишите все инъективные функции из множества $\{0, 1\}^{\{0,1\}}$; $\{0, 1, 2\}^{\{0,1\}}$.

3.8. Проверить, является ли $f \in B^A$ биективной:

1. $A = B = \mathbb{R}, \; f(x) = e^x - e^{-x}$; 4. $A = B = \mathbb{N}^2, \; f(x, y) = (x + y, x)$;
2. $A = B = \mathbb{R}, \; f(x) = x \cdot e^x$; 5. $A = \mathbb{N}^2, \; B = \mathbb{N} \; f(x, y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + x$;
3. $A = B = \mathbb{R}^2, \; f(x, y) = (x + y, x)$; 6. $A = B = \mathbb{Z}^2 \; f(x, y) = (3x + 2y, 5x + 3y)$.

3.9. Выпишите все биективные функции из множества $\{1,2,3\}^{\{1,2,3\}}$.

3.10. При каких значениях $a, b, c \in \mathbb{R}$ функция $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ является биекцией?

| | |
|---|---|
| 1. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; | 3. $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$; |
| 2. $f(x) = \max\{ax+b, cx+5\}$; | 4. $f(x) = \min\{x^2+ax+b, x+c\}$. |

3.11. Показать,что функция $f \in B^A$ является биекцией и найти $f^{-1}$:

1. $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$;
2. $A = [0,1]$, $B = [0,2]$, $f(x) = 2x$;
3. $A = (0,1)$; $B = (0,+\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$;
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = (-1)^x \frac{x}{2} + \frac{1-(-1)^x}{4}$;
5. $A = \mathbb{N}^2$, $B = \mathbb{N}$, $f(x,y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + x$;

3.12. Показать, что бесконечное множество $M$ счетно тогда и только тогда, когда на $M$ существует такое отношение линейного порядка $\rho$, что для любого $b \in M$ множество $M_b = \{x|\, x\rho b\}$ — конечно.

3.13. Показать, что бесконечное множество $M$ счетно тогда и только тогда, когда существует инъекция из $\mathbb{N}^M$.

3.14. Показать счетность множества $M$:

1. $M$ — бесконечное подмножество счетного множества $T$;
2. $M$ — объединение конечного множества $T$ и счетного множества $H$;
3. $M$ — объединение двух счетных множеств $T$ и $H$;
4. $M = \mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
5. $M$ — объединение счетного числа счетных множеств;
6. $M$ — декартово произведение двух счетных множеств $T$ и $H$;
7. $M = \mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
8. $M$ — декартова степень счетного множества $T$;
9. $M$ — множество многочленов с целыми коэффициентами;
10. $M$ — множество многочленов с рациональными коэффициентами;
11. $M$ — множество конечных подмножеств счетного множества $T$ $(M \subset 2^T)$.

3.15. Установить биекцию между множествами $A$ и $B$:

1. $A = (0,1),\ B = (1,5)$;
2. $A = (0,1),\ B = (0,\infty)$;
3. $A = (-1,1),\ B = \mathbb{R}$;
4. $A = [0,1),\ B = (2,4]$;
5. $A = [0,1),\ B = [0,\infty)$;
6. $A = [0,1),\ B = (0,1)$;
7. $A = [0,1],\ B = [-2,3]$;
8. $A = [0,1],\ B = (0,1)$;
9. $A = [-1,1],\ B = \mathbb{R}$.

3.16. Установить биекцию между множествами $A$ и $B$:

1. $A = (0,1)^2,\ B = (1,5) \times (-2,3)$;
2. $A = [0,1), B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1\}$;
3. $A = [-1,1]^2,\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R} |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;
4. $A = (-1,1)^2,\ B = \mathbb{R}^2$;
5. $A = [0,1) \times \mathbb{Z},\ B = \mathbb{R}$;
6. $A = (0,1) \setminus \mathbb{Q},\ B = (0,1)$.

3.17. Доказать равенство мощностей множеств $(0,1)^2$ и $(0,1)$.

3.18. Доказать:

1. Конечные множества равномощны тогда и только тогда, когда число их элементов совпадают;
2. Для конечных множеств из включения $A \subseteq B$ и равенства $|A| = |B|$ следует равенство множеств $A = B$. Показать, что для бесконечных множеств утверждение не верно;
3. Если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$;
4. Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, то $|A| \leq |C|$.
5. Если $f$ инъекция, то $|A| = |f(A)|$;
6. $|A| \leq |B|$ тогда и только тогда, когда существует инъекция из $B^A$;
7. Если $A$ – бесконечное множество и $B$ – счетно, то $|A \cup B| = |A|$;

3.19. Доказать соотношения для конечных множеств:

1. $|A \cup B| \leq |A| + |B|$;
2. $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$;
3. $|A - B| = |A| - |A \cap B|$;
4. $|A \otimes B| = |A \cup B| - |A \cap B|$;
5. $|2^A| = 2^{|A|}$;
6. $|A \times B| = |A| \times |B|$.

3.20. На множестве $M$ определена операция $\circ$. Является ли эта операция коммутативной, ассоциативной?

1. $M = \mathbb{N},\ a \circ b = a + b + 1$;
2. $M = \mathbb{Z},\ a \circ b = a - b$;
3. $M = \mathbb{N},\ a \circ b = \max\{a,b\}$;
4. $M = \mathbb{N},\ a \circ b = \min\{a,b\}$;
7. $M = \mathbb{Z},\ a \circ b = a \cdot b$;
8. $M = \mathbb{Z},\ a \circ b = a \cdot b + a + b$;
9. $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ a \circ b = \frac{a}{b}$;
10. $M = \mathbb{R},\ a \circ b = a^2 + b^2$.

5. $M = \mathbb{N},\ a \circ b -$ наибольший общий делитель $a$ и $b$;

6. $M = \mathbb{N}$, $a \circ b -$ наименьшее общее кратное $a$ и $b$;

3.21. Образует ли множество $M$ с операций $\circ$ полугруппу, группу, абелеву группу?

1. $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = a + b$;
2. $M = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a + b$;
3. $M = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a + b + 2$;
4. $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = \max\{a, b\}$;
5. $M = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a \cdot b$;
6. $M = \mathbb{N}$, $a \circ b -$ наибольший общий делитель $a$ и $b$;
7. $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a \circ b = a \cdot b$;
8. $M = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $a \circ b = a \cdot b + a + b$;
9. $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, $a \circ b = (a + b) \mod n$;
10. $M = \mathbb{R}^2$, $(a, b) \circ (c, d) = (a + b, c + d)$;
11. $M = 2^A, X \circ Y = X \otimes Y$.

3.22. Образует ли множество $K$ с операциями $+, \cdot$ кольцо, поле?

1. $K = \mathbb{Z}$, операции обычные;
2. $K = \mathbb{Q}$, операции обычные;
3. $K = \mathbb{R}$, операции обычные;
4. $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, операции обычные
5. $K = 2^A$, $X + Y = X \otimes Y$, $X \cdot Y = X \cap Y$.

# 4. Элементы комбинаторики

Рассмотрим задачу подсчета количества элементов конечного множества $M$.

**Дерево вариантов**. Пусть $M \subseteq A \times B$. Дерево вариантов строится по следующим правилам: Из самой верхней вершины (называемой корнем) исходят дуги (к вершинам, расположенным ниже). Дуги, исходящие из корня, помечаются такими элементами из $A$, что при некотором $b \in B$ пара $(a, b) \in M$. Из вершины, в которую приходит дуга, помеченная элементом $a \in A$, исходят дуги, которые помечаются такими элементами из $B$, что $(a, b) \in M$. Вершины, в которые приходят эти дуги, назовем листьями. Каждому пути из корня до листа соответствует пара элементов $(a, b) \in M$, поэтому $|M|$ равна количеству листьев в дереве вариантов. Конструкция легко обобщается на случай, когда $M \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$.

**Правило произведения** Пусть $M \subseteq A \times B$. Если при выборе пары $(a, b) \in M$ элемент $a$ можно выбрать $n$ способами, а элемент $b$ можно выбрать $m$ способами, не зависимо от выбора $a$, то $|M| = nm$. В дереве вариантов $M$ из корня выходит $n$ дуг, помеченных элементами из $A$, а затем из каждой вершины исходит $m$ дуг, помеченных элементами из $B$. Всего получается $mn$ листьев.

**Правило суммы** Если $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

**Комбинаторные схемы:**

**Размещения**: Под числом размещений $U(m, n)$ понимается количество слов длины $n$ в алфавите из $m$ символов. Справедливо равенство:

$$U(m, n) = m^n.$$

**Размещения без повторений**: Под числом размещений $A(m, n)$ (или $[m]_n$) понимается количество слов длины $n$ в алфавите из $m$ символов, причем буквы в словах не повторяются. **Факториалом** натурального числа $n$ (обозначение $n!$) называют произведение натуральных чисел от 1 до $n$. Для удобства записи полагают $0! = 1$. Справедливо равенство

$$A(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Формула имеет смысл при $m \geq n$. Если $m < n$, то размещения без повторений не возможны и $A(m,n) = 0$.

**Перестановки**: Под числом перестановок $P(n)$ понимается количество слов длины $n$ в алфавите из $n$ символов, причем буквы в словах не повторяются Справедливо равенство:

$$P(n) = n!.$$

**Сочетания**: Под числом сочетаний из $n$ по $m$, обозначают $C_n^m$, понимают количество слов длины $n$ в алфавите $\{0,1\}$, причем число единиц в слове равно $m$. Справедливо равенство:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

На слово длины $n$ в алфавите $\{0,1\}$ можно смотреть как на характеристический вектор подмножества некоторого множества из $n$ элементов. Соответственно, $C_n^m$ – число всех $m$ элементных подмножеств $n$-элементного множества.

**Бином Ньютона**: Раенство

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$$

носит название бином Ньютона. Поэтому, число сочетаний называют биномиальным коэффициентом. Справедливы равенсва:

$C_n^0 = C_n^n = 1$ и $C_n^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}$, где $1 \leq i \leq n-1$.

Последовательное вычисление биномиальных коэффициентов по этим формулам, оформленное таблично, носит название треугольник Паскаля.

**Разбиения с заданными размерами частей**: Под числом разбиений с заданными размерами частей понимают число слов длины $n$ в алфавите из $m$ символов с заданным числом вхождений каждого символа. Число разбиений с заданными размерами частей $n_1, \ldots, n_m$ $(n = n_1 + \cdots + n_m)$ обозначается $C_n^{n_1,\ldots,n_m}$ и равно $\frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}$.

Справедливо обобщение Бинома Ньютона, называемое полиномальной теоремой:

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} C_n^{n_1,\ldots,n_k} a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}.$$

**Формула включений-исключений**: Пусть $A_1, \ldots, A_m$ – конечные множества. Пересечение любых $m$ множеств назовем $m$ пересечениями. Обозначим через $S_m$ сумму мощностей всех $m$ – пересечений этих множеств: $S_m = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_m}|$. В частности $S_1 = \sum_{j=1}^{m} |A_j|$, $S_2 = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} |A_{j_1} \cap A_{j_2}|$ и т.д.. Имеет место формула включений-исключений

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} S_j.$$

## Задачи для практики и самостоятельной работы

4.1. Постройте дерево вариантов и перечислите все элементы множества $M$:

1. $M$ – множество таких четных двузначных чисел, у которых соседние цифры отличаются на единицу;
2. $M$ – множество трехзначных чисел, у которых сумма цифр равна 3;
3. $M$ – множество сюръективных функций из $\{0,1\}^{\{0,1,2\}}$;
4. $M$ – множество всех биекций множества $\{1,2,3\}$ в себя.

4.2. Ответьте на вопрос, используя правило умножения или дерево вариантов:

1. Сколько точек квадрата $[0,9] \times [5,14]$ имеют целочисленные координаты?
2. Сколько точек куба $[0,3]^3$ имеют целочисленные координаты?
3. Сколько точек в кубе $[-1,2)^3$ имеют рациональные координаты, знаменатель которых не превосходит 5?
4. Сколько элементов в множестве $\{0,1\}^4$?
5. Сколько существует различных автомобильных номеров, если для задания номера используются три цифры и три буквы русского алфавита, по начертанию совпадающие с латинскими (А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х)?
6. Сколькими способами можно заполнить анкету из 5 вопросов, если возможные варианты ответа только "да" или "нет'?
7. Сколько различных подмножеств у 6 элементного множества?
8. Каждую клетку квадратной таблицы размером $3 \times 3$ можно покрасить в синий, зеленый или красный цвет. Сколькими способами можно раскрасить всю таблицу?
9. Каждую из 10 досок забора можно раскрасить в один из 5 цветов. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы любые 4 подряд идущие доски были окрашены в разные цвета?
10. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры разные?

4.3. Определите строение дерева вариантов и ответьте на вопрос:

1. Сколько существует пятизначных чисел, у которых первые две цифры больше 3?
2. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры четные?

3. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?
4. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры разные?
5. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых любые две соседние цифры разные?
6. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых любые три подряд идущие цифры разные?
7. Сколько существует пятизначных чисел, у которых сумма цифр четна?
8. Сколько существует пятизначных чисел, запись которых не содержит цифры 0 и 9?
9. Сколько существует пятизначных чисел, которые не меняются при чтении их в обратном порядке?
10. Сколько существует пятизначных чисел, у которых в четных разрядах стоят четные цифры (младший разряд — нулевой)?
11. Сколько существует пятизначных чисел можно составить из 5 цифр: 1, 2, 3, 4, 5?
12. Сколько существует пятизначных чисел можно составить из 5 цифр: 0, 1, 2, 3, 4?
13. Сколько существует трехзначных чисел, у которых в записи встречается ровно один ноль?
14. Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая цифра разряда больше порядкового номера разряда (младший разряд — нулевой)?
15. Сколькими способами можно заполнить анкету из 10 вопросов, если на первые 5 вопросов возможные варианты ответа только ”да” или ”нет”, а на остальные 5 вопросов допускается ещё варант ответа ”не знаю”?

4.4. Ответьте на вопрос, предварительно определив строение дерева вариантов:

1. Каким числом способов можно на шахматной доске разместить белую и черную ладьи так, чтобы они не атаковали друг друга?
2. Каким числом способов можно на шахматной доске разместить три ладьи так, чтобы они не атаковали друг друга?
3. Каким числом способов можно на шахматной доске поместить черного и белого королей так, чтобы они не атаковали друг друга?

4. Каким числом способов можно на шахматной доске поместить черного и белого коня так, чтобы они не атаковали друг друга?
5. Сколько существует пятизначных чисел, у которых вторая цифра меньше четвертой?
6. Сколько существует пятизначных чисел, у которых в записи встречается ровно одна двойка и ровно одна тройка?
7. Сколько существует пятизначных чисел, у которых в записи встречается ровно две двойки?
8. Сколько существует пятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры отличаются на единицу и последняя цифра равна 5?
9. Сколько существует пятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры отличаются не более чем на единицу, и последняя цифра равна 2?
10. Сколько матриц содержится в множестве $M = \{\, A \in \{0,1,2\}^{3\times 3} |\, a_{ij} \neq \max\{2 - a_{i1}, 2 - a_{1j}\}\}$?
11. Сколько матриц содержится в множестве $M = \{\, A \in \{0,1,2\}^{3\times 3} |\, a_{ij} \neq a_{ji}$ при $i \neq j\}$?
12. Сколько матриц третьего порядка с элементами из множества $\{0,1\}$ не содержат нулевую строку?
13. У скольких матриц третьего порядка с элементами из множества $\{0,1\}$ все строки разные?
14. Сколько матриц из множества $\{0,1\}^{4\times 4}$ имеют в каждом столбце ровно две единицы, причем все столбцы различны?
15. Сколько матриц из множества $\{-1,0,1\}^{4\times 4}$ имеют в каждом столбце одну 1 и одну -1, причем все столбцы различны?

4.5. Ответьте на вопрос, используя правило умножения и правило суммы:

1. Сколько существует пятизначных чисел, у которых есть одинаковые цифры?
2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых встречается цифра 3?
3. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых встречаются цифра 3 или 2?
4. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых встречается цифра 3 более одного раза?

5. Сколько существует сюръективных функций на множестве $\{0,1,2\}^{\{a,b,c,d\}}$?
6. Сколько существует не инъективных функций на множестве $\{a,b,c,d\}^{\{0,1,2\}}$?
7. Сколько существует не биективных функций на множестве $\{0,1,2\}^{\{0,1,2\}}$?
8. Сколько существует не симметричных матриц третьего порядка с элементами $\{0,1,2\}$?
9. У скольких матриц третьего порядка с элементами $\{0,1,2\}$ имеются одинаковые строки?
10. У скольких матриц третьего порядка с элементами $\{0,1,2\}$ имеются ровно две одинаковые строки?

4.6. Ответьте на вопрос:

1. Сколько существует различных делителей у числа $2^5 3^4$?
2. Сколько существует решений в целых числах уравнения $x \cdot y = 200$?
3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $n^2 - m^2 = 2^5 3^4$?
4. Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое количество различных натуральных делителей у куба этого числа?
5. Сколько натуральных чисел $a$ обладает следующим свойством: наименьшее общее кратное чисел 16, 50 и $a$ равняется 12000?

4.7. Для конечных множеств доказать равенства:

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;
2. $|A^n| = |A|^n$;
3. $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$;
4. $\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$;
5. $\left|\{0,1\}^{\{0,1\}^n}\right| = 2^{2^n}$.

4.8. Ответьте на вопрос:

1. Сколько существует слов длины $n$ в алфавите из $m$ символов?
2. Сколько существует слов длины $n$ в алфавите из $m$ символов, которые не меняются при чтении слева на право?
3. Сколько существует слов длины $n$ в алфавите из $m$ символов, у которых любые два соседних символа различны?
4. Сколько существует слов длины $n$ в алфавите из $m \geq 3$ символов, у которых любые три подряд идущих соседних символа различны?

5. Сколько существует слов длины $n \geq 4$ в алфавите $\{0, 1, 2\}$, у которых сумма любых 4 последовательных цифр не делится на 3?
6. Сколько существует слов длины $n$ в алфавите из $m \geq n$ символов, у которых все символы различны?
7. Сколько существует слов длины $n$ в алфавите из $m$ символов, у которых найдутся одинаковые соседние символы?
8. Каким числом способов можно разместить $n$ различных предметов по $k$ различным ящикам?
9. Каким числом способов можно разместить $n$ различных предметов по $k \geq n$ различным ящикам, если в каждый ящик укладывается не более одного предмета?
10. Сколько существует подмножеств $n$ элементного множества?
11. Сколько имеется перестановок из $n$ элементов, в которых 1 стоит раньше 2?
12. Сколько имеется перестановок из $n$ элементов, в которых 1 и 2 не стоят рядом?
13. Сколько имеется перестановок из $n$ элементов, в которых 1 стоит не на первом месте, а 2 не на втором?
14. Сколько отношений линейного порядка можно определить на множестве из $n$ элементов?
15. Сколько биективных отображений существует на множестве из $n$ элементов?
16. Сколько существует симметричных матриц порядка $n$ с элементами из множества $\{0, 1\}$?
17. Сколько существует матриц порядка $n$ с элементами из множества $\{0, 1\}$, у которых все строки различны?
18. У скольких матриц порядка $n$ с элементами из множества $\{0, 1\}$ найдутся одинаковые столбцы?
19. У скольких матриц порядка $n$ с элементами из множества $\{0, 1\}$ произведение элементов $a_{ij} \cdot a_{ji}$ равно нулю для всех $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, n$?
20. Сколько существует $k$ - местных отношений на множестве из $n$ элементов?
21. Сколько существует бинарных рефлексивных отношений на множестве из $n$ элементов?
22. Сколько существует бинарных симметричных отношений на множестве из $n$ элементов?

23. Сколько существует бинарных антисимметричных отношений на множестве из $n$ элементов?

24. Сколько существует однозначных всюду определенных на множестве из $n$ элементов унарных функций, принимающих значения на множестве из $m$ элементов?

25. Сколько существует определенных на множестве из $n$ элементов инъективных функций, принимающих значения на множестве из $m$ элементов?

4.9. Пусть $|U| = n$, $|A| = m$, и $A \subseteq U$. Сколько множеств $X \subseteq U$ удовлетворяют условиям:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $A \subseteq X$; | 4. $A \cap X = \emptyset$; | 7. $A \cup X \neq U$; | 10. $\|A \cup X\| = m + 1$; |
| 2. $X \subseteq A$; | 5. $A \cap X \neq \emptyset$; | 8. $\|A \cap X\| = 1$; | 11. $\|A \cup X\| = n - 1$; |
| 3. $X \subset A$; | 6. $A \cup X = U$; | 9. $\|A \cap X\| = m - 1$; | 12. $\|A - X\| = 1$. |

4.10. Ответьте на вопрос:

1. На прямой отметили 10 различных точек. Сколько при этом получилось отрезков?
2. На окружности отметили 12 различных точек. Сколько при этом получилось дуг?
3. На плоскости даны 10 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
4. На параллельных прямых отметили, соответственно, 6 и 5 точек. Сколько существует четырехугольников с вершинами в этих точках?
5. Сколько существует пятизначных чисел, у которых цифры расположены в порядке убывания?
6. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых цифра 2 встречается 2 раза?
7. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых каждая цифра встречается не более двух раз?
8. Сколько существует шестизначных чисел можно составить из трёх нулей и трех единиц?
9. Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три четных и нечетных цифры?
10. Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых равна трём?

11. Сколько существует шестизначных чисел, составленных из цифр $1, 2, 3$, в которых одинаковые цифры не стоят рядом и каждая цифра встречается ровно два раза?
12. Сколько существует чисел, составленных из 10 нулей и 5 единиц, в которых единицы не стоят в соседних разрядах?
13. Сколько существует решений уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10$ в натуральных числах?
14. Сколько существует решений неравенства $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10$ в целых неотрицательных числах?
15. Сколько существует матриц пятого порядка с элементами из множества $\{-1, 1\}$, у которых произведение элементов каждой строки равно 1?
16. Сколько существует матриц пятого порядка с элементами из множества $\{0, 1\}$, у которых в каждом столбце ровно две единицы?
17. Каким числом способов можно разделить 10 юношей на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?
18. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть два вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?
19. Сколько членов в разложении $(a + b + c)^{20}$ после приведения подобных членов?
20. Чему равен коэффициент при $x^9$ в многочлене $(x^2 - 2x)^6$?

4.11. Вычислите, используя соответствующие формулы:

1. Сколько шестизначных чисел можно составить из набора цифр 0, 0, 1, 1, 1, 2?
2. Сколько существует девятизначных чисел, в записи которых участвуют только цифры $1, 2, 3$, каждая из которых встречается ровно три раза?
3. Сколькими способами можно выложить в ряд 3 красных 2 синих и 4 зеленых шара?
4. Сколькими способами можно разбить множество из 10 элементов на три непересекающихся подмножества, состоящие, соответственно, из двух, трех и пяти элементов?
5. Сколькими способами можно разбить множество из 10 элементов на три непересекающихся подмножества, в каждом из которых не менее 2 элементов?

6. Сколько существует различных отношений эквивалентности на множестве из 9 элементов, имеющих три класса эквивалентности, состоящие, соответственно, из 2, 3 и 4 элементов?
7. Каким числом способов можно разместить 9 студентов в трех комнатах общежития, если в одной комнате имеется два, в другой — три, в третьей — четыре свободных места?
8. Каким числом способов можно разбить 15 человек на 5 троек?
9. Чему равен коэффициент при $x^3y^2$ в многочлене $(x-y+2)^8$?

4.12. В международной конференции участвовало 120 человек. Из них 60 владеют русским языком, 48 – английским, 32 – немецким, 21 – русским и английским, 19 – английским и немецким, 15 – русским и немецким, а 10 человек владеют всеми тремя языками. Сколько участников конференции не владеют ни одним из этих языков?

4.13. Опрос 100 студентов выявил следующие данные о числе студентов, изучающих различные иностранные языки: только немецкий – 18; немецкий, но не испанский – 23; немецкий и французский – 8; немецкий – 26; французский – 48; французский и испанский – 8; никакого языка – 24. Сколько студентов изучают немецкий и испанский языки?

4.14. Из 100 опрошенных студентов 50 программируют на алгоритмическом языке Си++, 53 – на Паскале, 42 – на Бейсике, 15 студентов могут программировать на Си++ и на Бейсике, 20 студентов — на Паскале и Бейсике, 25 – на Си++ и Паскале, а 5 студентов программируют на всех трех языках.

1. Сколько студентов не могут программировать ни на одном из перечисленных языков?
2. Сколько студентов программируют хотя бы на одном из перечисленных языков?
3. Сколько студентов программируют только на Паскале?
4. Сколько студентов не программируют ни на Си++, ни на Паскале?

4.15. Ответьте на вопрос:

1. Сколько существует троек целых чисел $(x, y, z)$, заключенных между -100 до 100, таких, что $x^2+y^2+z^2$ делится на 7?
2. Сколько натуральных чисел от 1 до 1000000 являются квадратами, но не кубами целых чисел?

3. Сколько натуральных чисел от 1 до 200 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 7, но делятся на 5?
4. На каждом борту лодки должно сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду этой лодки из 20 человек, если 6 человек могут сидеть только слева, 3 человека – только справа и 11 человек – с любой стороны?
5. Сколькими способами можно выбрать из числового множества $\{1, 2, \ldots, 20\}$ пять чисел, таких, что любые два из них отличаются не менее чем на 2.
6. Сколько подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 12\}$ не пересекаются по крайней мере с одним из множеств $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, и $\{6, 8, 10, 12\}$?
7. Сколько существует решений уравнения $x_1 + \cdots + x_k = n$ $(n \geq k)$ в натуральных числах?
8. Сколько существует решений уравнения $xyz = 5^n$ в натуральных числах?
9. Сколько существует решений уравнения $x_1x_2x_3x_4 = 5^n2^m$ в натуральных числах?
10. Сколько существует существует $n$ разрядных чисел, в записи которых цифры расположены в неубывающем порядке?
11. Сколько существует слов длины $n$ в алфавите $\{a, b, c\}$, в которых символ $a$ встречается $k$ раз, а символ $b$ – $m$ раз?
12. Сколько существует слов длины $nm$ в $n$-буквенном алфавите, в которых каждая буква алфавита встречается $m$ раз?
13. Сколько существует отношений эквивалентности, определенных на множестве из $3n$ элементов, и имеющих три равномощных класса эквивалентности?
14. Сколько существует таких биективных отображений на множестве из $n$ элементов, что каждый элемент не равен своему образу?
15. Сколько существует таких биективных отображений на множестве из $n$ элементов, что ровно один элемент равен своему образу?

# 5. Функции булевой алгебры

Под булевой функцией от $n$ переменных будем понимать всюду определённую на $\{0,1\}^n$ однозначную функцию с множеством значений из $\{0,1\}$. Пусть наборы из $\{0,1\}^n$ упорядочены в порядке возрастания двоичного кода. Функция $f \in \{0,1\}^{\{0,1\}^n}$ задается набором длины $2^n$, состоящим из значений функции на этих наборах. В частности, функция от одной переменной задается набором $f = (f(0), f(1))$, от двух переменных — $f = (f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1))$. Приведем наиболее часто встречающиеся функции булевой алгебры с их обозначениями:

$\overline{x} = (1,0)$ – **отрицание** $x$, читается "не $x$", также обозначается $\neg x$ или $x^0$;

$x \& y = (0,0,0,1)$ — **коньюнкция** $x$ и $y$, читается "$x$ и $y$", также обозначается $x \cdot y$ или $xy$;

$x \vee y = (0,1,1,1)$ — **дизъюнкция** $x$ и $y$, читается "$x$ или $y$";

$x \oplus y = (0,1,1,0)$ — **сложение по модулю 2** $x$ и $y$, читается "$x$ плюс $y$";

$x \mapsto y = (1,1,0,1)$ — **импликация** $x$ и $y$, читается "из $x$ следует $y$";

$x|y = (1,1,1,0)$ — **штрих Шеффера** $x$ и $y$, читается "$x$ штрих Шеффера $y$";

$x \downarrow y = (1,0,0,0)$ — **стрелка Пирса** $x$ и $y$, читается "$x$ стрелка Пирса $y$";

$x \sim y = (1,0,0,1)$ — **эквивалентность** $x$ и $y$, читается "$x$ эквивалентно $y$", также обозначается $x \leftrightarrow y$ или $x^y$.

Два набора $x$ и $y$ из $\{0,1\}^n$ называются **соседними**, если отличаются ровно в одной компоненте. Переменная $x_j$ называется **существенной переменной** функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если существуют соседние наборы $a$ и $b$, отличающиеся только в $j$-й компоненте и $f(a) \neq f(b)$. В противном случае переменная $x_j$ называется **фиктивной**. Если $x_j$ – фиктивная переменная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, то функция $g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ получена удалением фиктивной переменной. Две функции алгебры логики называются равными, если удалением фиктивных переменных их можно привести к одной функции.

Пусть $B$ – некоторое множество функций булевой алгебры. Введем понятие формулы над $B$:

1. Любая функция из $B$ называется формулой над $B$.

2. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in B$ и $h_j$ — либо переменная, либо формула над $B$, для каждого $j = 1, \ldots, n$, то выражение вида $f(h_1, \ldots, h_n)$ является также формулой над $B$.

3. Только те объекты называются формулами над $B$, которые можно построить с помощью пунктов 1 и 2 данного определения.

Каждая формула над $B$ определяет некоторую функцию булевой алгебры.

При записи формулы, для уменьшения количества скобок в формуле, используется понятие приоритета операции. Наивысший приоритет имеет отрицание $\neg$, затем конъюнкция &. Приоритет остальных операций (дизъюнкция $\vee$, импликация $\mapsto$, эквивалентность $x \leftrightarrow y$, сложение по модулю 2 $\oplus$) одинаков.

Функция $f^*$ называется **двойственной** к $f$, если $f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f^*(x_1, \ldots, x_n)}$. Справедливо равенство $f = f^{*^*}$. При построении двойственной к функции, заданной формулой, полезен **принцип двойственности**: Пусть $f$ задана формулой над множеством $B = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Заменой в формуле 0 на 1, 1 на 0, $g_i$ на $g_i^*$ получим формулу, задающую $f^*$.

Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $k = 1, \ldots, n$ справедливо равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee_{(t_1,\ldots,t_k)\in\{0,1\}^k} f(t_1, \ldots, t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) x_1^{t_1} \ldots x_k^{t_k}.$$

При $k = n$ получаем **совершенную дизъюнктивную нормальную форму** (СДНФ)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee_{(t_1,\ldots,t_n)\in\{0,1\}^n,\ f(t_1,\ldots,t_n)=1} x_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n}.$$

Двойственный аналог формулы, при $k = 1, \ldots, n$ —

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee_{(t_1,\ldots,t_k)\in\{0,1\}^k} \left( (\vee_{i=1}^k x_i^{\overline{t_i}}) \vee \overline{f(t_1, \ldots, t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)} \right).$$

При $k = n$, получаем **совершенную конъюнктивную нормальную форму** (СКНФ)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \&_{(t_1,\ldots,t_n)\in\{0,1\}^n,\ f(t_1,\ldots,t_n)=0} \left( x_1^{\overline{t_1}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{t_n}} \right).$$

## Задачи для практики и самостоятельной работы

5.1. Задать функцию $f$ набором значений:

1. Булева функция $f$ от переменных $x, y, z$ равна 1 только в тех случаях, когда $x = 1$, либо когда выполняется следующее условие: переменные $y$ и $z$ принимают разные значения, а $x < z$. В остальных случаях функция обращается в 0.

2. Булева функция $f$ от 4 переменных задается следующим образом: она равна 0, если $2x_1 + x_2 > x_3 + 2x_4$ и 1 в противном случае.

3. Пусть $a = 2x_1 + x_2$ и $b = 2x_3 + x_4$. Обозначим через $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $i$-й разряд двоичного разложения числа $|\mathrm{a} - \mathrm{b}|$. Задать функции $f_1$ и $f_2$ набором значений.

4. На аварийном пульте системы расположены четыре сигнальные лампочки: $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$. Система выключается только в том случае, когда загорелась лампочка $L_1$, но не загорелась лампочка $L_2$, или загорелись лампочки $L_2$ и $L_3$, но не горит лампочка $L_4$, или загорелась лампочка $L_4$ и не горит лампочка $L_1$. Задать булеву функцию $f$, характеризующую условия выключения системы.

5. Проект принимается, если большинство из четырех экспертов $C_1, \ldots, C_4$ высказалось в его пользу. Кроме того, проект все же принимается, если указанное условие не выполнено, но за принятие проекта высказались, либо эксперты $C_1, C_2$, либо эксперты $C_2, C_4$, либо эксперты $C_2, C_3$. Задать булеву функцию $f$, характеризующую условие принятия проекта.

5.2. Задать функцию $f$ набором значений:

1. $f(x) = x \mapsto x$;
2. $f(x) = x \downarrow x$;
3. $f(x) = x \oplus x$;
4. $f(x, y) = (x \oplus y) \mapsto y$;
5. $f(x, y) = (x \leftrightarrow y) \downarrow y$;
6. $f(x, y) = (x \& y) \mapsto (x|y)$;
7. $f(x, y, z) = xyz \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z}$;
8. $f(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus xz \oplus xyz$;
9. $f(x, y, z) = (x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee z)$.

5.3. По функциям $f$ и $g$, заданными наборами значений, построить набор значений функции $h$:

1. $f = (10)$, $g = (1001)$, $h(x) = g(x, f(x))$;
2. $f = (0110)$, $g = (1000)$, $h(x, y) = f(x, g(y, x))$;
3. $f = (0101)$, $g = (0010)$, $h(x, y, z) = f(g(x, y), f(y, g(z, y)))$;
4. $f = (01010100)$, $g = (1001)$, $h(x, y) = f(g(x, y), g(y, x), g(x, x))$.

5.4. Выяснить, сколькими способами можно расставить скобки в выражении $A$, чтобы всякий раз получалась формула над множеством логических связок $\{\neg, \&, \vee, \oplus, \mapsto, \downarrow\}$. Функцию, полученную расстановкой скобок в выражении $A$ согласно приоритету операций задать набором значений.

1. $A : \neg x \oplus y \mapsto x$;
2. $A : x \vee y \& \neg x \leftrightarrow z$;
3. $A : x \mapsto x \downarrow x \mapsto x$;
4. $A : \neg x \oplus \neg y \mapsto \neg z$;
5. $A : \neg\neg x \downarrow \neg\neg\neg y$;
6. $A : x \vee \neg y \oplus x \mapsto y$.

5.5. Выяснить, равны ли функции $f$ и $g$:

1. $f(x,y,z) = (x \mapsto y) \oplus ((y \mapsto \overline{z}) \mapsto x \cdot y)$, $g(x,y,z) = \overline{y \cdot z \mapsto x}$;
2. $f(x,y,z) = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \mapsto (y \mapsto z))$, $g(x,y,z) = \overline{y \mapsto (x \vee z)}$;
3. $f(x,y,z) = x \mapsto ((y \mapsto z) \mapsto y \cdot z)$, $g(x,y,z) = (x \vee (y \mapsto z)) \cdot (x \oplus y)$;
4. $f(x,y,z) = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \leftrightarrow z)} \mid (x \oplus y \cdot z)$, $g(x,y,z) = \overline{x}(y \cdot z) \vee \overline{x \mapsto z}$;
5. $f(x,y,z) = (\overline{x} \vee y) \mapsto ((y|\overline{z}) \mapsto (x \leftrightarrow x \cdot z))$, $g(x,y,z) = xy \vee (x \mapsto x\overline{y} \mapsto z)$;
6. $f(x,y,z) = (x|\overline{y}) \mapsto ((y \downarrow \overline{z}) \mapsto (x \oplus z))$, $g(x,y,z) = xyz \oplus (\overline{x} \mapsto z)$.

5.6. Доказать тождества:

Коммутативность $\&, \vee, \oplus, |, \downarrow, \leftrightarrow$:

1. $x\&y = y\&x$;
2. $x \vee y = y \vee x$;
3. $x \oplus y = y \oplus x$;
4. $x|y = y|x$;
5. $x \downarrow y = y \downarrow x$;
6. $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$;

Асоциативность $\&, \vee, \oplus, \leftrightarrow$:

7. $(x\&y)\&z = x\&(y\&z)$;
8. $(x \vee y) \vee z = (x \vee y) \vee z$;
9. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
10. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$;

Свойства дистрибутивности:

11. $x\&(y \vee z) = x\&y \vee x\&z$;
12. $x \vee (y\&z) = (x \vee y)\&(x \vee z)$;
13. $x\&(y \oplus z) = x\&y \oplus x\&z$;

Законы де Моргана:

14. $\overline{x\&y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;
15. $\overline{x \vee y} = \overline{x}\&\overline{y}$;

Законы поглощения:

16. $x\&\overline{x} = x\&0 = 0$;
17. $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = 1$;
18. $x \vee x\&y = x\&(x \vee y) = x$;
19. $x \vee (\overline{x}\&y) = x \vee y$;
20. $x\&(\overline{x} \vee y) = x\&y$;

Эквивалентности:

21. $x|y = \overline{x\&y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;
22. $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x}\&\overline{y}$;
23. $x \mapsto y = \overline{x} \vee y$;
24. $x \oplus y = \overline{x}\&y \vee x\&\overline{y} = (x \vee y)\&(\overline{x} \vee \overline{y})$;
25. $x \leftrightarrow y = x\&y \vee \overline{x}\&\overline{y} = (\overline{x} \vee y)\&(x \vee \overline{y})$.

5.7. У функции $f$, заданной набором значений, перечислить существенные и фиктивные переменные. Задать набором значений эквивалентную ей функцию без фиктивных переменных:

1. $f = (00000000)$;
2. $f = (10101010)$;
3. $f = (10011001)$;
4. $f = (00111100)$;
5. $f = (0101111101011111)$;
6. $f = (1011010110110101)$;
7. $f = (1100110000110011)$;
8. $f = (0101100001011000)$;
9. $f = (0101101001011010)$.

5.8. Перечислить все функции от двух переменных, существенно зависящих от всех переменных.

5.9. Показать, что $x$ – фиктивная переменная, и написать формулу без этой переменной, реализующую ту же функцию:

1. $(y \mapsto x)(y \downarrow y)$; 4. $((x \oplus y) \mapsto z) \cdot \overline{y \mapsto z} \cdot \overline{y}$;
2. $(x \leftrightarrow y) \vee (x|y)$; 5. $((x \vee y\overline{z}) \leftrightarrow (\overline{x} \mapsto \overline{y}z)) \cdot (y \downarrow z)$;
3. $f = x^y \oplus x$; 6. $((x \vee y \vee \overline{z}) \mapsto (xy|z)) \oplus (y \mapsto x)z$.

5.10. Для функции, заданной формулой, перечислить фиктивные переменные и избавиться в формуле от них:

1. $(x \mapsto y) \mapsto x$; 4. $(x \oplus y) \mapsto y$; 7. $((x \vee y) \mapsto x \cdot y) \oplus (x \mapsto y) \cdot (y \mapsto x)$;
2. $(x \downarrow y) \downarrow y$; 5. $(x \oplus y) \leftrightarrow y$; 8. $(xy \oplus (x \mapsto y)) \mapsto (x \sim xy)$;
3. $x|(y|\overline{x})$; 6. $(x \& y) \mapsto x$; 9. $((x \downarrow (y|z)) \downarrow (y \downarrow (x|z))) \downarrow (x|y)$.

5.11. Выясить, равны ли функции $f$ и $g$:

1. $f(x,y) = x \mapsto (y \mapsto x)$, $g(x) = x \oplus \overline{x}$;
2. $f(x,y,z) = (x|(y|z)) \cdot \overline{y}$, $g(x,y) = x \downarrow y$;
3. $f(x,y,z) = (x \downarrow y \downarrow z)\&z$, $g(y) = (y \oplus 1) \leftrightarrow y$
4. $f(x,y,z) = x \oplus yz\&\overline{\overline{y} \mapsto xz}$, $g(x,y) = x \cdot y$;
5. $f(x,y,z) = x \downarrow y|z$, $g(y,z) = y \vee \overline{z}$;
6. $f(x,y,z) = x|y \mapsto z|y$, $g(y) = \neg y$;

5.12. Сколько имеется функций от $n$ переменных, существенно зависящих от всех переменных?

5.13. Найти двойственную функцию $f^*$ к функции $f$:

1. $f = (1101)$; 3. $f(x) = \neg x$; 5. $f(x,y) = x \oplus y$; 7. $f(x,y) = x|y$;
2. $f = (10101110)$; 4. $f(x,y) = x\&y$; 6. $f(x,y) = x \mapsto y$; 8. $f(x,y) = xy \vee xz$.

5.14. Доказать:

1. $f^{*^*} = f$;
2. Если $f = g$, то $f^* = g^*$;
3. Существенная переменная для функции $f$ является существенной и для двойственной функции $f^*$.

5.15. Используя принцип двойственности построить формулу, реализующую двойственную функцию к функции, заданной формулой:

1. $(x \oplus y)z$; 3. $x \mapsto yz$; 5. $xy \vee yz \vee xz$; 7. $1 \oplus x \oplus y \oplus xz$;
2. $\overline{xz \vee y}$; 4. $x \vee y \vee \overline{z}$; 6. $x|y|zx$; 8. $x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee z\overline{x}$.

5.16. Функция $f(x, y, z)$ задана набором значений (10110101). Задать набором значений функции:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $f(0, y, z)$; | 3. $f(x, 0, z)$; | 5. $f(x, y, 0)$; | 7. $f(0, x, x)$; |
| 2. $f(1, y, z)$; | 4. $f(x, 1, z)$; | 6. $f(0, y, 1)$; | 8. $f(x, 1, x)$. |

5.17. Доказать равенства:

1. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n)$;
2. $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)) \& (\overline{x}_1 \vee f(1, x_2, \ldots, x_n))$;
3. $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \oplus 1) f(0, x_2, \ldots, x_n) \oplus x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n)$.

5.18. Доказать равенства на основе тождеств предыдущей задачи:

1. $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(a_1, \ldots, a_k) \in \{0,1\}^k} x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} f(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$;
2. $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{a \in \{0,1\}^n,\ f(a)=1} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$;
3. $f(x_1, \ldots, x_n) = \&_{(a_1, \ldots, a_k) \in \{0,1\}^k} \Big( (\bigvee_{j=1}^k x_j^{a_j}) \vee f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \Big)$;
4. $f(x_1, \ldots, x_n) = \&_{a \in \{0,1\}^n,\ f(a)=0} (\bigvee_{j=1}^n x_j^{\overline{a}_j})$;
5. $f(x_1, \ldots, x_n) = \oplus_{(a_1, \ldots, a_k) \in \{0,1\}^k} \&_{i=1}^k (x_i \oplus \overline{a_i}) \cdot f(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$;
6. $f(x_1, \ldots, x_n) = \oplus_{a \in \{0,1\}^n,\ f(a)=1} \&_{i=1}^n (x_i \oplus \overline{a_i})$.

5.19. Для функции $f$ найти СДНФ:

| | |
|---|---|
| 1. $f = (00100001)$; | 4. $f = ((x \oplus y) \mapsto z) \cdot \overline{y \mapsto z}$; |
| 2. $f = (01010101)$; | 5. $f = ((x \vee y\overline{z}) \leftrightarrow (\overline{x} \mapsto \overline{y}z)) \cdot (y \downarrow z)$; |
| 3. $f = \overline{x}y \vee \overline{z}$; | 6. $f = ((x \vee y \vee \overline{z}) \mapsto (xy \vert z)) \oplus (y \mapsto x)z$. |

5.20. Найти число конъюнктивных членов в СДНФ функции $f(x) \oplus g(x)$, если известно число конъюнктивных членов в СДНФ следующих функций:

1. $f(x)g(x)$ и $f(x) \vee g(x)$;
2. $f(x) \mapsto g(x)$ и $g(x) \mapsto f(x)$;
3. $f^*(x) \leftrightarrow g^*(x)$.

5.21. Для функции $f$ найти СКНФ:

| | |
|---|---|
| 1. $f = (11010111)$; | 4. $f = ((x \oplus y) \mapsto z) \vert \overline{y \mapsto z}$; |
| 2. $f = (01010101)$; | 5. $f = ((x \vee \overline{y}z) \leftrightarrow (\overline{x} \mapsto \overline{y}z)) \cdot (y \vert z)$; |
| 3. $f = \overline{x}y \vee \overline{z}$; | 6. $f = ((x \vee y \vee \overline{z}) \mapsto (xy \vert z)) \cdot (y \mapsto x)$. |

5.22. Найти число дизъюнктивных членов в СКНФ функции $f(x) \mapsto g(x) \mapsto h(x)$, если известно число конъюнктивных членов в СКНФ следующих функций $h(x)$, $g(x) \vee h(x)$ и $f(x) \vee g(x) \vee h(x)$.

5.23. Обозначим через $F_m^n$ множество функций от $n$ переменных, число дизъюнктивных членов в СКНФ которых равно $m$.

1. Сколько элементов в $F_m^n$?
2. Сколько дизъюнктивных членов содержит СКНФ функции $f$, если $f^* \in F_m^n$?

5.24. Показать, что любую функцию булевой алгебры можно представить в виде полинома Жегалкина единственным образом: $f(x_1, \ldots, x_n) = f_0 \oplus f_1 x_1 \oplus \cdots \oplus f_{2^n-1} x_1 \cdots x_n$ (здесь $f_j \in \{0, 1\}$, при $j = 0, \ldots, 2^n - 1$).

5.25. Выразить через полином Жегалкина (базис$\{1, \oplus, \&\}$) все функции от 2 переменных.

5.26. Найти полином Жегалкина функции $f$:

| | |
|---|---|
| 1. $f = (11010111)$; | 4. $f = ((x \oplus y) \mapsto z) \cdot \overline{y \mapsto z}$; |
| 2. $f = (01010101)$; | 5. $f = ((x \vee y\overline{z}) \leftrightarrow (\overline{x} \mapsto \overline{y}z)) \cdot (y \downarrow z)$; |
| 3. $f = \overline{x}y \vee \overline{z}$; | 6. $f = ((x \vee y \vee \overline{z}) \mapsto (xy \vert z)) \oplus (y \mapsto x)z$. |

# 6. Замкнутые классы и теорема Поста

Множество функций булевой алгебры, задаваемых формулами над $B$, будем называть **замыканием** $B$ и обозначим $[B]$. Множество функций алгебры логики $B$ называется **полной системой**, если любая функция алгебры логики выражается формулой над $B$ (т.е. $[B]$ совпадает с множеством всех булевых функций). Множество булевых функций $B$ называется **замкнутым классом**, если $B = [B]$. Замкнутый класс $B$ называется **предполным**, если для любой функции $f \notin B$ класс $B \cup \{f\}$ – полный. Приведем список предполных классов алгебры логики:

1. Класс $T_0 = \{f \,|\, f(0,\ldots,0) = 0\}$ состоит из функций, принимающих значение нуль на наборе из нулей;

2. Класс $T_1 = \{f \,|\, f(1,\ldots,1) = 1\}$ состоит из функций, принимающих значение единица на наборе из единиц;

3. Класс **самодвойственных** функций $S = \{f \,|\, f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}) = \overline{f(x_1,\ldots,x_n)}\}$. Функция самодвойственная, если $f^* = f$.

4. Класс **линейных** функций $L$ состоит из тех функций, для которых полином Жегалкина не содержит конъюнкций двух и более числа переменных.

5. Класс **монотонных** функций $M$: Набор $a \in \{0,1\}^n$ больше либо равен набора $b \in \{0,1\}^n$, если $a_i \geq b_i$, где $i = 1,\ldots,n$. В этом случае пишут $a \geq b$. Если не выполняются неравенства $a \geq b$ и $b \geq a$, то наборы называются не сравнимыми. Функция $f$ называется монотонной, если из $a \geq b$ следует $f(a) \geq f(b)$.

**Теорема Поста** о полноте. Система функций $B$ полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов: $T_0$, $T_1$, $S$, $L$, $M$.

Полная система называется **базисом**, если никакая ее подсистема не является полной.

## Задачи для практики и самостоятельной работы

6.1. Перечислить все функции от двух переменных, принадлежащих замыканию класса $B$:

1. $B = \{\neg\}$; 3. $B = \{\&\}$; 5. $B = \{\oplus, \&\}$; 7. $B = \{1, \oplus\}$;
2. $B = \{0, \neg\}$; 4. $B = \{\oplus\}$; 6. $B = \{\mapsto\}$; 8. $B = \{\&, \vee\}$;

6.2. Для функции $f \in [B]$ найти формулу над $B$, выражающую $f$:

1. $f = \overline{x},\ B = \{0, \mapsto\}$; 3. $f = x,\ B = \{\oplus\}$; 5. $f = 0,\ B = \{xy \oplus z\}$;
2. $f = x \oplus y,\ B = \{\downarrow\}$; 4. $f = x,\ B = \{x\overline{y}\}$; 6. $f = x \vee y,\ B = \{|\}$.

6.3. Показать полноту системы функций $B$ сведением к известной полной системе:

1. $B = \{\neg, \&\}$; 3. $B = \{0, \leftrightarrow, \&\}$; 5. $B = \{\downarrow\}$;
2. $B = \{\neg, \vee\}$; 4. $B = \{|\}$; 6. $B = \{0, \mapsto\}$.

6.4. Из системы формул $A$ выделить минимальную по включению подсистему формул $B$, для которой $[A] = [B]$:

1. $A = \{0, 1, \overline{x}\}$; 3. $A = \{x, x \oplus y, x \oplus y \oplus z\}$; 5. $A = \{x \vee y, x \mapsto y\}$;
2. $A = \{0, 1, x \oplus y, x \leftrightarrow y\}$; 4. $A = \{xy, x \vee y, x \vee yz\}$; 6. $A = \{xy, x\overline{y}\}$.

6.5. Какие из указанных классов замкнуты?

1. Все функции, зависящие не более чем от одной переменной;
2. Все функции, зависящие не более чем от двух переменных;
3. $\{x, \overline{x}\}$;
4. Все конъюнкции вида $x_1 \cdots x_k$;
5. множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $f(1, \ldots, 1) = 1$;
6. множество функций $\&_{i=1}^{n} x_i$;
7. множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $f(1, \ldots, 1) = 0$;
8. множество функций, выражаемых полиномом Жегалкина не выше первой степени;
9. множество функций, выражаемых полиномом Жегалкина не выше второй степени;
10. множество всех функций, допускающих представление в виде дизъюнкции не содержащих отрицаний произведений переменных.

6.6. Классы $A$ и $B$ – замкнуты. Будет ли замкнутым класс $C$:

1. $C = A \cap B$; 3. $C = A - B$; 5. $C = \overline{A}$;
2. $C = A \cup B$; 4. $C = A \otimes B$; 6. $C = \{f^* |\ f \in A\}$.

6.7. Выяснить принадлежность функции $f$ классам $T_0$ и $T_1$:

1. $f = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$;
2. $f = \oplus_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$;
3. $f = x_1 \mapsto (x_2 \mapsto \cdots (x_{n-1} \mapsto x_n) \cdots)$;
4. $f = \oplus_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$;
5. $f = \oplus_{1 \le i < j \le n} (x_i \vee x_j)$;
6. $f = \oplus_{1 \le i < j \le n} (x_i \mapsto x_j)$.

6.8. Доказать:

1. $[\{\vee, \oplus\}] = T_0$;
2. $[\{\vee, \leftrightarrow\}] = T_1$;
3. $[\{\&, \leftrightarrow\}] = T_1$
4. $[\{xy \oplus z\}] = T_0$;
5. $[\{xy, x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \cap T_1$;
6. $[\{xy \oplus z \oplus t\}] = T_0 \cap T_1$;
7. $[\{x \vee y, x\overline{y}\}] = T_0$;
8. $[\{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \cap T_1$.

6.9. Перечислить все самодвойственные функции от двух переменных.

6.10. Выяснить, является ли функция $f$ самодвойственной:

1. $f = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$; 3. $f = x_1 x_2 \vee x_3$;
2. $f = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; 4. $f = x_1 x_2 \oplus x_3 (x_1 \vee x_2)$.

6.11. В векторе значений самодвойственной функции $f$ поставить вместо * нули или единицы:

1. $f = (0100 * * * *)$; 3. $f = (0 * 1 * 0 * 1 *)$;
2. $f = (01 * * 01 * *)$; 4. $f = (* 11 * 0 * * 1001 * 1 * * 1)$.

6.12. Перечислить все функции от двух переменных, принадлежащие множеству:

1. $T_0$; 2. $T_1 - T_0$; 3. $T_1 \cap S$; 4. $\overline{S} - T_1$; 5. $S - T_0$.

6.13. Для несамодвойственной функции $f$ реализовать константы 0 и 1 над $\{f, \neg\}$:

1. $f = x \oplus y$;
2. $f = (x \mapsto y) \mapsto z$;
3. $f = x(y \vee z)$;
4. $f = xy \vee z$;
5. $f = x \oplus yz$;
6. $f = xy \oplus yz$;
7. $f = (x|y) \downarrow z$;
8. $f = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$;
9. $f = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz$;
10. $f = (10011101)$;
11. $f = (01001100)$;
12. $f = (10010011)$.

6.14. Перечислить наборы сравнимые с набором $a$. Какие из них предшествуют $a$?

1. $a = (0110)$; 2. $a = (010101)$; 3. $a = (01101001)$.

6.15. Перечислить все монотонные функции от двух переменных.

6.16. Выясниить, является ли функция $f$ монотонной:

| | |
|---|---|
| 1. $f = (0101111)$; | 6. $f = (x \downarrow z) \mapsto (y\overline{z})$; |
| 2. $f = (01011011)$; | 7. $f = x\overline{y} \vee z$; |
| 3. $f = x \mapsto (y \mapsto z)$; | 8. $f = xy \oplus xz \oplus yz$; |
| 4. $f = x \oplus yz$; | 9. $f = xy \oplus z(x \vee y)$; |
| 5. $f = (x \oplus y)(x \leftrightarrow y)$; | 10. $f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{если } 2x+3y+4z \le 6 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$. |

6.17. Для немонотонной функции $f$ реализовать отрицание над $\{f, 0, 1\}$:

| | |
|---|---|
| 1. $f = (01011011)$; | 4. $f = xy \oplus z(x \vee y)$; |
| 2. $f = x \oplus y$; | 5. $f = x(y\|z)$; |
| 3. $f = x\overline{y} \vee z$; | 6. $f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{если } -2x+3y+4z \le 1 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$. |

6.18. Показать, что функция, двойственная монотонной функции, монотонна.

6.19. Набор $a \in \{0,1\}^n$ называется нижней единицей монотонной функции $f$, если $f(a) = 1$, и для любого набора $b$ меньшего $a$ выполнено $f(b) = 0$. Множество нижних единиц обозначим $1_f$. Для нижней единицы $a$ определим конъюнкцию $K_a(x_1, \dots, x_n) = \&_{j=1}^{n}(a_j \mapsto x_j)$ (заметим $0 \mapsto y = 1$ и $1 \mapsto y = y$). Доказать равенство $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{a \in 1_f} K_a(x_1, \dots, x_n)$.

6.20. Набор $a \in \{0,1\}^n$ называется верхним нулем монотонной функции $f$, если $f(a) = 0$, и для любого набора $b$ большего $a$ выполнено $f(b) = 1$. Множество верхних нулей обозначим $0_f$. Для верхнего нуля $a$ определим дизъюнкцию $D_a(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{n}(\overline{a}_j x_j)$. Доказать равенство $f(x_1, \dots, x_n) = \&_{a \in 0_f} D_a(x_1, \dots, x_n)$.

6.21. Сколько монотонных функций от $n$ переменных, не принадлежащих множеству $A$:

1. $A = T_0 \cup T_1$; 2. $A = T_0 \cap T_1$;

6.22. Доказать:

1. $[\{0, 1, \&, \vee\}] = M$; 2. $[\{1, \&, \vee\}] = M \cap T_1$; 3. $[\{0, \&, \vee\}] = M \cap T_0$.

6.23. Выясниить, является ли функция $f$ линейной:

| | |
|---|---|
| 1. $f = (10010110)$; | 4. $f = x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee \overline{x}z$; |
| 2. $f = (00011110)$; | 5. $f = (x \vee (y \leftrightarrow z))\&(\overline{x} \vee \overline{y \leftrightarrow z})$; |
| 3. $f = x \mapsto (y \mapsto z)$; | 6. $f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{если } 2x-y+z \text{ кратно } 3 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$. |

6.24. Перечислите все линейные функции от двух переменных.

6.25. Для нелинейной функции $f$ реализовать коньюнкцию над $\{f, 0, 1, \neg\}$:

1. $f = (1011)$;
2. $f = (00011110)$;
3. $f = x \mapsto y$;
4. $f = x|y$;
5. $f = x \oplus y \oplus z \oplus xyz$;
6. $f = x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee y\overline{z}$.

6.26. Доказать:

1. $[\{1, \oplus\}] = L$; 2. $[\{1 \oplus x \oplus y \oplus z\}] = L \cap S$.

6.27. Показать полноту системы функций $B$ и проиллюстрировать поэтапное доказательство теоремы Поста, т. е. получить через суперпозицию функций из этой системы константы, отрицание и конъюнкцию:

1. $B = \{x|y\}$;
2. $B = \{0,\, x \mapsto y\}$;
3. $B = \{xy \mapsto \overline{z}\}$;
4. $B = \{x \mapsto yz, xy \oplus xz\}$;
5. $B = \{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$;
6. $B = \{1 \oplus x \oplus y \oplus xz\}$.

6.28. Сколько функций от $n$ переменных содержится в множестве:

1. $T_0$;
2. $T_1$;
3. $L$;
4. $S$;
5. $T_0 \cap T_1$;
6. $T_0 \cup T_1$;
7. $T_0 \cap S$;
8. $T_0 \cup S$;
9. $T_0 \cap L$;
10. $T_0 \cap T_1 \cap S$;
11. $T_0 \cup T_1 \cup S$;
12. $T_0 \cap L \cap S$;
13. $M \cap L$;
14. $T_0 \cap T_1 \cap L$;
15. $L - (T_0 \cap T_1)$.

# 7. Основы теории управляющих систем

Пусть $B = \{f_1, \ldots, f_k\}$ – некоторая система булевых функций. Каждой функции $f_j \in B$ поставим в соответствие функциональный элемент $S_j$ (рисунок, обозначающий функцию), имеющий столько же входов сколько переменных $f_j$ и один выход. Как правило, структурный элемент представляет собой прямоугольник, или круг, или треугольник, и т.д.. Входы обозначаются стрелками, направленными к элементу, а выход — стрелкой, направленной от элемента. Порядок входов важен, поскольку он отражает порядок переменных в соответствующей функции.

**Схема из функциональных элементов**( СФЭ) определяется следующим образом:

1. Каждый функциональный элемент $S$ является схемой, входы и выходы схемы – это соответственно, входы и выходы функционального элемента $S$.

2. Пусть $S$ — функциональный элемент с $m$ входами и $F_1, F_2, \ldots, F_m$ -– схемы из функциональных элементов. Тогда соединение этих схем, где выходы $F_i$ соединены с входами $S$ является схемой из функциональных элементов: ее входы -– объединение входов схем $F_1, F_2, \ldots, F_m$, её выходы – выход элемента $S$ и любое подмножество выходов схем $F_1, F_2, \ldots, F_m$.

Будем говорить, что **схема реализует систему функций в базисе** $B$, реализуемых в ее выходах. **Сложностью СФЭ** называется число функциональных элементов в схеме. Наиболее часто СФЭ рассматривают над базисом $\{\neg, \&, \vee\}$.

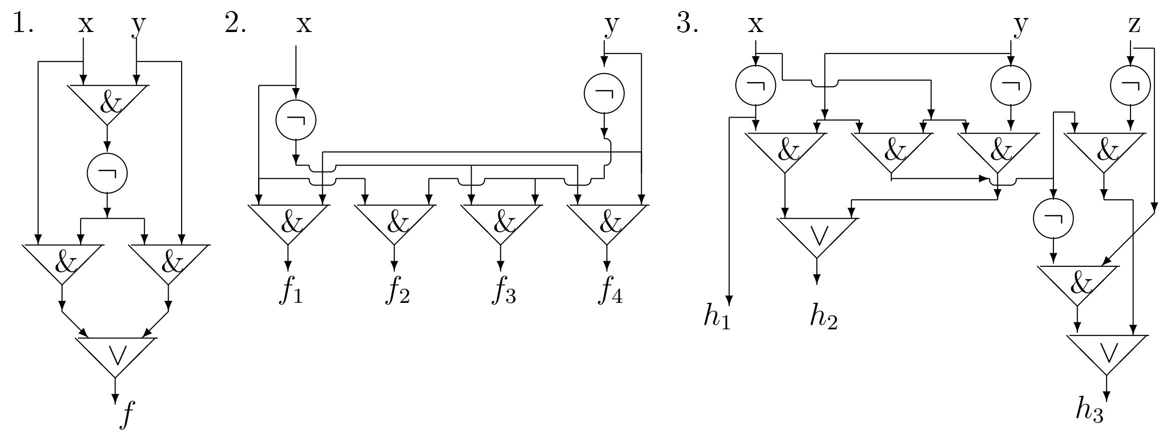
По индукции определим глубину выхода СФЭ. Если схема состоит из одного функционального элемента, то глубина выхода равна 1. Если схема получена присоединением схем $F_1, F_2, \ldots, F_m$ к функциональному элементу $S$, то глубина выхода $S$ равна максимальной глубине выхода схем $F_1, F_2, \ldots, F_m$, присоединенных к входу $S$, плюс 1. **Глубиной СФЭ** называется максимальная из глубин ее выходов.

Минимальная сложность СФЭ в базисе $B$, реализующую систему функций $F$, называется **сложностью системы функций** $F$ в базисе $B$, и обозначается $L_B(F)$. Минимальная глубина СФЭ в базисе $B$, реализующую систему функций $F$, называется **глубиной системы функций** $F$ в базисе $B$, и обозначается $d_B(f)$. Если система функций $F$ состоит только из одной функции $F = \{f\}$, то говорят о **сложности функции** и **глубине функции** $f$ (обозначения: $L_B(f)$, $d_B(f)$) в базисе $B$. Когда говорят о сложности или глубине функции (системы функций) в базисе $B = \{\neg, \vee, \&\}$, индекс $B$, в обозначениях сложности или глубины, может не указываться.

Величины $L_n = \max_{f \in \{0,1\}^{\{0,1\}^n}} L(f)$ и $d_n = \max_{f \in \{0,1\}^{\{0,1\}^n}} d(f)$ называются функциями Шеннона.

## Задачи для практики и самостоятельной работы

7.1. Выпишите функции, реализованные СФЭ. Для каждой СФЭ найдите сложность и глубину:




7.2. Составьте СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующию функцию $f$. У составленных схем найдите сложность и глубину:

1. $f = x_1(x_2(x_3x_4))$; 4. $f = x_1\overline{x_2\overline{x_3\overline{x_4}}}$;
2. $f = (x_1x_2)(x_3x_4)$; 5. $f = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$;
3. $f = x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3\overline{x}_4$; 6. $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4)(x_1x_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

7.3. Найти СДНФ функции $f$ и составить СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующую $f$. У составленных схем найдите сложность и глубину:

1. $f = (10010100)$; 2. $f = (0000000100010110)$.

7.4. Найти СКНФ функции $f$ и составить СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующую $f$. У составленных схем найдите сложность и глубину:

1. $f = (1011)$; 2. $f = (11011110)$; 3. $f = (1001011101111111)$.

7.5. Найти полином Жегалкина для функции $f$ и составить СФЭ в базисе $\{1, \oplus, \&\}$, реализующую $f$. У составленных схем найдите сложность и глубину:

1. $f = (1011)$; 2. $f = (00010110)$; 3. $f = (0110100010000000)$.

7.6. Для СФЭ $S$ в базисе $B$ обозначим через $L_B(S)$ сложность СФЭ $S$, а через $d_B(S)$ – глубину СФЭ $S$.

1. Доказать, что для СФЭ $S$ в базисе $B = \{\&, \vee, \neg\}$ найдется такая СФЭ $S_1$ в базисе $C = \{\&, \neg\}$, реализующая набор функций схемы $S$, что $d_C(S_1) \le 3d_B(S)$ и $L_C(S_1) \le 4L_B(S_1)$;
2. Доказать, что для СФЭ $S$ в базисе $B = \{\&, \vee, \neg\}$ найдется такая СФЭ $S_1$ в базисе $C = \{1, \&, \oplus\}$, реализующая набор функций схемы $S$, что $d_C(S_1) \le 2d_C(S)$ и $L_C(S_1) \le 3L_C(S)$;
3. Пусть $B$ и $C$ – конечные системы функций, и все функции из $B$ выражаются через функции $C$. Доказать, что найдутся такие константы $\beta$, $\gamma$, что для любой СФЭ $S$ в базисе $B$ существует СФЭ $S_1$ в базисе $C$, реализующая набор функций схемы $S$, и $d_C(S_1) \le \beta d_B(S)$, $L_C(S_1) \le \gamma L_B(S)$;
4. Доказать, что сложность и глубина функции в конечных базисах $B$ и $C$ могут различаться лишь в константу раз. Константа зависит лишь от базисов $B$ и $C$.

7.7. Функция $f$ имеет $n$ существенных переменных. Доказать неравенства $L(f) \ge n-1$ и $d(f) \ge \log_2 n$ (базис стандартный).

7.8. Положим $f_n = \&_{j=1}^n x_j$, $F_n = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $B = \{\&\}$. Доказать:

1. $L_B(f_n) = n-1$ и $d_B(f_n) = \lceil \log_2 n \rceil$, где $\lceil \alpha \rceil$ – наименьшее целое число, не меньше $\alpha$;
2. $L_B(F_n) = n-1$;
3. $d_B(F_n) = \lceil \log_2 n \rceil$;
4. Не существует схемы, реализующей набор функций $F_n$, одновременно, с наименьшей сложностью $n-1$ и с наименьшей глубиной $\lceil \log_2 n \rceil$.

7.9. Пусть $F_n$ – множество всевозможных конъюнкций, составленных из переменных $x_1, \ldots, x_n$ (число таких функций $2^n - 1$), $B = \{\&\}$.

1. Доказать равенство $L_B(F_n) = 2^n - n - 1$;

2. Пусть $S_m$ – СФЭ над $B$, реализующая $F_m$ ($n > m \geq 1$). Каждый выход $S_m$, входами которой служат переменные $x_1, \ldots, x_m$, умножим (конъюнкция) на каждый выход $S_{n-m}$, входами которой служат переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Выходами полученной схемы $S$ служат все произведения и выходы $S_m$ и $S_{n-m}$, а входами являются переменные $x_1, \ldots, x_n$. Показать, что $S$ реализует $F_n$ и $L_B(S) = (2^m - 1)(2^{n-m} - 1) + L_B(S_m) + L_B(S_{n-m})$ и $d_B(S) = 1 + \max\{d_B(S_m), d_B(S_{n-m})\}$;
3. Построить СФЭ над $B$, реализующую $F_n$, у которой сложность не превосходит $2^n + 5n$, а глубина равна $\lceil \log_2 n \rceil$.

7.10. Дешифратором $D_n$ назовем схему с $n$ входами $x_1, \ldots, x_n$ и $2^n$ выходами $y_0, \ldots, y_{2^n-1}$, у которой только один из выходов $y_j$ принимает значение единица, а, именно, номер которого $j$ равен двоичному коду входа ($j = (x_n, \ldots, x_1)_2 = 2^{n-1}x_n + \cdots + 2^0 x_1$).

1. Построить $D_2$;
2. Пусть $n > m \geq 1$. Каждый выход $D_m$, входами которой служат переменные $x_1, \ldots, x_m$, умножим (конъюнкция) на каждый выход $D_{n-m}$, входами которой служат переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Выходами полученной схемы служат все произведения, а входами являются переменные $x_1, \ldots, x_n$. Показать, что построенная схема является дешифратором от $n$ переменных, найти сложность и глубину схемы;
3. Построить СФЭ, реализующую $D_n$, у которой сложность не превосходит $2^n + 3 \cdot 2^{0,5n}$, а глубина равна $1 + \lceil \log_2 n \rceil$.
4. Мультиплексором $\Gamma_n$ называется схема с $n+2^n$ входами $x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, \ldots, y_{2^n-1}$, и одним выходом $z$, принимающим значение переменной $y_j$, где двоичное разложение $j$ поступает на вход $x$ ($j = x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n$). Показать существование СФЭ, реализующий мультиплексор, сложность которой не превосходит $3 \cdot 2^n + O(2^{0,5n})$, а глубина не больше $n + 2 + \lceil \log_2 n \rceil$.

7.11. Доказать:

1. Если вектор, задающий функцию $f$ от $n$ переменных, имеет $k$ единиц, то $L(f) \leq \min\{kn + n - 1, k + 2^n + 3 \cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}\}$ и $d(f) \leq 1 + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 k \rceil$;
2. Если вектор, задающий функцию $f$ от $n$ переменных, имеет $m$ нулей, то $L(f) \leq \min\{mn + n - 1, m + 2^n + 3 \cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}\}$ и $d(f) \leq 1 + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 m \rceil$;
3. Для функции $f$ от $n$ переменных справедливы неравенства $L(f) \leq 3 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}$ и $d(f) \leq n + \lceil \log_2 n \rceil$;

4. Пусть $B = \{1, \&, \oplus\}$. Для функции $f$ от $n$ переменных справедливы неравенства $L_B(f) \leq 2^{n+1} - n - 2$ и $d_B(f) \leq n + \lceil \log_2 n \rceil$.

7.12. Универсальным многополюсником $U_n$ порядка $n$ называется СФЭ с $n$ входами и $2^{2^n}$ выходами, на которых реализуются все $2^{2^n}$ функций.

1. Построить $U_2$ в базисе $\{\neg, \vee, \&\}$;
2. Доказать равенство $L(U_n) = 2^{2^n} - n$;
3. Доказать равенство $L_B(U_n) = 2^{2^n} - n$, где $B$ – конечная полная система функций;
4. Показать существование СФЭ, реализующую $U_n$, в которой глубина любого ее выхода равна глубине функции, реализуемой этим выходом.
5. Построим СФЭ, реализующую $f \in \{0,1\}^{\{0,1\}^n}$, по формуле $f(x_1, \ldots, x_n) = \vee_{a \in \{0,1\}^{n-k}} x_1^{a_1} \cdots x_{n-k}^{a_{n-k}} f(a_1, \ldots, a_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$, причем все функции $f(a_1, \ldots, a_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$ от $k$ переменных реализуем универсальным многополюсником $U_k$. Оцените сверху сложность и глубину полученной СФЭ. При каких значениях $k$ оценки сложности и глубины наименьшие .

7.13. СФЭ с входами $x_1, \ldots, x_n$ и выходами $y_1, \ldots, y_n$ реализует инкремент (увеличение на 1), если $(x_n \ldots x_1)_2 + 1 = (y_n \ldots y_1)_2$, где $(x_n \ldots x_1)_2$ – двоичное разожение числа.

1. Показать, что $y_1 = \overline{x_1}$, $y_j = (\&_{i=1}^{j-1} x_i)\overline{x_j} \vee \overline{(\&_{i=1}^{j-1} x_i)} x_j$, где $j = 2, \ldots, n$;
2. Построить СФЭ, реализующую инкремент, и имеющую сложность не более $6n - 6$;
3. Построить СФЭ реализации инкремента глубиной не более $3 + \lceil \log_2(n-1) \rceil$.

7.14. СФЭ с входами $x_1, \ldots, x_n$ и выходами $y_1, \ldots, y_n$ реализует декремент (уменьшение на 1), если $(x_n \ldots x_1)_2 - 1 = (y_n \ldots y_1)_2$, где $(x_n \ldots x_1)_2$ – двоичное разожение числа.

1. Показать, что $y_1 = \overline{x_1}$, $y_j = \overline{(\vee_{i=1}^{j} x_i)} \vee (\vee_{i=1}^{j-1} x_i) x_j$, где $j = 2, \ldots, n$, где $j = 2, \ldots, n$;
2. Построить СФЭ реализации декремента сложностью не более $4n - 3$;
3. Построить СФЭ реализации декремента глубиной не более $2 + \lceil \log_2 n \rceil$.

7.15. При представлении целого числа двоичным кодом $(x_n, \ldots, x_1)_2$, старший разряд $x_n$ считается знаковым. Если $x_n = 0$, то число положительно, а, если $x_n = 1$, то отрицательное.

1. Показать равенство $(\overline{x}_n, \ldots, \overline{x}_1)_2 = 2^n - (x_n, \ldots, x_1)_2 - 1$.

2. Построить СФЭ смены знака сложностью неболее $7n - 6$.
3. Построить СФЭ смены знака глубиной не более $4 + \lceil \log_2(n-1) \rceil$.

7.16. СФЭ с входами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и выходами $z_1, \ldots, z_n$ реализует сумматор, если $(x_n \ldots x_1)_2 + (y_n \ldots y_1)_2 = (z_n \ldots z_1)_2$, где $(x_n \ldots x_1)_2$ – двоичное разожение числа.

1. Реализуйте схему сумматора двух одноразрядных чисел с двуразрядным выходом. Найдите сложность и глубину СФЭ;
2. Реализуйте схему сумматора трех одноразрядных чисел с двуразрядным выходом. Найдите сложность и глубину СФЭ;
3. Реализуйте схему сумматора двух $n$ разрядных чисел. Найдите сложность и глубину СФЭ;
4. Реализуйте СФЭ вычитания двух $n$ разрядных чисел. Найдите сложность и глубину СФЭ.

7.17. Положим $\tilde{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$. Определим функцию $q_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ от $2n$ переменных, которая сравнивает два $n$ битовых числа $(\tilde{x}_n)_2$ и $(\tilde{y}_n)_2$. Ее значение равно 1, если $(\tilde{x}_n)_2 > (\tilde{y}_n)_2$, и 0 в противном случае.

1. Для $k = 1, \ldots, n-1$ положим $\tilde{x}_n^{n-k} = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ и $\tilde{x}_n^k = (x_1, \ldots, x_k)$. Доказать равенство: $q_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = q_{n-k}(\tilde{x}_n^{n-k}, \tilde{y}_n^{n-k}) \vee \left(\&_{j=k+1}^n (x_j \leftrightarrow y_j)\right) \cdot q_k(\tilde{x}_n^k, \tilde{y}_n^k)$;
2. Положим $z_i^0 = x_i \overline{y_i}$, где $1 \le i \le n$, и $u_i^0 = x_i y_i \vee (\overline{x_i \vee y_i})$, где $2 \le i \le n$. Индукцией по $k$ $(1 \le k \le \log_2 n)$ определим $z_{2^k i}^k = z_{2^k i}^{k-1} \vee u_{2^k i}^{k-1} z_{2^k i - 2^{k-1}}^{k-1}$, где $1 \le i \le n \cdot 2^{-k}$, и $u_{2^k i}^k = u_{2^k i}^{k-1} u_{2^k i - 2^{k-1}}^{k-1}$, где $2 \le i \le n \cdot 2^{-k}$. Доказать равенство $z_{2^k}^k = q_{2^k}(x_1, \ldots, x_{2^k}, y_1, \ldots, y_{2^k})$.
3. Определить сложность и глубину СФЭ, реализующую $q_n$, по рекуррентным формулам из предыдущего задания.

7.18. СФЭ с входами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и выходами $z_1, \ldots, z_n$ реализует сумматор, если $(x_n \ldots x_1)_2 + (y_n \ldots y_1)_2 = (z_n \ldots z_1)_2$. Выходной разряд $z_j$ получается в результате сложения входных разрядов $x_j$ и $y_j$, а также переноса $p_{j-1}$ из предыдущих разрядов $(z_1 = x_1 \oplus y_1$ и $z_j = x_j \oplus y_j \oplus p_{j-1}$ при $j \ge 2)$.

1. Показать, что $p_j = 1$ тогда и только тогда, когда $(x_j, \ldots, x_1)_2 + (y_j, \ldots, y_1)_2 \ge 2^j$;
2. Показать, что $p_j = 1$ тогда и только тогда, когда $(x_j, \ldots, x_1)_2 > (\overline{y}_j, \ldots, \overline{y}_1)_2$;

3. Положим $p_i^0 = x_i y_i$, где $1 \le i \le n$, и $u_i^0 = x_i\overline{y_i} \vee \overline{x_i}y_i$, где $2 \le i \le n$. Рекурсией по $k$, где $1 \le k < \log_2 n$, определим для $1 < i \le n2^{-k}$ и $2^k(i-1) < j \le 2^k i$

$$u_j^k = \begin{cases} u_j^{k-1} & \text{при } 2^k(i-1) < j \le 2^k i - 2^{k-1} \\ u_j^{k-1}u_{2^k i-2^{k-1}}^{k-1} & \text{при } 2^k i - 2^{k-1} < j \le 2^k i \end{cases}$$

Также, рекурсией по $k$, где $1 \le k < 1 + \log_2 n$, определим для $1 \le i \le n2^{-k}$ и $2^k(i-1) < j \le 2^k i$

$$p_j^k = \begin{cases} p_j^{k-1} & \text{при } 2^k(i-1) < j \le 2^k i - 2^{k-1} \\ p_j^{k-1} \vee u_j^{k-1}p_{2^k i-2^{k-1}}^{k-1} & \text{при } 2^k i - 2^{k-1} < j \le 2^k i \end{cases}.$$

Доказать, что $p_j^k$, где $2^k(i-1) < j \le 2^k i$, равно 1 тогда и только тогда, когда $(x_j, \ldots, x_{2^k(i-1)+1})_2 > (\overline{y}_j, \ldots, \overline{y}_{2^k(i-1)+1})_2$.

4. Определить сложность и глубину СФЭ, реализующую сумматор, по рекуррентным формулам из предыдущего задания..

7.19. Показать существование СФЭ, реализующей умножение двух $n$ разрядных чисел, сложность которой равна $O(n^2)$, а глубина – $O(\log_2 n)$.

# 8. Ответы, указания

## Множества, операции с ними

1.1. верно – 3, 4, 7, 11, 13, 14, 16, остальные включения не верны.

1.2. 1. $\in$; 2. $\notin$; 3. $\subseteq$; 4. $\subseteq$; 5. $\notin$; 6. $\subseteq$; 7. $\subseteq$; 8. $\in$; 9. $\in$; 10. $\in$; 11. $\notin$; 12. $\notin$; 13. $\in$; 14. $\notin$; 15. $\in$; 16. $\in$.

1.3. не правильно – 1,2, 3, 5; правильно – 4, 6.

1.4. 1. $\{1,\ 3\}$; 2. $\{1\}$; 3. $\emptyset$; 4. $\{1\}$; 5. $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$; 6. $\{1,\ 2\}$; 7. $\{-3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$; 8. $\{-3 - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\}$; 9. $\{1, \frac{5}{3}\}$; 10. $\{-3, \frac{-3}{2}\}$; 11. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$; 12. {а, о, э, е, и, ы, у, ё, ю, я}; 13. $\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$; 14. $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

1.5. 1. $\{\emptyset\}$, $\{a\}$; 2. $\{\emptyset\}$; 3. $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$; 4. $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

1.6. 1. (0,2), (0,3), (1,2), (1,3); 2. (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3).

1.7. 1. $[2, 3]$; 2. $(-1, 4]$; 3. $(-\infty, 1]$; 4. $(5, \infty)$; 5. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; 6. $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$.

1.8. 1. Окружность с центром в т. $A$ радиуса 3;
2. Круг с центром в т. $A$ радиуса 4;
3. Все точки плоскости вне круга с центром в т. $A$ радиуса 1;
4. Прямая, перпендикулярная к отрезку $[A, B]$, проходящая через его середину;
5. Полуплоскость, содержащая точку $A$ и отделяемая серединным перпендикуляром к отрезку $[A, B]$;
6. Отрезок $[A, B]$;
7. Луч, лежащий на прямой, проходящей через точки $A$ и $B$, исходящий из точки $A$ в направлении противоположном от точки $B$;
8. Центр описанной окружности около треугольника с вершинами $A, B, C$;
9. Луч, лежащий на серединном перпендикуляре к отрезку $[A, B]$, исходящий из центра описанной окружности около треугольника с вершинами $A, B, C$ и направленный в полуплоскость, не содержащую точку $C$.

1.9. 1. (0,1,0,1,0,0); 2. (1,1,1,0,0,0); 3. (1,0,0,0,1,1); 4. (1,1,1,1,0,1); 5. (0,1,1,01,0); 6. (1,0,0,1,1,0).

1.10. (0,0) – $\emptyset$, (0,1) – $\{2\}$, (1,0) – $\{1\}$, (1,1) – $\{1, 2\}$.

1.11. 1. $\{-1, 0, 1\}$; 2. $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$; 3. $\{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$; 4. $[1, 7)$; 5. $(-\infty, 5]$; 6. $[0, 2] \times [-1, 0]$; 7. $\{(x, y) | \, x^2 + y^2 \le 1\}$; 8. $[-1, 1]^2$; 9. $\{(x, y, z) | \, x^2 + y^2 + z^2 \le 3\}$.

1.12. 1. $\{1, 4\}$; 2. $\{(1, 0), (1, 1)\}$; 3. $\{\{\emptyset\}, \{a\}\}$; 4. $(2, 3]$; 5. $[0, 1)$; 6. $\{1\} \times [-1, 0]$; 7. $\{(x, y) \,|\, |x| + |y| \le 1\}$; 8. $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$; 9. $[-1, 1]^3$.

1.13. 1. $\{2\}$; 2. $\{(0, 0), (0, 1)\}$; 3. $\{\{b\}, \{a, b\}\}$; 4. $[1, 2]$; 5. $[1, \infty)$; 6. $[0, 1) \times [-1, 0]$.

1.14. 1. $\{2, 6\}$; 2. $\{0, 2\} \times \{0, 1\}$; 3. $\{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$; 4. $[1, 2] \cup (3, 7)$; 5. $(-1, 0) \cup [1, \infty)$; 6. $\{[0, 1) \cup (2, 3]\} \times [-1, 0]$.

1.15. 1. $\{3, 5\}$; 2. $\{(0, 2), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$; 3. $\{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$; 4. $(0, 1) \cup (3, 4)$;
5. $(-\infty, 0)$; 6. $\{[0, 3] \times (1, 3]\} \cup \{(1, 3] \times [0, 1]\}$.

1.16. 1. $((A \cup B) \otimes C) \setminus (A \cap D)$; 2. $(A \cap \overline{(B \cup C) \setminus D}) \setminus D$; 3. $((A \cap B) \setminus (C \cap D)) \otimes \overline{A \cup D}$; 4. $(A \setminus \overline{B \setminus (\overline{C \cup D} \cap A))} \cup \overline{\overline{A} \cup C}$.

1.17. 1. $A \setminus B \cup (C \cap B \setminus D)$; 2. $\overline{A \cap B \otimes C} \cup \overline{B \setminus C \cup D}$; 3. $A \cup B \setminus (C \cap D \setminus B) \otimes \overline{A \cap D}$; 4. $(A \setminus B) \cap (B \setminus D) \cup (B \setminus (C \setminus D) \otimes \overline{A \cap B})$.

1.18. Верные включения - 2, 4, 8, 9, 10, 11. Остальные включения не верны.

1.19. Верные включения - 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16. Остальные включения не верны.

1.20. 1. (011111); 2.(00100); 3. (01001); 4. (00010); 5. (01011); 6.(10010); 7. (01001); 8. (10010).

1.21. 1. от 5 до 9; 2. не более 4; 3. не более 4; 4. от 1 до 5; 5. от 1 до 9; 6. 20; 7. 16.

1.22. 1. $M_5 \cap M_6 \cap M_7$ ; 2. $M_5 \cap (\overline{M_6 \cap M_7})$; 3. $\overline{M_5} \cap \overline{M_7} \cap M_6$.

1.23. 1. не верно; 2. верно; 3. не верно; 4. не верно; 5. верно; 6. верно; 7. не верно; 8. верно; 9. не верно; 10 .не верно; 11. не верно; 12. не верно.

1.24. Поскольку доказательства всех равенств между собой похожи, то приведем доказательство только первой формулы. Если $(\alpha, \beta) \in (A \cap B) \times C$, то $\alpha \in A$ и $\alpha \in B$. Следовательно $(\alpha, \beta) \in A \times C$ и $(\alpha, \beta) \in B \times C$, т.е $(A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C)$. Обратное включение: $(\alpha,\beta) \in (A\times C)\cap(B\times C)$, следовательно, $(\alpha,\beta) \in A\times C$ и $(\alpha,\beta) \in B\times C$. Тогда $\alpha \in A$ и $\alpha \in B$, откуда $(\alpha,\beta) \in (A\cap B)\times C$, т.е. $(A\times C)\cap(B\times C) \subseteq (A\cap B)\times C$. Объединяя оба включения получаем равенство $(A\times C)\cap(B\times C) = (A\cap B)\times C$.

1.25. 1. Пусть $C \in 2^A \cup 2^B$, тогда, либо $C \in 2^A$, либо $C \in 2^B$. В первом случае $C \subseteq A$, и, следовательно, $C \subseteq A\cup B$. Во втором случае, $C \subseteq B$, и, следовательно, $C \subseteq A\cup B$. В обоих случаях $C \in 2^{A\cup B}$. В силу произвольности выбора $C$ выводим $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A\cup B}$;
2. Пусть $C \in 2^A \cap 2^B$, тогда $C \in 2^A$ и $C \in 2^B$, т.е. $C \subseteq A$ и $C \subseteq B$. Таким образом $C \subseteq A\cap B$ и включение $2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A\cap B}$ установлено. Для доказательства обратного включения рассмотрим $C \in 2^{A\cap B}$. Тогда $C \subseteq A\cap B$, и, следовательно, $C \subseteq A$ и $C \subseteq B$. Тем самым установлены включения $C \in 2^A$ и $C \in 2^B$, из которых выводим $C \in 2^A\cap 2^B$. Включение $2^{A\cap B} \subseteq 2^A\cap 2^B$ установлено. Объединяя включения, получим равенство.
3. Пусть $B \in 2^{\overline{A}}$, тогда $B \subseteq \overline{A}$. Из последнего включения следует, что либо $B = \emptyset$, либо $B$ не является подмножеством $A$. В обоих случаях $B$ принадлежит дополнению $2^A$. В силу произвольности выбора $B$ выводим $2^{\overline{A}} \subseteq \overline{2^A}$;
4. Пусть $C \in 2^{A-B}$, тогда $C \subseteq A - B$, и, значит $C \subseteq A$ и $C \subseteq \overline{B}$. Из последних включений выводим $C \in 2^A$ и $C \in 2^{\overline{B}}$. Включение $2^{A-B} \subseteq 2^A \cap 2^{\overline{B}}$ утановлено. Обратное включение получится, если рассуждения провести в обратном порядке;
5. Пусть $C \in 2^{A-B}$, тогда $C \subseteq A - B$, и, значит $C \subseteq A$ и $C \subseteq \overline{B}$. Из последних включений выводим $C \in 2^A$ и $C \notin 2^B$, и, следовательно, $C \in 2^A - 2^B$;
6.Для доказательства достаточно убедиться в равенстве $(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} = A\otimes B$ и воспользоваться тождеством $2^{X\cap Y} = 2^X \cap 2^Y$.

1.26. Указание: перенумеровать все области на диаграмме Эйлера и проверить тождество. Для примера докажем тождество 12. В равенстве участвует 3 множества в общем положении, следовательно, диаграмма Эйлера имеет 8 областей. Перенумеруем эти области числами от 1 до 8. Исходным множествам сопоставим множества, образованные номерами областей, принадлежащим соответствующим исходным множествам. При соответствующей нумерации получим: $A$ соответствует $\{1,3,5,7\}$, $B$ – $\{2,3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$. Выполним теоретико множественные операции по отдельности для левой части тождества $A-(B-C) = \{1,5,7\}$ и для правой части тождества $(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C) = \{1,5,7\}$. В обоих случаях получим одно и тоже множество $\{1,5,7\}$. Это означает, что левой и правой части тождества на диаграмме Эйлера соответствует одинаковая часть диаграммы Эйлера (состоящая из областей под номерами 1, 5, и 7). Следовательно, при произвольных множествах $A, B, C$ тождество справедливо.

1.27. Указание: перенумеровать все области на диаграмме Эйлера. Тогда $A$ соответствует $\{1,3,5,7\}$, $B$ – $\{2,3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$.

1. $(A \otimes BC) \otimes (BC \otimes (A \otimes B)) = \{2,3,6,7\} = B$, тождество доказано.
2. $(\overline{C} \otimes B) \otimes \overline{A} = \{1,2,4,7\}$ и $(C \otimes B) \otimes A = \{1,2,4,7\}$, тождество доказано.
3. $C \otimes \overline{ABC} = \{4,5,6,8\}$ и $(overlineC \otimes \overline{BC}) \otimes (\overline{AB} \otimes ABC) = \{1,2,6,7,8\}$, равенство не выполнено.
4. $ABC \cup \overline{ABC} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = ABC \otimes \overline{ABC}$, тождество доказано.

1.28. Указание: перенумеровать все области на диаграмме Эйлера. Тогда $A$ соответствует $\{1,3,5,7\}$, $B$ – $\{2,3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$.
1. Условие $A \cap C = \{5,7\} = \emptyset$ приводит к исключению областей под номерами 5 и 7. Следовательно, $A$ соответствует $\{1,3\}$, $B$ – $\{2,3,6\}$, $C$– $\{4,6\}$. Условие $AB - C = \{3\} = \emptyset$ приводит к исключению области номер 3. Таким образом, $A$ соответствует $\{1\}$, $B$ – $\{2,6\}$, $C$– $\{4,6\}$. Но в этом случае $A \cap B = \emptyset$, т.е. таких множеств не существует.
2. Поскольку $A \cap C = \{5,7\} = \emptyset$ и $\overline{A} \cap B = \{2,6\} = \emptyset$, то исключим области под номерами 2, 5, 6, 7. Тогда $A$ соответствует $\{1,3\}$, $B$ – $\{3\}$, $C$– $\{4\}$, и $A \otimes B = \{1\} \neq \emptyset$.
3. Поскольку $B - A = \{2,6\} = \emptyset$ и $\overline{B \cup A} = \{4,8\} = \emptyset$, то исключим области под номерами 2, 4, 6, 8. Тогда $A$ соответствует $\{1,3,5,7\}$, $B$ – $\{3,7\}$, $C$– $\{5,7\}$, и $\overline{A} \cap \overline{C} = \{2,8\} \neq \emptyset$.
4. Поскольку $A - B = \{1,5\} = \emptyset$ и $B \cap C = \{6,7\} = \emptyset$, то исключим области под номерами 1, 5, 6, 7. Тогда $A$ соответствует $\{3,5\}$, $B$ – $\{2,3\}$, $C$– $\{4\}$, и $A \cap C = \emptyset$, т.е. таких множеств не существует.

1.29. Указание: перенумеровать все области на диаграмме Эйлера. Тогда $A$ соответствует $\{1,3,5,7\}$, $B$ – $\{2,3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$.
1. Условие $A \subseteq B \cup C$ приводит к включению $\{1,3,5,7\} \subseteq \{2,3,4,5,6,7\}$, следовательно, исключим область под номером 1. Тогда $A$ соответствует $\{3,5,7\}$, $B$ – $\{2,3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$. Поскольку $A \cup B = \{2,3,5,6,7\}$ и $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7\}$, то включение $A \cup B \subseteq B \cup C$ установлено.
2. Условие $A \subseteq B \cup C$ приводит к включению $\{1,3,5,7\} \subseteq \{2,3,4,5,6,7\}$, следовательно, исключим область под номером 1. Тогда $A$ соответствует $\{3,5,7\}$, $B$ – $\{2,3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$. Поскольку $(A - B) \cup AC = \{5,7\} \subseteq C$, то включение установлено.
3. Условие $B - C \subseteq A$ приводит к включению $\{2,3\} \subseteq \{1,3,5,7\}$, следовательно, исключим область под номером 2. Тогда $A$ соответствует $\{1,3,5,7\}$, $B$ – $\{3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$. Поскольку $C \cup BA = \{3,4,5,6,7\}$ содержит $B$, то включение установлено.
4. Условие $B \subseteq C - A$ приводит к включению $\{2,3,6,7\} \subseteq \{4,6\}$, следовательно, исключим области под номерами 2, 3, 7. Тогда $A$ соответствует $\{1,5\}$, $B$ – $\{6\}$, $C$– $\{4,5,6\}$. Поскольку $A \cup (B - C) = \{1,5\}$ содержится в $A - B = \{1,5\}$, то включение установлено.

1.30. Поскольку рассуждения похожи, то проведем доказательство только для задачи 1. В соотношениях участвует 2 множества в общем положении, следовательно, диаграмма Эйлера имеет 4 области. Перенумеруем эти области числами от 1 до 4. Исходным множествам сопоставим множества, образованные номерами областей, принадлежащим соответствующим исходным множествам. При соответствующей нумерации получим: $A$ соответствует $\{1,3\}$, $B$ – $\{2,3\}$. Условие $A \cap B = A$ приводит к равенству $\{1,2,3\} = \{1,3\}$, следовательно, исключим область под номером 2. Тогда $A$ соответствует $\{1,3\}$, $B$ – $\{3\}$ и $B \subseteq A$. Обратно, условие $B \subseteq A$ приводит к включению $\{1,3\} \subseteq \{2,3\}$, следовательно, исключим область под номером 1. Тогда $A$ соответствует $\{3\}$, $B$ – $\{2,3\}$ и $A \cap B = A$.

1.31. Указание: перенумеровать все области на диаграмме Эйлера. Тогда $A$ соответствует $\{1,3,5,7\}$, $B$ – $\{2,3,6,7\}$, $C$– $\{4,5,6,7\}$.
1. Включение $A \subseteq B - C$ возможно тогда и только тогда, когда области с номерами 1, 5, 7 пусты. Аналогисно, равенство $B = (A \otimes B) \cup (A - C)$ выполнено тогда и только тогда, когда области с номерами 1, 5, 7 пусты.
2. Включение $A \subseteq BC$ равносильно пустоте областей с номерами 1, 3, 5. Равенство $A \cup B = BC \cup (B - A)$ эквивалентно пустоте тех же областей.
3. Включение и равенство равносильны пустоте областей с номерами 1, 2, 3.
4. Включение и равенство равносильны пустоте областей с номерами 1, 2, 3.

1.32. Поскольку рассуждения однотипны, то доказательство проведем только для первой задачи. В соотношениях участвует 4 множества в общем положении, следовательно, диаграмма Эйлера имеет 16 областей. Перенумеруем эти области числами от 1 до 16. Исходным множествам сопоставим множества, образованные номерами областей, принадлежащим соответствующим исходным множествам. При соответствующей нумерации множества состоят из областей с номерами: $A$ – 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, $B$ – 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, $C$ – 4 ,5 ,6 , 7, 12, 13, 14, 15, $D$ – 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Проверим, следует ли из левой системы условий правая система. Включения $A \subseteq B \subseteq \overline{C}$ возможны при отсутствии областей с номерами 1, 5, 6, 7, 9, 13, 14, 15, включение $D \subseteq C$ исключает области 8, 9, 10, 11, и равенство $A \cup D = B \cup C$ исключает области 1 ,6 ,8 ,9. Таким образом $A$ соответствует $\{3\}$, $B$ – $\{2,3\}$, $C$ – $\{4,12\}$, $D$ – $\{12\}$. Включения $A \subseteq B$ и $D \subseteq C$ выполнены.
Обратно, из-за включений $A \subseteq B$ и $D \subseteq C$ исключаем области с номерами 1, 5, 8, 9, 10, 11, 13. Таким образом $A$ соответствует $\{3,7,15\}$, $B$ – $\{2,3,6,7,14,15\}$, $C$ – $\{4,6,7,12,14,15\}$, $D$ – $\{12,14,15\}$. Очевидно, $B \not\subseteq \overline{C}$, и, следовательно, из правой системы левая систем условий не следует. Ответ: системы условий не равносильны.

1.33. Поскольку рассуждения похожи, то проведем доказательство только для первой задачи. В соотношениях участвует 4 множества в общем положении, следовательно, диаграмма Эйлера имеет 16 областей. Перенумеруем эти области числами от 1 до 16. Исходным множествам сопоставим множества, образованные номерами областей, принадлежащим соответствующим исходным множествам. При соответствующей нумерации получим: $A$ соответствует $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, $B$ – $\{2,3,6,7,10,11,14,15\}$, $C$ – $\{4,5,6,7,12,13,14,15\}$, $X$ – $\{8,9,10,11,12,13,14,15\}$. Выполнение условий системы требует исключение зон с номерами 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13,14, 15. Таким образом $A$ соответствует $\{9,11\}$, $B$ – $\{10,11\}$, $C$ – $\{4\}$, $X$ – $\{9,10,11\}$. Видно, что $X = A \cup B$ и $C \cap (A \cup B) = \emptyset$.

Покажем, что выполнение условий $X = A \cup B$ и $C \cap (A \cup B) = \emptyset$ влечет выполнение условий исходной системы. При соответствующей нумерации получим: $A$ соответствует $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, $B$ – $\{2,3,6,7,10,11,14,15\}$, $C$ – $\{4,5,6,7,12,13,14,15\}$, $D$ – $\{8,9,10,11,12,13,14,15\}$. Выпонение условий $X = A \cup B$ и $C \cap (A \cup B) = \emptyset$ влечет исключение зон с номерами 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13,14, 15. Таким образом $A$ соответствует $\{9,11\}$, $B$ – $\{10,11\}$, $C$ – $\{4\}$, $X$ – $\{9,10,11\}$, и равенства $B - X = A \cap C$, $A - X = C - B$, $X - C = A \cup B$ выполнены. Ответ: $X = A \cup B$, $C \cap (A \cup B) = \emptyset$ – условие совместности.

## Отношения

2.1. 1. $\rho \cup \tau = [1;7]$, $\rho \cap \tau = (2;5)$, $\rho - \tau = [1;2]$, $\rho \otimes \tau = [1;2] \cup [5;7]$, $\overline{\rho} = (-\infty;1) \cup [5;\infty)$;
2. $\rho \cup \tau = \{(a,b)|\, a < \max\{3b, 2b+3\}\}$, $\rho \cap \tau = \{(a,b)|\, a < \min\{3b, 2b+3\}\}$, $\rho - \tau = \{(a,b)|\, 2b+3 \le a < 3b\}$, $\rho \otimes \tau = \{(a,b)|\, \min\{3b, 2b+3\} \le a < \max\{3b, 2b+3\}\}$, $\overline{\rho} = \{(a,b)|\, a \ge 3b\}$;
3. $\rho \cup \tau = \{(a,b,c)|\, \min\{ab, a+b\} < c\}$, $\rho \cap \tau = \{(a,b,c)|\, \max\{ab, a+b\} < c\}$, $\rho - \tau = \{(a,b,c)|\, a = 1,\ c = b+1\}$, $\rho \otimes \tau = \{(a,b,c)|\, a+b < c \le ab$ или $a = 1, c = b+1\}$, $\overline{\rho} = \{(a,b,c)|\, ab \ge c\}$;
4. $\rho \cup \tau = \{(a,b,c)|\, a = b$ или $b = c\}$, $\rho \cap \tau = \{(a,b,c)|\, a = b = c\}$, $\rho - \tau = \{(a,b,c)|\, a = b \ne c\}$, $\rho \otimes \tau = \{(a,b,c)|\, a = b \ne c$ или $a \ne b = c\}$, $\overline{\rho} = \{(a,b,c)|\, a \ne b\}$;
5. $\rho \cup \tau = \tau$, $\rho \cap \tau = \rho$, $\rho - \tau = \emptyset$, $\rho \otimes \tau = \{(x,y,z)|\, x \cap y \subseteq z, (x \otimes y) \cap \overline{z} \ne \emptyset\}$, $\overline{\rho} = \{(x,y,z)|\, (x \cup y) \cap \overline{z} \ne \emptyset\}$.

2.2. Указание: воспользоваться свойствами операций над множествами.

2.3. 1. $\rho \cdot \tau = \{(x,y)|\, y = 2^{x^2}\}$, $\tau \cdot \rho = \{(x,y)|\, y = 4^x\}$; 2. $\rho \cdot \tau = \{(x,y)|\, y = \operatorname{tg}(x+1)\}$, $\tau \cdot \rho = \{(x,y)|\, y = 1 + \operatorname{tg} x\}$; 3. $\rho \cdot \tau = \{(x,y)|\, x^3 < y\}$, $\tau \cdot \rho = \{(x,y)|\, x < y^{\frac{1}{3}}\}$; 4. $\rho \cdot \tau = \tau$, $\tau \cdot \rho = \tau$; 5. $\rho \cdot \tau = \tau$, $\tau \cdot \rho = \mathbb{N}^2$; 6. $\rho \cdot \tau = \tau$, $\tau \cdot \rho = \tau$; 7. $\rho \cdot \tau = \{(x,y)|\, y = B - x\}$, $\tau \cdot \rho = \{(x,y)|\, y = A - B \cap x\}$.

2.4. 1. $\rho^{-1} = \{(1,1),(3,1),(3,2)\}$, $\rho^2 = \{(1,1),(1,3)\}$; 2. $\rho^{-1} = \{(a,b)|\, a > b\}$, $\rho^2 = \{(a,b)|\, a < b-1\}$; 3. $\rho^{-1} = \{(a,b)|\, a > b\}$, $\rho^2 = \rho$; 4. $\rho^{-1} = \{(x,y)|\, y$ кратно $x\}$, $\rho^2 = \rho$; 5. $\rho^{-1} = \{(x,y)|\, |y| \le x\}$, $\rho^2 = \rho$; 6. $\rho^{-1} = \rho$, $\rho^2 = Q^2$; 7. $\rho^{-1} = \rho$, $\rho^2 = \{(x,x)|\, x \in 2^A\}$; 8. $\rho^{-1} = \rho$, $\rho^2 = (2^A)^2$;

2.5. 1. Если $(x,y) \in \rho$, то $(y,x) \in \rho^{-1}$, и $(x,y) \in \rho^{-1^{-1}}$. То есть $\rho \subseteq \rho^{-1^{-1}}$. Проделав выкладки в обратном порядке, получим обратное включение;

2. Если $(x,y) \in \overline{\rho^{-1}}$, то $(x,y) \notin \rho^{-1}$, и $(y,x) \notin \rho$, что равносильно $(y,x) \in \overline{\rho}$, или $(x,y) \in \overline{\rho}^{-1}$. Тем самым установлено $\overline{\rho^{-1}} \subseteq \overline{\rho}^{-1}$. Обратное включение получится, если проделать выкладки в обратном порядке;

3. Приведем цепочку равносильных включений: $(x,y) \in (\rho \cup \tau)^{-1}$; $(y,x) \in \rho \cup \tau$; $(y,x) \in \rho$ или $(y,x) \in \tau$; $(x,y) \in \rho^{-1}$ или $(x,y) \in \tau^{-1}$; $(x,y) \in \rho^{-1} \cup \tau^{-1}$.

4. $(\rho \cap \tau)^{-1} = \overline{(\overline{\rho} \cup \overline{\tau})}^{-1} = \rho^{-1} \cap \tau^{-1}$;

5. $(\rho - \tau)^{-1} = (\rho \cap \overline{\tau})^{-1} = \rho^{-1} \setminus \tau^{-1}$;

6. $(\rho \otimes \tau)^{-1} = (\rho \cap \overline{\tau} \cup \overline{\rho} \cap \tau)^{-1} = \rho^{-1} \otimes \tau^{-1}$;

7. Если $a((\rho\tau)\mu)b$, то $\exists c$, при котором $a(\rho\tau)c$ и $c\mu b$. Тогда $\exists d$, при котором $a\rho d$ и $d\tau c$. Из $d\tau c$ и $c\mu b$ выводим $d(\tau\mu)b$, и $a(\rho(\tau\mu))b$. Поскольку рассуждения обратимы, то равенство доказано;

8. $a(\rho\tau)^{-1}b \leftrightarrow b(\rho\tau)a$, значит, $\exists c$ $b\rho c$ и $c\tau a$, или, $a\tau^{-1}c$ и $c\rho^{-1}b$, т.е. $a(\tau^{-1}\rho^{-1})b$;

9. Если $a((\rho \cup \tau)\mu)b$, то $\exists c$, при котором $a(\rho \cup \tau)c$ и $c\mu b$. Условие $a(\rho \cup \tau)c$ означает, либо $a\rho c$, а значит $a(\rho\mu)b$, либо $a\tau c$, и, следователно, $a(\tau\mu)b$. В обеих случаях $a(\rho\mu \cup \tau\mu)b$, и включение $(\rho \cup \tau)\mu \subseteq \rho\mu \cup \tau\mu$ доказано. Обратное включение получится, если выкладки провести в обратном порядке;

10. аналогично задаче 9;

11. аналогично задаче 9.

2.6. 1. не рефлексивно и не антирефлексивно; 2. антирефлексивно; 3. рефлексивно; 4. рефлексивно; 5. не рефлексивно и не антирефлексивно; 6. рефлексивно.

2.7. 1. Из $a\tau a$ выводим $a\tau^{-1}a$. Из $a\tau a$ и $a\mu a$ следует $a(\tau\mu)a$. $a(\tau \cup \mu)a$, $a(\tau \cap \mu)a$;

2. Если $a\tau^{-1}a$, или $a(\tau \cup \mu)a$, или $a(\tau \cap \mu)a$, или $a(\tau - \mu)a$, или $a(\tau \otimes \mu)a$, то либо $a\tau a$, либо $a\mu a$, что противоречит условиям;

3. $\rho = \{(1,2),(2,1)\}$ антирефлексивно на $\{1,2\}$, а $\rho^2 = \{(1,1),(2,2)\}$ — рефлексивно.

2.8. 1. антисимметрично; 2. антисимметрично; 3. антисимметрично; 4. не симметрично и не антисимметрично; 5. симметрично; 6. симметрично; 7. антисимметрично; 8. симметрично.

2.9. 1. Если $a\tau^{-1}b$, то $b\tau a$ и в силу симметричности $a\tau b$, но тогда $b\tau^{-1}a$. Симметричность $\tau^{-1}$ доказана. Симметричность $\tau \cap \mu$, $\tau \cup \mu$, $\tau - \mu$, $\tau \otimes \mu$, $\tau \cdot \mu \cup \mu \cdot \tau$ устанавливается

аналогично;
2. Если $a\tau^{-1}b$ и $b\tau^{-1}a$, то $b\tau a$ и $a\tau b$, и в силу антисимметричности $a = b$. Антисимметричность $\tau^{-1}$ доказана. Антисимметричность $\tau \cap \mu$ устанавливается аналогично;
3.$\tau = \{(1,2),(2,1)\}$, $\mu = \{(2,3),(3,2)\}$, $\tau \cdot \mu = \{(1,3)\}$;
4. $\tau = \{(1,2)\}$,$\mu = \{(2,1)\}$, $\tau \cdot \mu = \{(1,1)\}$.

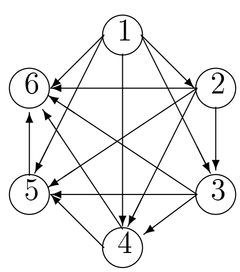
2.10. 1. нет; 2. да; 3. да; 4. нет; 5. да; 6. да; 7. да; 8. нет.

2.11. Пусть $a\tau^{-1}b$ и $b\tau^{-1}c$, тогда $b\tau a$ и $c\tau b$, в силу транзитивности $c\tau a$, и, следовательно $a\tau^{-1}c$. Транзитивность $\tau^{-1}$ установлена. Транзитивность $\tau \cap \mu$ доказывается аналогично.
Положим $\tau = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$, $\mu = \{(1,3),(3,1),(1,1),(3,3)\}$, тогда $\tau \cup \mu$ и $\tau\mu$ не транзитивны.

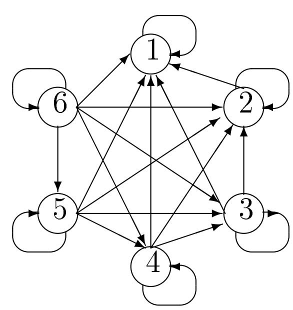
2.12. 1. {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a)}; 2. {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c)}; 3. {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (c,a), (c,b)}; 4. {(a,b), (b,c), (a,c)}; 5. {(a,b), (b,a), (a,a), (b,b)}.

2.13. .

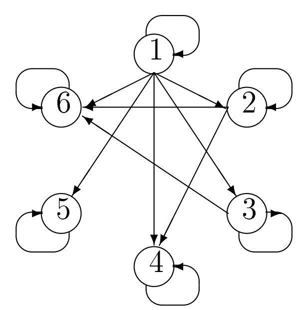
1.



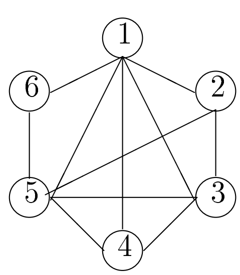

2.



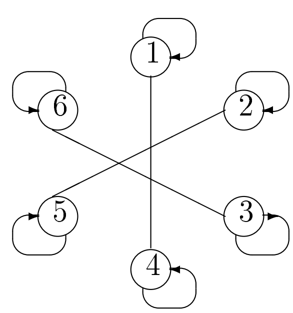

3.



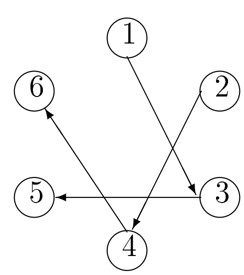

4.




5.




6.



2.14. 1. (a,c), (bc), (dc); 2. (b,d), (c,a), (c,b), (d,d), (d,a) ; 3. (a,d), (a,c), (c,a), (b,d), (d,b) ; 4. (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,d), (d,b), (c,c), (c,d), (d,c), (d,d) .

2.15. 1. $\mathbb{N}/\rho = \{[1],[2],[3]\}$, где $[j] = \{j+3n|\, n \in \mathbb{N}\}$; 2. $\mathbb{Z}/\rho = \{[1],[2],[3]\}$, где $[j] = \{j+3n|\, n \in \mathbb{Z}\}$; 3. $\mathbb{R}/\rho = \{[\alpha]\,|\, 0 \le \alpha < 1\}$, здесь $[\alpha] = \{\alpha+n|\, n \in \mathbb{Z}\}$; 4. $\mathbb{R}/\rho = \{[1],[2]\}$, где $[1] = (-\infty, 1]$, $[2] = (1,\infty)$; 5. $2^A/\rho = \{[C]\,|\, C \subseteq \overline{B}\}$; 6. $2^A/\rho = \{[C]\,|\, C \subseteq \overline{B}\}$; 7. $2^A/\rho = \{[C]\,|\, C \subseteq B\}$; 8. $2^A/\rho = \{B, \overline{B}\}$.

2.16. Поскольку операции сохраняют рефлексивность, симметричность и транзитивность, то $\tau^{-1}, \tau^2, \tau \cap \mu$ – отношения эквивалентности.
$\tau = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$, $\mu = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c)\}$ – отношения эквивалентности, а $\tau \cup \mu, \tau\mu$ – не отношения эквивалентности.

2.17. 1. Если $c \in [a] \cap [b]$, то найдется $c$, для которого $a\rho c$ и $b\rho c$. В силу симметричности $c\rho b$ и транзитивности из $a\rho c$ и $c\rho b$ выводим $a\rho b$. Поскольку для произвольного $x \in [b]$ выолнено $b\rho x$, то по свойству транзитивности из $a\rho b$ и $b\rho x$ выводим $a\rho x$, т.е.$x \in [a]$. Тем самым показано включение $[b] \subseteq [a]$. Поменяв $b$ и $a$ местами в проведенных рассуждениях получим $[a] \subseteq [b]$. Равенство $[a] = [b]$ доказано.
2. Поскольку $a \in [a]$, то $M = \cup_{a\in M}[a]$. Удалив в объединении повторяющиеся члены получим $M = \cup_{a\in P}[a]$ – разбиение $M$ на непересикающиеся классы эквивалентности. Поскольку $a\rho b$ тогда и только тогда, когда $a$ и $b$ лежат в одном классе эквивалентности, то $\rho = \cup_{a\in P}[a]^2$.

2.18. Поскольку $a\rho b$ тогда и только тогда, когда $a$ и $b$ одновременно лежат в одном из множеств $A_i$, то отношение $\rho$ рефлексивно симметрично и транзитивно, т.е. отношение эквивалентности. Смежными классами являются множества $A_i$, $i = 1,\ldots,k$.

2.19. $\rho = \{1,3,5\}^2 \cup \{2,6,7\}^2 \cup \{(4,4)\}$.

2.20. Отношение эквивалентности оределяется разбиением множества. Перечислим разбиение множества $M$ с точностью до обозначения элементов:
1.$M = \{a\} \cup \{b\}$, $M = \{a,b\}$; 2. $M = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, $M = \{a,b\} \cup \{c\}$, $M = \{a,b,c\}$; 3. $M = \{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}\cup\{d\}$, $M = \{a,b\}\cup\{c\}\cup\{d\}$, $M = \{a,b\}\cup\{c,d\}$, $M = \{a,b,c\}\cup\{d\}$, $M = \{a,b,c,d\}$.

2.21. 1. частичный порядок; 2. строгий линейный порядок; 3. линейный порядок; 4. не порядок; 5. не порядок 6. не порядок; 7. частичный порядок 8. строгий порядок 9. порядок; 10. не порядок.

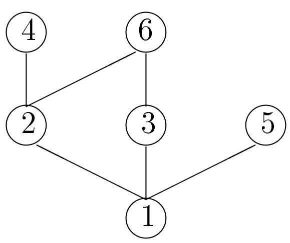
2.22. Поскольку операции сохраняют рефлексивность, антисимметричность и транзитивность, то операции $\tau^{-1}, \mu^2, \tau \cap \mu$ – отношения частичного порядка. Положим

$\tau = \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$, $\mu = \{(a,a),(b,a),(b,b)\}$ – отношения частичного порядка, а $\tau \cup \mu, \tau\mu$ – не отношения частичного порядка.

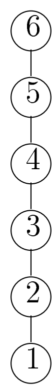
2.23. 1. {(a,a), (b,b)}, {(a,a), (b,b), (a,b)} ; 2. {(a,a), (b,b), (c,c)}, {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b)}, {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c)}, {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (b,c)}.

2.24. .

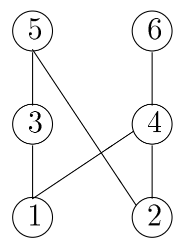
1.



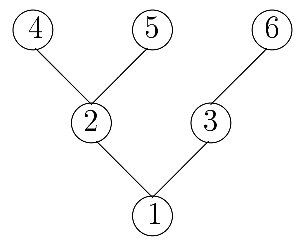

2.




3.




4.




2.25. 1. (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c); 2. (a,a), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (b,b), (b,c), (b,d),(b,e), (b,f), (c,c), (c,e), (c,f), (d,d), (d,e), (d,f),(e,e), (f,f); 3. (a,a), (a,b), (a,d), (a,e), (a,c), (a,f), (a,g), (b,b), (b,d), (b,e), (c,c), (c,f), (c,g), (d,d), (e,e), (f,f), (g,g); 4. (a,a), (a,e), (a,h), (b,b), (b,e), (b,f), (b,h),( b,m), (c,c),(c,f), (c,g), (c,h), (c,m), (e,e), (e,h), (f,f), (f,h), (f,m), (g,g), (g,m), (h,h), (m,m).

## Функции, операции

3.1. 1. всюду определена, однозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 2. всюду определена, однозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 3. всюду определена, однозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 4. всюду определена, однозначная, $f(\mathbb{R}) = \{a \,|\, a \geq 0,\ a \in \mathbb{R}\}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 5. частично определена, $D_f = \{a \,|\, a \geq 0,\ a \in \mathbb{R}\}$, многозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \notin \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 6. всюду определена, многозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \notin \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 7. всюду определена, однозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 8. всюду определена, однозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; 9. всюду определена, многозначная, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \notin \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3.2. .

$\{0,1\}^{\{0,1\}}$

| x | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$\{0,1,2\}^{\{0,1\}}$

| x | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |

$\{0,1\}^{\{0,1,2\}}$

| x | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3.3. 1. Если $y \in f(A) \cup f(B)$, то $y \in f(A)$, или $y \in f(B)$. В первом случае найдется $a \in A,\ f(a) = y$, а во втором, найдется $b \in B,\ f(b) = y$. В любом случае $y \in f(A \cup B)$. Обратно, если $y \in f(A \cup B)$, то либо найдется $a \in A,\ f(a) = y$, либо найдется $b \in B,\ f(b) = y$. В любом случае $y \in f(A) \cup f(B)$; 2. аналогично; 3. аналогично; 4. аналогично.

3.4. 1. нет; 2. да; 3. нет; 4. да; 5. да; 6. нет; 7. да.

3.5. .

Сюръективные функции из $\{0,1\}^{\{0,1\}}$

| x | $f_1$ | $f_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Сюръективные функции из $\{0,1\}^{\{0,1,2\}}$

| x | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

3.6. 1. да; 2. нет; 3. да; 4. нет; 5. да; 6. да.

3.7.

Инъективные функции из $\{0,1\}^{\{0,1\}}$

| x | $f_1$ | $f_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Инъективные функции из $\{0,1,2\}^{\{0,1\}}$

| x | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 |

3.8. 1. да; 2. нет; 3. да; 4. нет; 5. да; 6. да.

3.9.

| x | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

3.10. 1. $3b - a^2 \geq 0$; 2. $ac > 0$; 3. $a = b = c$; 4. $b \geq c + \frac{a(a-2)}{4}$.

3.11. 1. $f^{-1}(x) = x-1$; 2. $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$; 3. $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$; 4. $f^{-1}(x) = \begin{cases} y = 1-2x \text{ при } x \le 0 \\ y = 2x \text{ при } x > 0 \end{cases}$;
5. $f^{-1}(x) = \left( x + \frac{\lfloor\sqrt{2x}\rceil - \lfloor\sqrt{2x}\rceil^2}{2}, 1 - x + \frac{\lfloor\sqrt{2x}\rceil + \lfloor\sqrt{2x}\rceil^2}{2} \right)$, где $\lfloor\alpha\rceil$ — ближайщее целое к $\alpha$.

3.12. Пусть $M$–счетно и $f \in \mathbb{N}^M$–биекция. Отношение $\rho = \{(x,y)|\, f(x) \le f(y)\}$ является линейным порядком и для любого $b \in M$ множество $M_b$ — конечно.
В обратную сторону: Множество $M_b$ конечно и $\rho$ образует линейный порядок на $M_b$. Следовательно, множество $M_b$ можно представить в виде упорядоченного списка элементов $\{m_1, \ldots m_k = b\}$, в котором $m_i \rho m_{i+1}$, где $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Пусть $b\rho c$ и $b \ne c$. Представим $M_c$ в виде упорядоченного списка элементов. Как не трудно убедиться $M_b \subset M_c$ и для любого $x \in M_c - M_b$ справедливо $b\rho x$. Это означает, что в упорядоченном списке $M_c$ первые $k$ элементов образуют список $M_b$, т.е. упорядоченный список $M_c$ является продлением списка $M_b$. В силу произвольности выбора $c$ выводим, что упорядоченный список $M_b$ можно продлить до упорядоченного списка $M$. Функция, ставящая в соответствие элементу списка его порядковый номер, является биекцией.

3.13. Если $M$ — счетно, то существует биекция из $\mathbb{N}^M$, являющеяся инъекцией. Обратно: Пусть $f$ — инъекция из $\mathbb{N}^M$. Отношение $\rho = \{(a,b)|\, f(a) \le f(b)\}$ задает линейный порядок на $M$, причем множество $M_b = \{x|\, x\rho b\}$ конечно для любого $b \in M$ (количество натуральных чисел меньших $f(b)$ конечно). Следовательно $M$ –счетно.

3.14. 1. Пусть $f \in \mathbb{N}^T$ — биекция. Сужение $f$ на мноество $M$ является инъекцией из $\mathbb{N}^M$, следовательно, $M$ — счетно. 2. Пусть $f \in \mathbb{N}^H$ — биекция и $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Положим $g(x) = j$ при $x = t_j$ и $g(x) = n + f(x)$ при $x \in H$. $g$ — биекция из $\mathbb{N}^{T \cup H}$; 3. Пусть $f$ — биекция из $\mathbb{N}^T$, $g$ — биекция из $\mathbb{N}^H$. Тогда $h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1 \text{ при } x \in T \\ 2g(x) \text{ при } x \in H \end{cases}$ — биекция из $h \in \mathbb{N}^{T \cup H}$;
4. $h(x) = \begin{cases} -2x - 1 \text{ при } x < 0 \\ 2x \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$ — биекция из $\mathbb{N}^Z$; 5. Пусть $f$ — биекция из $\mathbb{N}^S$. Для каждого $T \in S$, в силу счетности, существует биекция $g_T \in T^{\mathbb{N}}$. Для $t \in T \in S$ определим $h(t) = 2^{f(T)} 3^{g_T(t)}$. Функция $h$ определена на множестве $M = \cup_{T \in S} T$ и является инъекцией. Следовательно, $M$–счетно; 6. Пусть $f$ — биекция из $\mathbb{N}^T$, $g$ — биекция из $\mathbb{N}^H$. Для $(a,b) \in T \times H$ положим $h(a,b) = 2^{f(a)} 3^{g(b)}$. Функция $h$ определена на множестве $M = T \times H$ и является инъекцией. Следовательно, $M$–счетно; 7. Рациональному числу $\frac{a}{b}$ сопоставим пару $(a \in Z, b \in \mathbb{N})$. Получаем биекцию $\mathbb{Q}$ на подмножество $Z \times \mathbb{N}$. Поскольку $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — счетно (как декартово произведение счетных множеств), то любое его бесконечное подмножество — счетно. Следова-

тельно, $\mathbb{Q}$ — счетно; 8. Пусть $M = T^k$, $f$ — биекция из $\mathbb{N}^T$, $p_1, \dots, p_k$ –простые числа. Положим $h(m_1, \dots, m_k) - p_1^{f(m_1)} \cdots p_k^{f(m_k)}$. Функция $h$ является инъекцией из $\mathbb{N}^M$, следовательно, $M$ — счетно; 9. Пусть $P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}$ — множество простых чисел, $f$ — биекция из $\mathbb{N}^\mathbb{Z}$. Положим $h(\sum_{j=1}^n a_j x^{j-1}) = \Pi_{j=1}^n p_j^{f(a_j)}$. Функция $h$ является инъекцией из $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}(x)}$, следовательно, $\mathbb{Z}(x)$ — счетно; 10. Доказтельство получается из предыдущего заменой $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Q}$; 11. Пусть $P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}$ — множество простых чисел, $f$ — биекция из $\mathbb{N}^T$. Положим $h(\{t_1, \dots, t_n\}) = \Pi_{j=1}^n p_{f(t_j)}$. Функция $h$ является инъекцией из $\mathbb{N}^M$, следовательно, $M$ — счетно;

3.15. 1. $f(x) = 1 + 4x$; 2. $f(x) = \frac{1}{x} - 1$; 3. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$; 4. $f(x) = 4 - 2x$; 5. $f(x) = \frac{x}{1-x}$; 6. $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x$ при $x \notin \{\frac{1}{2n} | n \in \mathbb{N}\}$, и $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n+2}$ при $n \in \mathbb{N}$; 7. $f(x) = 5x - 2$; 8. $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{4}$, $f(x) = x$ при $x \notin \{\frac{1}{2n} | n \in \mathbb{N}\}$, и $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n+4}$ при $n \in \mathbb{N}$; 9. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ при $x \notin \{\frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$ и $f(1) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+2}$ при $n \in \mathbb{N}$.

3.16. 1. $f(x, y) = (1 + 4x, -2 + 5y)$; 2. $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2pix)$; 3. $f(x, y) = \frac{\max\{|x|,|y|\}}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$; 4. $f(x, y) = (\frac{x}{1-|x|}, \frac{y}{1-|y|}$; 5. $f(x, y) = x + y$; 6. Положим $H = \{\frac{\pi}{4n} | n \in \mathbb{N}\}$. Множества $H$, $\mathbb{Q}$ и $H \cup \mathbb{Q}$ — счетны. Следовательно существует биекция $h$ из $(\mathbb{Q} \cup H)^H$.Функция $f(x) = x$ при $x \notin \mathbb{Q} \cup H$ и $f(x) = h(x)$ при $x \in H$ является биекцией $(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ на $(0, 1)$.

3.17. Указание: Рассмотреть соответствие, ставящее в соответствие бесконечной десятичной дроби $0, a_1 a_2 \dots$ пару бесконечных десятичных дробей $(0, a_1 a_3 \dots; 0, a_2 a_4 \dots)$.

3.18. 1. Пусть множества равномощны, тогда между элементами множеств существует биекция. Задав элементы одного множества списком, с помощью биекции получим список элементов другого множества. Количество элементов в списках совпадают.
Пусть количество элементов равны. Записав элементы множества списками, получаем биекцию между множествами, ставящую в соответствие друг другу элементы множеств, имеющие одинаковые номера в списках.
2. Поскольку число элементов $A$ и $B$ совпадают и $B \subseteq A$, то $A = B$. Утверждение не верно для бесконечных множеств: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ и $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
3. Пусть $f$ биекция между $A$ и $B$, а $h$– биекция между $B$ и $C$. Тогда $f \cdot h$ – биекция между $A$ и $C$.
4. $A$ равномощно некоторому подмножеству $B$, а $B$ равномощно некоторому подмножеству $C$, следовательно $A$ равномощно некоторому подмножеству $C$.
5. Следует из определения инъекции.
6. Инъекция рассматривается как биекция на некоторое подмножество.
7. В бесконечном множестве $A$ выделим счетное подмножество $C$. Множество $B \cup C$

счетно как объединение счетных множеств, и $|C| = |B \cup C|$. Обозначим через $f$ биекцию $C$ на $B \cup C$. Построим биекцию $h$ множества $A$ на $B \cup A$: $h(a) = a$, если $a \in A - C$ и $h(a) = f(a)$, если $a \in C$.

3.19. Для доказательств свойств 1,2,3,4 достаточно рассмотреть какое влияние оказывает элемент универса на левую и правую часть соотношения в зависимости от его принадлежности множествам $A$ и $B$.

5. Каждому подмножеству $A$ поставим в соответствие его характеристический вектор. Количество векторов $2^{|A|}$.

6. Рассмотрим табицу, строки соответствуют элементам $A$, столбцы – элементам $B$, а на пересечении строки и столбца расположен элемент $A \times B$. Число элементов таблицы $|A| \cdot |B|$ равно $|A \times B|$.

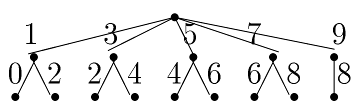
3.20. 1. коммутативна, ассоциативна; 2. не коммутативна и не ассоциативна; 3. коммутативна, ассоциативна; 4. коммутативна, ассоциативна; 5. коммутативна, ассоциативна; 6. коммутативна, ассоциативна; 7. коммутативна, ассоциативна; 8. коммутативна, ассоциативна; 9. не коммутативна, не ассоциативна; 10. коммутативна, не ассоциативна.

3.21. 1. полугруппа; 2. абелева группа; 3. абелева группа; 4. полугруппа; 5. полугруппа; 6. полугруппа; 7. абелева группа; 8. абелева группа; 9. абелева группа; 10. абелева группа; 11. абелева группа.

3.22. 1. Кольцо; 2. Поле; 3. Поле; 4. Кольцо; 5. Кольцо.

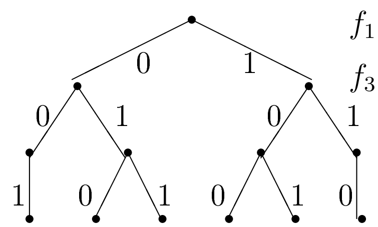
## Элементы комбинаторики

4.1. 1.



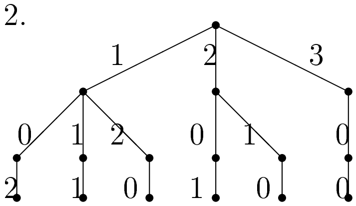

$M = \{10, 12, 32, 34, 54, 56, 76, 78, 98\}$

3.



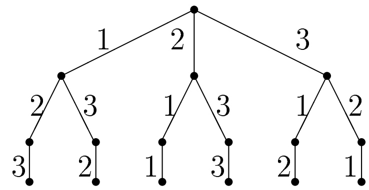

$f_1 = (001)$, $f_2 = (010)$,
$f_3 = (011)$, $f_4 = (100)$,
$f_5 = (101)$,
$f_6 = (110)$.

2.




$M = \{102, 111, 120, 201, 210, 300\}$

4.




$f_1 = (1,2,3), f_2 = (1,3,2), f_3 = (2,1,3), f_4 = (2,3,1)$, $f_5 = (3,2,1), f_6 = (3,1,2)$.

4.2. 1. $10 \cdot 10 = 100$; 2. $4^3 = 64$; 3. $30^3 = 27000$; 4. $2^4 = 16$; 5. $10^3 12^3 = 1728000$; 6. $2^5 = 32$; 7.$2^6 = 64$; 8. $3^9 = 19683$; 9. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^7 = 7680$; 10. $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

4.3. 1. $6 \cdot 6 \cdot 10^3 = 36000$; 2. $4 \cdot 5^4 = 2500$; 3. $5^5 = 3125$; 4. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$; 5. $9^5 = 59049$; 6. $9 \cdot 9 \cdot 8^3 = 41472$; 7. $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45000$; 8. $7^5 = 16807$; 9. $9 \cdot 10^2 = 900$; 10. $4 \cdot 10^2 \cdot 5^2 = 100000$; 11. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$; 12. $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$; 13. $9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$; 14. $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 15120$; 15. $2^5 \cdot 3^5 = 7776$.

4.4. 1. $64 \cdot (64 - 15) = 3136$; 2. $64(64-15)(64-28) = 112896$;
3. $6 \cdot 6 \cdot (64 - 9) + (6+6+6+6) \cdot (64-6) + 4 \cdot (64-4) = 3372$;
4. $4 \cdot 4 \cdot (64-8) + (4+4+4+4) \cdot (64-6) + 4 \cdot (64-4) + (6+6+6+6) \cdot (64-4) + 4 \cdot (64-2) = 3516$;
5. $\frac{10 \cdot 9}{2} 10^3 = 45000$; 6. $4 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^3 + 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8^2 = 9472$; 7. $4 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 \cdot 6 = 6804$; 8. 16; 9. 66; 10. $2^9 = 512$; 11. $3^3 \cdot 8^3 = 13824$; 12. $7^3 = 343$; 13. $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$; 14. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$; 15. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 12960$.

4.5. 1. $90000 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 62784$; 2. $90000 - 8 \cdot 9^4 = 37512$; 3. $90000 - 7 \cdot 8^4 = 61328$;
4. $(90000 - 8 \cdot 9^4) - (10^4 + 4 \cdot 8 \cdot 9^3) = 33328$; 5. $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 = 36$; 6. $4^3 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40$; 7. $3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 21$; 8. $3^9 - 3^6 = 18954$; 9. $3^9 - 3^3(3^3-1)(3^3-2) = 2133$; 10. $(3^9 - 3^3(3^3-1)(3^3-2)) - 3^3 = 2106$.

4.6. 1. $6 \cdot 5 = 30$; 2. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; 3. $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$;
4. $x = p_1^i p_2^j \to x^2 = p_1^{2i} p_2^{2j}$. Число делителей $x^2$ равно $(2i+1)(2j+1) = 51$. Отсюда $2i+1 = 3,\ 2j+1 = 17$, или наоборот.Следовательно, $x^3 = p_1^3 p_2^{24}$, число делителей $4 \cdot 25 = 100$;
5. Общее кратное $a$, 16, 50 представим в виде $\frac{400a}{\text{НОД}(400,a)} = 1200$. Следовательно, $a = 3\text{НОД}(400, a)$. Число делителей $400 = 2^4 5^2$ равно 15 $\to$ существует 15 натуральных чисел.

4.7. 1. Перенумеруем элементы множеств $A$ и $B$. Элементу $(a, b) \in A \times B$ поставим в соответствие пару чисел $(i, j)$, где $i$ – номер элемента $A$, а $j$ – номер элемента $B$. Соответствие является биекцией между множествами $A \times B$ и точками с целыми

координатами прямоугольника $[1,|A|]\times[1,|B|]$. Количество точек с целыми координатами в указанном прямоугольнике равно $|A|\cdot|B|$;
2. $|A^n| = |A\times A^{n-1}| = |A|\cdot|A|^{n-1} = |A|^n$;
3. Функция,ставящая в соответствие подмножеству из $A$ его характеристический вектор является биекцией. Поэтому $|2^A| = 2^{|A|}$;
4.Отображение, ставящее функци из $A^B$ ее набор значений, который можно рассматривать как элемент из $A^{|B|}$, является биекций. Таким образом, $|A^B| = |A^{|B|}| = |A|^{|B|}$;
5. $|\{0,1\}^{\{0,1\}^n}| = 2^{|\{0,1\}^n|} = 2^{2^n}$.

4.8. 1. $m^n$; 2. $m^{\frac{n}{2}}$ если $n$ — четно и $m^{\frac{n+1}{2}}$ если $n$ — нечетно; 3. $m\cdot(m-1)^{n-1}$; 4. $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)^{n-2}$; 5. $3^3\cdot 2^{n-3}$; 6. $\frac{m!}{(m-n)!}$; 7. $m^n - m\cdot(m-1)^{n-1}$; 8. $k^n$; 9. $\frac{k!}{(k-n)!}$; 10. $2^n$; 11. $\frac{n!}{2}$; 12. $n! - 2\cdot(n-1)!$; 13 $n! - 2\cdot(n-1)! + (n-2)!$; 14. $n!$; 15. $n!$; 16. $2^{\frac{n^2+n}{2}}$; 17. $2^n(2^n-1)\cdots(2^n-n+1)$; 18. $2^{n^2} - 2^n(2^n-1)\cdots(2^n-n+1)$; 19. $3^{\frac{n^2-n}{2}}$; 20. $2^{n^k}$; 21. $2^{n^2-n}$; 22. $2^{\frac{n^2+n}{2}}$; 23. $3^{\frac{n^2-n}{2}}2^n$; 24. $m^n$; 25. 0 при $m<n$ и $\frac{m!}{(m-n)!}$ при $m\geq n$.

4.9. 1. $2^{n-m}$; 2. $2^m$; 3. $2^m-1$; 4. $2^{n-m}$; 5. $2^n-2^{n-m}$; 6. $2^m$; 7. $2^n-2^m$; 8.$m2^{n-m}$; 9. $m2^{n-m}$; 10. $(n-m)2^m$; 11. $(n-m)2^m$; 12. $m2^{n-m}$.

4.10. 1. $C_{10}^2 = 45$; 2. $2C_{12}^2 = 132$; 3. $C_{10}^3 = 120$; 4. $C_5^2C_6^2 = 150$; 5. $C_{10}^5 = 252$; 6. $C_4^1{\cdot}9^3{+}C_4^2{\cdot}8{\cdot}9^2 = 6804$; 7. $\frac{18\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{2^5} = 52326$; 8. $C_5^2 = 10$; 9. $C_5^2\cdot4\cdot5^2 + C_5^3\cdot5^3 = 2250$;
10. $1+2C_5^1+C_5^2 = 21$; 11. $\frac{6!}{2^3} - 3\frac{5!}{2^2} + 3\frac{4!}{2} - 3! = 30$; 12. $C_9^4+C_8^3+C_7^2+C_6^1+1 = 210$; 13. $C_9^4$;
14. $C_{15}^5$; 15. $(C_5^0{+}C_5^2{+}C_5^4)^5 = 1048576$; 16. $(C_5^2)^5 = 100000$; 17. $C_{10}^5 = 252$; 18. $C_2^1C_5^2C_8^3 = 1120$; 19. $C_{22}^3 = 1540$; 20, $(-2)^3C_6^3 = -160$.

4.11. 1. $\frac{4\cdot5!}{2!3!} = 40$; 2. $C_9^{3,3,3} = 1680$; 3. $C_9^{2,3,4} = 1260$; 4. $C_{10}^{2,3,5} = 2529$;
5. $C_{10}^{2,2,6}+C_{10}^{2,3,5}+C_{10}^{2,4,4}+C_{10}^{3,3,4} = 11130$; 6. $C_9^{2,3,4} = 1260$; 7. $C_9^{2,3,4} = 1260$;
8. $C_{15}^{3,3,3,3,3} = 168168000$; 9. $2^3C_8^{2,3,3} = 4480$.

4.12. 16.

4.13. 3.

4.14. 1. 10; 2. 90; 3. 13; 4. 22.

4.15. 1. $6\cdot29^2 28 = 141288$; 2. $10^3-10 = 990$; 3. $40-20-13-5+6+2+1-0 = 11$;
4. $C_6^4C_{14}^4+C_6^3C_{14}^5+C_6^2C_{14}^6+C_6^1C_{14}^7+C_6^0C_{14}^8 = 123695$; 5. $C_{15}^5+C_{15}^4 = 4368$;
6. $2^8+2^6+2^8-2^4-2^4-2^2+2^0 = 541$; 7. $C_n^k$; 8. $C_{n+3}^3$; 9. $C_{n+4}^4C_{m+4}^4$; 10. $C_{n+9}^9$; 11. $C_n^{m,k,n-m-k}$; 12. $C_{nm}^{m,m,\ldots,m}$; 13. $C_{3n}^{n,n,n}$; 14. $\sum_{i=2}^n(-1)^i\frac{n!}{i!}$; 15. $\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{i!}$.

## Функции булевой алгебры

5.1. 1. (01001111); 2. (0000100010101110); 3. $f_1$ : (0101101001011010)ж
$f_2$ : (001100011000110); 4. (0101011111110010); 5. (0000011100011111).

5.2. 1. (11); 2. (10); 3. (00); 4. (1101); 5. (0010); 6. (1110); 7. (00110001); 8. (110010100);
9. (10010101).

5.3. 1. (00); 2. (1011); 3. (01000100); 4. (0110).

5.4. 1. 5, (01111101); 2. 7, (1011); 3. 5, (11); 4. 7, (11010111); 5. 3, (0100); 6. 9, (0111).

5.5. Указание: Задать функции $f$ и $g$ набором значений и сравнить наборы.

5.6. Указание: Задать функцию в левой и правой части равенства набором значений и сравнить наборы.

5.7. 1. все переменные фиктивные, $f = 0$;
2. $x_3$ – существенная, $x_1, x_2$ – фиктивные, $f = (1, 0)$;
3. $x_2, x_3$ – существенные, $x_1$ – фиктивная, $f = (1001)$;
4. $x_1, x_2$ – существенные, $x_3$ – фиктивная, $f = (0110)$;
5. $x_2, x_4$ – существенные, $x_1, x_3$ – фиктивные, $f = (0111)$;
6. $x_2, x_3, x_4$ – существенные, $x_1$ – фиктивная, $f = (10110101)$;
7. $x_2, x_3$ – существенные, $x_2, x_4$ – фиктивные, $f = (1001)$;
8. $x_2, x_3, x_4$ – существенные, $x_1$ – фиктивная, $f = (01011000)$;
9. $x_2, x_4$ – существенные, $x_1, x_3$ – фиктивные, $f = (0110)$.

5.8. &, (0010), (0100), $\oplus$, $\vee$, $\downarrow$, $\sim$, (1011), $\mapsto$, $|$.

5.9. 1. $\neg y$; 2. 1; 3. $y$; 4. 0; 5.$y \downarrow z$; 6. $y \vee \overline{z}$.

5.10. 1. $y$ – фиктивная $f = x$; 2. фиктивных нет; 3.$y$ – фиктивная $f = \overline{x}$; 4. фиктивных нет;
5 $y$ – фиктивная $f = \overline{x}$; 6. все фиктивные $f = 1$; 7. все фиктивные $f = 0$;
8. все фиктивные $f = 1$; 9. все фиктивные $f = 0$.

5.11. 1. равны; 2. равны; 3. равны; 4. не равны; 5. не равны; 6. не равны.

5.12. $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j 2^{2^{n-j}}$.

5.13. 1. $f^* = (0100)$; 2. $f^* = (1001010)$; 3. $\neg x$; 4. $x \vee y$; 5. $x \leftrightarrow y$; 6. $\overline{x}y$; 7. $x \downarrow y$; 8. $x \vee yz$.

5.14. 1. $f^{*^*}(x) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(\overline{\overline{x_1}}, \ldots, \overline{\overline{x_n}})}} = f(x)$;
2. $f^*(x) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})} = \overline{g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})} = g^*(x)$;
3. повторяет п.2.

5.15. 1. $x \leftrightarrow y \vee z$; 2. $\overline{(x \vee z)y}$ 3. $\overline{x}(y \vee z)$; 4. $xy\overline{z}$; 5. $(x \vee y)(y \vee z)(z \vee x)$; 6. $x \downarrow y \downarrow (z \vee x)$;
7. $0 \sim x \sim y \sim (x \vee z)$; 8. $(x \vee \overline{y})(y \vee \overline{z})(z \vee \overline{x})$;

5.16. 1. (1011); 2. (0101); 3. (1001); 4. (1101); 5. (1100); 6. (01); 7. (11); 8. (11).

5.17. Сделать подстановку $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$;

5.18. 1., 3., 5. Сделать подстановку $x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k$; 2., 4., 6. Следует из предыдущего при $k = n$.

5.19. 1. $f(x, y, z) = x\overline{y}z \vee xyz$; 2. $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xyz$;
3. $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\overline{z}$; 4. $f(x, y, z) = xy\overline{z}$;
5. $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z}$; 6. $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee xyz$.

5.20. Число членов в СДНФ равно числу наборов, на которых функция равна 1. Обозначим через $\nu(f)$ количество наборов, на которых функция $f$ равна 1.
1. Из равенств $\nu(f \vee g) = \nu(f) + \nu(g) - \nu(fg)$ и $\nu(f \oplus g) = (\nu(f) - \nu(fg)) + (\nu(g) - \nu(fg))$ выводм $\nu(f \oplus g) = \nu(f \vee g) - 2\nu(fg))$;
2. Из равенств $\nu(f \mapsto g) = \nu(\overline{f}) + \nu(g) - \nu(\overline{f}g))$, $\nu(\overline{f}) = 2^n - \nu(f)$ и $\nu(f \oplus g) = \nu(\overline{f}g) + \nu(f\overline{g})$ выводим $\nu(f \oplus g) = 2^{n+1} - \nu(f \mapsto g) - \nu(g \mapsto f)$;
3. $\nu(f \oplus g) = 2^n - \nu((f \oplus g)^*)$.

5.21. 1. $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)$; 2. $f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$; 3. $f(x, y, z) = (x \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; 4. $f(x, y, z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z$; 5. $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; 6. $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee \overline{yz})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)$.

5.22. Число членов в СКНФ равно числу наборов, на которых функция равна 0. Обозначим через $\mu(f)$ количество наборов, на которых функция $f$ равна 0. Функция $f \mapsto g \mapsto h$ равна 0, если $h = 0$ и не выполнено одно из равенств $f = 1$, $g = 0$. Число наборов, когда $h = 0$, $f = 1$, $g = 0$ равно $\mu(h \vee g) - \mu(h \vee g \vee f)$. Следовательно, $\mu(f \mapsto g \mapsto h) = \mu(h) - \mu(h \vee g) + \mu(h \vee g \vee f)$.

5.23. 1. $C_{2^n}^m$; 2. $2^n - m$.

5.24. Применении формулу $f(x_1, \ldots, x_n) = \oplus_{a \in \{0,1\}^n,\ f(a)=1} \&_{i=1}^n (x_i \oplus \overline{a_i})$, раскрыв скобки и приведя подобные, получим полином Жегалкина. Покажем единственность представления функции полиноммом Жегалкина. Пусть для функции $f$ имеется два представления $f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{J \subseteq \{0,1\}^n} \alpha_J(\&_{j \in J} x_j) = \bigoplus_{J \subseteq \{0,1\}^n} \beta_J(\&_{j \in J} x_j)$. Выберем наименьшее по включению множество $I \subseteq \{0,1\}^n$, при котором $\alpha_I \neq \beta_I$, и подставим вместо переменных характеристический вектор $I$. Заметим, что $\&_{j \in J} x_j$ принимает значение 1 на $X(I)$ тогда и только тогда, когда $J \subseteq I$. Следовательно, $f(X(I)) = \bigoplus_{J \subseteq I} \alpha_J = \bigoplus_{J \subseteq I} \beta_J$, и в силу минимальности $I$ имеем $\alpha_J = \beta_J$, при $J \subset I$. Но тогда $\alpha_I = \beta_I$, что противоречит выбору $I$, следовательно, представление единственно.

5.25. $f_0 = 1 \oplus 1$, $f_1 = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$, $f_2 = x \oplus xy$, $f_3 = 1 \oplus y$, $f_4 = y \oplus xy$, $f_5 = 1 \oplus x$, $f_6 = x \oplus y$, $f_7 = 1 \oplus xy$, $f_8 = xy$, $f_9 = 1 \oplus xy$, $f_{10} = x$, $f_{11} = 1 \oplus y \oplus xy$, $f_{12} = y$, $f_{13} = 1 \oplus x \oplus xy$, $f_{14} = x \oplus y \oplus xy$, $f_{15} = 1$.

5.26. 1. $f(x, y, z) = 1 \oplus x \oplus y \oplus xz \oplus yz$; 2. $f(x, y, z) = z$; 3. $f(x, y, z) = 1 \oplus z \oplus yz \oplus xyz$; 4. $f(x, y, z) = y \oplus xy$; 5. $f(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus yz$; 6. $f(x, y, z) = 1 \oplus z \oplus yz$.

## Замкнутые классы

6.1. 1. $x$, $y$, $\overline{x}$, $\overline{y}$; 2.0, 1, $x$, $y$, $\overline{x}$, $\overline{y}$; 3. $x$, $y\, x \& y$; 4. 0, $x \oplus y$; 5. 0, $x$, $y$, $x \oplus y$, $x \& y$, $x \oplus xy$, $y \oplus xy$; 6. 1, $x$, $y$, $x \mapsto y$, $y \mapsto x$, $x \vee y$; 7. 0, 1, $x$, $y$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $x \oplus y$, $1 \oplus x \oplus y$; 8. $x$, $y\, x \& y, x \vee y$.

6.2. 1. $\overline{x} = x \mapsto 0$; 2. $x \oplus y = (x \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow))$; 3. $x = (x \oplus x) \oplus x$; 4. $x = x\overline{x\overline{x}}$; 5. $0 = xx \oplus x$; 6. $x \vee y = (x|y)|(x|y)$.

6.3. 1.$x \vee y = \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$; 2. $x \& y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$; 3. $\overline{x} = 0 \leftrightarrow x$; 4. $\overline{x} = x|x$, $x \& y = \overline{x|y}$; 5. $\overline{x} = x \downarrow x$, $x \vee y = \overline{x \downarrow y}$; 6. $\overline{x} = x \mapsto 0$, $x \vee y = \overline{x} \mapsto y$.

6.4. Ответ определен не однозначно.
1. $\{0, \neg x\}$; 2.$\{1, x \oplus y\}$; 3. $\{x \oplus y\}$; 4. $\{xy, x \vee y\}$; 5. $\{x \vee y, x \mapsto y\}$; 6. $\{xy, x\overline{y}\}$.

6.5. 1. замкнут; 2. не замкнут; 3. замкнут; 4. замкнут; 5. замкнут; 6. замкнут; 7. не замкнут; 8. замкнут; 9. не замкнут; 10. замкнут.

6.6. 1. да; 2. нет; 3. нет; 4. нет; 5. нет; 6. да.

6.7. 1. принадлежит $T_0$, при нечетных $n$ принадлежит $T_1$;
2. принадлежит $T_0$, при четных $n$ принадлежит $T_1$;
3. не принадлежит $T_0$, принадлежит $T_1$;
4. принадлежит $T_0$, при нечетном числе $\frac{n(n-1)}{2}$ принадлежит $T_1$;
5. принадлежит $T_0$, при нечетном числе $\frac{n(n-1)}{2}$ принадлежит $T_1$;
6. при четном числе $\frac{n(n-1)}{2}$ принадлежит $T_0$, а при нечетном числе $\frac{n(n-1)}{2}$ принадлежит $T_1$.

6.8. 1. Любая функция представима в виде пролинома Жегалкина. Функция из $T_0$ представляется в виде полинома Жегалкина со свободным членом равным 0. Тем самым установлено включение $T_0 \subseteq [\{\&, \oplus\}]$. Поскольку $\&, \oplus \in T_0$, то $T_0 = [\{\&, \oplus\}]$. Из равенства $x\&y = x \vee y \oplus x \oplus y$ и включения $\vee \in T_0$ выводим $\{\vee, \oplus\} = {}_0$;
2. Из равенства $T_0 = [\{\&, \oplus\}]$ и принципа двойственности выводим $T_1 = [\{\vee, \leftrightarrow\}]$;
3. Так как $T_0 = [\{\vee, \oplus\}]$, то из принципа двойственности выводим $T_1 = [\{\&, \leftrightarrow\}]$;
4. $xy \oplus z \in T_0$ и $0 = xx \oplus x$, $xy = xy \oplus 0$, $x \oplus y = xx \oplus y$;
5. $xy, x \oplus y \oplus z \in T_0 \cap T_1$. Представим функцию из $T_0 \cap T_1$ в виде полинома Жегалкина. Свободный член равен 0 и количество слагаемых нечетно. Группируя 3 сллагаемых в одно уменьшаем количество слагаемых в сумме на 2. Следовательно $[\{y, x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \cap T_1$;
6. $xy = xy \oplus x \oplus x$, $x \oplus y \oplus z = xx \oplus y \oplus z$;
7. см.п.1 и $x \oplus y = (y\overline{x}) \vee (x\overline{y})$.
8. см. п.5.

6.9. $x, y, \overline{x}, \overline{y}$.

6.10. 1. да; 2. да; 3. нет; 4. нет.

6.11. 1. $f = (01001101)$; 2. $f = (01010101)$; 3. $f = (00110011)$; 4. $f = (0110001100111001)$.

6.12. 1. $0, \overline{x}y, x\overline{y}, x \oplus y, xy, y, x, x \vee y$; 2. $1, x \mapsto y, y \mapsto x, x \leftrightarrow y$; 3. $x, y$; 4. $0, x\overline{y}, \overline{x}y, x \downarrow y, x \oplus y, x|y$; 5. $\overline{x}, \overline{y}$.

6.13. 1. $0 = x \oplus x$, $1 = \overline{x} \oplus x$; 2. $1 = (x \mapsto \overline{x}) \mapsto \overline{x}$, $0 = \overline{1}$; 3. $0 = x(\overline{x} \vee \overline{x})$, $1 = \overline{0}$; 4. $1 = \overline{x}\overline{x} \vee x$, $0 = \overline{1}$; 5. $0 = x \oplus xx$, $1 = \overline{0}$; 6. $0 = xx \oplus xx$, $1 = \overline{0}$; 7. $0 = (\overline{x}|x) \downarrow x$, $1 = \overline{0}$; 8. $0 = x \leftrightarrow (x \leftrightarrow x)$, $1 = \overline{0}$; 9. $0 = xxx \oplus xx \oplus xx \oplus xx$, $1 = \overline{0}$; 10. $1 = f(x, x, x)$, $0 = f(x, x, \overline{x})$; 11. $0 = f(x, x, x)$, $1 = \overline{0}$;
12. $1 = f(x, x, x)$, $0 = f(x, \overline{x}, x)$.

6.14. Поскольку задания аналогичные ответ только для п.1 (0000), (0100), (0010) – предшествуют, (0110), (1110), (0111), (1111).

6.15. 0, $x\&y$, $x$, $y$, $x \vee y$, 1.

6.16. 1. монотонна; 2. не монотонна $f(100) = 1 > f(101) = 0$;
3. не монотонна $f(000) = 1 > f(110) = 0$; 4. не монотонна $f(100) = 1 > f(111) = 0$;
5. монотонна; 6. монотонна; 7. не монотонна $f(100) = 1 > f(110) = 0$; 8. монотонна;
9. не монотонна $f(110) = 1 > f(111) = 0$; 10. монотонна.

6.17. 1. $\overline{x} = f(1,0,x)$; 2. $\overline{x} = x \oplus 1$; 3. $\overline{x} = f(1,x,0) = 1\&\overline{x} \vee 0$; 4. $\overline{x} = f(1,1,x) = 1 \oplus x$; 5. $\overline{x} = f(1,1,x) = 1|x$; 6. $\overline{x} = f(x,1,0)$.

6.18. Пусть $(x_1,\dots,x_n) \leq (y_1,\dots,y_n)$, тогда $(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}) \geq (\overline{y_1},\dots,\overline{y_n})$. В силу монотонности $f$ выполнено неравенство $f(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}) \geq f(\overline{y_1},\dots,\overline{y_n})$, а, значит, $f^*(x_1,\dots,x_n) = \overline{f(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})} \leq \overline{f(\overline{y_1},\dots,\overline{y_n})} = f^*(y_1,\dots,y_n)$.

6.19. Если $f(b) = 1$, то найдется $a \leq b$ и $a \in 1_f$. Значение $K_a(b)$ равно 1, тогда и только тогда, когда $a \leq b$. Следовательно, значение функции $\bigvee_{a\in 1_f} K_a(x_1,\dots,x_n)$ на наборе $b$ равно 1. Если $f(b) = 0$, то для любого $a \in 1_f$, либо наборы $a$ и $b$ не сравнимы, либо $b$ меньше $a$. В любом случае, значение $K_a(b)$ равно 0. Следовательно, значение функции $\bigvee_{a\in 1_f} K_a(x_1,\dots,x_n)$ на наборе $b$ равно 0.

6.20. Если $f(b) = 0$, то найдется $a \geq b$ и $a \in 0_f$. Значение $D_a(b)$ равно 0, тогда и только тогда, когда $a \geq b$. Следовательно, значение функции $\&_{a\in 0_f} D_a(x_1,\dots,x_n)$ на наборе $b$ равно 0. Если $f(b) = 1$, то для любого $a \in 0_f$, либо наборы $a$ и $b$ не сравнимы, либо $b$ больше $a$. В любом случае, значение $D_a(b)$ равно 1. Следовательно, значение функции $\&_{a\in 0_f} D_a(x_1,\dots,x_n)$ на наборе $b$ равно 1.

6.21. 1. 0; 2. 2 это константы 0 и 1.

6.22. 1. Набор $a \in \{0,1\}^n$ называется нижней единицей монотонной функции $f$, если $f(a) = 1$, и для любого набора $b$ меньшего $a$ выполнено $f(b) = 0$. Множество нижних единиц обозначим $1_f$. Для $a \in 1_f$ определим конъюнкцию $K_a(x_1,\dots,x_n) = \&_{j=1}^n (a_j \mapsto x_j)$ (заметим $0 \mapsto y = 1$ и $1 \mapsto y = y$). Справедливо равенство $f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{a\in 1_f} K_a(x_1,\dots,x_n)$.
2. следует из п.1; 3. следует из п.1.

6.23. 1. линейная; 2. нелинейная; 3. нелинейная; 4. нелинейная; 5. линейная; 6. нелинейная.

6.24. 0, 1, $x$, $y$, $1 \oplus x$, $1 \oplus y$, $x \oplus y$, $1 \oplus x \oplus y$.

6.25. 1. $x\&y = \overline{f(\overline{x},y)}$; 2. $x\&y = f(0,x,y)$; 3. $x\&y = \overline{\overline{x} \mapsto y}$; 4. $x\&y = \overline{x|y}$; 5. $x\&y = f(\overline{x},\overline{y},1)$; 6. $x\&y = f(0,x,\overline{y})$.

6.26. 1. Любая функция представляется в виде полинома Жегалкина единственным образом. Дя функции из $L$ – полином 1 степени. Расставив скобки, получим выражение функции через указанные функции.
2. Линейная самодвойственная функция может существенно зависить только от нечетного числа переменных. Группируя три переменных, мы уменьшаем их число на 2.

6.27. 1. Поскольку $\mid\ \notin T_0$, подставляем везде $x$, выводим $\overline{x} = x|x$. Поскольку $\mid\ \notin L$, то $x\&y = \overline{x|y}$;
2. Поскольку $\mapsto \notin M$ и $0 \mapsto 0 = 1$, $1 \mapsto 0 = 0$, то $x \mapsto 0 = \overline{x}$. Поскольку $\mapsto \notin L$, то $x\&y = \overline{x \mapsto \overline{y}}$;
3. Поскольку $f(x, y, z) = xy \mapsto \overline{z} \notin T_0$, подставляем везде $x$, выводим $\overline{x} = f(x, x, x)$. Поскольку $f \notin S$ и $f(100) = f(011) = 1$, то $f(\overline{x}, x, x) = 1$ и $0 = \overline{1}$. Поскольку $f \notin L$, то $x\&y = \overline{f(x, y, 1)}$;
4. Поскольку $\mapsto \notin T_0$, подставляем везде $x$, выводим $1 = x \mapsto x$. Поскольку $f(x, y) = xy \oplus xz \notin T_1$, подставляем везде $x$, выводим $0 = f(x, x)$. Поскольку $\mapsto \notin M$ и $0 \mapsto 0 = 1$, $1 \mapsto 0 = 0$, то $x \mapsto 0 = \overline{x}$. Поскольку $\mapsto \notin L$, то $x\&y = \overline{x \mapsto \overline{y}}$;
5. Поскольку $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z \notin M$ и $f(001) = 1$, $f(101) = 0$, то $f(x, 0, 1) = \overline{x}$;
6. Поскольку $f(x, y, z) = 1 \oplus x \oplus y \oplus xz \notin T_0$, подставляем везде $x$, выводим $\overline{x} = f(x, x, x)$. Поскольку $f \notin S$ и $f(001) = f(110) = 1$, то $f(x, x, \overline{x}) = 1$ и $0 = \overline{1}$. Поскольку $f \notin L$, то $x\&y = f(x, 1, \overline{y})$.

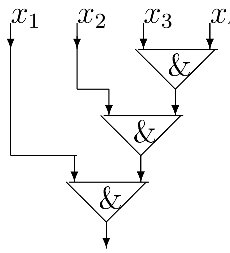
6.28. 1. Включение $[\&, \oplus] \subseteq T_0$ очевидно. Обратное включение получим если разложим функцию из $T_0$ в полином Жегалкина;
2. Поскольку $T_0^* = T_1$, $\&^* = \vee$ и $\oplus^* = \leftrightarrow$, то $T_1 = T_0^* = [\&^*, \oplus^*] = [\vee, \leftrightarrow]$;
3. Включение $[\oplus] \subseteq T_0 \cap L$ очевидно. Обратное включение получим если разложим функцию из $T_0 \cap L$ в полином Жегалкина;
4. Включение $[\&, \vee] \subseteq M$ очевидно. Обратное включение получим если разложим функцию из $M$ по нижним единицам.

6.29. 1. $|T_0| = 2^{2^n-1}$; 2. $|T_1| = 2^{2^n-1}$; 3. $|L| = 2^{n+1}$; 4. $|S| = 2^{2^{n-1}}$; 5. $|T_0 \cap T_1| = 2^{2^n-2}$; 6. $|T_0 \cup T_1| = 3 \cdot 2^{2^n-2}$; 7. $|T_0 \cap S| = 2^{2^{n-1}-1}$; 8. $|T_0 \cup S| = 2^{2^n-1} + 2^{2^{n-1}-1}$; 9. $|T_0 \cap L| = 2^n$; 10. $|T_0 \cap T_1 \cap S| = 2^{2^{n-1}-1}$; 11. $|T_0 \cup T_1 \cup S| = 3 \cdot 2^{2^n-2} + 2^{2^{n-1}-1}$; 12. $|T_0 \cap L \cap S| = 2^{n-1}$; 13. $|M \cap L| = n$; 14. $|T_0 \cap T_1 \cap L| = 2^{n-1}$; 15. $|L - (T_0 \cap T_1)| = 3 \cdot 2^{n-1}$.

## Основы теории управляющих систем

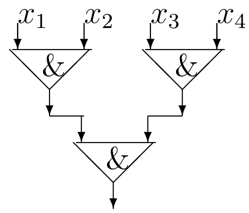
7.1. 1. $f = \overline{x\&y}\&x \vee \overline{x\&y}\&y$; 2. $f_1 = xy$, $f_2 = x\overline{y}$, $f_3 = \overline{xy}$, $f_4 = \overline{x}y$; 3. $h_1 = \overline{x}$, $h_2 = \overline{x}y \vee x\overline{y}$, $h_3 = \overline{xy}z \vee xz\overline{x}$.

7.2. 1.



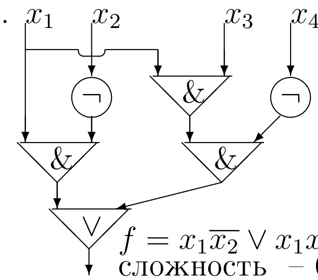

$f = x_1x_2x_3x_4$,
сложность – 3,
глубина – 3

2.



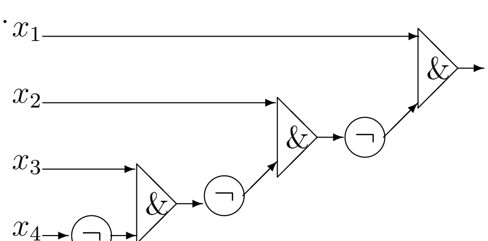

$f = x_1x_2x_3x_4$,
сложность – 3,
глубина – 2

3.



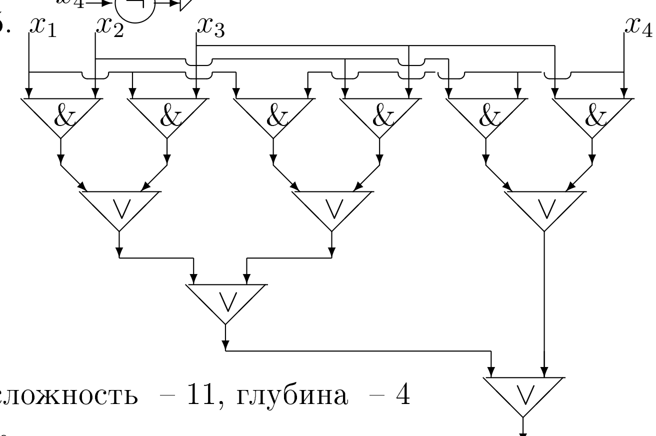

$f = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3\overline{x_4}$,
сложность – 6, глубина – 3

4.




$f = x_1\overline{x_2\overline{x_3\overline{x}_4}}$,
сложность – 6, глубина – 6

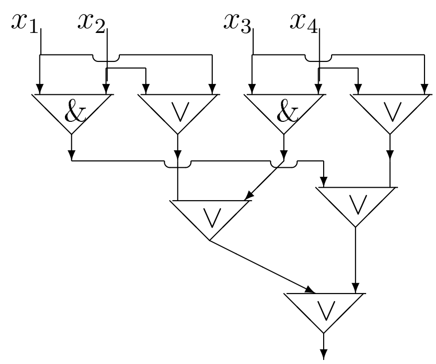
5.




сложность – 11, глубина – 4

$f = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$,

6.




сложность – 7, глубина – 3

$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4)(x_1x_2 \vee x_3 \vee x_4)$,

7.3. 1. $f(x,y,z) = \overline{xyz} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z$, сложность – 11, глубина –4;
2. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\overline{x}_4$, сложность – 17, глубина –5.

7.4. 1. $f(x,y) = x \vee \overline{y}$, сложность –2, глубина – 2;
2. $f(x,y,z) = (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$, сложность - -8, глубина – 4;
3. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$, сложность - -15, глубина –5.

7.5. 1. $f(x, y) = 1 \oplus y \oplus xy$, сложность - -3, глубина – 2;
2. $f(x, y, z) = xy \oplus xyz$, сложность - -3, глубина – 2;
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3$, сложность - -14, глубина – 5;

7.6. 1. В СФЭ $S$ каждую дизъюнкцию заменим схемой, составленной по формулам $x \vee y = \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$, и обозначим полученную схему $S_1$. Так как сложность схемы дизъюнкции равна 4, а ее глубина – 3, то $L_C(S_1) \leq 4L_B(S)$ и $d_C(S_1) \leq 3d_B(S)$;
2. В СФЭ $S$ каждое отрицание и дизъюнкцию заменим соответствующей схемой, составленной по формулам $\overline{x} = 1 \oplus x$ и $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$, и обозначим полученную схему $S_1$. Сложность отрицания –2, глубина отрицания –2, сложность дизъюнкции 3, глубина дизъюнкции –2. Следовательно, $L_C(S_1) \leq 4L_B(S)$ и $d_C(S_1) \leq 3d_B(S)$;
3. Выразим каждую функцию системы $B$ через функции системы $C$ и составим соответствующие схемы. Обозначим максимальную сложность из полученных схем через $\gamma$, а максимальную глубину из полученных схем — через $\beta$. Построим из схемы $S$ схему $S_1$, заменив каждый функциональный элемент из $B$ на его схему в системе $C$. Очевидно, выполнены неравенства $L_C(S_1) \leq \gamma L_B(S)$ и $d_C(S_1) \leq \beta d_B(S)$;
4. Пусть сложность функции $f$ в базисе $B$ достигается на схеие $S$. Тогда найдется схема $S_1$, реализующая $f$ в базисе $C$, что$L_C(S_1) \leq \gamma_1 L_B(S) = L_B(f)$, где $\gamma_1$ – константа, зависящая лишь от базисов $B$ и $C$. Поскольку $L_C(f) \leq L_C(S_1)$, то $L_C(f) \leq \gamma_1 L_B(f)$. Поменяв в рассуждедниях $B$ и $C$ местами, получим неравенство $L_B(f) \leq \gamma_2 L_C(f)$. Тем самым утверждение о сложности функции в разных базисах доказано. Утверждение о глубине функции в разных базисах доказывается аналогично.

7.7. Пусть $S$ – схема, реализующая $f$ сложности $L(f)$. В схеме $S$ найдется элемент, входами которого являются только входы схемы (не выходы других элементов). Обозначим через $y$ выход этого элемента. Удалим этот элемент из схемы $S$, оставив его выход в качестве входа. Полученная схема реализует функцию $g$ с входами $x_1, \ldots, x_n, y$. Очевидно, функция $g$ существенно зависит по крайней мере от $n-1$ переменной и ее сложность $L(f) - 1$. Из неравенства $L(g) \geq n - 2$ выводим $L(f) \geq n - 1$.
Пусть $S$ – схема, реализующая $f$ глубины $d(f)$. Возможно три варианта: $f = \overline{g}$, или $f = g_1 \& g_2$, или $f = g_1 \vee g_2$. В первом варианте функция $g$ существенно зависит от $n$ переменных и $d(f) = d(g)+1$. Во втором и треьем варианте $d(f) = 1+\max\{d(g_1), d(g_2)\}$. Пусть число существенных переменных $g_1$ и $g_2$ равно $n_1$ и $n_2$, соответственно. Очевидно, $n_1 + n_2 \geq n$, и, следовательно, $d(f) \geq 1 + \max\{\lceil \log_2 n_1 \rceil, \lceil \log_2 n_2 \rceil\} \geq \lceil \log_2 n \rceil$.

7.8. 1. Попарно группировкой $f_n = (x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{n-1}x_n)$ сводим задачу с $n$ переменными к аналогичной задаче с $\frac{n}{2}$ переменными. В результате построим СФЭ сложности

$n-1$ и глубиной $\lceil \log_2 n \rceil$. Рассуждения предыдущей задачи показывают, что полученные верхние оценки сложности и глубины $f_n$ не улучшаемы.
2. При расстановке скобок $(\dots(x_1x_2)x_3)\dots)x_n$ получим сложность $n-1$ и глубину $n-1$.
3. Пусть мы умеем строить СФЭ $S_m$ от $m < n$ входов, реализующую набор функций $F_m = \{x_1, x_1x_2, \dots, x_1\cdots x_m\}$, и имеющую глубину $d_m$. Схема $S$, реализующая набор функций $F_n$ получается, если выход $S_m$, соответствующий функции $x_1\cdots x_m$, умножить (конъюнкция) на каждый выход СФЭ $S_{n-m}$, входами которой служат переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, а выходами функции $x_{m+1}, \dots, x_{m+1}\cdots x_n$. Глубина $S$ равна $1+\max\{d_m, d_{n-m}\}$, а при четном $n$ и $m = \frac{n}{2}$ получим $d(S) = 1 + d_m$. Заметим, $n$ можно считать равным степени 2, иначе добавим нужное количество входов. Применив полученные рекурсивные формулы $\log_2 n$ раз выводим $d(S_n) = \lceil \log_2 n \rceil$.
4. Схема, реализующая $F_n$, и имеющая сложность $n-1$ — единственна. Поскольку ее высота $n-1$, то утвердение доказано.

7.9. 1. Опишем процесс построения СФЭ, реализующую $F_n$. В начале, схема не содержит функциональных элементов, и все ее входы являются выходами. Каждый выход схемы реализует некоторую функцию ( в начале эти функции совпадают с переменными). Если найдется пара выходов, конъюнкция которых даст функцию, еще не реализованную схемой, то добавим к схеме конъюнкцию этих входов, а выход конъюнкции добавим к выходам схемы. Процесс остановится, когда все функции $F_n$ будут реализованы схемой. Поскольку добавление конъюнкции к схеме приводит к увеличению числа реализованных функций на 1, то сложность построенной схемы равна $2^n - n - 1$. Очевидно, схема с меньшим количеством элементов реализовать все функции из $F_n$ не может. Следовательно, $L_B(F_n) = 2^n - n - 1$.
2. Любая конъюнкция от $n$ переменных либо не зависит от $x_{m+1}, \dots, x_n$, либо не зависит от $x_1, \dots, x_m$, либо представляется в виде произведения двух конъюнкций, первая и которых не зависит от $x_{m+1}, \dots, x_n$, а вторая – от $x_1, \dots, x_m$. Таким образом, конъюнкция от $n$ переменных, либо реализуется $S_m$, либо реализуется $S_{n-m}$, либо представляется в виде произведения соответствующих выходов $S_m$ и $S_{n-m}$. Число выходов $S_m$ и $S_{n-m}$ равно, соответственно, $2^n - 1$ и $2^{n-m} - 1$. Количество конъюнкций, которые потребуются для умножения каждого выхода $S_m$ на каждый выход $S_{n-m}$ равно $(2^m - 1)(2^{n-m} - 1)$. Следовательно, общая сложность схемы равна $2^n - 2^m - 2^{n-m} + 1 + L_B(S_m) + L_B(S_{n-m})$, а глубина схемы равна $1 + \max\{d_B(S_m), d_B(S_{n-m})$;
3. Рассмотрим случай, когда $n$ является степенью 2. Воспользуемся рекурсивным способом построения СФЭ, предложенным в предыдущем пункте, положив $m = 0,5n$. Сложность построенной схемы не превосходит $2^n + 2n - 1$, а глубина равна

$\log_2 n$. Пусть $n$ не является степенью 2. Увеличим $n$ до ближайшей степени двойки, допустим на $k$. Построим СФЭ, реализующую $F_{n+k}$, и удалим из нее все конъюнкции, завиящие от $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$. Количество удаленных конъюнкций не меньше $2^n(2^k-1)-k-1$, поэтому сложность схемы не больше $2^{n+k}+2(n+k)-1-2^n(2^k-1)+k+1 = 2^n+2n+3k \le 2^n+5n$. Глубина схемы не превосходит $\log_2(n+k) = \lceil \log_2 n \rceil$.

7.10. 1. На каждый из входов $x_1, x_2$ навесить отрицание, а затем организовать попарные произведения $x_1.x_2, \overline{x_1}, \overline{x_2}$. Сложность схемы 6, глубина 2. 2. Выходом схемы будут все функции вида $\&_{i=1}^n x_i^{\delta_i}$, следовательно, реализует дещифратор. Сложность схемы – $2^n + L(D_m) + L(D_{n-m})$, а глубина – $1 + \max\{d(D_m), d(D_{n-m})\}$;

3. Воспользуемся рекурсивным способом построения СФЭ, предложенным в предыдущем пункте, положив $m = \lceil 0,5n \rceil$. Сложность построенной схемы не превосходит $2^n + 3 \cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}$, а глубина равна $1 + \lceil \log_2 n \rceil$.

4. Справедлива формула $z = \bigvee_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} (\&_{j=1}^n x_j^{a_j}) y_{a_1+2a_1+\cdots+2^{n-1}a_n}$. Все конъюнкции вида $\&_{j=1}^n x_j^{a_j}$ реализуем дешифратором (сложность $2^n + 3\cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}$, глубина $1 + \lceil \log_2 n \rceil$), затем найдем произведения $(\&_{j=1}^n x_j^{a_j}) y_{a_1+2a_1+\cdots+2^{n-1}a_n}$ (еще $2^n$ конъюнкций и плюс 1 к глубине), и реализуем дизъюнкцию $2^n$ членов (плюс $2^n-1$ к сложности и $n$ к глубине). В результате построена схема мультиплексора сложности не больше $3\cdot 2^n + 3\cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}$ и глубиной $n + 2\lceil \log_2 n \rceil + 2$.

7.11. 1. Найдем СДНФ функции $f$,которая содержит $k$ конъюкций. Построим СФЭ, реализующую $f$. В начале найдем отрицание всех входов (сожность $n$, глубина 1), затем все конъюнкции, входящие в СДНФ (сложность $k(n-1)$, глубина $\lceil \log_2 n \rceil$), затем вычислим дизъюнкцию всех конъюнкций (сложность $k-1$, глубина $\lceil \log_2 k \rceil$). Построенная СФЭ имеет сложность $n + k(n-1) + k - 1 = kn + n - 1$ и глубину $1 + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 k \rceil$. Другой способ построения СФЭ, реализующую $f$. Построим дешифратор ( сложность $2^n + 3\cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}$, глубина $1 + \lceil \log_2 n \rceil$), а затем найдем дизъюнкцию всех произведений, входящих в СДНФ (сложность $k-1$, глубина $\lceil \log_2 k \rceil$). Реультирующя сложность $2^n + 3\cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil} + k$;

2.Рассуждения аналогичны предыдущим, только строим СКНФ.

3. Для любой функции количесво едениц $k$ и количество нулей $m$ в сумме равно $2^n$. Поэтому, либо $k \le 2^{n-1}$, либо $m \le 2^{n-1}$. Следовательно, $L(f) \le 3\cdot 2^{n-1} + 3\cdot 2^{\lceil 0,5n \rceil}$ и $d(f) \le n + \lceil \log_2 n \rceil$.

4. Построим СФЭ, реализующую все произведения (сложность $2^n + 5n$, глубина $\lceil \log_2 n \rceil$). Те произведения, которые входят в полином Жегалкина, сложим по модулю 2. Поскольку число слагаемых не превосходит $2^n$, то сложность схемы сложения не выше $2^n - 1$ и глубина не больше $n$. Следовательно, сложность функции $f$ не больше $2\cdot 2^n + 5n$, а глубина не превосходит $n + \lceil \log_2 n \rceil$.

7.12. 1. Входы $x$ и $y$, далее перечисляем функции, в порядке их получения: $f_1 = \overline{x}$, $f_2 = \overline{y}$, $f_3 = x\&y$, $f_4 = x \vee y$, $f_5 = f_1\&y$, $f_6 = f_1 \vee y$, $f_7 = x\&f_2$, $f_8 = x \vee f_2$, $f_9 = f_1\&f_2$, $f_{10} = f_1 \vee f_2$, $f_{11} = x\&f_1$, $f_{12} = x \vee f_1$, $f_{13} = f_5 \vee f_7$, $f_{14} = f_3 \vee f_9$;

2. Опишем процесс построения СФЭ, реализующую $U_n$. В начале, схема не содержит функциональных элементов, и все ее входы являются выходами. Каждый выход схемы реализует некоторую функцию ( в начале эти функции совпадают с переменными). Если найдется выход, отрицание которого даст функцию, еще не реализованную схемой, то добавим к схеме отрицание этого входа, а выход отрицания добавим к выходам схемы. Если не найдется выхода, отрицание которого добавит новую функцию, то попытаемся добавит конъюнкцию или дизъюнкцию. Процесс остановится, когда все функции будут реализованы схемой. Поскольку добавление элемента к схеме приводит к увеличению числа реализованных функций на 1, то сложность построенной схемы равна $2^{2^n} - n$. Очевидно, схема с меньшим количеством элементов реализовать все функции не может. Следовательно, $L(U_n) = 2^{2^n} - n$;

3. В предыдущих рассуждениях использовалась только полнота базиса, поэтому $L_B(U_n) = 2^{2^n} - n$;

4. Если в п.2 присоединять элементы к выходам наименьшей глубины, то получим требуемую схему;

5. Построим дешифратор с входами $x_1, \ldots, x_{n-k}$ ( сложность $2^{n-k} + 3 \cdot 2^{\lceil 0{,}5(n-k)n \rceil}$, глубина $1 + \lceil \log_2(n-k) \rceil$) и универсальны многополюсник $U_k$ от входов $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ (сложность $2^{2^k} - k$, глубина не выше $k + \lceil \log_2 k \rceil$). Перемножим соответствующие выходы дешифратора и универсального многополюсника (сложность $2^{n-k}$, глубина 1) и реализуем дизъюнкцию (сложность $2^{n-k} - 1$, глубина $n-k$). В результате построим схему, реализующую $f$, сложность и глубина которой не превосходят, соответственно, $3 \cdot 2^{n-k} + 2^{2^k} + 3 \cdot 2^{\lceil 0{,}5(n-k)n \rceil}$ и $n - k + 2 + \max\{1 + \lceil \log_2(n-k) \rceil, k + \lceil \log_2 k \rceil\}$. При $k = \log_2(n - \log_2 n)$ получаем наименьшую оценку сложности $3\frac{2^n}{n - \log_2 n} + \frac{2^n}{n} + 3\sqrt{\frac{2^n}{n - \log_2 n}} = O(\frac{2^n}{n})$, а при $k(2^{k-1} + 1 = n$ глубина не больше $n + \frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n} + 2$.

7.13. 1. Заметим, $j$ разряд меняется тогда и только тогда, когда все предыдущие разряды равны 1. То есть, если $\&_{i=1}^{j-1} x_i = 1$, то $x_j$ инвертируется, а в противном случае, $x_j$ не меняется. Следовательно, $y_j = x_j \cdot \overline{\&_{i=1}^{j-1} x_i} \vee \overline{x_j} \cdot \&_{i=1}^{j-1} x_i$.

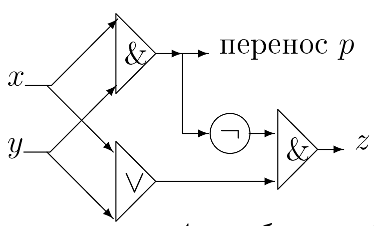
2. Набор функций $x_1, x_1x_2, \ldots, x_1 \cdots x_{n-1}$ реализуем СФЭ, сложность которой $n-2$. Для вычисления $y_1 = \overline{x_1}$ потребуется 1 элемент, и для вычислений $y_j$, где $j = 2, \ldots, n$ понадобится 5 элементов. В итоге, сложность схемы равна $n - 2 + 1 + 5(n-1) = 6n - 6$;

3. Набор функций $x_1, x_1x_2, \ldots, x_1 \cdots x_{n-1}$ реализуем СФЭ, глубина которой $\lceil \log_2(n-1) \rceil$. Достроим данную схему до схемы инкремента. Для вычислений $y_j$, где $j = 2, \ldots, n$ понадобится схема глубиной 3. В итоге, глубина схемы – $\lceil \log_2(n-1) \rceil + 3$.

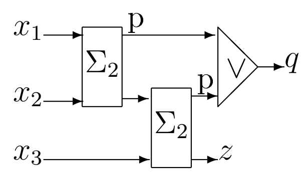
7.14. 1. Заметим, $j$ разряд меняется тогда и только тогда, когда все предыдущие разряды равны 0. То есть, если $\vee_{i=1}^{j-1} x_i = 0$, то $x_j$ инвертируется, а в противном случае, $x_j$ не меняется. Следовательно, $y_j = x_j \cdot (\vee_{i=1}^{j-1} x_i) \vee \overline{x_j} \cdot \overline{(\vee_{i=1}^{j-1} x_i)}$.
2. Набор функций $x_1, x_1 \vee x_2, \ldots, x_1 \vee \cdots \vee x_n$ реализуем СФЭ, сложность которой $n-1$. Для вычисления $y_1 = \overline{x}_1$ потребуется 1 элемент, и для вычислений $y_j$, где $j = 2, \ldots, n$ понадобится 3 элемента. В итоге, сложность схемы равна $n-1+1+3(n-1) = 4n-3$.
3. Набор функций $x_1, x_1 \vee x_2, \ldots, x_1 \vee \cdots \vee x_n$ реализуем СФЭ, глубина которой $\lceil \log_2 n \rceil$. Достроим данную схему до схемы декремента. Для вычисления вычислений $y_j$, где $j = 2, \ldots, n$, понадобится схема глубиной 2. В итоге, глубина СФЭ декремента $\lceil \log_2 n \rceil + 2$.

7.15. 1. Поскольку $(1, \ldots, 1)_2 = 2^n - 1$ и $1 - x_j = \overline{x}_j$, то $2^n - (x_n, \ldots, x_1)_2 = (\overline{x}_n, \ldots, \overline{x}_1)_2 + 1$.
2. Смена знака числа сводится к инвертированию всех разрядов (сложность $n$, глубина 1) и прибавлению 1. В зависимости от выбора схемы, реализующей инкремент, построим СФЭ смены знака, либо сложностью не более $n + 6n - 6 = 7n - 6$,
3. либо глубиной не более $4 + \lceil \log_2(n-1) \rceil$.

7.16. . 1. Схема сумматора два входа $\Sigma_2$ 2. Схема сумматора три входа $\Sigma_3$

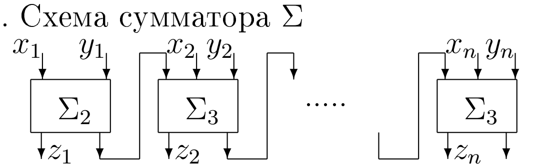



сложность – 4, глубина – 3
$p = xy$, $z = \overline{xy} \& (x \vee y)$



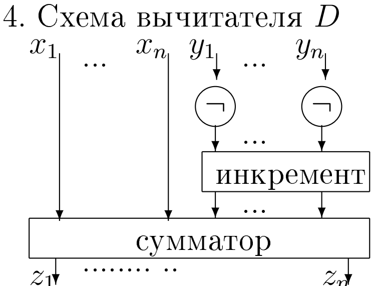

сложность – 9, глубина – 6
$q = x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2) x_3$,
$z = x_1 x_2 x_3 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \overline{q}$

3. Схема сумматора $\Sigma$




сложность – $9n - 4$, глубина – $6n - 3$

4. Схема вычитателя $D$




сложность – $16n - 10$, глубина – $7n - 1$

7.17. 1. Заметим, что $(\tilde{x}_n^{n-k})_2$ – часть числа $(\tilde{x}_n)_2$, расоложенная в старших $n-k$ разрядах. Следовательно, число $(\tilde{x}_n)_2$ больше числа $(\tilde{y}_n)_2$ тогда и только тогда, когда $(\tilde{x}_n^{n-k})_2 > (\tilde{y}_n^{n-k})_2$, или $(\tilde{x}_n^{n-k})_2 = (\tilde{y}_n^{n-k})_2$ и $(\tilde{x}_n^k)_2 > (\tilde{y}_n^k)_2$. Таким образом,

$q_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 1$ в том и только том случае, когда $q_{n-k}(\tilde{x}_n^{n-k}, \tilde{y}_n^{n-k}) = 1$, или $\tilde{x}_n^{n-k} = \tilde{y}_n^{n-k}$ и $q_k(\tilde{x}_n^k, \tilde{y}_n^k) = 1$. Поскольку равенство $\tilde{x}_n^{n-k} = \tilde{y}_n^{n-k}$ равносильно выполнению конъюнкции $\&_{i=k}^n(x_i \leftrightarrow y_i)$, то суммируя все сказанное ранее, получаем равенство $q_n(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = q_{n-k}(\tilde{x}_n^{n-k}, \tilde{y}_n^{n-k}) \vee (\&_{i=k}^n(x_i \leftrightarrow y_i))\, q_k(\tilde{x}_n^k, \tilde{y}_n^k)$.
2. Как не трудно убедиться $u_i^0 = x_i \leftrightarrow y_i$. Индукцией по $k$ легко доказывается равенство $u_{2^k i}^k = \&_{j=2^k(i-1)+1}^{2^k i}(x_i \leftrightarrow y_i)$. Далее, $z_i^0$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $x_i > y_i$, т.е. $z_i^0 = q_1(x_i, y_i)$. Индукцией по $k$ легко доказать, что $z_{2^k i}^k = q_{2^k}(x_{2^k(i-1)+1}, \ldots, x_{2^k i}, y_{2^k(i-1)+1}, \ldots, y_{2^k i})$. При $i = 1$ получаем требуемое равенство.
3. Схема, вычисляющая $u_i^0$, имеет сложность 4 и глубину 3, для каждого $i = 2, \ldots, n$. Схема, вычисляющая $z_i^0$, имеет сложность и глубину 2, для произвольного $i = 1, \ldots, n$. Общая сложность реализации этих функций $4(n-1)+2n = 6n-4$. Для реализации $u_{2^k i}^k$, где $2 \leq i \leq n2^{-k}$, потребуется $n2^{-k}-1$ элемент ($k > 0$). Всего получится $\sum_{k=1}^{\log_2 n}(n2^{-k} - 1) \leq n - \log_2 n$. Для реализации $z_{2^k i}^k$, где $1 \leq i \leq n2^{-k}$, потребуется $2n2^{-k}$ элемент ($k > 0$). Всего получится $\sum_{k=1}^{\log_2 n} n2^{1-k}) \leq 2n$. Общая сложность схемы получится $6n-4+n-\log_2 n+2n \leq 9n$. Глубина схемы, вычисляющей $u_{2^k i}^k$ рана $3+k$. Поскольку $3 + k \leq 2 + 2k$, при $k \geq 1$, то глубина $z_{2^k i}^k$ легко вычисляется и равна $2 + 2k$. Общая глубна схемы равна $2 + 2\log_2 n$.

7.18. 1. Перенос в $j+1$ разряд возникает, если сумма $(x_j \cdots x_1)_2 + (y_j \cdots y_1)_2$ строго больше максимального числа $(1\ldots1)_2 = 2^j - 1$, которое можно записать в $j$ разрядах.
2. Неравенство $(x_j \cdots x_1)_2 + (y_j \cdots y_1)_2 > 2^j - 1$ равносильно $(x_j \cdots x_1)_2 > 2^j - 1 - (y_j \cdots y_1)_2 = (\overline{y_j} \cdots \overline{y_1})_2$.
3. Не трудно убедиться, что $u_i^0 = x_i \leftrightarrow \overline{y_i}$. Индукцией по $k$ ($1 \leq k \leq \log_2 n$), легко доказывается равенство $u_j^k = \&_{j=2^k(i-1)+1}^{j}(x_i \leftrightarrow \overline{y_i})$, где $2^k(i-1) < j \leq 2^k i$. Далее, $p_i^0$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $x_i > \overline{y_i}$. Обозначим через $q_j$ функцию сравнения двух $j$ разрядных чисел, принимающую значение 1, если первое число больше второго. Тогда $p_i^0 = q_1(x_i, \overline{y_i})$. Индукцией по $k$ не трудно доказать, что $p_j^k = q_{j-2^k}(x_{2^k(i-1)+1}, \ldots, x_j, \overline{y}_{2^k(i-1)+1}, \ldots, \overline{y}_j)$, где $2^k(i-1) < j \leq 2^k i$, $1 \leq i \leq n2^{-k}$. При $i = 1$ получаем требуемое равенство.
4. Для вычисления $u_j^0$, где $2 \leq j \leq n$, потребуется схема глубины 3 и сложности $5(n-1)$. При вычислении $u_j^k$, где $2^k < j \leq n$, достаточно $0,5n - 2^{k-1}$ конъюнкций, причем глубина схемы увеличится на 1. Следовательно, глубина $u_j^k$ равна $3+k$, а сложность схемы, реализующей все $u_j^k$, где $k < \log_2 n$, не превосходит $5(n-1) + 0,5n\log_2 n - 0,5n + 1 = 0,5n\log_2 n + 4,5n - 4$. Для вычисления $p_i^0$ потребуется схема глубины 1 и сложноси $n$. При вычислении $p_j^k$ достаточно схемы сложности $n$, причем общая гулбина увеличится не более чем на 2. Следовательно, глубина $p_j^k$ не более $3 + 2k$, а

сложность всей схемы, реализующей все $u_j^k$ и $p_j^k$ не превосходит $1,5n\log_2 n+5,5n-4$. При реализации $z_j = (x_j \oplus y_j) \oplus p_{j-1}$, где $2 \leq j \leq n$, можно учесть, что $u_j^0 = x_j \oplus y_j$), и, значит, достаточно схемы из $5(n-1)$ элементов. Таким образом, для данной схемы сумматора сложность – не выше $1,5n\log_2 n + 10,5n$, а глубина – $8 + 2\log_2 n$.

7.19. Указание: Вычислить все произведения $x_i y_j$, а затем группировать по три разряда одного веса. При сложение обрзуется два разряда, перенос переходит в старший разряд. Количество слагаемых уменьшется в геометрической прогрессии с знаменателем 1,5.

# 9. Литература


[1] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

[2] Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Сборник задач по дискретной математике. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012 – 80 с. *http://www.lib.unn.ru/students/src/alekseev.pdf*

[3] Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

[4] Яковлев И.В. Комбинаторика для олимпиадников. – М.: МЦНМО, 2016. – 80с.

[5] Виленкин Н.Я. Комбинаторика – М.: Наука, 1969. – 328с.

Александр Юрьевич **Чирков**
Сергей Владимирович **Сидоров**
Дмитрий Борисович **Мокеев**
Евгений Маратович **Макаров**

# Задачи по дискретной математике (I семестр)

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.