

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Гурбатов С.Н.
Демин И.Ю.
Прончатов-Рубцов Н.В.

**Нелинейные случайные волны:
акустическая и гравитационная турбулентность
(часть 2)**

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым Советом радиофизического факультета для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» (направленности 01.04.06 «Акустика», 01.04.03 «Радиофизика») и магистрантов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.04.03 «Радиофизика», 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

УДК 534.22

ББК 22.32

Н 49

Н 49 Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В. НЕЛИНЕЙНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ: АКУСТИЧЕСКАЯ И ГРАВИТАЦИОННАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ (ЧАСТЬ 2): Учебное пособие. Нижний Новгород, 2021. – 130 с.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., заведующий кафедрой распространения радиоволн и радиоастрономии Гавриленко В.Г.,

д.т.н., проректор по программам развития НГТУ Бабанов Н.Ю.

В настоящем учебном пособии рассмотрены вопросы статистического описания эволюции нелинейных волн и структур в средах без дисперсии. Отражены ключевые вопросы статистического анализа нелинейных случайных волн в приложении к задачам нелинейной акустики (эволюция интенсивных акустических шумов) и космологии (описание крупномасштабной структуры Вселенной).

Материал настоящего пособия призван сформировать основы нелинейной волновой культуры, необходимой для решения научных и прикладных задач радиофизики и акустики и может быть использован для чтения лекций как по основным курсам, так и по специальным курсам лекций, читаемых для бакалавров, магистров и аспирантов на радиофизическом факультете ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Учебное пособие предназначено для аспирантов радиофизического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского, обучающихся по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» (направленности 01.04.06 «Акустика», 01.04.03 «Радиофизика») и магистрантов радиофизического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского, обучающихся по направлениям подготовки 03.04.03 «Радиофизика», 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Ответственный за выпуск:

председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ

д.т.н., доцент Калинин А.В.

УДК 534.22

ББК 22.32

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	4
1.	Акустическая турбулентность	7
1.1.	Введение: акустическая и гидродинамическая турбулентность	7
1.2.	Эволюции турбулентности на стадии развитых разрывов и феноменология турбулентности Бюргерса	9
2.	Многомерные нелинейные уравнения	32
2.1.	Нелинейные уравнения первого порядка	32
2.2.	Многомерные нелинейные уравнения второго порядка	36
2.3.	О статистических свойствах потенциальной турбулентности - векторной турбулентности Бюргерса	38
3.	Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания	43
3.1.	Гравитационная неустойчивость в расширяющейся Вселенной	44
3.2.	От уравнения Власова-Пуассона к приближению Зельдовича и модели слипания (adhesion model)	49
4.	Об эволюции интенсивных акустических шумов	62
4.1.	Статистическая нелинейная акустика	63
4.2.	Об асимптотическом поведении интенсивных акустических шумов.	68
4.2.1.	Основные уравнения	68
4.2.2.	Эволюция плоских волн.	71
Прил1.	Статистическое описание случайных полей	96
1.	Основные статистические характеристики случайных полей	96
2.	Связь статистических характеристик случайных функций с поведением их реализаций	103
3.	Лагранжева и эйлерова статистики случайных полей	113
	Список литературы	128

ВВЕДЕНИЕ

Теория нелинейных полей и волн – это обширная, находящаяся в непрерывном развитии, область математической физики. Она имеет многообразные физические приложения, от анализа нелинейных явлений в акустике, электродинамике и плазме, до исследования нелинейных процессов роста поверхностей и нелинейной гравитационной неустойчивости крупномасштабного (в масштабе скоплений Галактик) распределения вещества во Вселенной. В учебном пособии [1] достаточно детально изложены свойства решений таких эталонных нелинейных уравнений волн в средах без дисперсии, как уравнения Римана, Бюргерса, Кардара-Паризи-Цванга. Данное пособие посвящено изложению некоторых результатов по статистическому описанию эволюции нелинейных волн и структур в средах без дисперсии. Естественно, что краткое учебное пособие не может отразить всего многообразия методов и приложений статистической теории нелинейных волн. Поэтому мы отразили лишь некоторые ключевые вопросы статистического описания нелинейных случайных волн в средах без дисперсии и их приложений к нелинейной акустике, и в том числе, к описанию распространения интенсивных акустических шумов.

Данное пособие подготовлено на основе монографий, обзоров и ряда оригинальных статей, авторами которых являются авторы данного пособия [2-13]. Здесь приведены также данные англоязычных версий монографий.

В первой главе приведен краткий обзор нелинейного уравнения диффузии, введенной Бюргерсом (J.M. Burgers) как модель гидродинамической турбулентности. Уравнение Бюргерса описывает два основных эффекта присущих любой турбулентности: нелинейное перераспределение энергии по спектру и вязкость в области малых пространственных масштабов. Эволюции случайных полей, описываемых нелинейным уравнением диффузии называют часто турбулентностью Бюргерса, или даже Burgulence, или же в связи с приложениями к эволюции интенсивных

акустических шумов - акустической турбулентностью. В этой главе рассмотрена эволюция турбулентности на стадии развитых разрывов и феноменология турбулентности Бюргерса.

Во второй главе рассматриваются многомерные нелинейные уравнения как первого, так и второго порядка. Приведено построение обобщенных решений нелинейных уравнений и принцип абсолютного максимума. Обсуждаются статистические свойства потенциальной турбулентности - векторной турбулентности Бюргерса.

В третьей главе обсуждается использование векторного уравнения Бюргерса, которое возникает в космологии при описании крупномасштабной структуры Вселенной, где оно известно как модель слипания (adhesion model). Эта модель служит естественным обобщением приближения Зельдовича предложенного в 1970 году. Здесь кратко излагается современный взгляд на формирование крупномасштабной структуры Вселенной. Приведен вывод модельного уравнения из базовых уравнений (уравнение непрерывности, уравнение Эйлера и уравнение Пуассона) и качественно описано формирование ячеистой структуры Вселенной в рамках модели слипания. Нелинейная стадия эволюции хаотических возмущений газа гравитационно взаимодействующих частиц может быть названо гравитационной турбулентностью.

В четвертой главе обсуждаются основные эффекты, присущие эволюции интенсивных шумовых акустических волн. Рассмотрено асимптотическое поведение интенсивных акустических шумов для плоских, цилиндрических и сферических волн.

В приложении приведены основные статистические характеристики случайных полей, обсуждаются связь статистических характеристик случайных функций с поведением их реализаций, приведены связи лагранжевой и эйлеровой статистики случайных полей.

модельного уравнения из базовых уравнений (уравнение непрерывности, уравнение Эйлера и уравнение Пуассона) и качественно описано

формирование ячеистой структуры Вселенной в рамках модели слипания.

В целом материал призван сформировать основы нелинейной волновой культуры, необходимой для решения научных и прикладных задач радиофизики и акустики и может быть использован для чтения лекций как по основным курсам, так и по специальным курсам лекций, читаемых для бакалавров, магистров и аспирантов на радиофизическом факультете ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

ГЛАВА 1

Акустическая турбулентность

Приведем краткий обзор по эволюции случайных полей в уравнении Бюргерса. Последний тип сигналов называют часто турбулентностью Бюргерса, или даже Burgulence, или же в связи с приложениями к эволюции интенсивных акустических шумов - акустической турбулентностью.

1.1. Акустическая и гидродинамическая турбулентность

Мы будем рассматривать здесь статистические свойства решений уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

в пределе исчезающе малого коэффициента диффузии ν . Это уравнение было введено Бюргерсом (J.M. Burgers) как модель гидродинамической турбулентности [14,15].

Исследованию динамических и статистических свойств решений одномерного, а в последнее время и многомерного, уравнения Бюргерса посвящено большое число работ (см., например, библиографию в монографиях и обзорах [2, 3, 5, 8,16,17]). Несмотря на то, что уравнение Бюргерса имеет точное решение – решение Хопфа–Коула анализ детерминированных и особенно случайных полей представляет собой весьма сложную математическую задачу.

Как уже отмечалось уравнение Бюргерса (1.1) описывает два основных эффекта присущих любой турбулентности [17,18]: нелинейное перераспределение энергии по спектру и вязкость в области малых пространственных масштабов. Именно поэтому кроме прямых физических приложений уравнение Бюргерса представляет большой интерес для проверки теории и различных моделей развитой турбулентности. Прежде всего отметим, что в уравнения Римана ($\nu = 0$ в уравнении (1.1)) удастся найти точные выражения как как спектров, так и вероятностных распределений случайного поля [2]. Часть этих результатов будет приведена в следующем параграфе.

Поскольку в уравнении (1.1) отсутствуют внешние силы, то эволюция случайных начального поля может рассматриваться как модель вырождения турбулентности. Здесь, например, важно знать законы затухания энергии на больших временах. Прежде чем перейти непосредственно к уравнению

Бюргерса мы обсудим кратко ситуацию с законами затухания вырождающейся трехмерной турбулентности Навье-Стокса, следуя [5, 9,18].

В работе Кармана и Ховарта [19] исследовалось затухание трехмерной однородной и изотропной гидродинамической турбулентности Бюргерса при больших числах Рейнольдса. Предполагая, что эволюция пространственной корреляционной функции носит автомодельный (самосохраняющийся) характер: ее форма неизменна; было получено, что интегральный масштаб турбулентности $L(t)$ и среднеквадратичная скорость $u(t)$ имеют степенной характер поведения. При этом из уравнения Кармана-Ховарта, связывающего корреляционную функцию и третью моментную функцию, следует что два показателя степени связаны между собой. Однако требуются дополнительные условия чтобы найти показатель степени в законе затухания турбулентности. Колмогоров понял это и предположил использовать так называемый "инвариант" Лойцанского [20] как дополнительное условие и соответственно вывел закон затухания для вырождающейся трехмерной турбулентности $u^2(t) \propto t^{-10/7}$. Однако позже Прудман и Рейд [21], Бэтчелор и Прудман [22] показали, что интеграл рассмотренный Лойцанским на самом деле не является инвариантом. В предположении, что спектр энергии турбулентности при малых волновых числах $E(k, t) \propto k^4$ интеграл Лойцанского, с точностью до численного коэффициента, есть не что иное как коэффициент перед k^4 . Для трехмерной гидродинамической турбулентности нелинейное взаимодействие пространственных гармоник приводит к генерации крупномасштабных компонент и этот вклад пропорционален k^4 при малых волновых числах k . Соответственно это и приводит к зависимости "инварианта" Лойцанского от времени. Однако, если начальный спектр $E(k) \propto /k^n$ и показатель степени $n < 4$, то коэффициент перед $/k^n$ будет инвариантом. Это называется в теории турбулентности принципом "permanence of large eddies" (PLE). Аргументы Колмогорова легко адаптируются для этого случая что приводит к следующему закону затухания трехмерной турбулентности $u^2(t) \propto t^{-2(n+1)/(n+3)}$.

То же самое рассмотрение может быть проведено и для одномерной турбулентности Бюргера. В одномерном случае вклад в спектр из-за параметрической генерации крупномасштабных компонент пропорционален k^2 . Соответственно, если начальный спектр энергии $E_0(k) \propto |k|^n$ с $-1 < n < 2$, то аргументы Колмогорова предсказывают снова $u^2(t) \propto t^{-2(n+1)/(n+3)}$. Однако строгий анализ показывает [9] что это справедливо только если $-1 < n < 1$. Подобный результат был позже получен и для трехмерной турбулентности Навье-Стокса [23].

В данной главе будет приведена классификация различных режимов эволюции турбулентности Бюргера [12]. Физические отличия различных режимов определяются конкуренцией между начальным спектром и новыми пространственными частотами, возникающими в результате нелинейной эволюции спектра. Для больших волновых чисел мы всегда имеем универсальное поведение k^{-2} , что связано с образованием разрывов. Если $n < 1$ крупномасштабная часть спектра сохраняется во времени и эволюция спектра является автомодельной. Если $n > 2$, то на больших временах эволюция спектра также автомодельна, причем форма спектра не зависит от вида начального спектра и имеет универсальное поведение k^2 в области малых волновых чисел. Если же $1 < n < 2$ то в спектре можно выделить три региона со степенным поведением: при очень малых волновых числах спектр пропорционален $|k|^n$ с коэффициентом независимым от времени, промежуточную область, где спектр пропорционален k^2 , а коэффициент растет со временем, и наконец обычную область, где спектр пропорционален k^{-2} . Если же $n < -3$, то необходимо вводить инфракрасное обрезание спектра и эволюция спектра не зависит от показателя степени n .

1.2. Эволюции турбулентности на стадии развитых разрывов и феноменология турбулентности Бюргера

Мы рассмотрим эволюцию случайного поля скорости, предполагая что спектральная плотность мощности на больших масштабах (малых волновых

числах k) имеет степенной характер $E_0(k) \sim |k|^n$. Допустим также, что данный закон имеет место в конечном интервале $k_i \leq |k| \leq k_u$, где k_i и k_u пространственные частоты обрезания на больших и малых масштабах - на инфракрасной и ультрафиолетовой части спектра соответственно. Мы предполагаем, что на обоих концах интервала спектр спадает к нулю быстрее любого степенного закона:

$$E_0(k) = a_0 |k|^n b_0(k) \quad (1.2)$$

где n показатель степени, $b_0(k) = 1$ в области волновых чисел $[k_i, k_u]$. В теории Бюргерсовской турбулентности принято вводить потенциал $\psi(x, t)$, который отличается от введенного ранее действия $s(x, t)$ только знаком. В пределе $\nu \rightarrow 0$ потенциал представим в виде

$$\psi(x, t) = \max_y \left[\psi_0(y) - \frac{(x-y)^2}{2t} \right] \quad (1.3)$$

где $\psi_0(y)$ начальный потенциал поля скорости. Соответственно для поля скорости имеем

$$v(x, t) = -\psi_x(x, t) = \frac{x-y(x,t)}{t} \quad (1.4)$$

где $y(x, t)$ координата максимума (1.3) для данных x и t .

На больших временах парабола $(x-y)^2/2t$ в (1.3) становится плавной функцией в масштабах начального потенциала $\psi_0(y)$ и координаты глобальных максимумов в (1.3) совпадают с координатами некоторых локальных максимумов $\psi_0(y)$ - нулями поля скорости с положительной производной. Следовательно, на больших временах непрерывное случайное поле трансформируется в случайную пилообразную волну - последовательность ячеек с универсальным поведением поля внутри ячейки $v(x, t) = (x - y_k)/t$, но случайным положением разрывов, разделяющих их. Слияние ячеек ведет к росту общего масштаба турбулентности $L(t)$, (средней массы макрочастицы), поэтому энергия случайного поля $E(t) \sim L^2(t)/t^2$ спадает медленнее, чем энергия периодического сигнала.

Темп слияния разрывов определяется статистическими характеристиками скоростей разрывов, которые в свою очередь зависят от начального потенциала

$\psi_0(x)$. На больших временах, после многократного слияния разрывов, свойства турбулентности определяются статистическими свойствами приращений $\psi_0(x+L) - \psi_0(x)$ при больших разнесениях L , а при гауссовой статистике начального поля асимптотическим поведением структурной функции начального потенциала. Таким образом сценарий развития турбулентности определяется поведением крупномасштабной части начального энергетического спектра $E_0(k)$ поля скорости.

Для непрерывного начального поля первое время образования разрыва определяются градиентом скорости и $t_{s,first} = -1/\text{Min } \partial_x v(t_0, x)$. Соответственно, дисперсия градиента начального поля (если она существует):

$$\sigma_q^2 = \langle (\partial_x v_0)^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} k^2 E_0(k) dk \quad (1.5)$$

определяет типичное время образования первого разрыва $t_s = 1/\sigma_q$

Определим также (если они существуют) дисперсию скорости - начальную энергию турбулентности:

$$\sigma_v^2 \equiv \langle v_0^2(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) dk \quad (1.6)$$

и дисперсию начального потенциала

$$\sigma_\psi^2 \equiv \langle \psi_0^2(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0(k)}{k^2} dk \quad (1.7)$$

Если начальный спектр отличен от нуля в конечном интервале то все три дисперсии σ_v^2 , σ_q^2 and σ_ψ^2 существуют и конечны. В частности, такая ситуация всегда реализуется в численных экспериментах, где k_l определяется размером рассматриваемой области L_{box} , а k_u обратно пропорционально шагу дискретизации.

Поскольку нас интересует эволюция поля больших временах, которая определяется низкочастотной частью спектра то положим $k_l=0$. Соответственно для потенциала $\psi_0(x)$, входящего в решение (1.3) имеем: если $n > 1$, то начальный

потенциал статистически однородная случайная функция с конечной дисперсией σ_ψ^2 , если же $n < 1$, то дисперсия σ_ψ^2 неограниченна и потенциал имеет только статистически неоднородные приращения. В первом случае можно ввести для потенциала корреляционную функцию $B_{0\psi}(x)$, Фурье образ которой равен $E_0(k)/k^2$.

В случае $n < 1$ потенциал характеризуется структурной функцией

$$S_{0\psi}(x) \equiv \langle (\psi_0(x) - \psi_0(0))^2 \rangle \quad (1.8)$$

которая статистически однородна и существует только если $n > -1$. Она связана со спектром энергии соотношением

$$S_{0\psi}(x) = 4a^2 \int_0^\infty (1 - \cos(kx)) k^{n-2} b_0(k) dk \quad (1.9)$$

Если $n > 1$, то структурная функция стремится к конечному пределу при больших приращениях координат, если же $n < 1$, то она неограниченно растет:

$$S_{0\psi}(x) \sim f(x) = \begin{cases} \sigma_\psi^2, & n > 1 \\ \alpha |x|^{1-n}, & n < 1 \end{cases}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

Из асимптотического решения уравнения Бюргерса (1.3), мы можем ввести пространственный масштаб $L(t)$, пропорциональный типичной величине $|(x - \tilde{y}(x, t))|$. Из уравнения (1.4) мы имеем, что между разрывами ($x_{\text{shock},m} < x < x_{\text{shock},m+1}$) поле скорости имеет универсальную структуру $v(x, t) = (x - a_m)/t$ и таким образом энергия турбулентности может быть оценена как $E(t) \sim L^2(t)/t^2$. Приращение потенциала в решении (1.3) может быть оценено как корень из структурной функции (1.10) и следовательно $(\psi_0(x) - \psi_0(0)) \sim \alpha x^{(1-n)/2}$ для $n < 1$ ($k_i = 0$) и $\sim \sigma_\psi$ для $n > 1$. Для больших времен балансируя двумя слагаемыми в решении (1.3) мы можем сделать оценки для пространственного масштаба $L(t)$ и энергии $E(t)$ турбулентности. При фиксированной координате x , максимум в (1.3) может прийти из точки $y(x, t)$ для которой приращения потенциала сравнимы с изменением параболического слагаемого. Это приводит к следующему уравнению

для масштаба турбулентности $L(t)$

$$\sqrt{S_{0\psi}(L)} \sim \frac{L^2}{t} \quad (1.11)$$

Таким образом, в зависимости от показателя степени n начального спектра (1.2) для больших времен мы имеем следующие оценки для пространственного масштаба $L(t)$ и энергии $E(t)$ турбулентности (смотри таблицу 1.1). Мы предполагаем также что $k_i = 0$ для $n > -3$ и что существует некоторая ультрафиолетовая пространственная частота обрезания k_u для $n > 1$. В области $n < -3$ мы всегда должны вводить $k_i > 0$ поскольку решение уравнения Бюргера существует только если мы имеем инфракрасную пространственная частота обрезания k_i .

Таблица 1.1: Разделение областей показателя степени n начального спектра согласно типичным законам роста масштаба и затухания энергии турбулентности со временем t .

n		-3		-1		1	
$L(t)$	$(\sigma_\psi)^{1/2}$		$(\alpha t)^{2/(3+n)}$		$(\alpha t)^{2/(3+n)}$		$(\sigma_\psi t)^{1/2}$
$E(t)$	σ_ψ/t		$\alpha^2 k_i^{n+1}$		$(\alpha t)^{2(n+1)/(3+n)}$		σ_ψ/t

Если турбулентность Бюргера действительно характеризуется одним масштабом, то в предположении автомодельности ее спектр может быть представлен в самоподобной (автомодельной) форме:

$$E(k, t) = \frac{L^3(t)}{t^2} \tilde{E}(kL(t)), \quad (1.12)$$

Как уже отмечалось, для начального спектра с $n > 2$ параметрическое взаимодействие пространственных гармоник приводит к универсальному поведению спектра $E(k, t) \sim k^2$ в области малых пространственных частот k , а для $n < 2$ мы имеем сохранение начального спектра $E(k, t) = E_0(k) = \alpha^2 |k|^n$ в области малых волновых чисел k что является спектральной формой принципа “permanence of large eddies” (PLE) [18]. В пространстве Фурье предположение об

автомодельности (1.12) совместно с PLE дают те же самые законы роста масштаба и затухания турбулентности которые приведены в таблице, но теперь они радуют в более узком регионе $-3 < n < 2$.

Очевидно, что эти аргументы не могут быть применены для начальных возмущений с показателем спектра $n \geq 2$, поскольку в результате параметрической подкачки энергии в область низких частот спектр имеет универсальную форму k^2 в области малых волновых чисел k коэффициентом зависящим от времени. Но сравнивая это с таблицей 1, где область применимости закона $L(t) \sim (\alpha t)^{2/(3+n)}$ находится в интервале $n < 1$ и таким образом мы имеем что регион $1 < n < 2$ требует отдельного рассмотрения. В интервале $1 < n < 2$ предположение об автомодельности уже некорректно [9]. Связано это с конкуренцией между начальным спектром $|k|^n$ (с коэффициентом, не зависящим от времени, и вновь генерируемой частью спектра которая пропорциональна k^2 и растет во времени. Если $n > 2$, то начальный спектр при малых k быстро превышает вновь появившимися компонентами, чей спектр пропорционален k^2 . В этом случае спектр на больших временах универсален, характеризуется единственным масштабом $L(t)$, и его поведение не зависит от показателя n .

Для достаточно больших волновых чисел поведение спектра всегда определяется разрывами и

$$E(k, t) \sim \frac{B(t)}{k^2} \quad \text{большие } k \quad (1.13)$$

и из (1.12) следует $B(t) \sim L(t)/t^2$. Амплитуда коротковолновой части спектра уменьшается с временем при $n > -2$ и растет с течением времени при $-3 < n < -2$. Последнее не должно вызывать удивления, поскольку в этом случая полная энергия турбулентности бесконечна.

Таким образом, общим свойством вырождающейся турбулентности Бюргерса является установление автомодельности на больших временах, и в частности автомодельное поведение спектра (1.12), можно выделить критические индексы $n_* = -3, -1, 1, 2$. Однако свойства автомодельности для n , лежащих в разных

интервалах между критическими индексами $n_* = -3, -1, 1, 2$ качественно различны.

Ниже мы кратко обсудим основные режимы эволюции турбулентности, и будем иллюстрировать картины эволюции спектра численными экспериментами работы [12]. В этой работе проводилось численное моделирование турбулентности Бюргерса и было продемонстрировано, что даже при наличии обрезających множителей в области малых или крупных масштабов эволюция спектра в ограниченной частотно-временной области по-прежнему автомодельна. Использование быстрого преобразования Лежандра позволило производить усреднение по 3000 реализациям при количестве точек в реализации до 10^6 .

1.2.1 Эволюция турбулентности - статистически однородные потенциал и скорость; ($n > 1$ и $n < -3$)

В этом разделе мы рассмотрим эволюцию турбулентности Бюргерса при ($n > 1$) когда и скорость, и потенциал являются статистически однородными функциями и начальное поле имеет Гауссову статистику. Это обозначает, что мы имеет ультрафиолетовое обрезание спектра на пространственной частоте u . Функция $b_0(k)$ таким образом характеризуется волновым числом k_u вокруг которого лежит большая часть начальной энергии и которое по порядку величины обратно пропорционально начальному интегральному масштабу L_0 . Аналогичную ситуацию мы имеем и для спектра с $n < -3$ и инфракрасным обрезанием на малых волновых числах k_i .

Мы не будем приводить здесь подробного статистического анализа, а укажем лишь основные идеи, на основе которых он проводится, и обсудим основные свойства турбулентности на автомодельной стадии.

При анализе эволюции непрерывных полей использовалось асимптотическое решение уравнение Бюргерса (1.3), (1.4). Как следует из этого решения поле $v(x, t)$ в точке x и в момент времени t определяется координатой абсолютного максимума $y(x, t)$. Таким образом статистика поля скорости определяется статистическими характеристиками координат абсолютных максимумов. На

больших временах парабола в (1.3) является плавной функцией в масштабе начального действия $\psi_0(x)$ и за право быть абсолютным максимумом в (1.3) конкурирует большое количество локальных максимумов $\psi_0(x)$. Это позволило использовать для анализа турбулентности Бюргерса на больших временах [2],[9] статистическую теорию больших выбросов [24].

Для одномерной турбулентности Бюргерса (а также и трехмерного обобщения [2]) при этом удается дать практически исчерпывающее статистическое описание, для нее найдены одноточечные и двухточечные вероятностные распределения поля скорости [2], N -точечные вероятностные распределения [25], а значит соответственно и многоточечные моментные функции. При этом все свойства турбулентности на больших временах определяются только двумя интегральными характеристиками начального спектра - дисперсиями начальной скорости - σ_v^2 и начального потенциала - σ_ψ^2 .

В пределе исчезающей вязкости, когда время t стремится к бесконечности, статистические характеристики турбулентности Бюргерса становятся автомодельными и, в частности, спектр энергии имеем вид (1.12).

Интегральный масштаб турбулентности $L(t)$ и ее энергия определяются $E(t)$ следующими выражениями

$$L(t) \simeq (t\sigma_\psi)^{1/2} \ln^{-1/4}\left(\frac{t}{2\pi t_{nel}}\right), \quad (1.14)$$

$$E(t) \simeq t^{-1}\sigma_\psi \ln^{-1/2}\left(\frac{t}{2\pi t_{nel}}\right), \quad (1.15)$$

где

$$t_{nel} \equiv \frac{L_0^2}{\sigma_\psi} = \frac{L_0}{\sigma_v}, \quad L_0 \equiv \frac{\sigma_\psi}{\sigma_v} \quad (1.16)$$

нелинейное время и начальный интегральный масштаб турбулентности. Используя эти определения, мы можем в первом приближении записать законы изменения масштаба турбулентности и ее энергии как

$$L(t) \simeq L_0(t/t_{nel})^{1/2}, \quad E(t) \simeq E_0(t/t_{nel})^{-1} \quad (1.17)$$

Одноточечное распределение поля скорости является при этом Гауссовым с

дисперсией $\sigma_v^2(t) = E(t)$ (1.17). Безразмерная корреляционная функция $\tilde{B}_v(\tilde{x})$, зависящая от безразмерной координаты $\tilde{x} = x/L(t)$, определяется выражением

$$\tilde{B}_v(\tilde{x}) = \frac{d}{d\tilde{x}} (\tilde{x}P(\tilde{x})) \quad (1.18)$$

где для $x \geq 0$

$$P(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{g\left(\frac{\tilde{x}+z}{2}\right) \exp\left[\frac{(\tilde{x}+z)^2}{8}\right] + g\left(\frac{\tilde{x}-z}{2}\right) \exp\left[\frac{(\tilde{x}-z)^2}{8}\right]} \quad (1.19)$$

$$g(z) \equiv \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (1.20)$$

Наш выбор нормализации $E(t) = L^2(t)/t^2$ предполагает, что для безразмерного спектра мы имеем $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(k) dk = 1$. Функция $P(\tilde{x})$ является также вероятностью отсутствия разрывов в интервале длины $\tilde{x}L(t)$ [2].

Отметим еще раз, что в данном случае свойства автомодельной турбулентности универсальны, и определяются двумя интегральными характеристиками начального спектра: σ_ψ и σ_v .

Безразмерный спектр

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}_v(\tilde{x}) \exp(ik\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}P(\tilde{x}) \exp(ik\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (1.21)$$

имеет следующие асимптотики:

$$\tilde{E}(\tilde{k}) \simeq \begin{cases} 0.36\tilde{k}^{-2}, & \tilde{k} \gg 1 \\ 1.08\tilde{k}^2, & \tilde{k} \ll 1 \end{cases}, \quad \tilde{k} \equiv kL(t) \quad (1.22)$$

Область k^{-2} отражает появление разрывов, в то время как область спектра k^2 возникает из-за параметрической подкачки энергии в область низких пространственных частот k . В размерных переменных эволюция низкочастотной части спектра имеет вид

$$E(k, t) \simeq \frac{L^5(t)}{t^2} k^2 \simeq A(t) k^2, \quad kL(t) \ll 1 \quad (1.23)$$

где

$$A(t) = \sigma_v^2 L_0^3 \left(\frac{t}{t_{nel}}\right)^{1/2} \ln^{-5/4}\left(\frac{t}{2\pi t_{nel}}\right) \quad (1.24)$$

Таким образом мы имеем универсальный степенной закон k^2 при малых волновых числах коэффициент перед ним $A(t)$, возрастающий с течением времени.

А. Точная автомодельность ($n > 2$)

Ситуация становится более сложной при больших, но конечных временах [9]. Если $n > 2$, то вновь появившаяся компонента k^2 (1.23) доминирует над начальным спектром $|k|^n$ и мы имеем автомодельное поведение спектра во всем интервале волновых чисел, но время установления автомодельности time t_{ss} , зависит от n . В общем случае, условия $t/t_{nel} \gg 1$ не достаточно, чтобы точки абсолютных максимумов в (1.3) образовывали Пуассоновскую последовательность и, следовательно, возник автомодельный режим эволюции турбулентности. Введем масштаб корреляции начального потенциала Δ_{corr} , который может быть много больше начального интегрального масштаба L_0 (1.16). Автомодельный режим эволюции возникает, когда интегральный масштаб турбулентности $L(t)$ (1.14) становится много больше начального масштаба корреляции Δ_{corr} . Это приводит к следующему выражению для времени установления автомодельного режима t_{ss} [9]

$$t_{ss} \sim t_{nel} \left(\frac{\Delta_{corr}}{L_0} \right)^2 \quad (1.25)$$

Типичным примером, когда $(\Delta_{corr}/L_0)^2 \gg 1$ являются квазимонохроматические сигналы. Рассмотрим начальный спектр $E_0(k)$ (1.2) с $n \gg 1$ и функцией $b_0(k)$ быстро спадающей при $k > k_u$. этом случае поле скорости представляет собой квазимонохроматический сигнал с центральным волновым числом $k_u \sim L_0^{-1}$ и шириной спектра $\Delta k \sim [\Delta_{corr}]^{-1} \ll k_u$.

На начальной стадии эволюции $t_{nel} < t < t_{nel}(\Delta_{corr}/L_0)$ мы имеем подавление амплитудной модуляции и сдвиги разрывов возникающей пилообразной волны много меньше чем период квазимонохроматического сигнала. Энергия такого сигнала примерно такая же как энергия периодической волны: $E(t) \simeq L^2/12t^2$ [37]. Тем не менее из-за конечной ширины начального спектра мы имеем генерацию низкочастотных компонент $v_l(x, t)$ с энергией $E_l(t) \sim E_0(L_0/\Delta_{corr})^2 < E_0$, спектр которых лежит много ниже несущей

частоты k_u . При $(\Delta_{corr}/L_0) < t < t_{nel}(\Delta_{corr}/L_0)^2$ энергия низкочастотных компонент становится больше энергии высокочастотной квазипериодической волны, но из-за большого пространственного масштаба мы имеем относительно слабое искажение низкочастотного сигнала. И наконец только при $t \gg t_{ss} \sim t_{nel}(\Delta_{corr}/L_0)^2$ мы имеем автомодельный режим эволюции турбулентности. Физически это связано с тем, что начальной стадии разрывы квазипериодической пилообразной волны сильно коррелированы, что препятствует их слиянию. Отметим, что похожую ситуация мы имеем и для спектра с $n < -3$ и частотой обрезания k_i на малых волновых числах.

Приведем результаты численных экспериментов из работы [12], которые иллюстрируют установление автомодельных режимов эволюции спектра. Использование быстрого преобразования Лежандра позволило моделировать процесс эволюции с большим количеством точек $N = 2^{20}$ и проводить усреднение спектра по 3000 реализаций.

В работе использовалось гладкое обрезание спектра на высоких частотах

$$E_0(k) = \alpha_n^2 |k|^n e^{-\frac{k^2}{2k_0^2}} \quad (1.26)$$

с $k_u = k_0 = N/16$. Во всех экспериментах использовались периодические начальные условия и таким образом инфракрасная частота обрезания спектра определялась размером области моделирования и $k_i = 2\pi$. Для проверки гипотезы автомодельности рассматривалась эволюция спектра $E(k, t)$, энергии $E(t) = \langle v^2(x, t) \rangle$ и интегрального масштаба $L_{exp}(t)$ который измерялся из экспериментальных данных как

$$L_{exp}^2(t) = \langle \psi^2(x, t) / v^2(x, t) \rangle \quad (1.27)$$

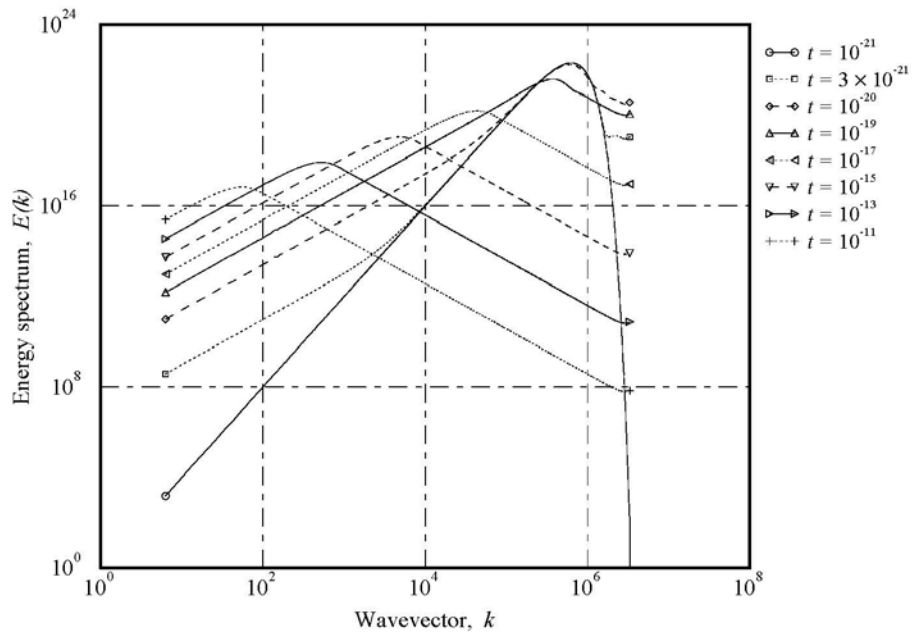


Рис. 1.1: Эволюция спектра с начальным спектром пропорциональным k^4 при малых волновых числах k . Метки соответствуют временам $t_1/t_{nel}=0.033$, $t_2/t_{nel}=0.098$, $t_3/t_{nel} = 0.33$ и затем $t_i/t_{nel} = 3.3 \cdot 10^{2*(i-4)}$, ($i=4, 5 \dots 8$).

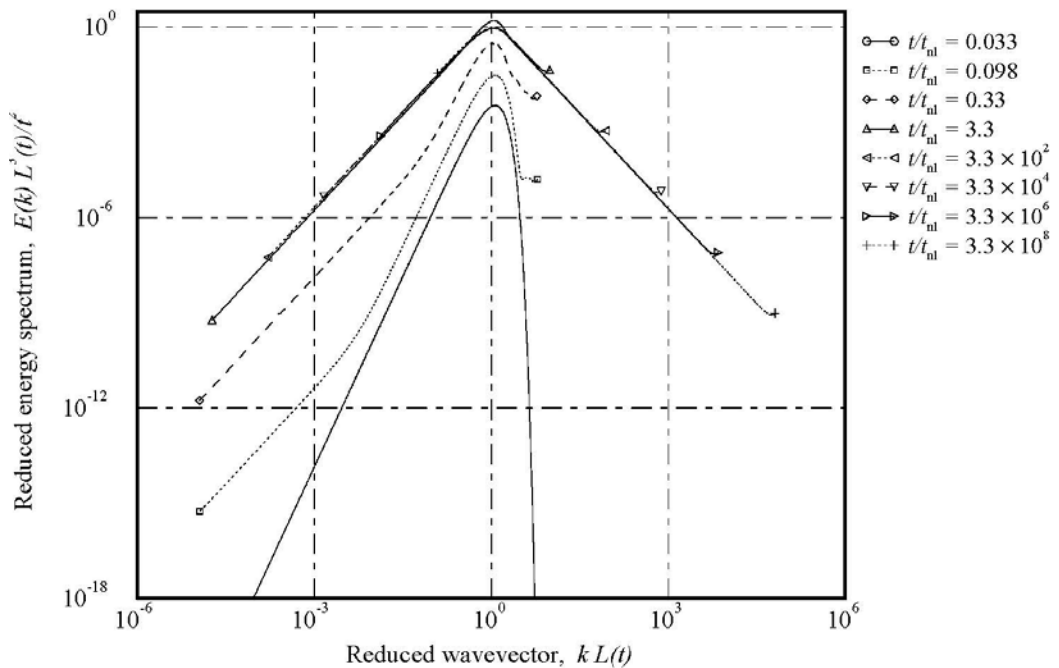


Рис. 1.2: Эволюция нормированного спектра $E(k, t)L^3 \exp(t)/t^2$ ($n=4$) в те же самые времена как функция безразмерного волнового числа $kL \exp(t)$.

На рисунке 1.1 изображена эволюция спектра в моменты времени от $t/t_{nel} = 0.033$ to $t/t_{nel} = 3.3 \cdot 10^8$. Начальный спектр имел степенное поведение k^4 при

малых волновых числах k . Рисунок 1.2 отображает эволюцию нормированного спектра $E(k, t)L^3(t)/t^2$ в те же самые времена как функцию безразмерного волнового числа $kL(t)$. Мы видим генерацию новых компонент $A(t)k^2$ с возрастающей амплитудой $A(t)$ при малых k и k^{-2} при больших волновых числах. Точка переключения $k_S(t)$ между $A(t)k^2$ и $\alpha^2|k|^n$ областями спектра смещается к максимуму спектра и на больших временах часть спектра с α^2k^4 исчезает.

Из этих графиков отчетливо видно установление автомодельного режима эволюции и универсальных степенных законов k^2 и k^{-2} при $t/t_{ne} \geq 10$. На рисунке 1.2 мы использовали безразмерное волновое число $kL_{exp}(t)$.

Для сравнения экспериментальных данных с теоретическим выражением для спектра $\tilde{E}(\tilde{k})$ (1.21), примем во внимание следующие соотношения между $L_{exp}(t)$ и $L(t)$ (1.12)

$$L_{exp}^2(t) = L^2(t) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{E}(\tilde{k})}{\tilde{k}^2} d\tilde{k}}{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k}} = L^2(t) \int_0^{\infty} \tilde{x} P(\tilde{x}) d\tilde{x} \approx 1.65 L^2(t) \quad (1.28)$$

Для безразмерного спектра $\tilde{E}(\kappa)$ из экспериментальных данных имеем что при малых волновых числах $\tilde{E}(\kappa) \approx 1.10\kappa^2$, и $\kappa E(\kappa) \approx 0.37/\kappa^2$, что на 2 процента больше чем это следует из теории (1.22) Это незначительное расхождение связано с конечным размером области моделирования.

Б. Нарушение автомодельности ($1 < n < 2$).

В этом случае мы имеем нарушение автомодельного режима эволюции турбулентности [9]. При очень малых волновых числах $|k| < k_S(t)$ начальный спектр турбулентности сохраняется

$$E(k, t) \approx \alpha^2 |k|^n, \text{ for } k \rightarrow 0. \quad (1.29)$$

Это поведение спектра сохраняется только в области волновых чисел, где (1.29) доминирует над (1.23). Волновое число переключения двух режимов $k_S(t)$, получается из условия равенства (1.23) и (1.29), и определяется выражением

$$k_S(t) \simeq \left(\frac{\alpha^2 t^2}{L^5(t)} \right)^{\frac{1}{2-n}} \simeq L_0^{-1} \left(\frac{t}{t_{nel}} \right)^{-\frac{1}{2(2-n)}} \ln^{\frac{5}{4(2-n)}} \left(\frac{t}{2\pi t_{nel}} \right) \quad (1.30)$$

Большая часть энергии турбулентности сосредоточена вокруг интегральное волновое число как $k_L(t) = L^{-1}(t)$. С точность до логарифмического множителя из (5.54) имеем $k_L(t) \sim (t\sigma_\psi)^{-1/2}$. Соответственно:

$$\frac{k_S}{k_L} \sim \left(\frac{t}{t_{nel}} \right)^{-\frac{n-1}{2(2-n)}} \quad (1.31)$$

Таким образом волновое число переключения двух степенных законов стремится к нулю гораздо быстрее чем интегральное волновое число, так что с течением времени. Отношении энергии в регионе $0 < k < k_S(t)$ к общей энергии турбулентности уменьшается как $(t/t_{nel})^{-3(n-1)/(n-2)}$ (с точностью до логарифмического множителя) и становится пренебрежимо малым если $t \gg t_{nel}$, за исключением случая если n очень близко к единице. Таким образом, на конечных временах при $1 < n < 2$ нет глобальной автомодельной эволюции спектра.

Из рисунка 1.3 снова видна генерация универсальной низкочастотной асимптотики спектра of $A(t)k^2$ с растущей амплитудой $A(t)$ и появление универсального спектра k^{-2} при больших волновых числах. Точка переключения $k_S(t)$ между регионами $A(t)k^2$ и α^2/k^n быстро стремится к нулю и при больших временах регион α^2/k^n практически исчезает. То что степенной участок спектра α^2/k^n практически не влияет на поведение интегрального масштаба турбулентности $L(t)$ (5.54) и ее энергии $E(t)$ даже при $1 < n < 2$, когда мы имеем нарушение автомодельности, иллюстрируется результатами численного эксперимента рис. 1.4 и 1.5, где изображена эволюция w $L_{exp}(t)$ и $E(t)$ для разных $n = 1.5, 2, 3, 4$ и теоретические кривые.

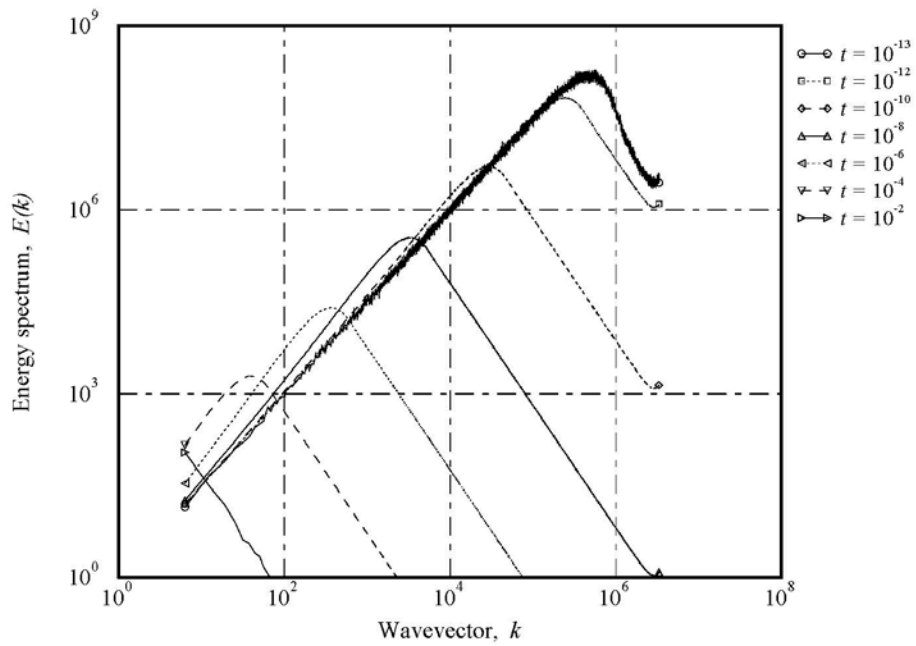


Рис. 1.3: Эволюция спектра энергии с начальным спектром пропорциональным $|k|^n$ ($n = 1.5$) при малых волновых числах k . Кривые соответствуют временам $t_1/t_{nel} = 0.18$, и затем $t_i/t_{nel} = 1.8 \cdot 10^{2*(i-2)}$, ($i = 2, 3 \dots 8$).

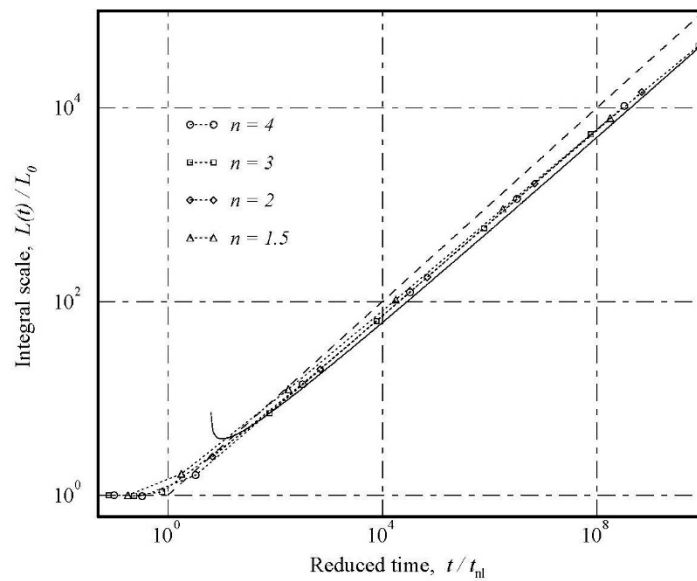


Рис. 1.4: Эволюция интегрального масштаба, полученная в результате численного эксперимента $L_{exp}(t)$ для $n = 1.5, 2, 3, 4$ (точечные кривые), теоретическая кривая $\tilde{L}_{exp} = 1.28L(t)$ (1.14), (1.28) (сплошная кривая) и теоретическая кривая без логарифмической коррекции (пунктирная линия).

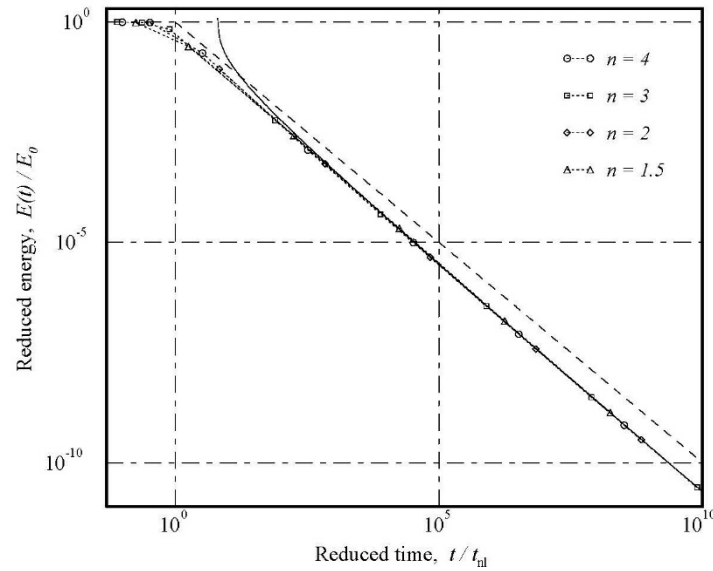


Рис. 1.5: Эволюция энергии полученная в результате численного эксперимента $E(t)$ для $n = 1.5, 2, 3, 4$ (точечные кривые), теоретическая кривая $E(t) = L^2(t)/t^2$ (1.14) (сплошная кривая) и теоретическая кривая без логарифмической коррекции (пунктирная линия).

Отметим, что во всех приведенных экспериментальных результатах мы имели условие $k_L(t) \gg k_i$ для интегрального волнового числа, что означало что в рассматриваемом интервале находится много разрывов. Если это условие нарушается, то мы имеем один разрыв на периоде и спектр имеет универсальную асимптотику $E(k, t) \sim (kt)^{-2}$ при всех волновых числах.

При конечных числах Рейнольдса $Re_0 = \sigma_\psi / 2\nu$, благодаря многократным слияниям разрывов, число Рейнольдса спадает очень медленно $Re(t) = V(t)L(t)/\nu \sim Re_0 \ln^{-1/2}(\frac{t}{2\pi t_{nl}})$, линейный режим начинается поздно, при $t \gg t_{nl} \exp(Re_0^2) / Re_0$, где $t_{nl} = \sigma_\psi / l_0^2$ – время проявления нелинейных эффектов. На линейной стадии энергия затухает как $Ct^{-3/2}$, где константа $C \approx l_0 \exp(Re_0^2) / Re_0$.

1.2.3. Эволюция турбулентности - статистически неоднородный потенциал ($-3 < n < 1$)

Для $n < 1$ дисперсия потенциала неограничена, а для $n < -1$ бесконечна и дисперсия начального поля. Первые серьезные статистические результаты для уравнения (1.1) были получены для случая $n = 0$, когда начальный потенциал

представляет собой Броуновского начального лишь 30 лет спустя [15] после появления самого уравнения [14], а точное статистическое описание этого специального случая было сделано относительно недавно [25,26].

При чисто степенном начальном спектре начальный потенциал представляет собой броуновскую или фрактальную броуновскую реализацию, что позволяет провести рескэйлинг в глобальном решении уравнения Бюргера

$$\begin{aligned}\psi_0(\lambda x) &= \text{law } \lambda^{h+1} \psi_0(x); \quad h = -\frac{1}{2}(n+1) \\ \psi_0(x) &\sim |x|^{h+1} = |x|^{\frac{1}{2}(n-1)} \\ v(x, t) &= \text{law } t^{\frac{h}{1-h}} v(xt^{-\frac{h}{1-h}}, 1);\end{aligned}$$

Соответственно турбулентность оказывается автомодельной с самого начала эволюции, а эволюция спектра описывался выражением (1.12), а интегральный масштаб $L(t)$ растет как

$$L(t) = (\alpha t)^{2/(3+n)} \quad (1.32)$$

Ее спектр сохраняется при малых k и безразмерный спектр (1.12) может быть представлен в виде

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \begin{cases} \gamma_n \tilde{k}^{-2}, & \tilde{k} \gg 1 \\ \tilde{k}^n, & \tilde{k} \ll 1 \end{cases}, \quad \tilde{k} \equiv kL(t) \quad (1.33)$$

Для энергии турбулентности (когда она существует; $-1 < n < 1$) имеем соответственно

$$E(t) = a_n L^2(t) / t^2 \alpha_n \alpha^{\frac{4}{3+n}} t^{-\frac{2(n+1)}{3+n}} \quad (1.34)$$

Выше γ_n и a_n безразмерные константы, которые в принципе могут быть вычислены теоретически или определены из численного эксперимента [9].

A. Статистически однородная скорость и неоднородный потенциал;
 $(-1 < n < 1)$

Для начального спектра скорости с $-1 < n < 1$ мы имеем расходимость потенциала в инфракрасной части спектра и поэтому мы уже не можем определить начальный пространственный масштаб на основе (1.16). Здесь мы определим нелинейное время и начальный пространственный масштаб как

$$t'_{nl} = \frac{L_0}{\sigma_v} = 1/\sigma_q, \quad L_0 \equiv \sigma_v/\sigma_q \quad (1.35)$$

Легко видеть, что это время совпадает с характерным временем образования первого разрыва t_s . Используя эти определения, мы можем переписать законы роста внешнего масштаба $L(t)$ и затухания энергии $E(t)$ в виде

$$L(t) \simeq L_0 \left(\frac{t}{t'_{nl}}\right)^{2/(3+n)} \quad (1.36)$$

$$E(t) \simeq E_0 \left(\frac{t}{t'_{nl}}\right)^{-2(n+1)/(3+n)} \quad (1.37)$$

Автомодельное поведение спектра может реализовываться в некоторой области плоскости (k, t) даже если начальный спектр имеет обрезание в инфракрасной k_i или ультрафиолетовой k_u части спектра. Из асимптотического решения уравнения Бюргера (1.3) статистические свойства турбулентности определяются поведением структурной функции начального потенциала. В общем случае для структурной функции начального потенциала (1.8) мы имеем

$$S_0 \psi(x) = g(x) \beta^2 \alpha^2 |x|^{1-n}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 \frac{2\pi}{\Gamma(2-n) \sin \frac{\pi(n-1)}{2}} \quad (1.38)$$

Если начальный спектр имеем пространственные частоты обрезания k_i и k_u то функция $g(x) = 1$ в некотором пространственном интервале $L_u < x < L_i$, где $L_u = 1/k_u$ и $L_i = 1/k_i$, и при $x > L_i$ стремится к константе. Заметим, что именно такие условия всегда реализуются при численном моделировании.

Если интегральный масштаб турбулентности $L(t)$ находится в интервале

$L_i \gg L(t) \gg L_u$ мы по-прежнему имеем автомодельный закон затухания для интегрального масштаба $L(t)$ и энергии турбулентности $E(t)$ $t_{u_1} < t < t_i$, где t_u , t_i определяются из условий $L(t_i) = L_i$, $L(t_u) = L_u$. Спектр энергии имеет автомодельное поведение при $k > k_i$. Для асимптотического поведения спектра на больших временах возможны два сценария. Если мы имеем периодический сигнал, и период определяется именно инфракрасной частотой обрезания $L_{\text{box}} = L_i = 2\pi/k_i$, то на очень больших временах мы имеем одну треугольную волну на периоде и энергия затухает как $E(t) = L^2/12t^2$. Если же мы имеем непрерывный спектр, то происходит генерация низкочастотных компонент $E(k, t) \sim A(t)k^2$ в области $k < k_i$ и окончательное поведение турбулентности будет такое же как мы имеем в случае $n > 1$ (см. раздел 1.2.1).

На рисунке 1.6 изображена эволюция спектра энергии $E(k, t)$ для моментов времени $\frac{t}{t'_{nl}} = 1.6$ to $\frac{t}{t'_{nl}} = 5.4 * 10^5$ когда начальный спектр представляет классический белый шум $n=0$.

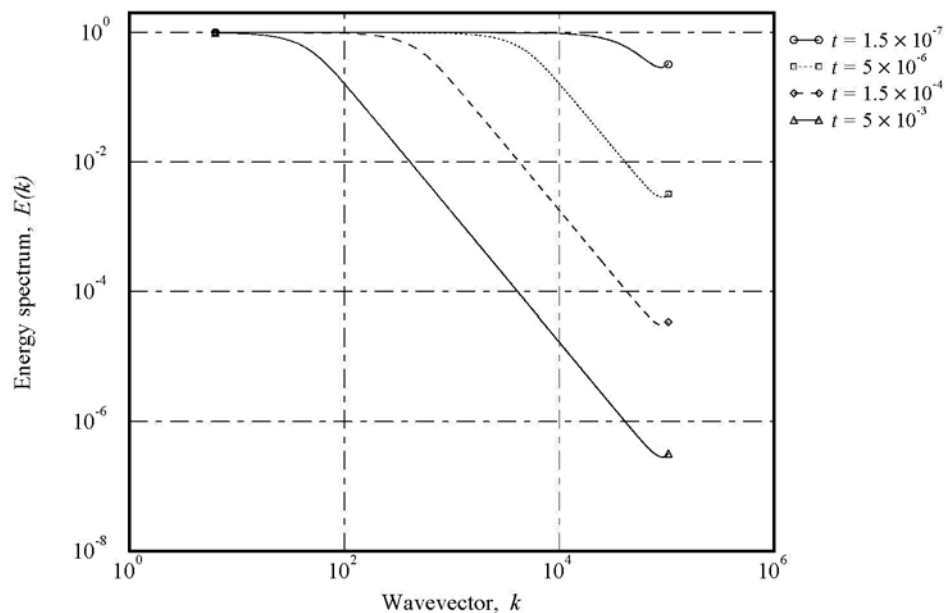


Рис. 1.6: Эволюция спектра $E(k, t)$ при $E_0(k) \sim k^n$, $n=0$ при малых волновых числах k .

На рисунке 1.7 изображена эволюция нормированного спектра $E(k, t)t^0$ как

функция нормированного волнового числа $kt^{2/3}$. Для безразмерной константы безразмерного спектра (1.23) мы имеем $\gamma_n=1.43$.

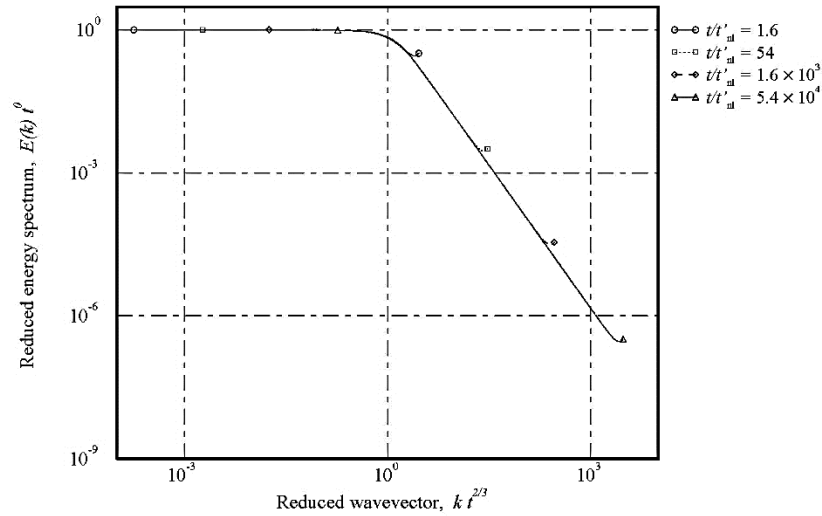


Рис. 1.7: Эволюция нормированного спектра энергии $E(k, t)t^0$ как функции нормированного волнового числа $kt^{2/3}$ для $E_0(k) \sim k^n$, $n=0$ при малых волновых числах k

Таким образом асимптотическое поведение турбулентности, имеющей степенной начальный спектр, обрезанный на высоких частотах, также является автомодельным, причем не зависит от пространственного масштаба начального спектра l_0 . Более того, на больших временах даже поведение отдельных реализаций случайного поля слабо зависит от мелкомасштабных флуктуаций и определяется крупномасштабными компонентами начального возмущения.

При конечной вязкости ($\nu \neq 0$) число Рейнольдса

$$Re(t) = \frac{V_c(t)L_c(t)}{\nu} \sim t^{n+3}$$

растет с течением времени. Здесь $V_c(t)$, $L_c(t)$ амплитуда и масштаб турбулентности. Последнее связано с тем, что характерный масштаб турбулентности растет быстрее, чем уширение ударного фронта из-за вязкости.

Б. Статистически неоднородные скорость и неоднородный потенциал; $(-3 < n < -1)$

Для начального самоподобного спектра с $-3 < n < -1$ мы имеем расходимость в инфракрасной части спектра как для потенциала, так и скорости и

расходимость градиента скорости в ультрафиолетовой части спектра. Если же мы введем ультрафиолетовую частоту обрезания, мы можем ввести нелинейное время через градиент скорости $t'_{nl} = 1/\sigma_q$, (1.35) которое очевидно равно характерному времени образования первого разрывов t_s . Из-а расходимости энергии в инфракрасной области диссипация энергии на разрывах никогда не приводит к конечному значению энергии. Тем не менее мы можем ввести интегральный масштаб турбулентности $L(t)$ который показывает область где степенной закон начального спектра $E(k, t) \sim |k|^n$ переходит в универсальный степенной закон $E(k, t) \sim k^{-2}$. Этот-же масштаб показывает характерное изменение других статистических характеристик турбулентности, таких как распределение амплитуд разрывов, расстояний между ними и т.д. Из спектральной формы принципа “permanence of large eddies” мы по-прежнему имеем, что интегральный масштаб возрастает согласно закону (1.32). Из выражения (1.23) мы видим, что амплитуде высокочастотной части спектра убывает при $n > -2$ и возрастает с течением времени при $-3 < n < -2$.

Рассмотрим вначале специальный случай, когда $n = -2$ и интегральный масштаб растет как $L(t) \sim (\alpha t)^2$. Из уравнения (1.12) мы видим, что в этом случае спектр не меняется с течением времени. На рисунке 1.8 изображена эволюция спектра $E(k, t)$ для различных моментов времени.

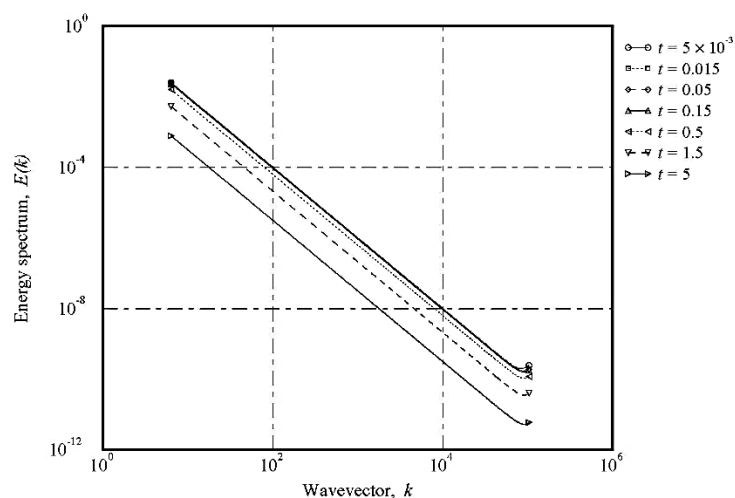


Рис. 1.8: Эволюция спектра энергии для начального спектра пропорционального $|k|^n$

($n = -2$).

Мы действительно видим, что даже при $\frac{t}{t'_{nl}} \gg 1$ спектр не меняется с течением времени. Тем не менее статистические свойства турбулентности, такие как распределение амплитуд разрывов меняется с течением времени и определяются именно этим интегральным масштабом. На рисунке 1.9 приведена форма волны для двух разных моментов времени, соответствующих одинаковой форме спектра, но разным интегральным масштабам.

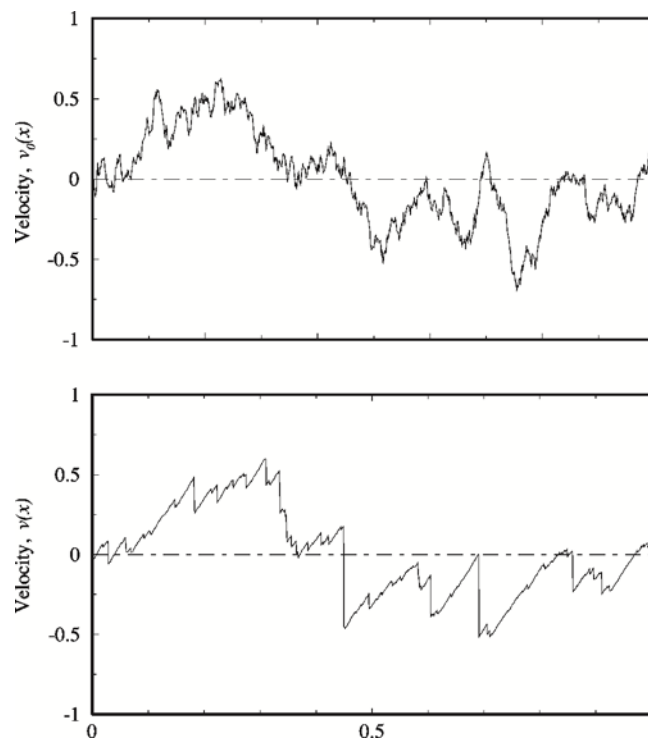


Рис. 1.9: Реализации поля скорости в два разных момента времени для начального спектра энергии пропорционального $|k|^n$ ($n = -2$)

На рисунке 1.10 изображена эволюция спектра $E(k, t)$ для случая, когда начальный спектр $E(k, t) \sim |k|^n$ с $n = -2.5$.

Видим генерацию универсального степенного хвоста k^{-2} с амплитудой, возрастающей во времени и область переключения между степенными законами $k^{-2.5}$ и k^{-2} смещается в область малых волновых чисел обратно пропорционально интегральному масштабу.

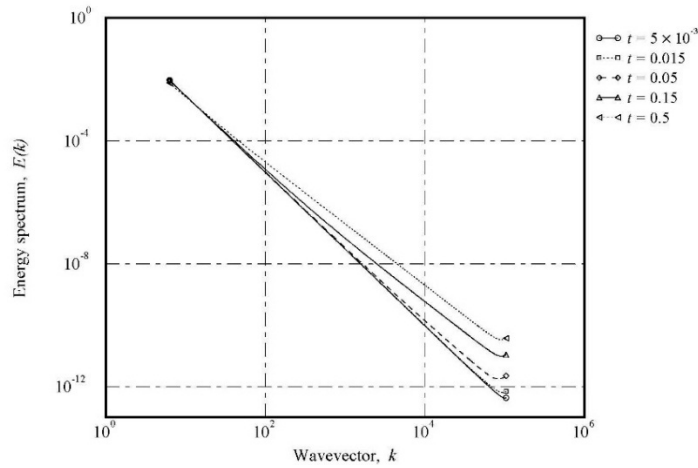


Рис. 1.10: Эволюция спектра энергии с начальным спектром пропорциональным $|k|^n$ ($n=-2.5$) при малых волновых числах k .

В заключение приведем рисунок из статьи [9], показывающий разбиение плоскости $(k-t)$ на области со степенным поведением спектра

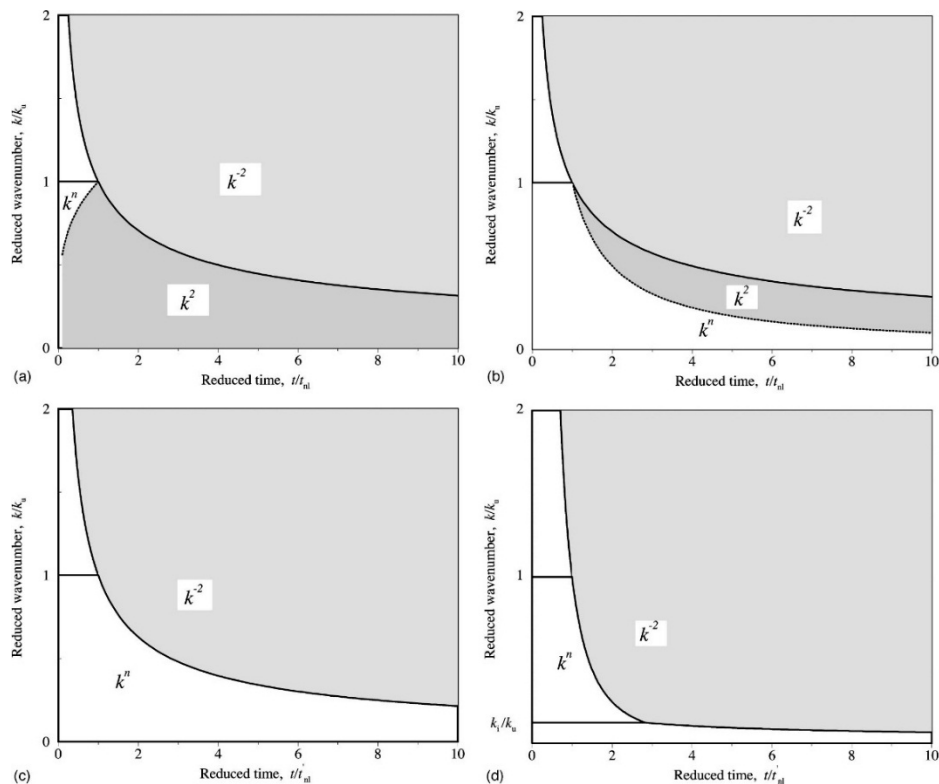


Рис.1.10. Универсальная асимптотика $E(k, t) \sim |k|^n$, k^2 , k^{-2} и автомодельность энергетического спектра $E(k,t)=L^3(t)t^{-2} E(kL(t))$ на плоскости $(k-t)$. Линия $k_L(t) \sim 1/L(t)$ является границей между k^{-2} и $|k|^n$ или k^2 асимптотик спектра. Линия $k_S(t)$ – граница между $|k|^n$ и k^2 при малых волновых числах. (a) Показатель степени $n > 2$: автомодельность при $t \gg t_{n1}$. (b) $1 < n < 2$: автомодельность только, когда $t \gg t_{n1}$ и $k \gg k_S(t)$. (c) $-3 < n < 1$: аввтомодельность для $t \gg t_{n1}$. (d) $-3 < n < 1$ и верхняя отсечка k_i : автомодельность для $t_i \gg t \gg t_{n1}$ и $k_i \gg k \gg k_u$.

ГЛАВА 2

Многомерные нелинейные уравнения

2.1 *Нелинейные уравнения первого порядка*

До сих пор мы анализировали свойства одномерных полей, зависящих от времени t и лишь одной пространственной координаты. Такие поля возникают обычно при идеализированном, упрощенном, описании реальных процессов, происходящих в трехмерном пространстве [2,5,10,11]. С другой стороны, многие идеи и методы решения нелинейных уравнений в частных производных для одномерных полей естественным образом переносятся на более богатый геометрическими и механическими проявлениями многомерный случай [2,5,10,11].

Векторное поле скорости $\mathbf{v}(x, t)$ трехмерного потока равномерно движущихся частиц описывается уравнением:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(x, t = 0) = \mathbf{v}_0(x). \quad (2.1)$$

Здесь присутствует оператор набла,

$$\nabla = \mathbf{j}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

равный сумме частных производных по координатам $\{x_1, x_2, x_3\}$ декартовой системы, умноженных на базисные векторы $\{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$.

Если поле скорости потенциальное, то есть если существует такая скалярная функция $s(x, t)$, что

$$\mathbf{v}(x, t) = \nabla s(x, t), \quad (2.2)$$

то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla s)^2 = 0, \quad s(x, t = 0) = s_0(x). \quad (2.3)$$

В дальнейшем мы всюду будем считать поле скорости потенциальным, а равенство (2.2) справедливым.

В этом случае

$$(\nabla s)^2 = v^2 = (\mathbf{v} \cdot \nabla)s$$

и последнее уравнение можно переписать в более удобной для анализа форме

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s = \frac{v^2}{2}. \quad (2.4)$$

Иногда такие двумерные поля имеют самостоятельную ценность. Так функция $s(\mathbf{x}, t)$ в двумерном пространстве $\{x_1, x_2\}$ имеет еще одну интерпретацию: она описывает, в малоугловом приближении, рост поверхности пламени или волнового фронта оптической волны, распространяющейся вдоль третьей пространственной координаты $z = x_3$.

Перегруппировка частиц в процессе их движения приводит к изменению плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ частиц во времени и в пространстве. Последняя подчиняется универсальному уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho(\mathbf{x}, t = 0) = \rho_0(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

В лагранжевых координатах, приведенные выше нелинейные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям для эйлеровых координат

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{y}, t = 0) = \mathbf{y}, \quad (2.6)$$

лагранжева поля скорости $\mathbf{V}(\mathbf{y}, t)$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0, \quad \mathbf{V}(\mathbf{y}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{y}), \quad (2.7)$$

и его потенциала $S(\mathbf{y}, t)$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}V^2, \quad S(\mathbf{y}, t = 0) = s_0(\mathbf{y}). \quad (2.8)$$

Решение первых двух уравнений предоставляет в наше распоряжение отображение лагранжевых в эйлеровы координаты

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{y} + \mathbf{v}_0(\mathbf{y})t, \quad (2.9)$$

а решение второго и третьего уравнений дает лагранжевы поля скорости и его потенциала

$$V(\mathbf{y}, t) = v_0(\mathbf{y}), \quad S(\mathbf{y}, t) = s_0(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} v_0^2(\mathbf{y})t. \quad (2.10)$$

Чтобы определить соответствующие эйлеровы поля, необходимо найти обратное к (2.9) отображение эйлеровых в лагранжевы координаты

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Если оно известно, то поля скорости и его потенциала определяются равенствами

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_0(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)), \quad s(\mathbf{x}, t) = s_0(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} v_0^2(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t))t. \quad (2.12)$$

Другая, более удобная форма записи этих полей, явно выражающая их через отображение (2.11) эйлеровых в лагранжевы координаты, имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{t}, \quad (2.13)$$

$$s(\mathbf{x}, t) = s_0(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)) + \frac{(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x})^2}{2t}. \quad (2.14)$$

При анализе поведения трехмерных потоков важную роль играет якобиан преобразования лагранжевых в эйлеровы координаты

$$J(\mathbf{y}, t) = \left| \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} \right|. \quad (2.15)$$

Подставив в выражение (2.15) соотношение (2.9) и учитывая потенциальность поля скорости, перепишем его в виде

$$J(\mathbf{y}, t) = |\delta_{ij} + s_{ij}t|, \quad (2.16)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а s_{ij} – компоненты симметричного тензора \hat{s} , составленного из частных производных начального потенциала поля скорости

$$\hat{s} = \|s_{ij}\|, \quad s_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{\partial^2 s_0(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (2.17)$$

Как известно, поворотом системы координат $\{y_1, y_2, y_3\}$, своим в каждой точке y , симметричный тензор можно привести к диагональному виду:

$$\hat{s} = \|\lambda_i \delta_{ij}\|,$$

где $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ –собственные числа тензора \hat{s} . В указанной локальной координатной системе якобиан (2.16) оказывается равен

$$J = \prod_{i=1}^3 (1 + \lambda_i t). \quad (2.18)$$

Всюду ниже будем считать, что собственные числа пронумерованы в порядке возрастания:

$$\lambda_1(\mathbf{y}) \leq \lambda_2(\mathbf{y}) \leq \lambda_3(\mathbf{y}).$$

Напомним, якобиан преобразования лагранжевых в эйлеровы координаты $J(\mathbf{y}, t)$ имеет наглядный геометрический смысл. Он равен отношению бесконечно малых (элементарных) объемов

$$J(\mathbf{y}, t) = \frac{\delta v}{\delta v_0} \quad (2.19)$$

где δv_0 –объем области δv_0 , которую некая порция частиц занимала в начальный момент $t = 0$, а δv –объем области δv , занимаемый теми же частицами в текущий момент времени.

Ясный геометрический смысл имеет и локальный лагранжев базис, в котором тензор (2.17) диагонален. Его оси указывают направления сжатий и растяжений элементарной области. Другими словами, если начальная область δv_0 была шаром, то область δv имеет форму эллипсоида, главные оси которого совпадают с направлениями осей упомянутого локального базиса.

Сжатия и разрежения потока приводят к изменениям его плотности. В случае отображения (2.9), справедливого для потока равномерно движущихся частиц, следует различать, как и в одномерном случае, однопотоковый и многопотоковый режимы.

Для однопоточкового режима из закона сохранения массы и (2.19) следует

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t))}{J(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)}. \quad (2.20)$$

Во многих физических и других приложениях многопоточковые решения запрещены. Когда движение равномерно движущихся частиц оказывается многопоточковым, а классические решения перечисленных многомерных уравнений в частных производных 1-го порядка уже не существуют, вместо них определяют недифференцируемые или разрывные слабые решения.

2.2 Многомерные нелинейные уравнения второго порядка

Мы ограничимся здесь лишь кратким перечислением некоторых естественных обобщений рассмотренных выше нелинейных уравнений, и прежде всего уравнений KPZ и Бюргерса, на двумерный и трехмерный случаи.

Пусть поверхность растет со скоростью c преимущественно вдоль некоторой выделенной оси трехмерного пространства. Обозначим координату вдоль данной оси за z , а координаты в поперечной к ней плоскости за \mathbf{x} . Если наклоны нормалей поверхности к оси z малы, то функция $h(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет, в малоугловом приближении, уравнению KPZ [27] (Отметим, что уравнение названо по имени его авторов Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla h)^2 + \mu \Delta h + F(\mathbf{x}, t). \quad (2.21)$$

Здесь $F(\mathbf{x}, t)$ учитывает неравномерность оседания налипающих на поверхность частиц, а слагаемое, пропорциональное μ , подвижность частиц вдоль поверхности. Детальному исследованию этого уравнения посвящена монография [28].

Подстановкой

$$h(\mathbf{x}, t) = 2\mu \ln \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (2.22)$$

уравнение (2.21) сводится к линейному уравнению диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \Delta \varphi + \frac{1}{2\mu} F(\mathbf{x}, t) \varphi, \quad (2.23)$$

которое требуется решить с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{x}, t = 0) = \exp\left(\frac{h_0(\mathbf{x})}{2\mu}\right). \quad (2.24)$$

В однородном случае, когда $F(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, решение примет вид:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}}\right)^n \int \exp\left(\frac{1}{2\mu} \left[h_0(\mathbf{y})t - \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2}{2} \right]\right) d^m \mathbf{y}, \quad (2.25)$$

где n – размерность пространства \mathbf{x} .

Введем векторную функцию наклонов поверхности, заданной уравнением

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla h(\mathbf{x}, t). \quad (2.26)$$

Нетрудно проверить, что если $h(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет многомерному уравнению KPZ (2.21), то векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ подчиняется многомерному уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\nabla F(\mathbf{x}, t). \quad (2.27)$$

Аналитическое решение однородного уравнения KPZ, в совокупности с равенством (1.26), дает точное аналитическое решение однородного уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.28)$$

в случае потенциального начального поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$.

При этом решение уравнения Бюргерса $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ остается потенциальным при любых $t > 0$ и описывается вытекающим из (2.25), (2.26) выражением

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \{\mathbf{y}\}(\mathbf{x}, t)}{t}. \quad (2.29)$$

Фигурные скобки $\{\dots\}$ означают здесь пространственное усреднение с помощью

функции

$$f(\mathbf{y}; \mathbf{x}, t) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\mu t} G(\mathbf{y}; \mathbf{x}, t)\right]}{\int \exp\left[-\frac{1}{2\mu t} G(\mathbf{y}; \mathbf{x}, t)\right] d^n \mathbf{y}}, \quad (2.30)$$

где

$$G(\mathbf{y}; \mathbf{x}, t) = s_0(\mathbf{y})t + \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2}{2}, \quad (2.31)$$

Используя метод перевала, можно показать, что в пределе бесконечно малой вязкости это решение сводится к (2.13), где теперь $y(x,t) = y_w(x,t)$ координата абсолютного максимума функции $G(\mathbf{y}; \mathbf{x}, t)$ (2.31).

2.3 О статистических свойствах потенциальной турбулентности - векторной турбулентности Бюргера

Обсудим статистические свойства турбулентности Бюргера – решений уравнения (2.27) со случайными начальными условиями. Рассмотрим лишь, характерный для развития гравитационной неустойчивости, случай потенциального поля скорости, трактуя его как поле потенциальной турбулентности. В этих случаях, потенциал S соответствует профилю поверхности, а уравнение, описывающее его эволюцию, эквивалентно уравнению KPZ (2.21).

В задачах о росте поверхности раздела двух сред μ имеет смысл коэффициента поверхностного натяжения, и слагаемое в правой части описывает линейные эффекты сглаживания поверхности. Изрезанность поверхности измеряется ее среднеквадратичным градиентом

$$E(t) = \langle (\nabla \psi(x, t))^2 \rangle = \langle v^2(x, t) \rangle = \sum_i E_i(t),$$

$$E_i(t) = \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \langle v_i^2 \rangle. \quad (2.32)$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю или интегрирование по пространству (для локализованного возмущения).

До образования разрывов, уравнение Бюргерса в пределе исчезающе малой вязкости эквивалентно свободному движению частиц. В лагранжевом представлении скорость частиц $V(t; \mathbf{y})$ постоянна и зависит лишь от начальной (лагранжевой) координаты частицы \mathbf{y} .

В одномерном случае до образования разрывов увеличение длины одного элементарного интервала в эйлеровом представлении $\Delta x = \Delta y + t\Delta V$ компенсируется уменьшением длины другого соседнего интервала $\Delta x = \Delta y - t\Delta V$, и, следовательно, энергия волны сохраняется.

После образования разрывов энергия начинает уменьшаться со временем. В многомерном случае изменение элементарного объема в эйлеровом представлении зависит от начальной кривизны возмущения поверхности, и подобной компенсации растягивающихся и сжимающихся объемов не наблюдается. Следовательно, для $n > 1$ мера неровности поверхности $E(t)$ (2.32) может как возрастать, так и убывать со временем, что является результатом отсутствия в данном случае какого либо закона сохранения. Тем не менее, мы будем называть $E(t)$ “энергией турбулентности”, а $E_i(t)$ “энергией” i -ой компоненты скорости.

Как уже отмечалось исследование турбулентности Бюргерса при исчезающе малой вязкости сводится к отысканию статистических характеристик координат абсолютных максимумов действия. Использование предельных теорем теории выбросов случайных полей позволило дать практически исчерпывающее описание турбулентности Бюргерса как в одномерном, так и в многомерном случаях. Для турбулентности Бюргерса удается найти строго условия существования и типы автомодельных режимов вырождения турбулентности, спектры и корреляционные функции, одноточечные и многоточечные вероятностные распределения [2,25].

Характерным для эволюции турбулентности является возникновение

локальной и статистической автомодельности. Первоначально непрерывное поле трансформируется в ячеистую структуру, причем в каждой из ячеек на больших временах поле скорости имеет универсальную автомодельную структуру:

$$v(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_k}{t}, \quad (2.33)$$

С течением времени идет поглощение одних ячеек другими, а характерный масштаб поля растет. Вследствие многократного слияния ячеек и статистические свойства турбулентности становятся автомодельными.

При отсутствии дальних корреляций начального поля, поведение турбулентности на больших временах определяется «хвостами» функции распределения начального потенциала. При этом, в зависимости от вида начального распределения потенциала, реализуются три универсальных автомодельных режима затухания турбулентности, а в трехмерной турбулентности возможен случай возрастания ее «энергии».

Если начальный потенциал $s_0(\mathbf{x})$ – случайное гауссово поле, то асимптотическое поведение турбулентности определяется видом начального спектра в области малых волновых чисел, то есть крупномасштабными компонентами поля. Если эти компоненты достаточно сильно представлены в начальном спектре, то реализуется автомодельный режим турбулентности, закон роста внешнего масштаба которого определяется видом спектра в области малых волновых чисел.

Если в начальном поле отсутствуют крупномасштабные компоненты, то реализуется иной режим автомодельности, и на стадии многократного слияния ячеек характеризуется единственным масштабом $-L(t)$. При этом рост внешнего масштаба $L(t)$ определяется интегральными свойствами начального спектра, дисперсией начального потенциала σ_ψ и эффективным масштабом

начального поля l_{eff} . Лагранжева координата y в асимптотическом решении (2.33) имеет при этом Гауссово распределение

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L^2(t)}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{2L^2(t)}\right), \quad (2.34)$$

где

$$L(t) = (\sigma_\psi t)^{1/2} d^{-1/4} \left(\ln \frac{\sigma_\psi t}{(2\pi)^{1/d} l_{eff}^2} \right)^{-1/4} \quad (2.35)$$

интегральный масштаб турбулентности, а d размерность пространства. Каждая из компонент векторного поля скорости имеет гауссово распределение с дисперсией

$$E_i(t) = \sigma_{v,i}^2 = \frac{L^2(t)}{t^2} = \left(\frac{\sigma_\psi}{t} \right) d^{-1/2} \left(\ln \frac{\sigma_\psi t}{(2\pi)^{1/d} l_{eff}^2} \right)^{-1/2} \quad (2.36)$$

На больших временах плотность вероятности, корреляционная функция и спектр энергии будут иметь автомодельную форму. В частности, для нормированной функции корреляции продольной (LL) и поперечной (NN) компонент поля $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/\sigma_{v,i}$ можно получить

$$\tilde{B}_{LL}(\tilde{x}) = \langle \tilde{v}_{1L} \tilde{v}_{2L} \rangle = \frac{d}{d\tilde{x}} (\tilde{x} P(\tilde{x})), \quad (2.37)$$

$$\tilde{B}_{NN}(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \langle \tilde{v}_{1N} \tilde{v}_{2N} \rangle = P(\tilde{x}), \quad (2.38)$$

$$P(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{g\left(\frac{\tilde{x}+z}{2}\right) \exp\left[\frac{(\tilde{x}+z^2)}{8}\right] + g\left(\frac{\tilde{x}-z}{2}\right) \exp\left[\frac{(\tilde{x}-z^2)}{8}\right]}, \quad (2.39)$$

$$g(z) = \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

где $\tilde{x} = x/L(t)$, а $P(\tilde{x})$ – заодно и вероятность отсутствия разрывов на эйлеровом интервале длиной $\tilde{x}L(t)$.

Спектральная плотность $E_v(k, t)$ также изотропна и самоподобна

$$E(k, t) = \frac{L^3(t)}{t^2} \tilde{E}(k, L(t)). \quad (2.40)$$

При больших волновых числах k образование разрывов (мелкомасштабных скачков) приводит к появлению степенной асимптотической зависимости $E(k) \sim k^{-2}$. В области малых волновых чисел в трехмерном случае спектр также характеризуется универсальным поведением

$$E(k, t) = k^{1+d} \frac{L^{4+d}(t)}{t^2} \sim k^{1+d} t^{d/2},$$

которое означает нелинейную генерацию крупномасштабной компоненты, отвечающей области малых волновых чисел. Так, в случае трехмерной турбулентности Бюргера $E(k, t) \sim k^4 t^{3/2}$.

Для больших, но конечных чисел Рейнольдса, разрывы имеют конечную ширину $\delta \sim \mu t / L(t)$ и растут со временем по сравнению с интегральным масштабом как $\delta / L(t) \sim \left(\ln(\sigma_\psi t / l_{eff}^2) \right)^{1/2}$. В результате, за счет этого на очень больших временах наступает линейная стадия эволюции.

В трехмерной турбулентности Бюргера, как и в одномерном случае, возможно нарушение глобальной статистической автомодельности: при этом в области малых волновых чисел спектр сохраняется, но эволюция большей части спектра носит универсальный характер и определяется интегральными характеристиками начального спектра.

ГЛАВА 3

Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания

Многомерное уравнение Бюргерса возникает в космологии при описании крупномасштабной структуры Вселенной, где оно известно как модель слипания (adhesion model). Эта модель служит естественным обобщением приближения Зельдовича предложенного в 1970 году. Математической основой модели является уравнение Бюргерса при малом или даже исчезающе малом коэффициенте вязкости. Модель дает естественное объяснение наблюдаемого распределения галактик в масштабах от нескольких до нескольких сотен МПк, напоминающее трехмерную мозаику или гигантскую космическую паутину.

В космологии понятие крупномасштабной структуры относится к распределению галактик и массы темного вещества (на масштабах от одного до нескольких сотен мегапарсек). На меньших масштабах сильно сказывается дискретность, присущая распределению галактик, в то время как на больших масштабах распределение вещества монотонно стремится, с увеличением масштабов, к однородному.

Сорок лет назад Яков Борисович Зельдович опубликовал две близкие по содержанию статьи, посвященные проблеме образования структуры Вселенной: одну на русском языке в журнале *Астрофизика* [29], а другую – на английском в европейском журнале *Astronomy and Astrophysics* [30]. Судьба обеих сложилась нелегко: на русский вариант вместе с его английским переводом было всего 33 ссылки за первые 20 лет после опубликования, а на английский – около 200. В последующие 20 лет картина значительно улучшилась для обеих версий, хотя и неодинаково: на русский вариант сослались 74 раза, а на английский – 950, что вывело английскую статью в число наиболее цитируемых публикаций за 40 лет существования *Astronomy and Astrophysics*. К тому же несчетное число авторов просто сослались на приближение Зельдовича без указания публикации. В этих работах Я.Б.

Зельдович со свойственной ему непосредственностью и образностью ввел в космологию кулинарный термин 'блины', который получил широкую популярность в космологической литературе.

Детальное знакомство с изменением взглядов на процессы формирования крупномасштабной структуры Вселенной можно проследить по обзорам в журнале Успехи физических наук (УФН): [10,31,32].

3.1 Гравитационная неустойчивость в расширяющейся Вселенной

Прежде чем перейти непосредственно к изложению двух приближений описывающих особенности распределения вещества во Вселенной, кратко опишем современный взгляд на формирование крупномасштабной структуры Вселенной.

Мы живем в расширяющейся Вселенной, теоретически предсказанной в 1922 году российским математиком Фридманом. Американский астроном Хаббл независимо обнаружил, в 1929 году, явление расширения Вселенной. Поясним суть концепции расширяющейся Вселенной на идеализированном примере всюду однородной Вселенной. Ее расширение означает, что любые две частицы, находящиеся на расстоянии r друг от друга, разбегаются вдоль прямой, соединяющей эти частицы, с относительной скоростью u , подчиняющейся закону Хаббла: $u = H(t) \cdot r$. Положительный множитель $H(t)$ называют параметром Хаббла, а его значение в настоящую эпоху – постоянной Хаббла. Параметр Хаббла количественно характеризует темп расширения Вселенной.

Вплоть до конца прошлого столетия большинство космологов были уверены, что в прошлом расширение Вселенной было быстрее, монотонно замедляясь с течением времени за счет действия гравитации. Тем не менее, изучение движения очень удаленных сверхновых звезд показало, что недавно (по космологическим меркам) расширение Вселенной стало ускоряться. Ускорение расширения Вселенной может быть довольно просто объяснено, если большую часть ее вещества образует темная энергия – гипотетическая

форма энергии, равномерно распределенная во всем пространстве. Хотя физическая природа темной энергии остается неизвестной, наиболее популярное на данный момент объяснение ускорения расширения Вселенной опирается именно на существование во Вселенной темной энергии.

В настоящее время Вселенная неоднородна на масштабах, простирающихся до нескольких сотен Мегалпарсек ($1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} \approx 3,260,000$ световых лет). Элементами этой структуры служат объекты с повышенной концентрацией галактик – “стенки”, филаменты (веретенообразные формирования, которые иногда называют пальцами Бога) и кластеры. Считается, что существующие на данный момент крупномасштабные образования возникли, за счет гравитационной неустойчивости, из малых начальных возмущений плотности. Информацию об этих возмущениях обеспечивают температурные флуктуации однородного космического микроволнового излучения (СМВ - Cosmic Microwave Background), которые и дают детальную информацию относительно содержания, истории развития и структуры Вселенной.

Согласно наблюдениям космической обсерватории «Планк», интерпретированным с учётом стандартной космологической модели, общая масса-энергия наблюдаемой Вселенной состоит на 4 % из обычной барионной материи (атомов различных веществ), на 22 % из малоизученной холодной темной материи (cold dark matter) и на 74 % из тёмной энергии. играющей антигравитационную роль в процессе формирования Вселенной.

Несмотря на то, что частицы темной материи никогда не были обнаружены и идентифицированы в физических экспериментах, сама гипотеза темной материи достаточно убедительно обоснована. Гравитационное взаимодействие частиц темной материи аналогично гравитационному взаимодействию обычной материи. При этом темная материя играет определяющую роль в зарождении и эволюции крупномасштабной структуры

Вселенной, благодаря ее доминированию над обычным веществом при формировании сил гравитационного притяжения.

Первые две компоненты были определены из наблюдаемой динамики космических объектов весьма давно, в то время как темная энергия была обнаружена сравнительно недавно при наблюдениях границы красного смещения. Новый портрет космоса после так называемого Большого Взрыва был получен учеными НАСА с использованием анизотропной микроволновой космической научно-исследовательской станции Уилкинсон (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe - WMAP), на протяжении года наблюдавшей все видимое космическое пространство. В структуре излучения, которое мы сейчас наблюдаем как космический микроволновый фон, имеются очень малые флуктуации, несущие в себе отпечаток того, что впоследствии сформировало скопления галактик. WMAP позволяет различить слабые температурные флуктуации в миллионные доли градуса. С помощью эволюционных теорий Вселенной сделаны выводы относительно размеров температурных перепадов. Сразу после разделения барионов и фотонов ранняя Вселенная представляла собой в среднем однородную среду без давления, состоящую из бесстолкновительной пыли, взаимодействующей только через ньютоновскую гравитацию. Начальная плотность этой темной материи флуктуировала вокруг среднего значения. Именно эти флуктуации и ответственны за формирование крупномасштабных структур, в которых концентрируются как небарионная материя, так и светящееся барионная материя.

Сценарий развития малых начальных возмущений в крупномасштабные структуры является, по существу, проблемой классической гравитационной физики, где все вопросы кроются в выборе начальных условий и описания процесса расширения Вселенной. Однако даже эта проблема далеко не тривиальна. Принципиальная трудность состоит в том, что самогравитирующая среда не имеет никакого основного состояния, и ее динамика не эргодична. В гидродинамической формулировке проблемы нахождение поля скорости вещества сводится к решению уравнений Эйлера-

Пуассона. Численное моделирование оказывается при этом одним из основных методов исследования. Распределение плотности вещества во Вселенной наглядней всего иллюстрируется (в некотором статистическом смысле) с помощью численного моделирования взаимного движения N гравитационно взаимодействующих частиц, в рамках популярной в настоящее время Λ CDM (Λ Cold Dark Matter) модели. Итог моделирования в рамках указанной модели изображен на рисунке 3.1.

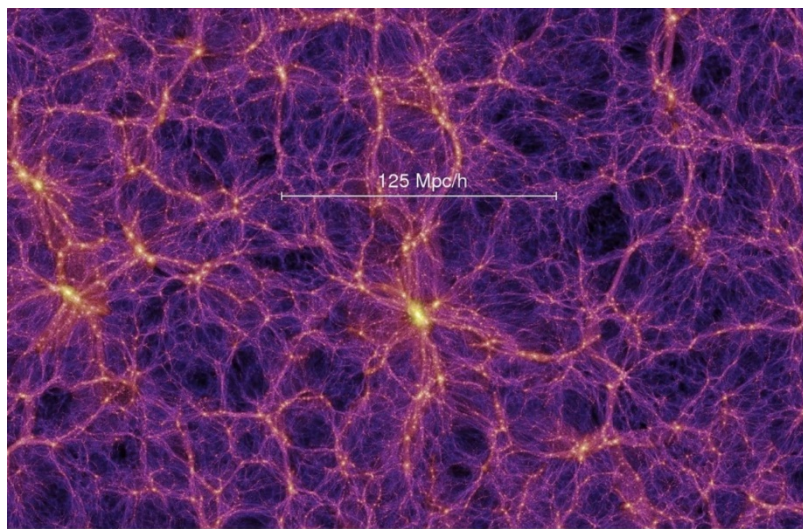


Рис. 3.1. Поле плотности темной материи Вселенной полученное численным моделированием формирования крупномасштабной структуры Вселенной. Темные области соответствуют областям с низкой плотностью материи, а светлые – крупномасштабным структурам с высокой плотностью

Более простые и наглядные приближенные аналитические методы – приближение Зельдовича и приближение слипания – также часто используются в астрофизике.

Линейная теория гравитационной неустойчивости предсказывает рост, с течением времени, потенциальной моды первоначально слабых флуктуаций плотности. В соответствующих переменных движение частиц при этом эквивалентно свободному инерционному движению. В 1970 году Зельдович [29,30] предложил расширить это решение и на случай конечных флуктуаций плотности. В таком приближении естественно возникают особенности распределения плотности вещества, подобные каустикам оптической волны за фазовым экраном.

Однако результаты прямого численного моделирования показывают, что крупномасштабная структура распределения вещества во Вселенной гораздо проще чем система случайных каустик: Вещество концентрируется в тонких слоях, линиях и кластерах (рис. 3.2). В [10,33] было показано, что подобные структуры хорошо аппроксимируются моделью, когда потоки частиц не проходят друг сквозь друг, а слипаются. Хотя в природе данный механизм является не столкновительным, а гравитационным, тем не менее он может быть адекватно смоделирован введением вязкого диффузионного слагаемого в уравнения Эйлера-Пуассона. Это и служит причиной использования трехмерного уравнения Бюргера в космологических приложениях. Сама же модель получила общепризнанное название – модель слипания (adhesion model).

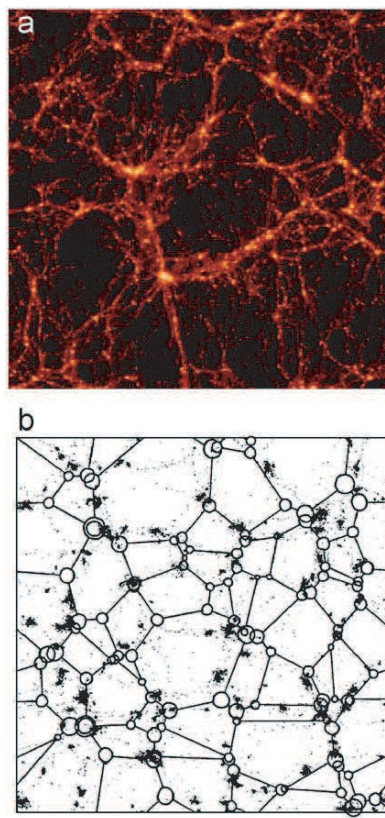


Рис. 3.2. (a) Проекция распределения вещества в скоплении Вирго (Virgo consortium) в двумерном сечении, полученная численным моделированием в работе. (b) Сопоставление результатов прямого численного моделирования газа гравитационно взаимодействующих частиц со скелетом крупномасштабной структуры, найденной в приближении слипания.

Типичные элементы мозаичной структуры – вершины, ребра, грани и внутренности отдельных ячеек, могут быть ассоциированы с различными типами астрономических объектов, такими как скопления, сверхскопления галактик, и расположенными между ними огромными темными областями, плотность галактик в которых очень низка. В настоящее время вершины мозаичной крупномасштабной структуры соответствуют скоплениям галактик. Квазиодномерные филаменты галактик, отвечающие ребрам мозаичных структур – другой типичный элемент крупномасштабной структуры – содержат наибольшую долю массы Вселенной. В то же время грани ячеек маломассивны и к тому же обладают низким контрастом плотности, поэтому их обнаружение наиболее трудно. Идентификация элементов структуры – непростая и пока нерешенная до конца проблема космологии, отсюда неоднозначность в определении их геометрии и массы.

Сама эволюция крупномасштабной структуры Вселенной может трактоваться как непрерывный процесс транспортировки вещества преимущественно из объектов большой размерности к объектам мозаичной структуры, обладающим меньшей размерностью. К примеру, вещество из внутренних ячеек мозаичной структуры (трехмерных объектов) перетекает в ее грани (квазидвумерные объекты), а из них в ребра и вершины мозаичной структуры. В то же время, сами ячейки участвуют в непрерывном движении, деформации и поглощении одних ячеек другими.

3.2 От уравнения Власова-Пуассона к приближению Зельдовича и модели слипания (adhesion model)

Эволюция безстолкновительной материи в трехмерной расширяющейся Вселенной описывается кинетическим уравнением Власова-Пуассона. В односкоростном приближении эволюция неоднородных флуктуаций плотности вещества во Вселенной адекватно описывается тремя уравнениями в частных производных. Сюда относятся уравнение непрерывности, уравнение Эйлера и уравнение Пуассона. При этом, чтобы исключить

однородную составляющую расширяющейся Вселенной, обычно используют сопутствующую (движущуюся вместе с однородным расширением Вселенной) систему координат. В космологии принято вводить сопровождающие координаты \mathbf{x} :

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Моноotonно растущую функцию $a(t)$ называют масштабным фактором. Он учитывает однородное расширение Вселенной. Если нормировать масштабный фактор на единицу в настоящую эпоху, то $a(t)$ просто выражается через красное смещение z : $a(t) = (1+z)^{-1}$. Для Вселенной Эйнштейна де-Ситтера:

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad (3.2)$$

и $t_0^{-2} = 6\pi G\rho(t_0)$, где $\rho(t_0)$ – средняя плотность вещества в момент времени t_0 , а G – гравитационная константа. В более реалистичной Λ CDM модели масштабный фактор – несколько более сложная, но известная функция времени.

Известно, что в процессе эволюции Вселенной ни пекулярная скорость ни гравитационный потенциал не достигают релятивистских значений. По этой причине, при исследовании эволюции неоднородностей плотности вещества во Вселенной, вполне обосновано использование классической механики и ньютоновской гравитации. В указанной выше системе движущихся координат и на языке пекулярных скоростей \mathbf{u} , уравнения непрерывности, Эйлера и Пуассона, описывающие гравитационную неустойчивость в расширяющейся Вселенной, приобретают следующий вид

$$\begin{cases} \partial_t \rho + 3\frac{a}{\dot{a}}\rho + \frac{1}{a}\nabla(\rho\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + \frac{a}{\dot{a}}\mathbf{u} + \frac{1}{a}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{g} \\ \nabla\mathbf{g} = -4\pi G a(\rho - \rho_b), \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь введено поле $\mathbf{g} = -\nabla\psi/a$ такое, что $\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}$. Отметим, что использование расширяющейся системы координат привело к тому, что в уравнении Пуассона появилась средняя плотность ρ_b . В приведенных уравнениях не учитываются силы давления, поскольку мы изучаем среду из частиц, взаимодействующих только за счет сил гравитационного взаимодействия. Система (3.3) описывает гравитационную неустойчивость газа бесстолкновительных частиц в расширяющейся Вселенной. До тех пор пока амплитуда возмущений плотности остается малой, их эволюция описывается в линейном приближении, уравнениями, полученными линеаризацией уравнений (3.3). Точное решение линеаризованных уравнений имеет растущую моду, а также две затухающие моды, которыми в дальнейшем анализе можно пренебречь. В возрастающей моде скорость вещества представляет собой потенциальное поле, параллельное полю ускорения:

$$\mathbf{g} = F(t)\mathbf{u}, \quad (3.4)$$

где $F(t)$ – коэффициент пропорциональности, равный

$$F(t) = 4\pi G\rho_b b/\dot{b} \quad (3.5)$$

Здесь b – коэффициент роста амплитуды возмущений плотности в возрастающей моде, и для Вселенной Эйнштейна де-Ситтера $b \sim t^{2/3}$. Стоит подчеркнуть, что в линейном приближении гравитационный потенциал и потенциал плотности имеют одинаковую пространственную структуру, а в принятых безразмерных переменных просто совпадают.

Зельдович [29,30] предположил, что движения частиц остаются такими же как в линейной теории и на стадии когда флуктуации плотности не малы. Это означает, что условия параллелизма выполняются и на нелинейной стадии. Тогда, вводя новую скорость $\mathbf{v} = \mathbf{u}/(a\dot{b})$, и ограничиваясь лишь растущей модой, можно свести систему (3.3) к уравнениям для скорости и плотности:

$$\begin{cases} \partial_b \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v} = -\nabla \tilde{\psi} \\ \partial_b \rho + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

исключив уравнение Пуассона. Здесь $\tilde{\psi} = \psi / (\dot{b}F(t))$.

Первое уравнение описывает свободное движение частиц (см. Главу 2) и выражает в эйлеровой форме знаменитое приближение Зельдовича. Уравнение оказывается приближенным по двум причинам. Во-первых в нем учитывается лишь растущая мода. Во-вторых, предполагается, что условие параллелизма выполняются и на нелинейной стадии, когда возмущения плотности уже не малы. Отметим, что для одномерных возмущений последнее условие выполняется всегда, и для растущей моды решение уравнения оказывается точным вплоть до образования многопоточности. Как уже отмечалось, в двумерном случае эти уравнения эквивалентны уравнениям для углов наклона волнового фронта и интенсивности оптической волны за фазовым экраном. При этом переменная t играет роль расстояния от фазового экрана. Яркие структуры каустик на дне бассейна со взволнованной поверхностью в солнечный день (см. рисунок 3.3) воспроизводят распределение плотности вещества в двумерном случае.

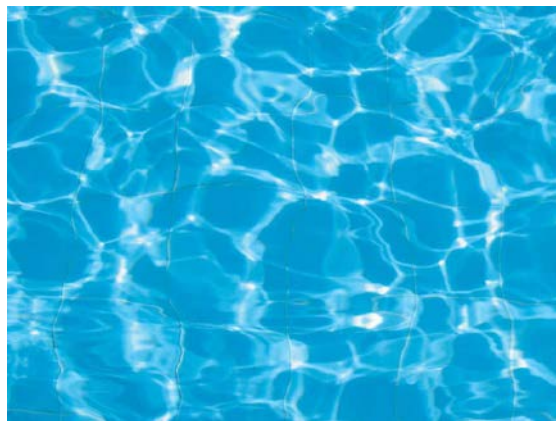


Рис. 3.3. Узоры каустик на дне бассейна

В лагранжевом представлении приближение Зельдовича (3.6) описывает свободное движение частиц

$$\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{y} + \mathbf{v}_0(\mathbf{y})t \quad (3.7)$$

Из закона сохранения массы для плотности вещества $\rho(\mathbf{y}, t)$ в лагранжевом представлении имеем (см. главу 2 настоящего пособия)

$$\rho(\mathbf{y}, t) = \frac{\rho_0}{J(\mathbf{y}, t)} \quad (3.8)$$

Где J – якобиан перехода от эйлеровых координат к лагранжевым

$$J(\mathbf{y}, t) = \det(\delta_{ij} - ta_{ij}(\mathbf{y})), a_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \tilde{\psi}_0(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} \quad (3.9)$$

Здесь $\tilde{\psi}_0(\mathbf{y})$ – потенциал начального поля скорости. В каждой точке матрицу $a_{ij}(\mathbf{y})$ можно привести к диагональному виду, и тогда для плотности имеем

$$\rho(\mathbf{y}, t) = \frac{\rho_0}{(1-t\beta_1(\mathbf{y}))(1-t\beta_2(\mathbf{y}))(1-t\beta_3(\mathbf{y}))} \quad (3.10)$$

Здесь β_i – собственные значения матрицы $a_{ij}(\mathbf{y})$. Если один из сомножителей в (3.10) обращается в нуль, плотность вещества обращается в бесконечность, то есть образуются особенности плотности (каустики, для оптических волн). В астрофизических приложениях начальный потенциал $\tilde{\psi}_0(\mathbf{y})$ является случайным гауссовым полем. Для таких полей вероятность того, что все три или два собственных значения β_i совпадают – равна нулю и поэтому сжатие вещества идет быстрее вдоль одной из осей. С точки зрения динамики, сказанное выше означает, что точно трехмерный сферический коллапс невозможен, а коллапс в линию разрешен, хотя он и отличается от цилиндрически симметричного случая даже локально

Первыми в приближении Зельдовича возникают сильно анизотропные особенности плотности, имеющие гораздо меньший масштаб по одной из осей. Поэтому это приближение часто называют теорией блинов Зельдовича (Zeldovich pancake theory). С течением времени каустики (особенности) расширяются, перекрываются и в приближении Зельдовича возникает сложная многопоточковая структура распределения вещества.

Однако результаты прямого численного моделирования показывают, что после возникновения особенностей их ширина растет гораздо медленнее, чем это

следует из теории Зельдовича. Последнее связано с тем, что из-за повышенной плотности вещества в особенностях, на частицы вблизи особенностей действует возвращающая сила. За счет нее частицы начинают осциллировать в окрестности особенности. Для полукачественного описания эффекта перехода крупномасштабного движения вещества в мелкомасштабные осцилляции вблизи особенностей было предложено ввести в уравнение движение диффузионное слагаемое $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$ [11, 33] (см. также [3, 5, 10]). Оно должно усреднено описывать эффект гравитационного “слипания” в окрестностях особенностей. Именно поэтому в космологии данную модель принято называть моделью слипания (adhesion model). В результате в системе уравнений (3.6) уравнение свободного движения частиц заменятся трехмерным уравнением Бюргера

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.11)$$

Чтобы диффузионный член оказывал усредняющее воздействие только в окрестностях особенностей, коэффициент диффузии μ должен быть достаточно мал. Часто рассматривается также предел $\mu \rightarrow 0$, что эквивалентно гравитационному “слипанию” частиц в бесконечно тонкие “блины”. В этом случае решение уравнения Бюргера описывает “скелет” крупномасштабного распределения вещества.

В космологии модель слипания используется в двух формах. В одной полагают, что коэффициент вязкости ν мал, но не равен нулю, а в другой ν считают бесконечно малым ($\nu \rightarrow 0+$). В случае не равного нулю коэффициента вязкости можно найти траектории частиц численным интегрированием уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{y}, t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(\mathbf{y}, t), t)$$

а затем определить плотность частиц с помощью уравнения непрерывности.

Пример крупномасштабной структуры, полученной указанным способом, дан на рисунке 3.4. Здесь авторы [34] изобразили результат

численного моделирования распределения галактик в тонком слое трехмерной области.

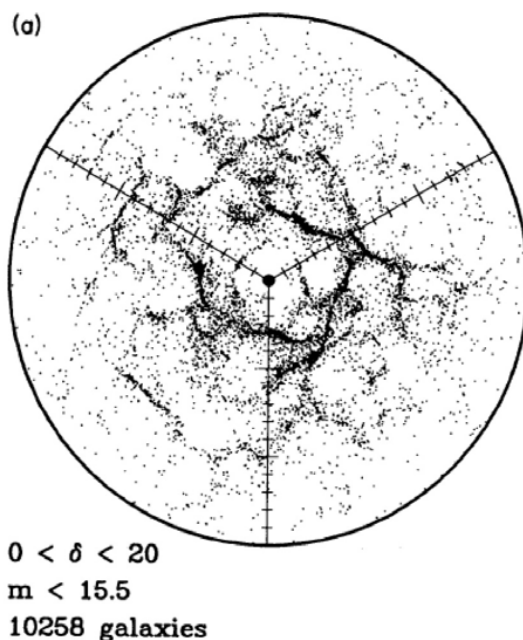


Рис. 3.4. Результат моделирования распределения галактик в пространстве красных смещений, с помощью модели слипания в случае малого, но не равного нулю коэффициента вязкости ν [34]

Обсудим некоторые следствия предположения, состоящего в том что коэффициент вязкости бесконечно мал: $\mu \rightarrow 0_+$, поскольку этот случай напрямую связан с возникновением упоминаемой выше мозаичной крупномасштабной структуры Вселенной. Как и в одномерном случае процедура отыскания абсолютного максимума допускает наглядную геометрическую интерпретацию, проиллюстрированную на рисунке 3.5 в двумерном случае. Связь начальных лагранжевых координат \mathbf{y} и текущих эйлеровых координат \mathbf{x} некоторой фиксированной частицы в момент времени t может быть определена опусканием параболоида

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t} + P_0$$

на поверхность начального потенциала. А именно, будем уменьшать значение постоянной из бесконечности до тех пор, пока параболоид не

коснется в первый раз, в некоторой точке с координатами y , поверхности начального потенциала Φ_0 . При этом координаты первой точки касания равны лагранжевым координатам выбранной частицы.

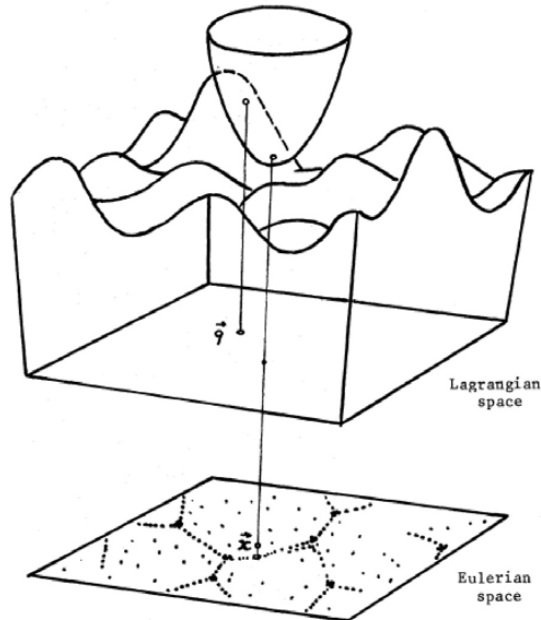


Рис. 3.5. Иллюстрация нахождения связи лагранжевых и эйлеровых координат частиц в рамках модели слипания.

На начальной стадии время t мало и кривизна параболоида существенно больше характерной кривизны поверхности Φ_0 . На этой стадии указанное отображение лагранжевых в эйлеровы координаты практически всюду эквивалентно приближению Зельдовича. С течением времени кривизна параболоида уменьшается. Соответственно, возникают области в лагранжевой системе координат, не отображающиеся на эйлерову плоскость. В двумерном случае параболоид может касаться поверхности начального потенциала Φ_0 , соответственно, в одной, двух и трех точках. Первый тип касания отвечает не слипавшимся к данному моменту частицам, обладающим конечной плотностью. Точки второго типа касания соответствуют частицам – слипшимся в линии – двумерные аналоги блинов Зельдовича. Линии и узлы образуют хаотическую мозаичную структуру, состоящую из ячеек, ограничивающих их линий, и узлов, где смыкаются

разные линии. С течением времени одни ячейки расширяются, а другие сжимаются и пропадают. В момент поглощения ячеек параболоид касается начального потенциала сразу в четырех точках. Классификация особенностей и их метаморфоз приведена в [35].

Обладая достаточным воображением и опираясь на обсужденные выше двумерные геометрические построения, нетрудно представить основные особенности мозаичной структуры крупномасштабного распределения вещества в трехмерном пространстве. А именно, начальный потенциал Φ_0 представляет собой трехмерную гиперповерхность в четырехмерном пространстве. Соответственно, аналогично тому как это было подробно описано в одномерном и двумерном случаях, трехмерный параболоид P опускается на гиперповерхность начального потенциала. При этом правила нахождения связи между лагранжевыми и эйлеровыми координатами остаются прежними: Это координаты точек первого касания параболоидом начального потенциала и координаты центра параболоида. Здесь существуют четыре способа касания параболоидом начального потенциала. Если параболоид касается начального потенциала лишь в одной точке, тогда соответствующая частица не испытывала, до текущего момента времени столкновений с другими частицами. В остальных трех случаях касания параболоидом сразу двух, трех и четырех точек начального потенциала, центр параболоида соответствует частицам, слившимся в гранях, ребрах и вершинах трехмерной мозаичной структуры. Кроме того, подобно тому что мы наблюдали в одномерном и двумерном случаях, в критические моменты времени, соответствующие исчезновению тех или иных ячеек трехмерной мозаичной структуры, число точек касания параболоида и начального потенциала становится больше четырех. Набор поверхностей (блинов), массивных линий и компактных сгустков определяет мозаичную структуру распределения вещества в трехмерном пространстве, когда вещество сосредоточено в основном на границах мозаики – массивных блинах, линиях и вершинах, разделяющих расположенные внутри мозаичной структуры

ячейки – темные области с низкой плотностью вещества. Такая трехмерная мозаичная структура служит геометрическим скелетом реального распределения вещества во Вселенной.

Как следует из свойств трехмерного уравнения Бюргера, на больших временах возникает ячеистая структура вещества: темные области с плотностью много ниже средней, поверхности с повышенной концентрацией вещества, разделяющие темные области, пересечения поверхностей – линии, и наконец, пересечения линий – скопления. Естественно, что модель слипания не описывает при этом внутреннюю структуру особенностей. Численные эксперименты по прямому моделированию газа гравитационно взаимодействующих частиц демонстрируют достаточно хорошее согласие с моделью слипания. Однако, несмотря на это, связь между исходными уравнениями и моделью до сих пор остается открытой.

Ниже приведены результаты сравнения модели слипания с результатами прямого численного моделирования движения гравитационно взаимодействующих частиц. Рисунок 3.6 демонстрирует хорошее согласие между мозаичной структурой, полученной в рамках модели слипания, и результатом численного моделирования движения гравитационно взаимодействующих частиц в двумерном пространстве.

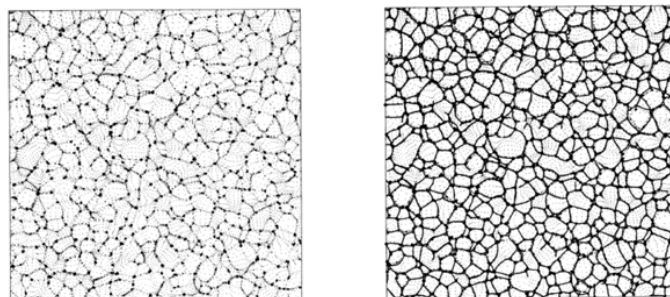


Рис. 3.6. На левой панели показано распределение частиц, полученное численным моделированием движения гравитационно взаимодействующих в двумерном пространстве частиц. На правой панели изображена хаотическая мозаичная структура, полученная в рамках двумерной версии модели слипания, и наложенная на распределение частиц из левой панели

Формирование и последующая эволюция крупномасштабной структуры описывается, в рамках модели слипания, как процесс, состоящий из двух стадий [10]. В течение первой стадии материя концентрируется в блинах, затем движется внутри них к массивным линиям – ребрам зарождающейся структуры, движение вдоль которых ведет к образованию вершин – массивных компактных сгустков в окрестности смыкания ребер. В популярной сейчас Λ CDM модели эта стадия характеризуется крошечным по космологическим понятиям масштабом, определяющимся типом темного вещества предполагаемым в той или иной модели. Так если темное вещество состоит из гипотетических нейтрально с массой порядка 100 GeV , то характерная масса первых структур всего лишь порядка массы Земли. К концу первой стадии полностью формируется мозаичная структура распределения вещества, в которой основная масса сосредотачивается ребрах и вершинах структуры, и только малая часть вещества остается в блинах и темных областях – внутренностях отдельных мозаичных ячеек. Эта стадия до сих пор не исследована с помощью численного моделирования так как она предъявляет пока невыполнимые требования к необходимому числу частиц в модели.

Вторая стадия характеризуется деформацией мозаичной структуры из-за гравитационного взаимодействия вещества. На этой стадии ячейки сливаются во все более массивные и крупные ячейки, в то время как некоторые ячейки сжимаются и вовсе пропадают, поглощенные более крупными ячейками. В конечном итоге почти вся масса вещества в основном сосредотачивается в гравитационно связанных компактных скоплениях темного вещества, от самых маломассивных, возникших на первой стадии, до очень больших, естественно ассоциирующихся с самыми массивными скоплениями галактик. Такие компактные скопления темного вещества наблюдаются в численных моделях образования структуры и носят название темных гало (dark matter halos). Гало, соответствующие

галактическим массам, гравитационно притягивают барионную компоненту массы, и в них образуются звезды; таким образом они становятся галактиками. Гало с большими массами могут образовывать группы галактик и скопления галактик.

В отличие от уравнения Навье-Стокса, в уравнение Бюргерса не входит плотность. Поэтому, в рамках этого уравнения, закон сохранения импульса в общем случае не выполняется. Лишь для одномерных полей и постоянной начальной плотности уравнение Бюргерса с исчезающе малой вязкостью описывает газ слипающихся частиц, удовлетворяющих закону сохранения импульса. При этом положения особенностей плотности (тяжелых частиц), образовавшихся за счет слипания легких частиц, совпадают с разрывами скорости в решении уравнения Бюргерса. Как было показано выше, положение особенностей плотности слипшихся частиц при непостоянной начальной плотности ведут себя уже по другим законам, чем разрывы поля скорости в рамках уравнения Бюргерса. В многомерном уравнении Бюргерса образование особенностей также не зависит от распределения плотности. Однако даже при постоянной начальной плотности возникающие особенности не удовлетворяют закону сохранения импульса. Связано это с тем, что слипание частиц с неплоской геометрией, с точки зрения сохранения импульса, эквивалентно среде с переменной плотностью. Более того, для сферически симметричного случая из формального определения координат слипшихся частиц по уравнению Бюргерса следует, что в трехмерном случае энергия системы в результате слипания возрастает.

Таким образом, относительно хорошее согласование распределения вещества во Вселенной и модели слипания является весьма нетривиальным и объяснение этому кроется скорее всего в случайном характере начальных возмущений. Действительно, условия применимости модели Зельдовича точно выполняются лишь для растущей моды и для одномерных возмущений. При этом положение особенностей за счет слипания частиц правильно предсказывается на основе уравнения Бюргерса также лишь для одномерных

возмущений. Именно такие квазиодномерные возмущения и реализуются при случайном характере начальных условий.

В заключение отметим, что результаты динамического моделирования в рамках приближения слипания можно посмотреть на Youtube (**The Sticky Geometry of the Cosmic Web, version 2.01**)

<https://www.youtube.com/watch?v=wI12X2zczqI>

Результаты прямого численного моделирования (N-body simulation) можно также посмотреть на Youtube

Двухмерный случай:

<https://www.youtube.com/watch?v=nHvcqV92oqY>

<https://www.youtube.com/watch?v=74IsySs3RGU>

Трёхмерный случай

<https://www.youtube.com/watch?v=eDGtFRj4xXc>

Глава 4

Об эволюции интенсивных акустических шумов

Введение.

Распространение плоских нелинейных волн описывается уравнением Бюргерса, а распространение цилиндрических и сферических волн - обобщенным уравнением Бюргерса [15,36,37]. В приближении геометрической акустики или для одномерных возмущений эволюция интенсивных акустических волн определяется совокупным действием трех эффектов: нелинейности, высокочастотной диссипации и расходимости. Из-за затухания и расходимости относительная роль нелинейных эффектов уменьшается и вдали от излучателя волна выходит на линейный режим распространения. При этом эволюция такой волны описывается линейным диффузионным уравнением. Из-за высокочастотного затухания на больших расстояниях "одномасштабные" входные возмущения приобретают универсальную форму. При этом характер затухания волны качественно различен для периодического сигнала и локализованного импульса. Периодический входной сигнал на больших временах имеет форму гармонической волны и при этом ее амплитуда экспоненциально уменьшается. Локализованный импульс нулевой площади (N-волна) на больших расстояниях имеет универсальную форму - полинома Эрмита первого рода (первая производная от гауссова распределения), а амплитуда импульса уменьшается по степенному закону. Таким образом, для этих двух видов сигналов интегральное действие нелинейности и диссипации на начальном (нелинейном) этапе распространения влияет только на величину одной константы, определяющей амплитуду синусоидальной волны или импульса на больших расстояниях.

Более сложное поведение наблюдается для сигнала со сложной многомасштабной структурой. Так для начального возмущения с фрактальной структурой может появиться необычная последовательность стадий развития: нелинейная стадия может наступить позже линейной стадии. На нелинейной стадии такая волна затухает более медленно чем периодическая волна или простой импульс. Решение уравнения Бюргерса со случайными начальными условиями

часто называется турбулентностью Бюргера или акустической турбулентностью. В случае исчезающей вязкости непрерывное случайное начальное поле преобразуется в последовательность прямых линий с некоторым наклоном и с случайными местоположения разрывов. Из-за слияния разрывов внутренний масштаб турбулентности увеличивается, и случайная волна затухает более медленно чем периодический сигнал. Асимптотическое поведение случайных полей в случае конечной вязкости также сильно зависит от статистических свойств начального поля. Если в начальном спектре преобладают крупномасштабные компоненты, то нелинейная стадия никогда не преобразуется в линейный режим распространения. В противоположном случае заключительная эволюция волны зависит от закона спада (хвоста) начального распределения плотности вероятности начального потенциала - интеграла от начального поля скорости.

Физическая причина различия в эволюции шумов и периодических сигналов связана с тем, что для синусоидального возмущения период волны сохраняется, а для шумов многократное слияние разрывов приводит к увеличению характерного масштаба случайной волны. На спектральном языке это различие объясняется следующим образом. Для тонального возмущения нелинейность приводит только к генерации высших гармоник, которые на поздней стадии затухают и асимптотически основной является первая гармоника. Для шумового же сигнала нелинейное взаимодействие приводит к генерации "разностных медленно затухающих, низкочастотных компонент.

4.1 Статистическая нелинейная акустика

Обсудим основные эффекты, присущие эволюции интенсивных шумовых акустических волн. Еще раз напомним, что в квадратичной среде взаимодействие тройки волн происходит эффективно, если выполняются условия синхронизма $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, $k_1 + k_2 = k_3$. Очевидно, в акустике процесс отыскания подобных волн чрезвычайно прост: из дисперсионного уравнения звуковых волн $\omega = ck$ следует, что условия синхронизма выполнены любой тройкой однонаправленных взаимодействующих волн. В итоге для гармонического входного возмущения имеет место лавинообразный рост числа высших гармоник $\omega_n = n\omega_1$. Причем на

начальной стадии амплитуда n -ой гармоники $A_n \sim A_1^{n-1} z^{n-1}$, где A_1 амплитуда исходного гармонического сигнала, а z расстояние от излучателя.

Особенности поведения случайно-модулированного квазигармонического сигнала на указанной стадии легко объяснить с помощью известного статистического неравенства $\langle A^2 \rangle > \langle A \rangle^2$. Из него следует, что нелинейность подчеркивает большие выбросы, за счет чего нелинейные процессы для шумового сигнала протекают более эффективно, чем для гармонической волны. Так при гауссовой статистике квазимонохроматического шума интенсивность n -ой гармоники в $n!$ раз больше, чем у монохроматического сигнала той же начальной интенсивности. Этот факт наблюдался в экспериментах [38] по распространению узкополосного акустического шума интенсивностью 200 Па в заполненной воздухом 75-метровой трубе.

Лавинообразный рост числа высших гармоник ведет к образованию разрывов, на которых энергия диссипирует. В случае монохроматического возмущения волна трансформируется в последовательность пилообразных импульсов с амплитудой $A(z) \sim \frac{A_1}{(1 + \beta z A_1 \omega_1)}$. При заданном расстоянии от входа z предельная амплитуда $A_*(z) \sim 1/\beta z \omega_1$ определяются частотой ω_1 и параметром нелинейности β . Таким образом, для амплитудно модулированной волны $A_1 = A_1(t)$ идет подавление больших выбросов, а значит вероятностное распределение шума с течением времени сужается, обращается в нуль вне интервала $[-A_*, A_*]$ и стремится к равномерному шириной $2A_*(z)$, не зависящей от начальной амплитуды и пропорциональной периоду волны. Подобная универсальная форма распределения присуща и произвольной квазипериодической волне.

При анализе статистических волновых проблем, как правило, интересуются в первую очередь эволюцией спектра волны $E_0(\omega) \rightarrow E_0(\omega, z)$. При конечной ширине начального спектра $\Delta\omega_1$ ширина спектра n -ой гармоники растет с номером гармоники. Причем, в зависимости от вида исходной фазовой модуляции, $\Delta\omega_n \simeq n\Delta\omega_1$ или же $\Delta\omega_n \simeq n^{1/2}\Delta\omega_1$.

На разрывной стадии фазовая модуляция исходной волны порождает флуктуации положений разрывов, и как следствие случайную модуляцию амплитуды пилообразной волны. При $\Delta\omega_n \approx \omega_1$ спектры соседних гармоник перекрываются и формируют сплошной спектр $\sim \omega^{-2}$. На рисунке 4.1 изображена эволюция спектра интенсивного квазимонохроматического шума в заполненной воздухом трубе [39] с центральной частотой 1,5 кГц, шириной спектра 316 Гц и интенсивностью 150 дБ.

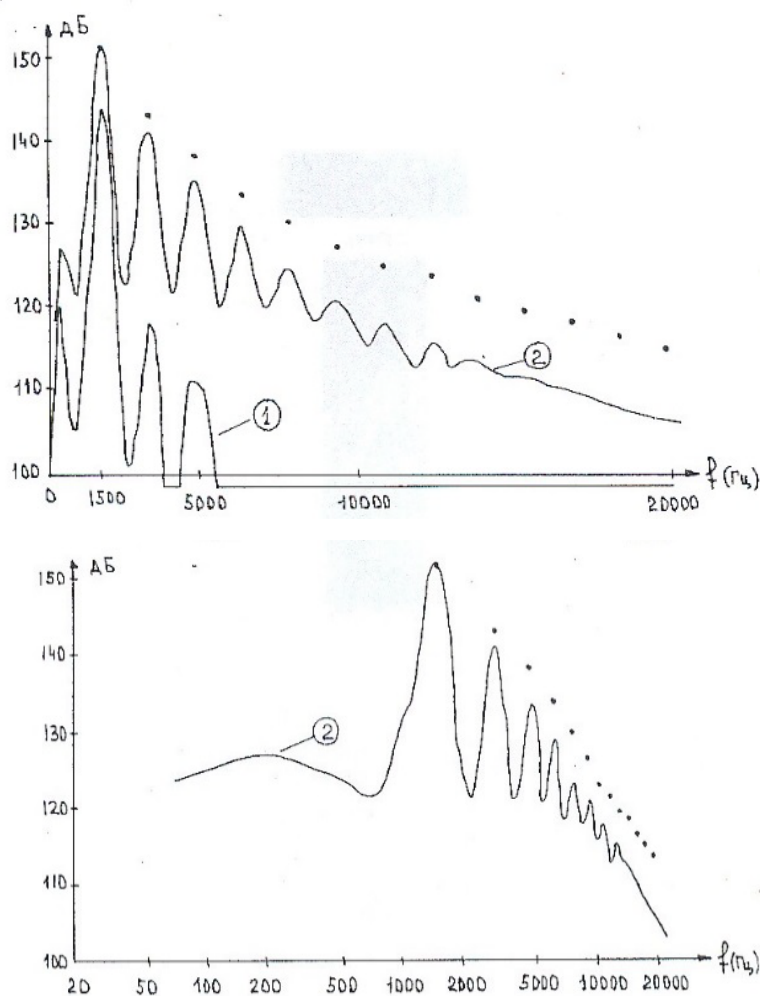


Рис. 4.1. Эволюция спектра квазимонохроматического шума

Здесь кривая 1 - спектр вблизи излучателя $z = 0,35\text{м}$, кривая 2 - на расстоянии 10,35м, (изображена с усилением 20 дБ), а точками указаны амплитуды тонального сигнала той же интенсивности в сечении 10,35м.

Принципиальное отличие поведения квазигармонического сигнала от эволюции тонального состоит в генерации разностных комбинационных частот. Хотя эффективность генерации низкочастотных компонент низка, они затухают медленнее, чем высокочастотные, и в конечном итоге определяют асимптотическое поведение поля на больших временах. Амплитуда низкочастотной компоненты по порядку величины равна $v_n \simeq (\Delta\omega_1/\omega_1)A_1$. На пилообразной стадии ее появление обусловлено движением пилообразных фронтов, ведущим к дополнительному уширению спектральных линий высокочастотных гармоник. Из-за более интенсивного затухания высокочастотных компонент вся энергия волны в конце концов сосредоточивается в низкочастотной части спектра, а ее затухание начнется, когда разрывы пилообразной волны будут сливаться. По порядку величины это происходит на расстояниях $z \sim z_n \left(\frac{\omega_1}{\Delta\omega_1}\right)^2 A_1$, так как скорости разрывов сильно коррелированы.

Для эволюции широкополосного шума характерны как генерация высокочастотных компонент, вызванная образованием разрывов, так и возникновение низкочастотной части спектра. Разрывы при этом слабо коррелированы, а постепенное слияние мелких разрывов ведет к росту характерного масштаба шума и смещению спектра в сторону низких частот. За счет появления разрывов теряется информация о тонкой структуре начального сигнала, а из-за многократного слияния разрывов спектр приобретает универсальный вид, фактически независимый от формы начального спектра. Эти нелинейные явления объясняют эффект аномально сильного высокочастотного “крыла”, формирующегося в атмосфере при распространении шума мощных авиационных и ракетных двигателей.

В случае взаимодействия шумов и регулярных сигналов появление разрывов также кардинально меняет спектральный состав волны. В частности, шумовые компоненты возникают в очень широком частотном диапазоне [40]. Так при взаимодействии интенсивной высокочастотной гармонической волны и низкочастотного шума, можно считать, что шум дает лишь квазистатический

сдвиг фаз ВЧ сигнала пропорциональный НЧ сигналу, частоте гармоники и расстоянию от входа (рис.4.2). Иными словами, спектр шумовой компоненты n -ой гармоники повторяет спектр низкочастотного шума.

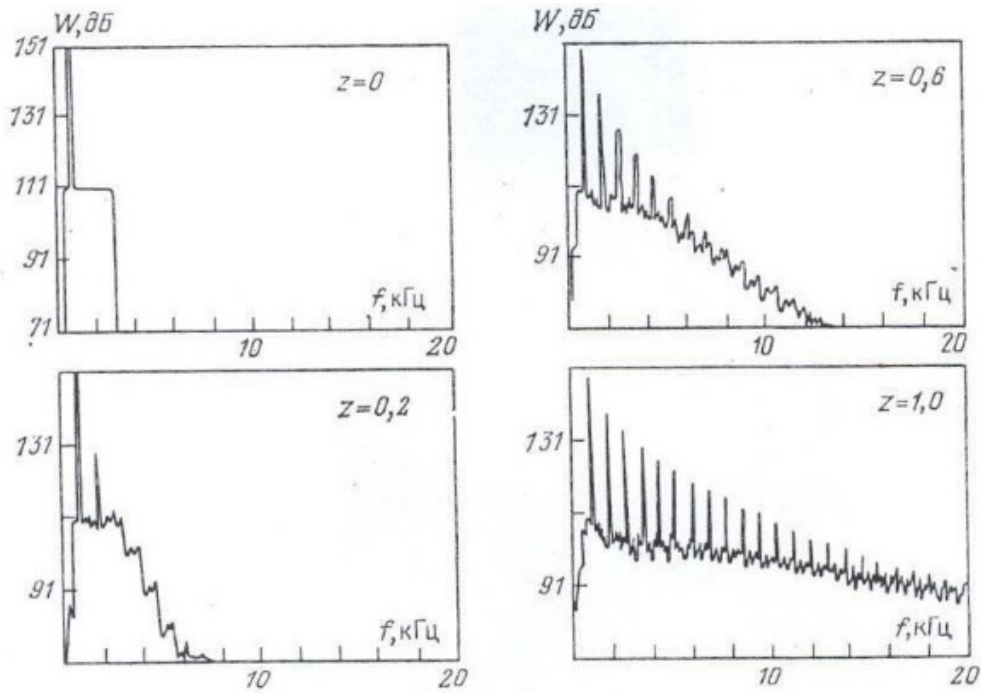


Рис. 4.2. Взаимодействие шума и тонального сигнала

На разрывной стадии, когда амплитуды гармоник обратно пропорциональны $zn\omega_1$, амплитуда спектра шумовой компоненты n -ой гармоники не зависит от расстояния z и равна амплитуде НЧ шума для большого числа гармоник. Этот эффект естественно назвать эффектом аномального усиления шума.

Еще раз подчеркнем, что для акустических волн можно пренебречь дисперсией в широком диапазоне частот. В средах без дисперсии эффективно взаимодействует большое число гармоник, причем это взаимодействие ведет к сильной когерентности их фаз. Поэтому здесь нельзя использовать метод медленно меняющихся амплитуд, эффективный в нелинейной оптике, где из-за сильной дисперсии достаточно ограничиться учетом взаимодействия малого числа линейных мод. Сильная когерентность спектральных компонент не позволяет также применить приближение хаотических фаз, используемое в теории слабой

турбулентности, где описание взаимодействия большого числа линейных мод удается свести к кинетическим уравнениям для интенсивности мод.

4.2 Об асимптотическом поведении интенсивных акустических шумов.

4.2.1. Основные уравнения.

В бегущей системе координат распространение плоской или расходящейся интенсивной акустической волны описывается обобщенным уравнением Бюргерса [5]

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{jv}{2r} - \frac{\beta}{c^2} v \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

где $v(r, t)$ - скорость волны, c - линейная скорость звука, ρ - невозмущенная плотность среды, b - коэффициент вязкости, r - расстояние от источника, $\beta = (\gamma + 1)/2$ - параметр нелинейности среды. Число j определяет тип волны: $j = 0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической волны соответственно.

Особенностью поведения неплоских шумовых волн является то, что на линейной стадии спектр шума имеет универсальную форму, зависящую от одного единственного параметра D_∞ - крутизной спектра в области нулевых частот. Эволюция сферических и цилиндрических волн определяется тремя физическими явлениями: нелинейным искажением, вязкой диссипацией и геометрической расходимостью. Соответственно можно ввести три характерных масштаба: r_{nl} - масштаб проявления нелинейных эффектов, r_l - расстояние линейного затухания и r_0 - радиус источника.

Предположим, что начальное возмущение $v_0(t) = v(t, r = r_0)$ характеризуется некоторой типичной амплитудой V_0 и частотой ω_0 . Тогда для плоской волны мы можем ввести два расстояния:

$$r_{nl} = \frac{c^2}{\beta \omega_0 v_0}, \quad r_l = \frac{2c^3}{b \omega_0^2} \quad (4.2)$$

На расстоянии r_{nl} проявляются нелинейные эффекты, в то время как r_l есть характерное расстояние линейного затухания. Их отношение дает акустическое число Рейнольдса $Re = r_l/r_{nl}$, которое является единственным безразмерным

параметром, определяющим эволюцию плоской волны. Обратную величину числа Рейнольдса

$$\varepsilon = \frac{1}{Re} = \frac{r_{nl}}{r_l} \quad (4.3)$$

в западной литературе принято называть числом Гольдберга. Определение (4.3) Re отлично от определения из [5] на множитель 2β , который порядка единицы для воздуха и для воды. Для расходящихся волн появляется другой важный масштаб - радиус источника r_0 . Таким образом мы можем определить "начальный безразмерный радиус" R_0 как отношение

$$R_0 = \frac{r_0}{r_{nl}} = \frac{\beta r_0 \omega_0 v_0}{c^2} \quad (4.4)$$

Переходя к безразмерным переменным:

$$V = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{j}{2}} \frac{V}{V_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad x = \frac{r-r_0}{r_{nl}} \quad (4.5)$$

получаем из (4.1) уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \left(\frac{R_0}{R_0-x}\right)^{\frac{j}{2}} V \frac{\partial V}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \quad (4.6)$$

с граничными условиями

$$V(\tau, x = 0) = V_0(\tau) = v_0(\tau/\omega_0)/v_0 \quad (4.7)$$

где v_0 - амплитуда входного поля $v_0(t)$. Как видно из выше приведенного уравнения, для расходящихся волн относительное влияние нелинейности на эволюцию поля уменьшается с увеличением расстояния от источника. Это обстоятельство очень полезно в использовании уравнения (4.6) для численного моделирования расходящихся волн. Однако, для асимптотического рассмотрения более удобна другая форма уравнения (4.1):

$$\frac{\partial V}{\partial R} - V \frac{\partial V}{\partial \tau} = \varepsilon g(R) \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}, \quad V(\tau, R = 0) = V_0(\tau). \quad (4.8)$$

Здесь для плоской геометрии $x = R$ и (4.8) можно записать как:

$$\frac{\partial V}{\partial R} - V \frac{\partial V}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}, V(\tau, R = 0) = V_0(\tau). \quad (4.9)$$

Для неплоских волн функция $g(R)$ увеличивается с ростом R , что означает относительное увеличение влияния линейной диссипации с расстоянием. При этом для цилиндрических волн:

$$R = 2R_0 \left(\left(\frac{R_0 + x}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right), \quad g(R) = 1 + \frac{R}{2R_0} \quad (4.10)$$

и для сферических волн:

$$R = R_0 \ln \left(\frac{R_0 + x}{R_0} \right), \quad g(R) = \exp \left(\frac{R}{R_0} \right) \quad (4.11)$$

Для регулярных волн будем считать, что граничное условие к уравнению (4.8) представляет гармоническое возмущение:

$$V(\tau, R = 0) = V_0(\tau) = \sin \tau \quad (4.12)$$

Для шумового возмущения предполагаем, что источник генерирует Гауссов случайный процесс

$$v(\tau, R = 0) = v_0(\tau) = \frac{\partial \psi_0(\tau)}{\partial \tau} \quad (4.13)$$

с корреляционной функцией и энергетическим спектром

$$B_V(\tau) = \langle V_0(t + \tau) V_0(t) \rangle = - \frac{d^2 B_\psi(\tau)}{d\tau^2} \quad (4.14)$$

$$E_V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_V(\tau) \exp(i\omega\tau) d(\tau) \quad (4.15)$$

Мы принимаем, что дисперсии безразмерных скорости $V_0(\tau)$ и потенциала $\psi_0(\tau)$ имеют значения равные единице

$$\sigma_V^2 = \langle V_0^2 \rangle = 1, \sigma_\psi^2 = \langle \psi_0^2 \rangle = \frac{\sigma_V^2}{\Omega_0^2} = 1 \quad (4.16)$$

Здесь $\tau_0 = \Omega_0^{-1} = \frac{\sigma_\psi}{\sigma_V}$ - время корреляции безразмерного начального потенциала и также имеет значение равное единице. В дальнейшем мы

рассмотрим входные спектры следующей формы:

$$E(\omega) = \alpha \omega^n \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\gamma^2}\right), n \geq 2 \quad (4.17)$$

имеющие степенное поведение на низких частотах. Из условия (4.16) следует:

$$\gamma^2 = \frac{1}{n-1}, \alpha = (n-1)^{\frac{n+1}{2}} / \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (4.18)$$

где $\Gamma(z)$ - Гамма-функция.

4.2.2. Эволюция плоских волн.

Замена Хопфа-Коула. Асимптотические решения на больших расстояниях и в случае исчезающей вязкости.

Известно, что для плоских волн уравнение Бюргерса (9) заменой Хопфа-Коула [43-44]

$$V(\tau, R) = 2\varepsilon \frac{\partial \ln(\phi)}{\partial \tau} = 2\varepsilon \frac{\phi_\tau}{\phi} \quad (4.19)$$

сводится к линейному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \quad (4.20)$$

Граничное условие к этому уравнению определено потенциалом $\psi_0(\tau)$ через начальное поле скорости $V_0(\tau)$:

$$\phi(\tau, R = 0) = \phi_0(\tau) = \exp(\psi_0(\tau)/2\varepsilon), \quad \psi_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} V_0(\tau) d\tau \quad (4.21)$$

Следовательно, уравнение Бюргерса имеет точное решение

$$V(\tau, R) = \frac{\int (t-\tau) \exp\left(\frac{\Phi(t,\tau,R)}{2\varepsilon}\right) dt}{R \int \exp\left(\frac{\Phi(t,\tau,R)}{2\varepsilon}\right) dt} \quad (4.22)$$

$$\Phi(t, \tau, R) = \psi_0(t) - \frac{(t-\tau)^2}{2R} \quad (4.23)$$

Рассмотрим возмущение с ограниченным начальным потенциалом $|\psi_0(\tau)| < \infty$, принимая, что $\psi_0(\tau)$ является периодическим сигналом или стационарным шумом с достаточно быстро спадающим распределением плотности вероятности потенциала ψ_0 . Для соответствующего возмущения в $\phi_0(\tau)$ выделим постоянную

компоненту $\langle \phi_0 \rangle$. Здесь $\langle \dots \rangle$ - статистическое усреднение для случайных начальных условий, и эти же самые скобки означают усреднение за период в случае периодического начального сигнала. Граничное условие к уравнению (4.20) может быть представлено как

$$\phi_0(\tau) = \langle \phi_0 \rangle (1 + U_0(\tau)) \quad (4.24)$$

где $\langle \phi_0 \rangle$ - усреднение ϕ_0 и $\langle U_0(\tau) \rangle = 0$. Здесь $U_0(\tau)$ - относительные возмущения поля $\phi_0(\tau)$. Легко показать, что средняя величина $\langle \phi_0 \rangle$ не зависит от R , и, соответственно, решение линейного диффузионного уравнения может быть представлено как:

$$\phi_0(\tau, R) = \langle \phi_0 \rangle (1 + U(\tau, R)) \quad (4.25)$$

С ростом расстояния R вязкая диссипация приводит к сглаживанию неоднородностей и дисперсия поля $U(\tau, R)$ уменьшается. На расстояниях, когда

$$\sigma_U^2(R) = \langle U^2(\tau, R) \rangle \ll 1 \quad (4.26)$$

решение (4.25) приобретает вид:

$$V(\tau, R) = 2\varepsilon \frac{\partial(\ln(\langle \phi_0 \rangle (1 + U(\tau, R))))}{\partial \tau} \approx 2\varepsilon \frac{\partial U(\tau, R)}{\partial \tau} \quad (4.27)$$

Так как $U(\tau, R)$ удовлетворяет линейному уравнению, то и $V(\tau, R)$ также удовлетворяет линейному уравнению, что свидетельствует о том, что волна вышла на линейную стадию. Накопленные нелинейные эффекты присутствуют в этом решении через нелинейное отношение между начальным полем $V_0(\tau)$ и вспомогательным полем $U_0(\tau)$.

К сожалению, для расходящихся волн нет точного решения обобщенного уравнения Бюргера и невозможно написать некоторое общее выражение для поля скорости на асимптотической стадии эволюции. Тем не менее для малых чисел Рейнольдса это может быть сделано методом возмущения, а для больших чисел Рейнольдса асимптотическое поведение волны можно найти, используя сшивку решений на нелинейной и линейной стадиях.

В случае исчезающей вязкости $\varepsilon \rightarrow 0$ (бесконечное число Рейнольдса) интеграл в уравнении (4.22) может быть вычислен методом спуска, и мы

получаем следующее асимптотическое решение уравнения Бюргерса

$$V(\tau, R) = \frac{t_{max}(\tau, R) - \tau}{R} \quad (4.28)$$

где $t_{max}(\tau, R)$ - координата абсолютного максимума $\Phi(t, \tau, R)$ по t . Очень важно, что это решение является и предельным решением обобщенного уравнения Бюргерса (4.8) для $\varepsilon \rightarrow 0$ и, следовательно, описывает эволюцию цилиндрических и сферических волн в пределе бесконечного числа Рейнольдса. Данное решение также известно как решение Олейника-Лакса. Это означает что все динамические и статистические результаты, полученные для плоских волн, могут быть также использованы в случае расходящихся волн. Настоящее решение описывает преобразование первоначально непрерывного поля в пилообразную волну с нулевой шириной разрывов.

Асимптотическое поведение плоских волн на больших расстояниях. Точные результаты.

Рассмотрим на основе асимптотического решения (4.28) поведение волны на больших расстояниях от источника для гармонического и случайного возмущения. Для начального гармонического поля $V_0(\tau) = \sin(\tau)$, $\psi_0(\tau) = -\cos(\tau)$ мы имеем для среднего потенциала $\langle \phi_0 \rangle$ и относительного возмущения $U(\tau, R)$:

$$\langle \phi_0 \rangle = I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right),$$

$$U(\tau, R) = \frac{1}{I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) (-1)^k \cos(k\tau) \exp(-\varepsilon k^2 R) \quad (4.29)$$

где $I_k(z)$ - модифицированные функции Бесселя. Таким образом, из (4.27) мы имеем хорошо известное асимптотическое решение Фея:

$$V(\tau, R) = A \sin(\tau) \exp(-\varepsilon R) \quad (4.30)$$

$$A = 2\varepsilon \frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)}{I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)} \approx \begin{cases} 1, & \varepsilon \gg 1 \\ 4\varepsilon, & \varepsilon \ll 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

В размерных переменных это означает что в случае больших чисел Рейнольдса ($\varepsilon \ll 1$) амплитуда волны не зависит от амплитуды начального возмущения. Из

уравнений (4.26), (4.29) видно, что нелинейный режим эволюции волны переходит в линейный на расстояниях $R \sim R_{lin} \simeq 1/\varepsilon$.

Для случайных волн удобнее проводить анализ эволюции шума в частотной области. Из линейного диффузионного уравнения (4.20) имеем экспоненциальное затухание Фурье компоненты линейного поля $U(\tau, R)$ и следовательно для энергетического спектра $E_U(\omega, R)$ этого поля имеем

$$E_U(\omega, R) = E_U(\omega) \exp(-2\varepsilon\omega^2 R) \quad (4.32)$$

где $E_U(\omega)$ - начальный спектр относительных возмущений $u_0(\tau)$. Из уравнения (4.21) имеем, что для Гауссова начального поля $V_0(\tau)$, спектр энергии может быть представлен как [19]:

$$E_U(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp\left(\frac{B_\psi(\tau)}{4\varepsilon^2}\right) - 1] \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (4.33)$$

$$B_\psi(\tau) = \langle \psi_0(t + \tau)\psi_0(t) \rangle, \quad B_\psi(0) = \langle \psi_0^2(t) \rangle \quad (4.34)$$

Легко показать что $E_\Psi(0) > 0$ для произвольных ε и $B_\Psi(\tau)$.

На асимптотической стадии, где решение описывается выражением (4.27), спектр скорости $V(\tau, R)$ имеет универсальную форму

$$E_V(\omega, R) = D_\infty \omega^2 \exp(-2\varepsilon\omega^2 R) \quad (4.35)$$

и энергия поля затухает как

$$\sigma_V^2(R) = \langle V^2(\tau, R) \rangle = D_\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2(2\varepsilon R)^{3/2}} \quad (4.36)$$

Здесь коэффициент D_∞ характеризует крутизну спектра вблизи $\omega = 0$ и он нелинейно связан с функцией корреляции начального потенциала:

$$D_\infty = 4\varepsilon^2 E_U(0) = \frac{2\varepsilon^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp\left(\frac{B_\psi(\tau)}{4\varepsilon^2}\right) - 1] d\tau \quad (4.37)$$

Предположим, что спектр энергии начальной скорости поля имеет степенную асимптотику на низких частотах (4.15)

$$E_V(\omega) = \alpha\omega^n, \quad E_\Psi(\omega) = \frac{E_V(\omega)}{\omega^2} = \alpha\omega^{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (4.38)$$

Если при малых числах Рейнольдса формально пренебречь нелинейным слагаемым в уравнении Бюргера, то генерации новых гармоник не происходит и

на больших расстояниях поведение будет определяться только низкочастотными компонентами начального возмущения. Для спектра и энергии волны в этом случае имеем

$$E_V(\omega, R) = \alpha \omega^n \exp(-2\epsilon \omega^2 R) \quad (4.39)$$

$$\langle V^2(\tau, R) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E_V(\omega, R) d\omega = \alpha \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(2\epsilon R)^{(n+1)/2}} \quad (4.40)$$

где $\Gamma(z)$ - Гамма-функция.

Однако из точного решения уравнения Бюргера получаем, что асимптотика спектра $E_V(\omega, R) \sim \omega^2$ (4.35) имеет универсальную форму, а энергия $\langle V^2 \rangle \sim R^{-3/2}$ (4.36) на больших расстояниях уменьшается медленнее, чем в линейном приближении. Универсальное поведение спектра на этой стадии связано с параметрической генерацией компонент низкой частоты.

Рассмотрим сначала случай малых акустических чисел Рейнольдса $\epsilon = 1/Re_0 \gg 1$. Когда начальный спектр скорости имеет индекс $n = 2$, то из (4.37) имеем $D_\infty \simeq \alpha$ и выражение (4.35) совпадает с линейным решением (4.39). Но для $n > 2$, даже для малых акустических чисел Рейнольдса, мы должны принять во внимание нелинейные эффекты. В этом случае из уравнения (4.37) имеем для крутизны спектра D_∞ и энергии шума $\langle v^2(t, r) \rangle$

$$D_\infty = 4\epsilon^2 E_\psi(0) = \frac{1}{16\pi\epsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_\psi^2(\tau) d\tau = \frac{1}{8\pi\epsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_V^2(\Omega)}{\Omega^4} d\Omega \quad (4.41)$$

$$\langle v^2(t, r) \rangle = \frac{v_0^4}{r^{3/2} \omega_0^5} \quad (4.42)$$

где $v_0^2 = \langle v_0^2(t) \rangle$ - дисперсия начального шума.

В случае больших акустических чисел Рейнольдса, принимая $B_\psi(\tau) = 1 - \tau^2/2 + \dots$ и вычисляя интеграл (4.37), имеем

$$D_\infty = \frac{8\epsilon^3}{\sqrt{2\pi}} \exp(1/4\epsilon^2) \sim \exp(Re_0^2/4) \quad (4.43)$$

и дисперсия шума экспоненциально возрастает с увеличением начальной дисперсии $\sigma_{v_0}^2$. Выход шума на линейную стадию $\sigma^2(Rlin) \ll 1$ (4.26) происходит на очень

больших расстояниях $R_{lin} \sim \exp(1/2\varepsilon^2)$, и при этом дисперсия шума становится намного меньше начальной дисперсии. Экспоненциальная зависимость дисперсии шума от начальной дисперсии наблюдается вследствие того, что прежде чем выйти на линейную стадию происходит многократное слияние разрывов и, следовательно, сильный дрейф спектра в область низких частот.

Эволюция интенсивных акустических волн при больших числах Рейнольдса.

Для плоских волн асимптотическое поведение волнового фронта на больших расстояниях от источника может быть найдено на основе точного решения уравнения Бюргера. Для расходящихся волн, поведение которых описывается обобщенным уравнением Бюргера (4.1) в случае малых чисел Рейнольдса или относительно сильной расходимости можно использовать метод возмущения. В случае больших (но конечных) чисел Рейнольдса асимптотическое поведение поля можно найти, используя сшивку решений на нелинейной и линейной стадии.

Рассмотрим эволюцию интенсивных акустических волн в случае бесконечных чисел Рейнольдса $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае профиль поля как для плоских, так и для расходящихся волн определяется выражением (4.28). На больших расстояниях ($R \gg 1$) абсолютный максимум $t_{max}(\tau, R)$ функции $\Phi(t, \tau, R)$ (4.23) расположен в окрестности локальных максимумов t_k начального потенциала $\psi_0(t)$ (нулях начального поля скорости $V_0(t)$ с отрицательными производными) и $t_{max}(\tau, R) \simeq t_k$. Из уравнения (4.28) мы имеем, что между разрывами поле скорости имеет универсальную форму:

$$V(\tau, R) = \frac{t_k - \tau}{R}, \quad \tau_k < \tau < \tau_{k+1} \quad (4.44)$$

Координаты разрывов τ_k определяются из условия $\Phi(t_k, \tau_k, R) = \Phi(t_{k+1}, \tau_k, R)$.

Для гармонического начального возмущения разрывы неподвижны и амплитуда разрыва A_S равна

$$A_S = \frac{2\pi}{R} \quad (4.45)$$

и не зависит от начальной амплитуды. Следовательно, амплитуда первой

гармоники уменьшается как

$$A_1(R) = 1/R \quad (4.46)$$

Для случайного начального поля мы также имеем универсальную форму скорости между разрывами на нелинейной стадии, но со случайными координатами разрывов. Из-за многократного слияния разрывов статистические свойства таких случайных полей автомодельны и могут быть охарактеризованы интегральным масштабом $T(R)$. Этот масштаб увеличивается с ростом расстояния и таким образом спектр волны перемещается в область низких частот. Для начального Гауссова возмущения интегральный масштаб $T(R)$ определяется двумя интегральными характеристиками начального спектра: дисперсиями начального потенциала $\psi_0(\tau)$ и скорости $V_0(\tau)$. Для безразмерных переменных $\sigma_\psi = 1$, $\sigma_V = 1$ и мы имеем, что рост интегрального масштаба описывается выражением

$$T(R) = R^{1/2} \ln^{-1/4}\left(\frac{R}{2\pi}\right) \quad (4.47)$$

На этой стадии спектр автомоделен и его эволюция также определяется интегральным масштабом $T(R)$

$$E_V(\omega, R) = \frac{T^3(R)}{R^2} \tilde{E}(\omega T(R)) \quad (4.48)$$

Здесь $\tilde{E}(\chi)$ - безразмерная функция одного аргумента и имеет степенное поведение в области низких и высоких частот:

$$\tilde{E}(\chi) = \begin{cases} 1.08\chi^2, & \chi \ll 1 \\ 0.36\chi^{-2}, & \chi \gg 1 \end{cases} \quad (4.49)$$

Асимптотическое поведение спектра в высокочастотном диапазоне связано с формированием разрывов, тогда как его поведение в диапазоне низких частот определено параметрической генерацией низкочастотных составляющих спектра. Из-за слияния разрывов и роста интегрального масштаба $T(R)$ максимум спектра смещается к низким частотам как $\omega_{max} = 1/T(R)$. Из-за слияния разрывов энергия случайных волн

$$\sigma_V^2 = \langle V^2 \rangle = \frac{T^2(R)}{R^2} \simeq R^{-1} \quad (4.50)$$

уменьшается более медленнее, чем энергия периодических сигналов. Параметрическая генерация низкочастотных компонент приводит к универсальному поведению спектра на низких частотах

$$E_V(\omega, R) = D(R)\omega^2 \quad (4.51)$$

$$D(R) = R^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{5}{4}}\left(\frac{R}{2\pi}\right) \simeq R^{-\frac{1}{2}} \quad (4.52)$$

и крутизна $D(R)$ растет с расстоянием R .

Эволюция плоских волн при конечных числах Рейнольдса и оценка асимптотического поведения волны.

Рассмотрим эволюцию плоской волны при больших, но конечных числах Рейнольдса и опишем поведение поля на больших расстояниях от источника. Этот анализ является основой для оценок асимптотического поведения цилиндрических и сферических случайных волн. В этих случаях нет точных решений соответствующих обобщенных уравнений Бюргера.

Поскольку числа Рейнольдса конечны ($\varepsilon \neq 0$), то ударные фронты имеют толщину δ_k отличную от нуля. В среде с малой, но конечной вязкостью, невязкое решение (4.44), переходит в решение со Тэйлоровской структурой ударных фронтов [2]

$$V(\tau, R) = -\frac{1}{R} \left(\tau - \frac{t_k + t_{k+1}}{2} - \frac{\eta_k}{2} \tanh\left(\frac{\tau - \tau_k}{\delta_k}\right) \right) \quad (4.53)$$

$$\delta_k(R) = \frac{4\varepsilon R}{\eta_k}, \quad \eta_k = t_{k+1} - t_k \quad (4.54)$$

где η_k/R - амплитуда и δ_k - ширина разрыва.

Для начального гармонического возмущения $V_0(\tau) = \sin \tau$ ширина ударных фронтов линейно увеличивается с расстоянием. Отношение ширины ударного фронта δ к периоду волны η позволяет ввести эффективное обратное число Рейнольдса как

$$\varepsilon_{eff}(R) = \frac{\delta(R)}{\eta} \simeq \frac{\varepsilon R}{\eta^2} \quad (4.55)$$

На расстояниях, где ширина разрыва δ порядка периода волны $\delta(Rlin) \simeq \eta = 2\pi$, мы имеем, что $\varepsilon_{eff}(Rlin) \simeq 1$, и это означает разрушение нелинейной структуры. Это расстояние $Rlin \sim 1/\varepsilon$ может быть введено как расстояние, начиная с которого нелинейные эффекты не играют более никакой роли в затухании волны. После $R > Rlin$ мы предполагаем, что имеем чисто линейное экспоненциальное затухание гармонической волны (4.30). Для оценки амплитуды A предположим, что она равна амплитуде первой гармоники нелинейной пилообразной волны на расстоянии $Rlin$. Следовательно, из (4.30) имеем для амплитуды $A \sim A_1(Rlin) \sim \varepsilon$ и это совпадает с зависимостью A от ε в (4.30), которое получено из точного решения уравнения Бюргера для $\varepsilon \ll 1$.

Для случайного начального поля расстояния η_k имеют распределение Рэлея с $\langle \eta_k \rangle = T(R)\sqrt{\pi}$. Для конечного числа Рейнольдса можно теперь ввести внутренний масштаб поля

$$\delta(R) = \frac{\varepsilon R}{T(R)} \quad (4.56)$$

совпадающий со средней шириной ударного фронта. Используя (4.56) мы можем также ввести эффективное обратное число Рейнольдса как отношение между внутренним и интегральным масштабами случайной волны:

$$\varepsilon_{eff}(R) = \frac{\delta(R)}{T(R)} = \frac{\varepsilon R}{T^2(R)} = \varepsilon \ln^2\left(\frac{R}{2\pi}\right) \quad (4.57)$$

Из-за слияния разрывов интегральный масштаб $T(R)$ (4.48) увеличивается со временем и из (4.57) видно, что для шума эффективное обратное число Рейнольдса увеличивается гораздо медленнее, чем для периодического сигнала (4.55). Если $\varepsilon_{eff}(R) \ll 1$, то случайная волна имеет пилообразную структуру с конечной шириной ударных фронтов, которые намного меньше интегрального масштаба турбулентности. На рисунках 4.3. и 4.4. приведены картины эволюции периодической и шумовой плоских волн.

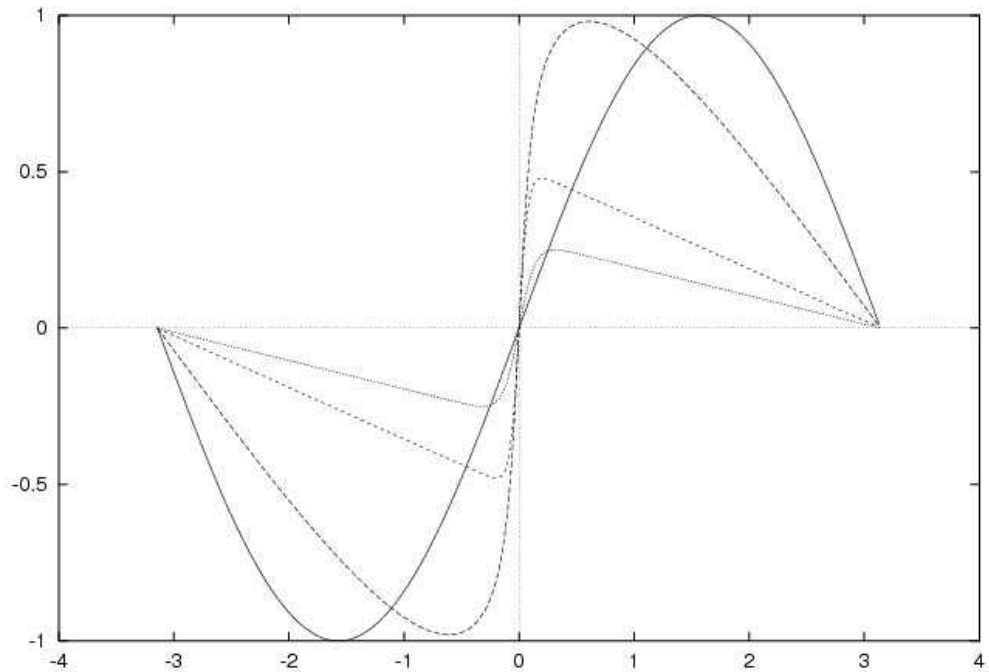


Рис.4.3. Эволюция плоской гармонической волны: $Re = 50$. $R = 0, 1, 5, 10$

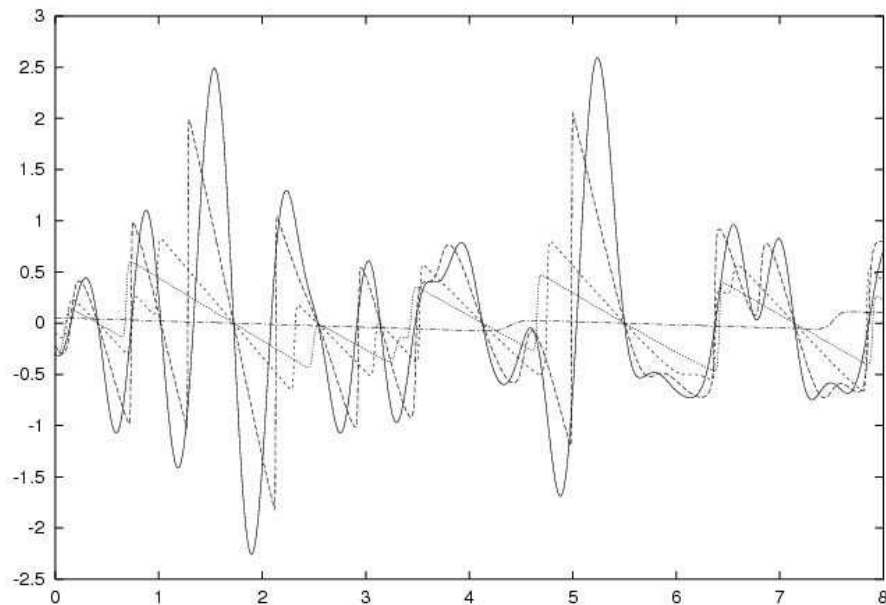


Рис.4.4. Эволюция плоской шумовой волны: $Re = 50$. $R = 0, 1, 5, 10, 200$

Из рисунка 4.4. видно, что слияние разрывов приводит к росту внешнего масштаба, и на расстояниях, где периодическая волны уже вышла на линейный режим эволюции, шумовая волна все еще имеет резко выраженную нелинейную структуру.

Конечная вязкость приводит к экспоненциальному затуханию

энергетического спектра на больших частотах $\omega > \omega_{vis} = 1/\delta$:

$$E_V(\omega, R) = (\omega\delta(R))^{\frac{1}{3}} \exp(-3(\pi\delta(R)\omega)^{\frac{2}{3}}) \quad (4.58)$$

На частотах $\omega < \omega_{vis}$ эволюция спектра все еще автомодельна и описывается уравнениями (4.47), (4.48), (4.49). Как легко видеть, что $\omega_{vis}/\omega_{max} \sim \varepsilon_{eff}^{-1}(R)$ (4.57) и медленно уменьшается с расстоянием.

На расстояниях $R > R_{lin}$, где R_{lin} определено уравнением

$$\varepsilon_{eff}(R_{lin}) = \varepsilon \ln^2\left(\frac{R_{lin}}{2\pi}\right) \approx 1 \quad (4.59)$$

мы можем пренебречь нелинейным искажением волны. Асимптотическое поведение волны на этой стадии будет определяться линейным диффузионным уравнением, и эволюция спектра описана как

$$E_V(\omega, R) = D_\infty \omega^2 \exp(-2\varepsilon\omega^2 R), \quad D_\infty = D(R_{lin}) \quad (4.60)$$

Здесь крутизна D_∞ не зависит от R и определена уравнением (4.52), где расстояние R_{lin} решение уравнения (4.59). Таким образом, для случайных волн эффективное обратное число Рейнольдса увеличивается очень медленно и, соответственно, расстояние выхода на линейный режим чрезвычайно велико $R_{lin} \sim \exp(1/\varepsilon^2)$. Для крутизны спектра мы имеем $D(R_{lin}) \sim \exp(1/2\varepsilon^2)$ которое относительно хорошо согласуется с точным выражением (4.43).

4.2.3. Асимптотическое поведение интенсивных волн на больших расстояниях. Классификация режимов.

Характер эволюции плоских волн определяется одним единственным параметром $\varepsilon = r_{nl}/r_{lin} = Re^{-1}$ - начальным обратным числом Рейнольдса. Для гармонического возмущения случай $\varepsilon \ll 1$ соответствует при этом сильно нелинейному режиму эволюции волны, а случай малых чисел Рейнольдса ($\varepsilon \gg 1$) соответствует линейному режиму. Однако, для анализа поведения шума на больших расстояниях нелинейные эффекты иногда приходится учитывать даже в

случае $\varepsilon \gg 1$. Связано это с тем, что именно параметрическая генерация медленно затухающих низкочастотных компонент и определяет асимптотическое поведение поля на больших расстояниях. В случае исчезающей вязкости $\varepsilon \rightarrow 0$ (бесконечное число Рейнольдса) эволюция расходящихся волн в соответствующих переменных тождественна эволюции плоских волн. Эволюция расходящихся волн при конечных числах Рейнольдса описывается обобщенным уравнением Бюргерса (4.8), в котором наряду с параметром $\varepsilon = r_{nl}/r_{lin}$ появляется дополнительный параметр $R_0 = r_0/r_{nl}$ - отношение между начальным радиусом и нелинейным расстоянием. Ниже мы проведем классификацию областей эволюции расходящихся волн в плоскости (ε, R_0) для регулярных и шумовых волн.

Классификация режимов для гармонических возмущений.

Очевидно, что из-за высокочастотного затухания на больших расстояниях доминирующей является фундаментальная частота. При этом задача нахождения асимптотического поведения волны сводится к определению амплитуды гармонической волны на этой стадии в зависимости от двух характерных безразмерных параметров ε и R_0 . Согласно работам [37-38], на плоскости (ε, R_0) можно выделить четыре характерных области - рисунок 4.5.

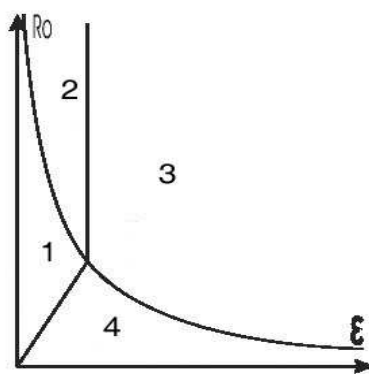


Рис.4.5. Область разбиения параметров.

Для областей 3 и 4 амплитуда волны на больших расстояниях от излучателя пропорциональна начальной амплитуде и нелинейные искажения волны незначительны. Если в области 3 это связано с малой величиной числа Рейнольдса, то в области 4 это связано с сильной расходимостью волны. Для

больших чисел Рейнольдса ($\varepsilon \ll 1$) имеем три режима:

- а) сильное расхождение, нелинейность не важна (часть области 4);
- б) сильно нелинейное искажение на начальной стадии и пилообразная волна трансформируется в линейную волну до того, как расхождение становится существенным (область 2);
- в) сильно нелинейное искажение и трансформация нелинейной волны в линейную происходит после расхождения (область 1).

Количественно границы между областями можно определить на основе анализа уравнения (4.8). В безразмерном уравнении (4.8) эффективный коэффициент вязкости определяется выражением $\varepsilon g(R)$. Тогда для $\varepsilon \gg 1$ нелинейность не важна из-за сильного линейного затухания. Таким образом, граница между линейными и нелинейными режимами $\varepsilon = 1$. Но сильное расхождение волны может также привести к подавлению нелинейных эффектов. В безразмерном уравнении (4.8) расстояние формирования разрыва $R = 1$. Таким образом, если эффективный коэффициент вязкости на этом расстоянии $\varepsilon g(1) \gg 1$, то нелинейность также не существенна, даже если $\varepsilon \ll 1$. Следовательно, граница между нелинейным (область 1) и линейным (область 4) режимами может быть оценена из уравнения $\varepsilon g(1) = 1$. Для цилиндрической волны линия границы $\varepsilon = R_0$ и для сферической - $\varepsilon = \exp(-1/R_0)$. В областях 3 и 4 можно пренебречь нелинейными эффектами и амплитуда гармонической волны на больших расстояниях пропорциональна амплитуде входного сигнала.

Для качественного описания поведения расходящихся волн при больших числах Рейнольдса учтем, что в среде с малой, но конечной вязкостью, мы должны заменить невязкое решение (4.44), на решение с Тэйлоровской структурой ударных фронтов (4.53). Для расходящейся волны ширина разрыва $\delta k(R)$ описана уравнением (4.54), но с коэффициентом вязкости $\varepsilon g(R)$, зависящим от расстояния

$$\delta k(R) = \frac{4\varepsilon g(R)R}{\eta_k}, \quad \eta_k = t_{k+1} - t_k \quad (4.61)$$

Из-за увеличения эффективного коэффициента вязкости ширина разрыва для

расходящихся волн увеличивается быстрее чем для плоских волн. Чтобы найти границу между областями 1 и 2, мы должны сначала решить уравнение для R_{lin} и затем оценить относительное расхождение волны на этом расстоянии, которое характеризуется величиной $g(R_{lin})$ и граница определяется из уравнения $g(R_{lin}) = 1$. В областях 1 и 2 амплитуда гармонической волны на больших расстояниях определяется с учетом эффектов нелинейного поглощения, при этом амплитуда $A \sim 1/R_{lin}$.

Классификация режимов для шумовых расходящихся волн.

Для расходящихся шумовых волн картина разбиения плоскости (ε, R_0) на характерные области эволюции подобна аналогичному разбиению для гармонических волн - рисунок 4.5. Однако в этом случае граница между областями 1 и 2 будет иметь качественно другую форму. Кроме того, для некоторых классов начальных условий необходимо принимать во внимание нелинейные эффекты и в случае малых чисел Рейнольдса даже в областях 3 и 4, в которых для гармонических сигналов нелинейные эффекты несущественны.

Рассмотрим сначала случай, когда начальный энергетический спектр шума (4.17) имеет квадратичную зависимость на низких частотах $E_V(\omega) = \alpha\omega^2$, (в выражении (4.38) по казатель степени $n = 2$). В этом случае при малых числах Рейнольдса параметрическая генерация низкочастотных компонент не меняет низкочастотной асимптотики спектра. Тогда для $\varepsilon \gg 1$ можно пренебречь нелинейными эффектами. Однако и сильное расхождение волны может также привести к подавлению нелинейных эффектов. Как и для гармонических возмущений граница между нелинейным (область 1) и линейным (область 4) режимами может быть оценена из уравнения $\varepsilon g(1) = 1$.

При больших, но конечных, числах Рейнольдса невязкое решение (4.44) заменяется на решение с Тэйлоровской структурой ударных фронтов и для расходящейся волны ширина ударного фронта $\delta_k(R)$ описывается уравнением (4.61). Из-за увеличения эффективного коэффициента вязкости ширина ударного фронта для расходящихся волн увеличивается быстрее чем для плоских волн. На

Рисунке 3 представлена эволюция цилиндрической волн с такими же начальными условиями $V_0(\tau)$ как и для плоской волны (рис. 2). Первые три кривые представлены для безразмерных расстояний $R = 0, 5, 10$ а последняя кривая для $R = 60$. Начальное число Рейнольдса для всех случаев было $Re = 50$. Из графиков видно, что для расходящихся волн (рис. 3) переход к линейной стадии имеет место на меньших расстояниях, чем для плоских волн. Главное различие между эволюцией периодических и случайных волн - увеличение из-за многократного слияния разрывов интегрального масштаба. Из-за этого явления обратное число Рейнольдса увеличивается медленнее чем для периодической волны. Для плоских волн даже для $R = 200 \gg Re$ мы имеем нелинейную структуру - ширина ударного фронта является намного меньше чем типичный интегральный масштаб волны.

Предполагая, что в (4.61) величина η_k совпадает с интегральным масштабом $T(R)$ (4.47), для эффективного обратного числа Рейнольдса имеем

$$\varepsilon_{eff}(R) = \frac{\delta(R)}{T(R)} = \frac{\varepsilon g(R)R}{T^2(R)} \quad (4.62)$$

Таким образом, из-за увеличения интегрального масштаба $T(R)$ эффективное обратное число Рейнольдса $\varepsilon_{eff}(R)$ увеличивается не столь быстро как для периодической волны, для которой T является постоянным. Используя выражение (4.47) для интегрального масштаба $T(R)$ мы получаем для характерного расстояния R_{lin} , на котором нелинейный режим сменяется режимом линейного затухания, следующее уравнение:

$$\varepsilon_{eff}(R_{lin}) = \varepsilon g(R_{lin}) \ln^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R_{lin}}{2\pi}\right) = 1 \quad (4.63)$$

Чтобы найти границу между областями 1 и 2, мы должны сначала решить уравнение для R_{lin} (63), а затем оценить относительное расхождение волны на этом расстоянии, которое характеризуется величиной $g(R_{lin})$. Пренебрегая сначала расхождением волны ($R_{lin} \ll R_0$, $g(R_{lin}) \simeq 1$), мы находим, что нелинейная стадия развития преобразуется в линейную стадию на расстояниях $R \sim R_{lin}$, где

$$R_{lin} \simeq \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \gg 1 \quad (4.64)$$

которое является тем же самым соотношением и для плоских волн. Таким образом, для линии границы между 1 (расходящаяся область) и 2 (область квазиплоских волн) мы имеем из уравнения $R_0 = R_{lin}$ следующее выражение

$$R_0 = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad (4.65)$$

Сравнивая это выражение с аналогичным для периодических волн $R_0 \sim 1/\varepsilon$ мы видим, что для больших чисел Рейнольдса сценарий трансформации в нелинейный режим на стадии эволюции плоских волн может быть реализован лишь для очень больших значений R_0 .

В области 1 трансформация нелинейного режима эволюции в линейный имеет место при $R \simeq R_{lin} \gg R_0$, где мы имеем сильное расхождение волны. Без логарифмической коррекции мы можем оценить R_{lin} из уравнения $g(R_{lin}) \simeq 1$, и имеем следующие выражения для R_{lin} в случае цилиндрической ($j = 1$) и сферической ($j = 2$) волн:

$$R_{lin} = \frac{R_0}{\varepsilon}, \quad j = 1 \quad (4.66)$$

$$R_{lin} = R_0 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad j = 2 \quad (4.67)$$

Используя вышеприведенные отношения можем оценить крутизну $D_\infty = D(R_{lin}) = const$ на линейной стадии эволюции.

Асимптотическое поведение расходящегося шума при малых акустических числах Рейнольдса.

Рассмотрим асимптотическое поведение случайных волн при малых акустических числах Рейнольдса в областях 3 и 4, где нелинейные эффекты могут учитываться методом возмущения.

Метод возмущения

Воспользуемся уравнением Бюргерса в форме (4.6), из которого явно видно, что расходимость волны приводит к подавлению нелинейных эффектов. Представим поле скорости как сумму линейного решения и слабого возмущения

$$V(\tau, x) = V_0(\tau, x) + V_1(\tau, x) \quad (4.68)$$

тогда мы имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial \tau^2} + \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{\frac{j}{2}} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \quad (4.70)$$

Намного легче анализировать эту систему уравнений в частотной области.

Рассмотрим Фурье образы для V_0, V_1 :

$$C_i(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int V_i(\tau, x) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (4.71)$$

Тогда уравнения (4.69),(4.70) преобразуются в:

$$\frac{\partial C_0(\omega, x)}{\partial x} + \omega^2 C_0(\omega, x) = 0 \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial C_1(\omega, x)}{\partial x} + \omega^2 C_1(\omega, x) = -\frac{i\omega}{2} \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{\frac{j}{2}} (C_0(\omega, x) \otimes C_0(\omega, x)) \quad (4.73)$$

где \otimes - оператор свертки. Решения системы уравнений получим в виде

$$C_0(\omega, x) = C_0(\omega) \exp(-\varepsilon\omega^2 x) \quad (4.74)$$

$$C_1(\omega, x) = \frac{i\omega}{2} \exp(-\varepsilon\omega^2 x) \int_0^x dr \left(\frac{R_0}{R_0+r}\right)^{\frac{j}{2}} \int C_0(\omega' C_0^*(\omega' - \omega) \exp(-2\varepsilon(\omega'^2 - \omega\omega'))) d\omega' \quad (4.75)$$

Здесь $C_0(\omega)$ - Фурье преобразование начального возмущения $V_0(\tau, 0)$ (4.71).

Для статистически стационарных процессов спектр энергии связан с Фурье преобразованием соотношением $\langle C(\omega)C(\omega_1) \rangle = E(\omega)\delta(\omega - \omega_1)$. Для спектра энергии исходной волны $E_0(\omega, x)$ имеем:

$$E_0(\omega, x) = E_0(\omega) \exp(-\varepsilon\omega^2 x) \quad (4.76)$$

где $E_0(\omega)$ - спектр шума на входе в среду.

Как было показано выше, линейное решение может быть использовано в областях 3 и 4, если $E_0(\omega) = \alpha\omega^2$ на низких частотах. Для начального спектра $E_0(\omega) = \alpha\omega^n$ и $n > 2$ параметрическая генерация низкочастотных компонент

приводит к универсальному поведению спектра на низких частотах $E(\omega, x) \simeq E_1(\omega, x) = D(x)\omega^2$. На больших расстояниях, где реализуется линейное развитие волны, рост $D(x)$ прекращается и $D(x) = D_\infty = const$. Принимая во внимание, что начальное поле скорости является Гауссовым и пользуясь известным соотношением из теории Гауссовых процессов $\langle C_1 C_2 C_3 C_4 \rangle = \langle C_1 C_2 \rangle \langle C_3 C_4 \rangle + \langle C_1 C_3 \rangle \langle C_2 C_4 \rangle + \langle C_1 C_4 \rangle \langle C_2 C_3 \rangle$ для спектра $V_1(\tau, x)$ на больших расстояниях имеем из (4.74)-(4.76)

$$E_1(\omega, x) = D_\infty(\omega) \exp(-\varepsilon \omega^2 x) \quad (4.77)$$

$$D_\infty = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_0^2(\Omega) I^2(\Omega, \varepsilon, R_0) d\Omega \quad (4.78)$$

$$I(\Omega, \varepsilon, R_0) = R_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+\xi}\right)^j \exp(-2\varepsilon R_0 \Omega^2 \xi) d\xi \quad (4.79)$$

Для дисперсии шума получим на этой стадии

$$\langle V^2(\tau, x) \rangle \simeq \int (E_0(\omega, x) + E_1(\omega, x)) d\omega = \alpha \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(2\varepsilon x)^{\frac{n+1}{2}}} + D_\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2(2\varepsilon x)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.80)$$

На больших расстояниях исходная волна V_0 затухает быстрее чем возмущение V_1 и, следовательно, для спектра энергии имеем

$$E(\omega, x) \simeq E_1(\omega, x), \langle V^2(\tau, x) \rangle \simeq D_\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2(2\varepsilon x)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.81)$$

В уравнении (4.79) первый множитель описывает расходимость первичных волн, а экспоненциальный фактор описывает линейное затухание. В безразмерных переменных энергия начального возмущения локализована вблизи частоты $\Omega \simeq 1$.

Из (79) мы видим, что для $\varepsilon R_0 = r_0/r_{lin} \gg 1$ расходимость не важна и $I = 1/2\varepsilon\Omega^2$.

В этом случае имеем для коэффициента D_∞ (4.37) в (4.77) выражение

$$D_\infty = \frac{1}{8\pi\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0^2(\Omega)}{\Omega^4} d\Omega \quad (4.82)$$

которое совпадает с формулой (4.41) $D_\infty = 4\varepsilon E_\psi(0)$, полученной из точного решения уравнения Бюргера для плоских волн. В размерных переменных для

энергии волны получим

$$\langle v^2(t, x) \rangle \simeq \left(\frac{r_0}{r}\right)^j \frac{v_0^2 D_\infty \sqrt{\pi}}{2(2(r-r_0)/r_l)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.83)$$

Где $r_l = 2c^3 \rho / b \omega_0^2$ – расстояние линейного затухания (4.2), v_0^2 – энергия и ω_0^{-1} – обратное время корреляции входной волны $v_0(t, r = r_0)$. Из (4.82), (4.83) имеем

$$\langle v^2(t, x) \rangle \simeq \left(\frac{r_0}{r}\right)^j \frac{v_0^4}{r^2 \omega_0^5} \quad (4.84)$$

это означает, что энергия на этой стадии пропорциональна квадрату энергии начального возмущения.

Ниже мы рассмотрим асимптотическое поведение волны в случае, когда расходимость играет определяющую роль.

Цилиндрический случай, $j=1$.

Для цилиндрического случая заменой переменных $\xi = \eta^2 - 1$ интеграл (4.79) сводится к виду

$$I = 2R_0 \frac{\exp(2\varepsilon R_0 \Omega)}{(2\varepsilon R_0)^{\frac{1}{2}} \Omega} (\text{Erfc}((2\varepsilon R_0)^{\frac{1}{2}} \Omega)) \quad (4.85)$$

где $\text{Erfc}(z)$ – функция ошибки. Для сильно расходящейся волны $\varepsilon R_0 \ll 1$, учитывая, что функция ошибки имеет разложение: $\text{Erfc}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots\right)$,

имеем из (4.85) $I = (\pi R_0 / 2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \Omega^{-1}$. Следовательно, для D_∞ получаем

$$D_\infty = \frac{\pi R_0}{4\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0^2(\Omega)}{\Omega^2} d\Omega \quad (4.86)$$

а для дисперсии поля скорости из (4.81) мы имеем:

$$\langle v^2(t, x) \rangle \simeq \left(\frac{r_0}{r}\right) \frac{v_0^4 r_0}{r^2 \omega_0^3} \quad (4.87)$$

Это уравнение действительно даже для большого начального числа Рейнольдса, если мы имеем сильно расходящуюся цилиндрическую волну (область 4 на рисунке 3).

В случае слабой расходимости $\varepsilon R_0 \rightarrow \infty$, учитывая асимптотику функция ошибки $Erfc(x) = \exp(-x^2)(1/2x + \dots)$, для D_∞ мы получаем выражение (4.82), которое совпадает с соответствующей формулой для плоской волны (4.41).

Сферический случай, $j=2$.

В этом случае введем в (4.79) новую переменную $\xi = \eta - 1$ и получаем следующее выражение для I :

$$I = -R_0 \exp(2\varepsilon R_0 \Omega^2) Ei(2\varepsilon R_0 \Omega^2) \quad (4.88)$$

где $Ei(x)$ - экспоненциальная интегральная функция. Для сильно расходящейся волны с $\varepsilon R_0 \ll 1$, учитывая, что, $Ei(-x) = \gamma - \ln(x) + x + \dots$, и получаем следующую оценку для D_∞ :

$$D_\infty = \frac{R_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_0^2(\Omega) \ln(2\varepsilon R_0 \Omega^2) d\Omega \simeq \frac{R_0^2 \ln(2\varepsilon R_0)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_0^2(\Omega) d\Omega \quad (4.89)$$

Для дисперсии поля скорости из (4.81), (4.89) имеем

$$\langle v^2(t, x) \rangle \sim \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{v_0^4 r_0^2 \ln^2(2\varepsilon R_0)}{r^2 \omega_0^3} \quad (4.90)$$

Отметим, что это выражение справедливо и для больших начальных чисел Рейнольдса в случае сильно расходящейся сферической волны (область 4 на рисунке 2).

В противоположном случае слаборасходящейся волны, $\varepsilon R_0 \rightarrow \infty$, получаем снова тот же самый результат (4.82), что и для плоской волны (4.41).

4.2.5. Асимптотическое поведение расходящихся волн при больших числах Рейнольдса.

В области 2, где преобразование нелинейного режима в линейный имеет место на плоской стадии развития мы можем использовать точное выражение для плоских волн (4.37). Для расходящихся волн такой режим может реализоваться только для очень больших чисел Рейнольдса.

Для сильнорасходящихся волн (область 1) мы используем сшивку решений на нелинейной и линейной стадиях распространения. В случае исчезающе малой вязкости $\varepsilon \rightarrow 0$ спектр энергии шумовых волн имеет универсальное степенное поведение на низких частотах $E(\omega, R) = D(R)\omega^2$ (4.51). Его крутизна $D(R, \varepsilon, R_0)$ увеличивается из-за параметрической генерации низкочастотных компонент. На больших расстояниях, где нелинейные эффекты уже несущественны, спектр энергии поля скорости $V(\tau, R)$ имеет универсальную форму:

$$E(\omega, R) = D_\infty \omega^2 \exp(-2\varepsilon \omega^2 \int_{R_0}^R g(\xi) d\xi) \quad (4.91)$$

$$E(\omega, r) = D_\infty \omega^2 \exp(-2\varepsilon \omega^2 (r - r_0)) \quad (4.92)$$

характеризующуюся единственным параметром - амплитудой спектра, которая пропорциональна крутизне спектра в области низких частот - $D_\infty = D_\infty(\varepsilon, R_0)$. Высокочастотное линейное затухание не может изменить крутизну спектра D_∞ и не зависит от расстояния. В тоже время сама величина D_∞ формируется процессами параметрической генерации низкочастотных компонент на нелинейной стадии распространения.

Для оценки D_∞ предположим, что константа D_∞ равна крутизне спектра (4.51), (4.52) из невязкого решения на расстоянии R_{lin} , где нелинейная стадия переходит в линейную:

$$D_\infty = D(R_{lin}) \simeq R_{lin}^{1/2} \quad (4.93)$$

Это расстояние определено из условия, что обратное эффективное число Рейнольдса имеет порядок единицы $\varepsilon_{eff}(R_{lin})$ (4.63).

В области 1 нелинейный режим переходит в линейный на расстояниях, где имеет место сильная расходимость. Учитывая, что для малых начальных величин R_0 функция $g(R)$ растет намного быстрее чем логарифмический фактор в формуле (4.79), мы предполагаем, что этот же фактор в (4.47) тоже порядка единицы.

Для цилиндрической волны в области 1 имеем из уравнений (4.66) и (4.93)

$$D_{\infty} \simeq \left(\frac{R_0}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (4.94)$$

И для сферической волны из (4.67) и (4.93) получаем:

$$D_{\infty} \simeq \left(R_0 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{1/2} \quad (4.95)$$

Уравнения (4.94) и (4.95) позволяют установить функциональную зависимость амплитуды спектра D_{∞} и, соответственно, энергии шума от параметров ε и R_0 в каждой из областей (ε, R_0) разбиения - рисунок 4.

Мы предполагаем, что:

$$D_{\infty} = CR_{lin}^{1/2} \quad (4.96)$$

где C - некоторый "корректирующий" фактор величина которого остается постоянной во всех областях на плоскости (ε, R_0) .

Чтобы проверить эту гипотезу и определить величину C , были проведены численные эксперименты как для цилиндрических, так и для сферических волн. Численное моделирование проводилось на основе уравнение Бюргерса в виде (4.6). Все вычисления были выполнены в частотной области с использованием Быстрого Преобразования Фурье (БПФ), а эволюция волн моделировалась на реализациях длительностью $4096(2^{12})$ точек. Для оценивания спектральной плотности случайно-генерируемого сигнала использовался Гауссов случайный процесс с начальной спектральной плотностью:

$$E(\omega) = \alpha \omega^4 \exp(-1.5\omega^2 \gamma^2) \quad (4.97)$$

На Рисунках 4.6 и 4.7 представлены результаты численного моделирования эволюция спектральной плотности (в логарифмическом масштабе), полученные для цилиндрических и сферических шумовых волн соответственно.

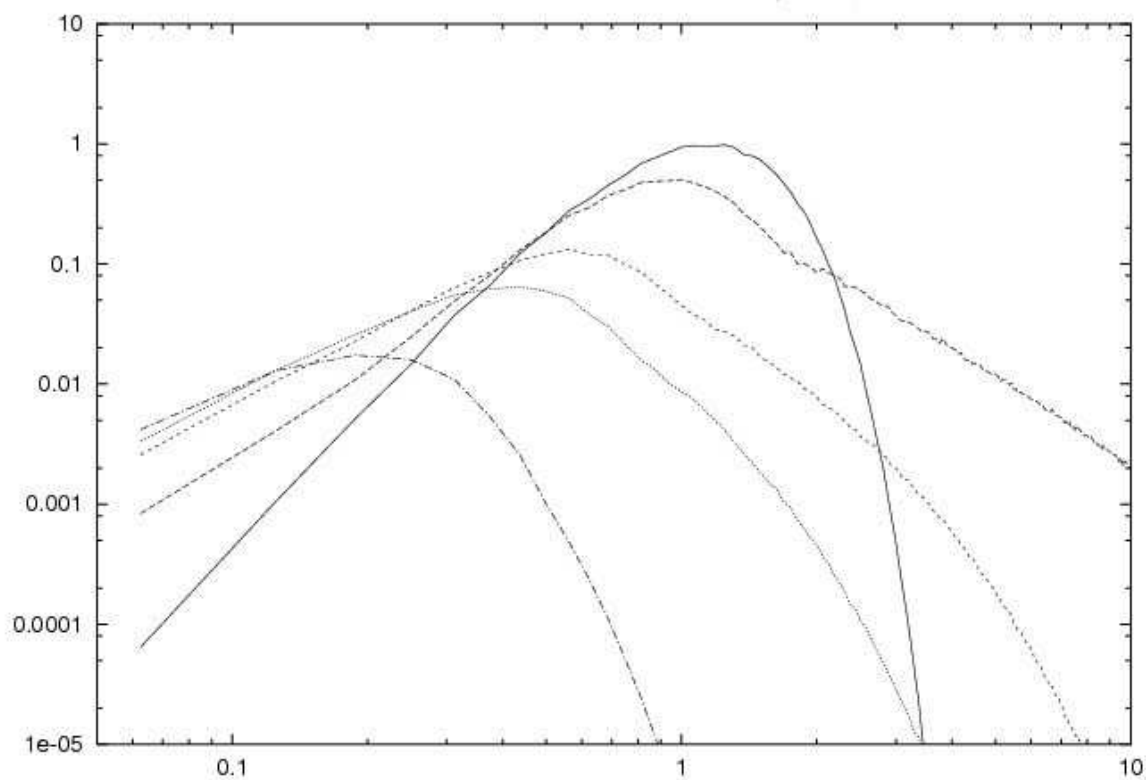


Рис.4.6. Эволюция спектра цилиндрической шумовой волны: $Re=30$, $Ro=1$. $R = 0,1,5,10,30$

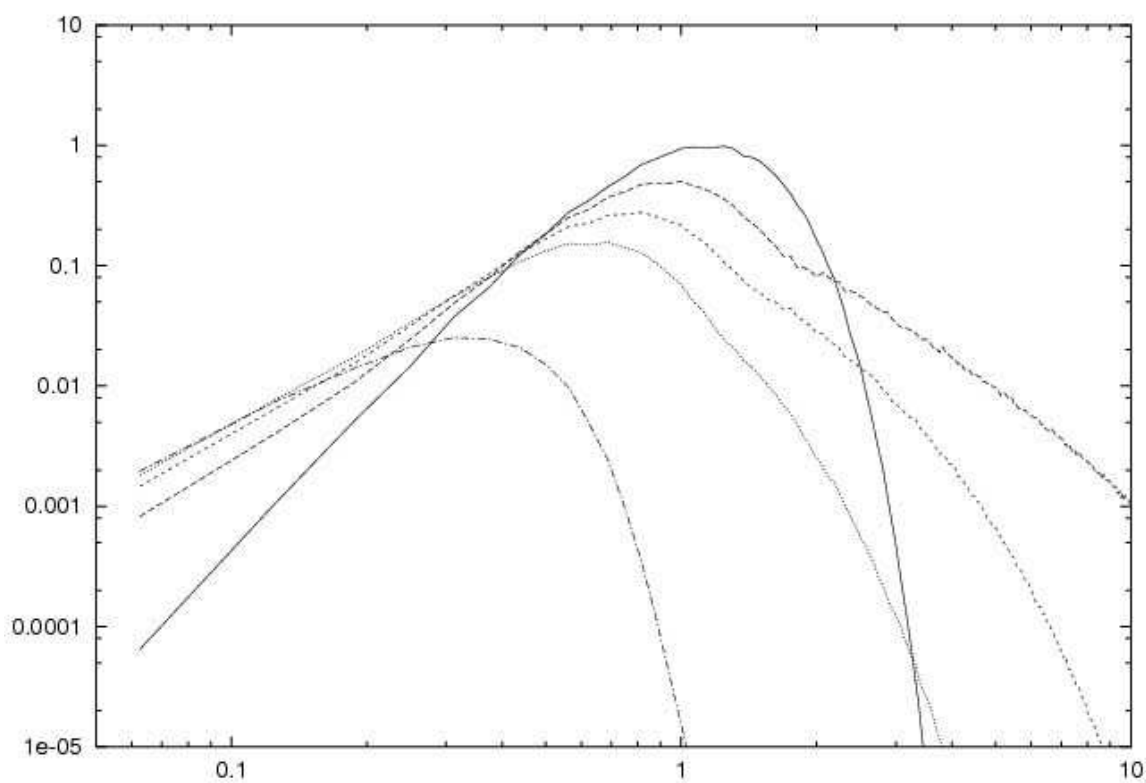


Рис.4.7. Эволюция спектра сферической шумовой волны: $Re = 30$, $Ro = 1$. $R = 0,1,2,3,5$

Величины начальных параметров подобраны так, чтобы принадлежать области 1, а крутизна начальной спектральной плотности была взята, чтобы иметь частотную зависимость порядка ω^4 . Для определения величины C измерялась крутизна спектра в низкочастотной области, после того как волна достигла линейной стадии эволюции. Численные эксперименты для шумовых цилиндрических волн дали следующие результаты: $C_{cyl} = 0.21$ для случая $Re = 30, Ro = 1$; $C_{cyl} = 0.18$ для: $Re = 30, Ro = 2$ и $C_{cyl} = 0.19$ для: $Re = 50, Ro = 1$. В случае сферических волн были проведены аналогичные численные эксперименты, которые дали следующие результаты: $C_{spher} = 0.61$ ($Re = 30, Ro = 1$), $C_{spher} = 0.61$ ($Re = 30, Ro = 2$) и $C_{spher} = 0.59$ ($Re = 50, Ro = 1$). Видно, что наблюдается малое отличие этих величин друг от друга для различных реализаций спектров, а это является хорошим подтверждением нашего предположения о постоянстве коэффициента C во всех областях эволюции расходящихся случайных волн. Таким образом, мы можем написать для спектральной плотности на больших расстояниях от входа следующие выражения (с учетом усредненных величин для коэффициентов C):

$$E(\omega, r) = 0.19 \left(\frac{R_0}{\varepsilon}\right)^{1/2} \omega^2 \exp(-2\varepsilon\omega^2(r - r_0)) \quad (4.98)$$

для цилиндрических волн и:

$$E(\omega, r) = 0.61 \left(R_0 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{1/2} \omega^2 \exp(-2\varepsilon\omega^2(r - r_0)) \quad (4.99)$$

для сферических волн. Уравнения (4.98) и (4.99) позволяют нам оценить дисперсию шума $\langle v^2(t, r) \rangle$ на этой стадии для цилиндрического случая из (4.83),(4.94):

$$\langle v^2(t, x) \rangle \sim \left(\frac{r_0}{r}\right) \frac{v_0^3 r_0^{1/2}}{(r-r_0)^{3/2} \omega_0^3} \quad (4.100)$$

и для сферического из (4.83),(4.95):

$$\langle v^2(t, x) \rangle \sim \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{v_0^{5/2} r_0^{1/2} \ln^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{(r-r_0)^{3/2} \omega_0^{5/2}} \quad (4.101)$$

Таким образом, для цилиндрической волны дисперсия на линейной стадии пропорциональна v_0^3 , а дисперсия сферического шума пропорциональна $v_0^{5/2} \ln(v_0)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Статистическое описание случайных полей

1. Основные статистические характеристики случайных полей

1. Рассмотрим случайное поле $\nu(x, t)$, представляющее собой двухпараметрическую случайную величину ν . Случайное поле задается пространством реализаций ν и вероятностной мерой – плотностями вероятности

$$W_\nu(\nu; x, t), \quad W_\nu(\nu_1, \nu_2; x_1, t_1, x_2, t_2), \dots, \\ W_\nu(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n; x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n),$$

аргументами которых являются $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ – значения случайной величины ν из пространства реализаций, а параметрами – пространственные координаты x_1, x_2, \dots, x_n и моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n .

Плотности вероятности (которые будем называть также вероятностными распределениями или просто распределениями случайной величины) удобно для дальнейшего находить как средние от дельта-функций:

$$W_\nu(\nu; x, t) = \langle \delta(\nu(x, t) - \nu) \rangle_\nu, \\ W_\nu(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n; x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \left\langle \prod_{k=1}^n \delta(\nu(x_k, t_k) - \nu_k) \right\rangle_\nu. \quad (1.1)$$

Аналогично находятся и совместные плотности вероятности случайных полей $\nu(x, t)$ и $u(x, t)$, например:

$$W_{\nu, u}(\nu, u; x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle \delta(\nu(x_1, t_1) - \nu) \delta(u(x_2, t_2) - u) \rangle.$$

Здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают символ статистического усреднения по ансамблю реализаций соответствующих случайных величин. Их действие на произвольные детерминированные функции от случайного поля $\nu(x, t)$ определяется выражением

$$\langle g[\nu(x, t)] \rangle_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) W_\nu(z, x, t) dz.$$

Скобки статистического усреднения являются линейными операторами по отношению к их аргументам.

В очевидных случаях индекс случайной величины у скобок усреднения будем опускать.

Кроме плотностей вероятности рассматривают также интегральные функции распределения, например:

$$F_\nu(\nu; x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\nu(z, x, t) dz = \langle 1(\nu - \nu(x, t)) \rangle_\nu, \quad (1.2)$$

где $1(x)$ – единичная функция.

Напомним, что случайное поле $\nu(x, t)$ называется стационарным, если его любые плотности вероятности не изменяются при замене моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n на $t_1 + r, t_2 + r, \dots, t_n + r$ для любого r . Аналогично, случайное поле $\nu(x, t)$ статистически однородно, если все его плотности вероятности не изменяются при замене координат x_1, x_2, \dots, x_n на $x_1 + s, x_2 + s, \dots, x_n + s$ для любого s .

2. Одна из простейших и вместе с тем важных задач статистической теории случайных процессов и полей связана с нахождением закона трансформации их плотностей вероятности при заданном нелинейном (безынерционном) преобразовании самих процессов и полей [46-48]. Эта задача особенно легко решается, если воспользоваться определением плотности вероятности как среднего от дельта-функции (1.1), а также различными свойствами дельта-функции и единичной функции.

Пусть случайное поле $\nu(x, t)$ обладает плотностью вероятности $W_\nu(\nu; x, t)$, а случайное поле $u(x, t) = \Psi(\nu(x, t))$, где $u = \Psi(\nu)$ – есть нелинейное детерминированное безынерционное преобразование, заданное детерминированной функцией $\Psi(z)$. Требуется отыскать плотность вероятности $W_u(u; x, t)$ для случайного поля $u(x, t)$.

Пользуясь определением (1.1), имеем

$$\begin{aligned}
W_u(u; x, t) &= \langle \delta(u(x, t) - u) \rangle_u = \langle \delta(u - \Psi(v(x, t))) \rangle_v = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - \Psi(z)) W_v(z, x, t) dz.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Отсюда, пользуясь выкалывающим свойством дельта-функции, получаем

$$W_u(u; x, t) = \sum_i \frac{W_v(v_i(u); x, t)}{|\Psi'(v_i(u))|}, \tag{1.4}$$

где $v_i(u)$ – i -я ветвь функции, обратной к $u = \Psi(v)$, или, другими словами, i -й вещественный корень уравнения $\Psi(v) = u$.

3. Обратимся теперь к ситуации, когда случайная величина сама подвергается случайному преобразованию. Пусть $u = \Psi(v)$ есть случайная функция от случайной величины v , заданной плотностью вероятности $W_v(v)$. Случайность функции $\Psi(v)$ означает, что при фиксированном значении v значение функции $u = \Psi(v)$ есть случайная величина. Очевидно, плотность вероятности для u задается в виде $W_u(u; v)$, где v является параметром, а плотность вероятности $W_u(u)$ для случайной величины u определяется «формулой полной вероятности»

$$W_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} W_u(u; z) W_v(z) dz, \tag{1.5}$$

обобщающей формулу (1.3) на случайное преобразование $v \rightarrow u$.

Если рассмотреть обратное преобразование $v = \Psi^{-1}(u)$ с помощью обратной, случайное же функции $\Psi^{-1}(u)$, то в силу симметрии вместо (1.5) получим

$$W_v(v) = \int_{-\infty}^{\infty} W_v(v; z) W_u(z) dz,$$

где $W_v(v; u)$ есть плотность вероятности случайной величины v , заданной случайной функцией $\Psi^{-1}(u)$ при фиксированном значении u .

Для дальнейшего изложения существенно выяснение взаимосвязи $W_u(u; v)$ и $W_v(v; u)$. Поставим задачу в более общих обозначениях. Пусть $y = y(x)$ есть случайная функция с плотностью вероятности $W_y(y; x)$. Потребуем, чтобы

$y(x)$ была строго монотонной непрерывно-дифференцируемой функцией и чтобы ее производная при любых x была положительной: $y'(x) > 0$.

Тогда

$$\delta(X - x(y)) = \frac{\partial}{\partial X} \delta(y - \mathcal{Y}(X)), \quad (1.6)$$

где $x = x(y)$ есть обратная к $y(x)$ случайная функция, плотность вероятности которой $W_x(X; y)$ необходимо найти. Усредняя левую часть (1.6) по случайной величине x , а правую – по y , получим

$$W_x(X; y) = -\frac{\partial}{\partial X} \int_{-\infty}^y W_y(z, X) dz. \quad (1.7)$$

Соответственно,

$$W_y(Y; x) = -\frac{\partial}{\partial Y} \int_{-\infty}^x W_x(z, Y) dz.$$

Эти важные для простейших расчетов формулы и дают связи плотностей вероятности при взаимно обратных случайных преобразованиях. Чтобы убедиться в симметрии взаимосвязи $W_x(X; y) \leftrightarrow W_y(Y; x)$, достаточно продифференцировать обе части (1.7) по y :

$$\frac{\partial}{\partial Y} W_x(X; Y) = -\frac{\partial}{\partial X} W_y(Y; X).$$

4. Если отказаться от требования монотонности случайной функции $y = y(x)$, то число ее пересечений с заданным уровнем y^* будет случайным, и возникает задача об отыскании статистики $N(y^*)$ – числа корней x_n уравнения $y(x) = y^*$. Найдем среднее число этих корней. Для этого воспользуемся формулой (П.14), которая имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{N(y^*)} \delta(X - x_n) = |y'(X)| \delta(y^* - \mathcal{Y}(x)).$$

Усредняя это равенство по ансамблю реализаций случайной величины $y(x)$ и воспользовавшись формулой полной вероятности, получим

$$\sum_{N=1}^{\infty} P(N; y^*) \sum_{n=1}^N W_n(X; y^* | N) = \langle |y'(X)| \delta(y^* - \mathcal{Y}(X)) \rangle. \quad (1.8)$$

Здесь $P(N; y^*)$ – вероятность того, что уравнение $y(x) = y^*$ имеет N корней, $W_n(X; y^* | N)$ – плотность вероятности значений n -го корня x_n при условии, что всего корней N . Среднее, стоящее в правой части, выражается через совместную плотность вероятности функции $y(x)$ и ее производной

$$W_{yy'}(Y, Y'; x) = \langle \delta(Y - y(x)) \delta(Y' - y'(x)) \rangle$$

следующим образом:

$$\langle |y'(x)| \delta(y^* - y(x)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |z| W_{yy'}(y^*, z, x) dz.$$

Проинтегрировав теперь (1.8) по x , получим искомое среднее число пересечений уровня y^* со случайной функцией $y(x)$:

$$\langle N(y^*) \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} N P(N; y^*) = \iint |z| W_{yy'}(y^*, z, x) dz dx. \quad (1.9)$$

5. Обратимся теперь к характеристическим функциям случайного поля $\nu(x, t)$:

$$\begin{aligned} \theta_\nu(\lambda; x, t) &= \langle \exp(i\lambda \nu(x, t)) \rangle_\nu, \dots, \\ \theta_\nu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) &= \left\langle \exp\left(i \prod_{k=1}^n \lambda_k \nu(x_k, t_k)\right) \right\rangle_\nu. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Они являются, очевидно, фурье-преобразованиями соответствующих плотностей вероятности (1.1), также исчерпывающе описывая случайное поле, рассматриваемое в конечном числе точек пространства и в конечном числе моментов времени.

Исчерпывающее описание для континуума значений параметров x и t дается характеристическим функционалом. Для случайной функции $\nu(x)$, например, характеристический функционал равен

$$\theta_\nu[\mu(x)] = \left\langle \exp\left[i \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \nu(z) dz\right] \right\rangle_\nu, \quad (1.11)$$

где $\mu(z)$ – любая детерминированная функция. Полагая, например, в (1.11)

$$\mu(z) = \lambda \delta(z - x) + \nu \delta'_z(z - x),$$

получим совместную одноточечную характеристическую функцию для случайной функции $\nu(x)$ и ее производной $\nu'(x)$:

$$\theta_{\nu\nu'}(\lambda; \nu, x) = \langle \exp[i\lambda\nu(x) + i\nu\nu'(x)] \rangle. \quad (1.12)$$

Среди всевозможных вероятностных распределений выделенную роль играет гауссово вероятностное распределение. В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей любое случайное явление, возникающее как результат наложения множества независимых элементарных воздействий, обладает гауссовым распределением. По самой своей природе гауссовы случайные величины обладают свойством инвариантности относительно линейных операций. А именно произвольная сумма независимых гауссовых случайных величин также будет гауссовой. Точно так же $\nu(x)$ – гауссова случайная функция, если ее значения при любых x образуют гауссову совокупность.

Характеристическая функция и плотность вероятности гауссовой случайной величины ν таковы:

$$\theta_\nu(\lambda) = \exp(i\lambda\langle\nu\rangle - \sigma_\nu^2\lambda^2/2), \quad W_\nu(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\nu^2}} \exp\left[-\frac{(\nu - \langle\nu\rangle)^2}{2\sigma_\nu^2}\right], \quad (1.13)$$

где $\langle\nu\rangle$ и $\sigma_\nu^2 = \langle(\nu - \langle\nu\rangle)^2\rangle = \langle\nu^2\rangle - \langle\nu\rangle^2$ – среднее значение и дисперсия случайной величины.

Характеристическая функция гауссовой совокупности $\{\nu(x_1, t_1), \nu(x_2, t_2)\}$ имеет вид

$$\theta_\nu(\lambda_1, \lambda_2; x_1, t_1, x_2, t_2) = \exp[i\lambda_1\langle\nu(x_1, t_1)\rangle + i\lambda_2\langle\nu(x_2, t_2)\rangle - \lambda_1^2\sigma_\nu^2(x_1, t_1)/2 - \lambda_2^2\sigma_\nu^2(x_2, t_2)/2 - \lambda_1\lambda_2 B_\nu(x_1, t_1, x_2, t_2)]. \quad (1.14)$$

Здесь

$$B_\nu(x_1, t_1, x_2, t_2) = K_\nu(x_1, t_1, x_2, t_2) - \langle\nu(x_1, t_1)\rangle\langle\nu(x_2, t_2)\rangle \quad (1.15)$$

– так называемая ковариационная функция, а

$$K_\nu(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle\nu(x_1, t_1)\nu(x_2, t_2)\rangle \quad (1.16)$$

– корреляционная функция случайного поля $\nu(x, t)$.

Характеристический функционал гауссовой случайной функции $\nu(x)$ имеет вид

$$\theta_\nu[\mu(x)] = \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \langle \nu(z) \rangle dz - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z_1) \mu(z_2) B_\nu(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \right]. \quad (1.17)$$

Найдем для примера плотность вероятности функции $\nu(x)$ и ее производной $\nu'(x)$. Ограничимся анализом частного случая, когда $\nu(x) = \varphi(x) + \nu\alpha(x)$, где $\varphi(x)$ – детерминированная функция, а $\nu\alpha(x)$ – статистически однородная случайная функция с нулевым средним и функцией ковариации $B_\nu(x_2 - x_1) = K_\nu(x_2 - x_1)$, зависящей только от расстояния между точками x_2 и x_1 . При этом (1.12) приводит нас к

$$\theta(\lambda, \nu; x) = \exp \left(i\lambda\varphi(x) + i\nu\varphi'(x) - \sigma_\nu^2 \lambda^2 / 2 - \sigma_u^2 \nu^2 / 2 \right). \quad (1.18)$$

Здесь $\sigma_u^2 = -B'_\nu(0)$ – дисперсия производной $\nu'(x)$. Соответственно совместная одноточечная плотность вероятности случайной функции $\nu(x)$ и ее производной $\nu'(x)$ равна

$$W_{\nu\nu'}(\nu, u; x) = \frac{1}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp \left[-\frac{(\nu - \varphi(x))^2}{2\sigma_\nu^2} - \frac{(\nu - \varphi'(x))^2}{2\sigma_u^2} \right]. \quad (1.19)$$

Она распалась на произведение одномерных плотностей вероятности. Это значит, что статистически однородная гауссова функция $\nu(x)$ и ее производная $\nu'(x)$ в одной и той же точке x статистически независимы.

6. В приложениях обычно ограничиваются измерениями спектрально-корреляционных характеристик случайных полей. Поэтому подробнее обсудим их ковариационные функции и спектральные плотности. Для простоты займемся анализом статистически однородных случайных полей $\nu(x, t)$, ковариационная функция которых имеет вид

$$\langle \nu(x, t) \nu(x + s, t) \rangle = K_\nu(s, t) = B_\nu(s, t) \quad (\langle \nu \rangle = 0). \quad (1.20)$$

Распределение энергии поля $\nu(x, t)$, равной $\sigma_\nu^2 = B_\nu(0; t)$, по пространственным гармоникам описывается пространственной спектральной плотностью энергии:

$$G_v(k; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_v(s; t) e^{-iks} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_v(s; t) \cos(ks) ds. \quad (1.21)$$

Ковариационная функция выражается через спектральную плотность обратным преобразованием Фурье:

$$B_v(s; t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(k; t) e^{iks} dk. \quad (1.22)$$

В приложениях встречаются статистически неоднородные случайные функции $\nu(x)$ с бесконечной дисперсией, приращения которых $\nu(x+s) - \nu(x)$, тем не менее, статистически однородны по x . При анализе таких случайных функций удобно пользоваться структурной функцией

$$d_v(s) = \langle [\nu(x+s) - \nu(x)]^2 \rangle,$$

которая для статистически однородных функций принимает вид

$$d_v(s) = 2\sigma_v^2 - 2B_v(s).$$

Как и ковариационная функция, структурная функция связана со спектральной плотностью фурье-преобразованием [46]:

$$d_v(s) = 4 \int_0^{\infty} (1 - \cos(ks)) G_v(k) dk, \quad (1.23)$$

$$G_v(k) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d_v(s) \cos(ks) ds \quad (k \neq 0).$$

2. Связь статистических характеристик случайных функций с поведением их реализаций

1. Большую информацию о поведении реализаций случайных функций содержат их ковариационные функции и спектральные плотности. Особенно наглядно это видно на примере импульсных функций

$$\nu(x) = \sum_n \Psi(x - x_n), \quad (1.24)$$

представляющих собой последовательность импульсов заданной формы $\Psi(x)$, возникающих в случайных точках x_n . Так, если промежутки между соседними импульсами $s_n = x_{n+1} - x_n$ взаимно независимы, имеют одинаковое вероятностное распределение длин $W_s(s)$ и характеристическую функцию

$\theta_s(k)$, то спектральная плотность мощности $\nu(x)$ задается равенством [48]

$$G_\nu(k) = \nu \mathcal{E}_\psi(k) \operatorname{Re} \frac{1 + \theta_s(k)}{1 - \theta_s(k)}, \quad (1.25)$$

где $\nu = 1/\langle s_n \rangle$ – средняя частота появления импульсов, $\mathcal{E}_\psi(k)$ – спектральная плотность энергии одного импульса

$$\mathcal{E}_\psi(k) = \frac{1}{2\pi} |C_\psi(k)|^2, \quad C_\psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{ikx} dx. \quad (1.26)$$

Спектральная плотность (1.25) имеет прозрачный физический смысл. Она пропорциональна спектральной плотности отдельного импульса, что совершенно естественно, так как в спектральной плотности случайной функции $\nu(x)$ могут содержаться только те спектральные компоненты, которые присутствуют в спектре одного импульса. Последний множитель в (1.25) описывает эффект интерференции гармоник разных импульсов, связанный с определенной упорядоченностью их возникновений и приводящий при разных k к усилению или подавлению спектральных компонент по сравнению со спектральной плотностью отдельного импульса. При полностью хаотическом появлении импульсов (пуассоновский поток), когда интерференция отсутствует ($W_s(s) = \exp(-\nu s)$), (1.25) переходит в

$$G_\nu(k) = \nu \mathcal{E}_\psi(k), \quad (1.27)$$

тем самым спектр последовательности импульсов пропорционален спектру отдельного импульса. Эффект интерференции пропадает также при $k > k^*$, где k^* определяется условием $\theta(k \gg k^*) \ll 1$. При таких $k > k^*$ равенство (1.25) переходит в (1.27). За оценку k^* можно взять $k^* = 1/\sigma_s$, где $\sigma_s^2 = \langle s_n^2 \rangle - \langle s_n \rangle^2$ – дисперсия длины случайных промежутков между импульсами.

2. Формулы типа (1.25), (1.27), явно выражающие связь спектральной плотности с поведением реализаций импульсной функции, могут оказаться полезными при оценках асимптотик спектральных плотностей и других, не обязательно импульсных случайных функций. Поясним это на примере случайной функции $\nu(x)$, реализации которой в

некоторых точках x_n терпят разрыв (как на рис. 1.1). Малую окрестность разрыва можно мысленно считать фрагментом разрывного импульса. Разрыв у импульса ведет к универсальной форме спектральной плотности импульса при $k \rightarrow \infty$ [48]

$$\mathcal{E}_\psi(k) = A^2 / 2\pi k^2. \quad (1.28)$$

Здесь A – амплитуда разрыва (скачок функции). Зная среднюю частоты появления импульсов ν и в отсутствие интерференции, естественно оценить асимптотику спектральной плотности разрывной случайной функции $\nu(x)$ при больших k по формуле, аналогичной (1.27):

$$G_\nu(k) = \nu A^2 / 2\pi k^2. \quad (1.29)$$

Асимптотика спектральной плотности случайной функции при больших k определяет поведение ее ковариационной функции при малых s . Так, из (1.29) и свойств преобразований Фурье следует, что ковариационная и структурная функции описанной выше статистически однородной функции $\nu(x)$ ведут себя при $s \rightarrow 0$ как

$$B_\nu(s) = B_\nu(0) - \nu \langle A^2 \rangle |s|/2, \quad d_\nu(s) = \nu \langle A^2 \rangle |s|. \quad (1.30)$$

Подобные же рассуждения позволяют оценить также асимптотику спектральной плотности гладких случайных функций $\nu(x)$, реализации которых имеют в окрестности некоторых точек x_n особенности типа Ψ_n $(x - x_n) = A_n (x - x_n)^\alpha$. Отождествляя их с особенностями соответствующих импульсов, получим асимптотику спектральной плотности импульса

$$\mathcal{E}_\psi(k) = A_n^2 \Gamma^2(\alpha + 1) / k^{2(\alpha+1)} \quad (k \rightarrow \infty, |\alpha| < 1/2),$$

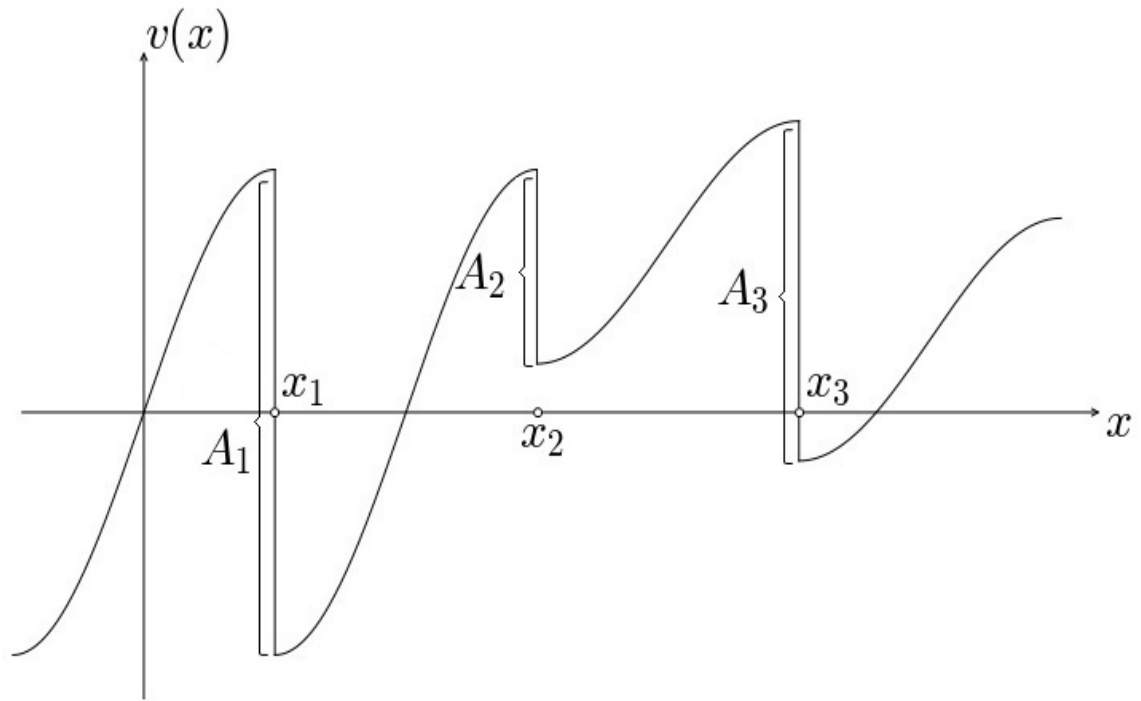


Рис. 1.1. График реализации случайной функции, содержащей разрывы

а затем, по аналогии с (1.29), запишем оценку спектральной плотности поля $v(x)$:

$$G_v(k) = v \langle A^2 \rangle \Gamma^2(\alpha + 1) / k^{2(\alpha+1)} \quad (k \rightarrow \infty) \quad (1.31)$$

и соответствующей ей структурной функции

$$d_v(s) = \frac{2\pi v \langle A^2 \rangle \Gamma^2(\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha + 2) \cos(\pi\alpha)} |s|^{2\alpha+1}. \quad (1.32)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Обращая ход только что приведенных рассуждений, естественно по виду структурной функции $d_v(s)$ или спектральной плотности $G_v(k)$ выдвигать правдоподобные гипотезы об особенностях реализаций случайных функций. Проиллюстрируем это на примере случайного поля пассивной примеси (например, температуры) турбулентной атмосферы. Хорошо известно, что ее структурная функция подчиняется закону двух третей Колмогорова-Обухова и имеет вид $d_v(s) = c^2 s^{2/3}$. Сопоставляя эту структурную функцию с (1.32), можно предположить, что подобная асимптотика структурной функции

турбулентности возникает из-за особенностей ее реализаций типа $\Psi(x)$
 $\sim |x|^{-1/6}$.

3. Теория вероятностей приписывает интегральной функции распределения (1.2) чисто вероятностный смысл: $F_\nu(\nu; k)$ – вероятность того, что $\nu(x)$ принимает в точке x значение, меньше заданного ν . Теория случайных функций обнаруживает в функциях распределения новое содержание – их тесную связь с поведением реализаций.

Действительно, проинтегрировав равенство, определяющее интегральную функцию распределения

$$F_\nu(\nu; x) = \langle 1(\nu - \nu(x, t)) \rangle,$$

по x , получим

$$\int_a^b F_\nu(\nu; x) dx = \langle L(\nu; a, b) \rangle, \quad (1.33)$$

где $\langle L(\nu; a, b) \rangle$ – средняя длина промежутков в интервале (a, b) , внутри которых $\nu(x) < \nu$ (рис. 1.2). Соответственно интегральная функция распределения статически однородной функции $\nu(x)$ совпадает с относительной (на единицу длины) длиной промежутков, внутри которых $\nu(x) < \nu$:

$$F_\nu(\nu) = n_\nu(\nu) = \langle L(\nu; 0, 1) \rangle. \quad (1.34)$$

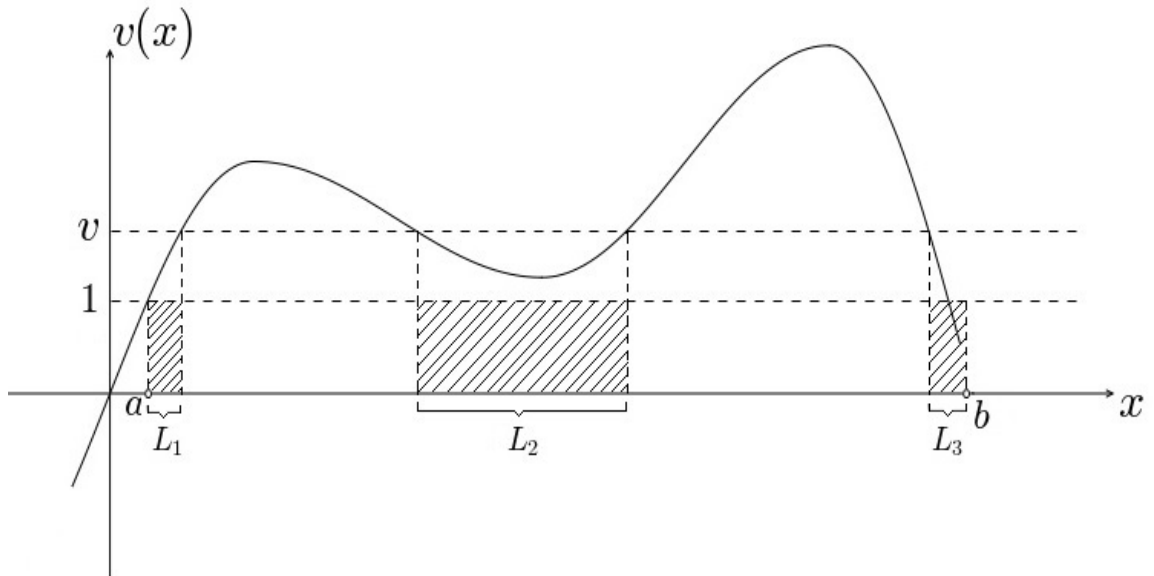


Рис. 1.2. Длины пребывания реализации случайной функции $v(x)$ под уровнем v в интервале $x \in (a, b)$

Как и в случае спектрально-корреляционных характеристик, связь функции распределения с поведением реализаций особенно наглядна для импульсных случайных функций типа (1.24). Если импульсы повторяются с достаточно малой частотой ν и практически не перекрываются, то относительная длина пребывания импульсной функции $v(x)$ под уровнем v , а значит, и ее интегральная функция распределения следующим очевидным образом связана с формулой импульса $\Psi(x)$:

$$F_v(v) = n_v(v) = \begin{cases} 1 - \nu \int_{-\infty}^{\infty} 1(\Psi(x) - v) dx, & v > 0, \\ \nu \int_{-\infty}^{\infty} 1(v - \Psi(x)) dx, & v < 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Отсюда следует, что непрерывная часть плотности вероятности импульсного процесса с неперекрывающимися импульсами равна

$$W_v(v) = \nu \sum_{n=1}^N 1/|\Psi'(x_n(v))|. \quad (1.36)$$

Здесь суммирование ведется по всем корням $x_n(v)$ уравнения $\Psi(x) = v$.

Ниже, при анализе случайных полей гидродинамического типа, нам встретятся случайные функции, претерпевающие в окрестностях некоторых точек x_n большие (много больше σ_v – стандарта случайной функции) выбросы короткой (меньше s_v – времени корреляции) длительности (как на рис. 1.3). Причем форма выбросов $\Psi_n(x - x_n)$, как правило, однотипна и известна, случайны только их местоположения. Подобные случайные функции при $\nu \gg \sigma_v$ можно отождествить с импульсной функцией (1.24), импульсы которой не перекрываются. Соответственно, асимптотика плотности вероятности подобных случайных функций $\nu(x)$ при $\nu \gg \sigma_v$, полностью определяющаяся формой отдельных выбросов, описывается соотношениями типа (1.36).

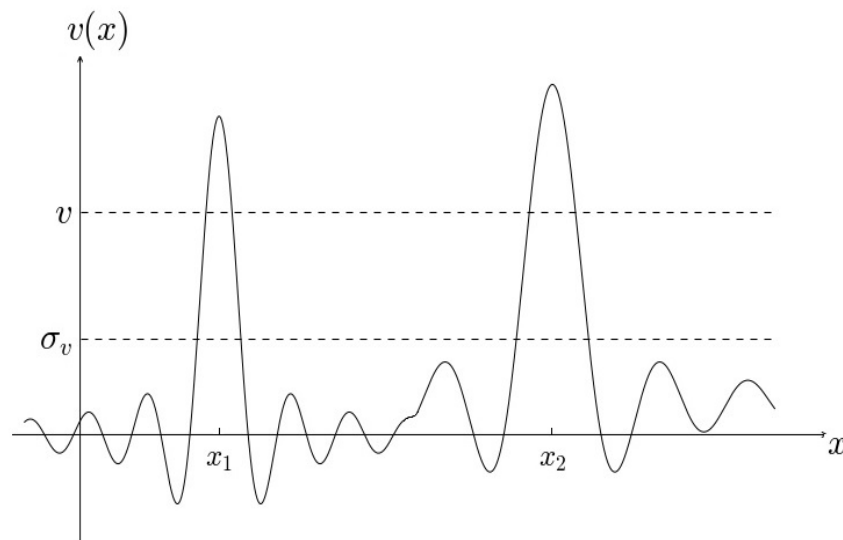


Рис. 1.3. Выбросы реализации случайной функции $\nu(x)$ за уровень ν

В качестве примера вновь рассмотрим турбулентное поле со структурной функцией $d_\nu(s) = c^2 s^{2/3}$. Если справедлива гипотеза о том, что закон двух третей обусловлен наличием в реализациях турбулентности особенностей типа $\Psi(x) \sim |x|^{-1/6}$, то из (1.36) следует, что плотность вероятности турбулентного поля может иметь при больших ν степенной хвост $W_\nu(\nu) \sim \nu^{-7}$.

4. Интересно выяснить также, как в общем случае связана с поведением реализаций статистически однородной функции $\nu(x)$ ее плотность вероятности $W_\nu(\nu)$. Можно показать, что она равна

$$W_\nu(\nu) = \left\langle \int_0^1 \delta(\nu - \nu(x)) dx \right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{N(0,1)} 1/|\nu'(x_n)| \right\rangle$$

– средней сумме обратных модулей скорости пересечения уровня ν с функцией $\nu(x)$ в интервале единичной длины, например $x \in (0, 1)$. Отсюда плотность вероятности тем больше, чем больше слагаемых в сумме, т.е. чем чаще уровень ν пересекается с реализациями случайной функции $\nu(x)$, но тем меньше, чем с большей скоростью он пересекается.

Зная совместную плотность вероятности $\nu(x)$ и ее производной $\nu'(x)$: $W_{\nu\nu'}$ ($\nu, u; x$), нетрудно по аналогии с (1.9) сосчитать среднее число выходов случайной функции $\nu(x)$ из-под уровня ν в интервале (a, b) (пересечений уровня ν с положительной производной $\nu'(x) > 0$)

$$\langle M(\nu; a, b) \rangle = \sum_{M=1}^{\infty} MP(M; \nu, a, b) = \int_a^b dx \int_0^{\infty} u W_{\nu\nu'}(\nu, u; x) du. \quad (1.37)$$

Здесь $P(M; \nu, a, b)$ – вероятность того, что выходов из-под уровня ν в интервале $x \in (a, b)$ ровно M .

Заметим, что при фиксированной длине интервала $L = |a - b|$ с ростом ν вероятность выхода из-под уровня ν уменьшается, так что при больших ν можно пренебречь возможностью более чем одного выхода и переписать последнюю формулу в виде

$$P(1; \nu, a, b) = \langle M(\nu; a, b) \rangle = \int_a^b dx \int_0^{\infty} u W_{\nu\nu'}(\nu, u; x) du. \quad (1.38)$$

5. Сосчитав среднее число выходов из-под уровня $\langle M(\nu; a, b) \rangle$, удастся найти асимптотическое выражение для еще одной важной характеристики реализаций случайной функции $\nu(x)$ – плотности вероятности абсолютного максимума $\nu(x)$ в достаточно большом интервале $x \in (a, b)$, $|a - b| \gg s_\nu$, где s_ν – длина статистической зависимости случайной функции $\nu(x)$.

Пусть $\nu \gg \sigma_\nu$. Тогда точки x_m выхода $\nu(x)$ из-под уровня ν редки и удовлетворяют неравенству $|x_{m+1} - x_m| \gg s_\nu$. Разобьем интервал (a, b) на множество примыкающих друг к другу физически бесконечно малых интервалов dx_k :

$$s_\nu \ll dx_k \ll |x_{m+1} - x_m|, \quad |a - b|.$$

Вероятность того, что $\nu(x)$ в данном интервале dx_k не превысит уровень ν , согласно асимптотической формуле (1.38) равна

$$dP_k = 1 - P(1; \nu, dx_k) = 1 - \langle M(\nu; dx_k) \rangle,$$

где $\langle M(\nu; dx_k) \rangle \ll 1$. Кроме того, что $\nu \gg \sigma_\nu$ выходы из-под уровня ν в каждом из интервалов dx_k практически статистически независимы. Поэтому вероятность того, что $\nu(x)$ не превысит уровень ν во всех интервалах dx_k равна произведению вероятностей невыхода за уровень ν в каждом из них:

$$P[\nu(x) < \nu; x \in (a, b)] = \prod_k dP_k = \prod_k (1 - \langle M(\nu; dx_k) \rangle) = \exp(-\langle M(\nu; a, b) \rangle).$$

Но $P[\nu(x) < \nu; x \in (a, b)]$ равна, по определению, интегральной функции распределения абсолютного максимума $\nu(x)$ в интервале (a, b) , которую обозначим $F_{\max}[\nu; (a, b)]$. Таким образом, из предыдущего равенства имеем

$$F_{\max}[\nu; (a, b)] = \exp(-\langle M(\nu; a, b) \rangle). \quad (1.39)$$

Отсюда асимптотика плотности вероятности абсолютного максимума случайной функции $\nu(x)$ в интервале (a, b) равна

$$W_{\max}(\nu; (a, b)) = -\frac{\partial \langle M(\nu; a, b) \rangle}{\partial \nu} \exp(-\langle M(\nu; a, b) \rangle). \quad (1.40)$$

Для примера найдем интегральную функцию распределения абсолютного, в интервале длины L , максимума статистически однородной гауссовой функции $\nu(x)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $B_\nu(s)$. Подставив (1.19) при $\phi \equiv 0$ в (1.37), получим среднее число выходов из-под уровня ν в интервале длины L :

$$\langle M(\nu; L) \rangle = M_0 \exp(-\nu^2 / 2\sigma_\nu^2), \quad M_0 = L\sigma_n / 2\pi\sigma_\nu. \quad (1.41)$$

Здесь M_0 – среднее число выходов выше нулевого уровня. Таким образом, согласно (1.39), (1.41)

$$F_{\max}[v; L] = \exp\left(-M_0 \exp\left(-v^2/2\sigma_v^2\right)\right). \quad (1.42)$$

При $L \gg s_v$, когда $M_0 \sim 4/s_v \gg 1$ и за звание абсолютного максимума «борются» много локальных максимумов функции $v(x)$, функция распределения F_{\max} асимптотически стремится к универсальному, двойному экспоненциальному распределению. Выведем его. Рассмотрим характерное значение v_* , при котором $F_{\max} = e^{-1}$. Как следует из (1.42), v_* удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$M_0 \exp\left(-v_*^2/2\sigma_v^2\right) = 1.$$

Его решение

$$v_* = \sigma_v \sqrt{2 \ln M_0}$$

определяет характерную величину абсолютного минимума. Используя v_* , перепишем (1.42) в форме

$$F_{\max}[v; L] = \exp\left\{-\exp\left[-\sqrt{2 \ln M_0}(v - v_*)/\sigma_v - (v - v_*)^2/2\sigma_v^2\right]\right\}. \quad (1.43)$$

Отсюда видно, что если $\sqrt{2 \ln M_0} \gg 1$, то в интервале

$$-1 < (v - v_*)\sqrt{2 \ln M_0} / \sigma_v \ll 1$$

$F_{\max}(v; L)$ успеваает измениться практически от нуля до единицы, в то время как $(v - v_*)^2/2\sigma_v^2$ в этом интервале пренебрежимо мало. Поэтому, пренебрегая этим членом, перейдем от (1.43) к асимптотически справедливому при $M_0 \gg 1$ двойному экспоненциальному распределению

$$F_{\max}(z) = \exp\left(-e^{-z}\right). \quad (1.44)$$

Здесь введена безразмерная переменная

$$z = (v - v_*)\sqrt{2 \ln M_0} / \sigma_v. \quad (1.45)$$

Плотность вероятности безразмерного значения абсолютного максимума, согласно (1.44), равна

$$W_{\max}(z) = e^{-z} \exp\left(-e^{-z}\right). \quad (1.46)$$

Из последних формул видно, что в то время как среднее значение абсолютного максимума, равное $\langle \nu \rangle = \sqrt{2 \ln M_0}$, с увеличением M_0 растет, как $\sqrt{\ln M_0}$, разброс абсолютных максимумов в той же мере (как $1/\sqrt{\ln M_0}$) уменьшается. Этот факт малости разброса значений абсолютных максимумов используют, например, в астрономии, когда измеряют расстояние до галактик по яркости самой яркой звезды, считая интенсивность свечения наиболее ярких звезд разных галактик практически одинаковой.

3. Лагранжева и эйлерова статистики случайных полей

1. При теоретическом и экспериментальном изучении хаотических движений сплошных сред, анализе распространения оптических и акустических волн в случайно-неоднородных средах широко применяются два взаимно дополняющих подхода. В одном из них интересуются лагранжевой статистикой случайных полей и волн. Применительно к сплошной среде это – статистика пульсаций скорости и плотности жидкой частицы, в геометрической области это – флуктуации фазы, углов прихода и интенсивности выделенной лучевой трубки. Другой подход состоит в определении эйлеровой статистики полей и волн в заданной точке пространства. К примеру, лагранжеву статистику сплошной среды измеряют движущиеся зонды, буйки нулевой плавучести, а эйлерову статистику – неподвижные датчики.

Во многих физических задачах типична ситуация, когда удается рассчитать или экспериментально измерить один тип статистических свойств случайных полей, например, лагранжеву статистику, в то время как нужно знать их эйлеровы характеристики. В лагранжевом описании эволюции римановой волны, которой можно сопоставить гидродинамический пучок невзаимодействующих частиц, выглядит тривиально – каждая частица движется равномерно и для случайного начального поля не составляет труда найти лагранжеву статистику. В то же время наибольший интерес представляет эволюция эйлерова среднего поля, пространственных спектров и

корреляционных функций, то есть эйлерова статистика. Ниже мы покажем, что между лагранжевыми и эйлеровыми статистическими свойствами случайных полей имеются довольно простые связи, позволяющие в ряде случаев найти по известной лагранжевой статистике эйлерову и наоборот.

Связь и различие лагранжева и эйлерова описаний поясним на примере гидродинамического движения сплошной среды. Эйлерова система координат удобна для описания полей в фиксированных точках пространства, в которые с течением времени попадают разные частицы сплошной среды. Типичным примером эйлеровой системы координат служит декартова система $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. В отличие от эйлеровой лагранжева система координат «вморожена» в сплошную среду, движется вместе с ней и удобна для описания поведения среды в окрестностях фиксированных частиц среды. В качестве лагранжевых координат часто выбирают эйлеровы координаты частиц в некоторый начальный момент времени. Пусть, например, в момент $t = 0$ некоторая фиксированная частица среды имела координаты $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, а движение этой частицы в эйлеровой системе координат описывается вектором $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$. В лагранжевой системе координат точке пространства, в которую попала данная частица, приписывают ее начальные координаты \mathbf{y} . Равенства $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ выражают эйлеровы координаты через лагранжевы. Разрешив эти равенства относительно \mathbf{y} , выразим лагранжевы координаты через эйлеровы: $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$. Если нам откуда-либо известно поле скоростей сплошной среды в эйлеровой системе координат $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, то эйлеровы координаты фиксированной частицы можно найти, решая систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}[\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t] = \mathbf{V}(\mathbf{y}, t); \quad \mathbf{X}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{y}. \quad (1.47)$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{y}, t)$ – поле скоростей в лагранжевой системе координат. В дальнейшей для краткости будем называть поля в лагранжевой системе координат лагранжевыми, а в эйлеровой системе – эйлеровыми. Так, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – эйлерово поле, а $\mathbf{V}(\mathbf{y}, t)$ – лагранжево поле скорости, $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ – лагранжево поле эйлеровых

координат фиксированной частицы, $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ – эйлерово поле лагранжевых координат частиц, попадающих в точку \mathbf{x} .

Рассмотрим микроскопически бесконечно малую жидкую частицу сплошной среды с лагранжевыми координатами \mathbf{y} . Если объем в момент t , отнесенный к начальному объему, равен якобиану преобразования эйлеровых координат в лагранжевы:

$$J(\mathbf{y}, t) = \left| \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} \right|, \quad (1.48)$$

Если $J < 1$, то жидкая частица сжалась, если $J > 1$, то – расширилась. Поэтому будем называть $J(\mathbf{y}, t)$ лагранжевым полем расходимости.

Введем еще эйлерово поле расходимости

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t). \quad (1.49)$$

Если в данный момент t поле расходимости всюду положительно, то между лагранжевой и эйлеровой системами координат имеется взаимнооднозначное соответствие, а сплошная среда однопотокова. Если же $J(\mathbf{y}, t)$ – знакопеременная функция \mathbf{y} , то в некоторых областях существует многопотоковое движение сплошной среды: в каждую точку этих областей попадает сразу несколько жидких частиц. В дальнейшем мы подробно обсудим случай многопотокового движения сплошной среды, а пока будем считать ее однопотоковой.

Изменение в пространстве и времени поля расходимости сплошной среды тесно связано с изменением ее плотности или концентрации пассивной примеси, движущейся вместе со средой. Пусть $\rho^p(\mathbf{y}, 0) = \rho_0(\mathbf{y})$ – концентрация пассивной примеси в начальный момент $t = 0$, тогда соответствующее лагранжево поле в произвольный момент времени, пока среда однопотокова, равно

$$\rho^p(\mathbf{y}, t) = \rho_0(\mathbf{y})/J(\mathbf{y}, t).$$

Соответствующее эйлерово поле плотности или концентрации пассивной примеси

$$\rho^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, t) = \rho^{\mathcal{E}}(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t) = \rho_0(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)/j(\mathbf{x}, t). \quad (1.50)$$

2. Выше приведены некоторые динамические связи между лагранжевыми и эйлеровыми полями. При статистическом анализе случайных полей, например, турбулентной жидкости, важно знать связи между статистическими характеристиками полей в лагранжевой и эйлеровой системах координат. Найдем вначале, как связаны между собой одноточечные лагранжевы и эйлеровы плотности вероятности, считая пока сплошную среду однопотоковой. Пусть, как договорились, $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{V}(\mathbf{y}, t)$, $J(\mathbf{y}, t)$ – случайные координаты, вектор скорости и расходимость фиксированной жидкой частицы с лагранжевыми координатами \mathbf{y} . Согласно (1.1) совместная плотность вероятности перечисленных лагранжевых полей равна

$$W_{\mathbf{X}, \mathbf{V}, J}^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{V}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{v}) \delta(J(\mathbf{y}, t) - j) \rangle_{\mathcal{L}}. \quad (1.51)$$

Здесь $\langle \dots \rangle_{\mathcal{L}}$ означает статистическое усреднение по ансамблю значений случайных лагранжевых полей. Используя (П.12), для случая взаимоднозначного соответствия между лагранжевой и эйлеровой системами координат ($J > 0$) получаем равенство

$$\delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}) / j(\mathbf{x}, t). \quad (1.52)$$

Подставляю его в (1.51), получим

$$W_{\mathbf{X}, \mathbf{V}, J}^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) = \langle \delta(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}) \delta(j(\mathbf{x}, t) - j) \rangle_{\mathcal{L}} / j, \quad (1.53)$$

где $\langle \dots \rangle_{\mathcal{E}}$ означает усреднение по ансамблю значений эйлеровых случайных полей, в данном случае – эйлеровых полей $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $j(\mathbf{x}, t)$. С другой стороны, одноточечная совместная плотность вероятности указанных эйлеровых полей равна

$$W_{\mathbf{x}, \mathbf{v}, j}^{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) = \langle \delta(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}) \delta(j(\mathbf{x}, t) - j) \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Таким образом, из (1.53) следует, что

$$W_{\mathbf{x}, \mathbf{v}, j}^{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) = j W_{\mathbf{X}, \mathbf{V}, J}^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t). \quad (1.54)$$

В дальнейшем, для краткости, будем называть плотности вероятности случайных лагранжевых полей, описывающих статистические свойства

фиксированных жидких частиц сплошной среды, лагранжевыми плотностями вероятности, а плотности вероятности эйлеровых полей – эйлеровыми плотностями вероятности. В этой терминологии равенство (1.54) выражает связь между лагранжевой плотностью вероятности W^L и эйлеровой плотностью вероятности W^E .

Проинтегрировав равенство (1.54) по y , получим плотностью вероятности эйлеровых полей скорости и расходимости, выраженную через лагранжеву плотностью вероятности:

$$W_{v,j}^E(\mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) = j \int_{-\infty}^{\infty} W_{X,V,J}^L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) d^3 y. \quad (1.55)$$

Из двух последних формул видно, что во взаимосвязи лагранжевой и эйлеровой статистик большую роль играет поле расходимости $j(\mathbf{x}, t)$. Во многих физических задачах при нахождении подобных связей естественнее использовать не расходимость, а обратную к ней величину – плотностью сплошной среды или концентрацию пассивной примеси. Пусть, например,

$$W_{X,V,\rho}^L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \rho; \mathbf{y}, t) = \left\langle \delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{V}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{v}) \delta(\rho^L(\mathbf{y}, t) - \rho) \right\rangle_L$$

– лагранжева совместная плотность вероятности координат \mathbf{X} , скорости \mathbf{V} и концентрации пассивной примеси ρ^L фиксированной жидкой частицы. Домножая это равенство на начальную концентрацию координат $\rho_0(\mathbf{y})$, которую для простоты будем считать неслучайной, и используя следующее из (1.52) равенство

$$\rho_0(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) = \rho^E(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}),$$

придем к новой формуле связи лагранжевой и эйлеровой плотностей вероятности:

$$v W_{y,v,\rho}^E(\mathbf{y}, v, \rho; \mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{y}) W_{X,V,\rho}^L(\mathbf{x}, v, \rho; \mathbf{y}, t), \quad (1.56)$$

в которой вместо расходимости, как в (1.54), фигурирует плотность среды. Проинтегрировав (1.56) по y , будем иметь

$$\rho W_{v,\rho}^E(\mathbf{v}, \rho; \mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\mathbf{y}) W^L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \rho; \mathbf{y}, t) d^3 y. \quad (1.57)$$

3. Приведем теперь несколько полезных частных следствий полученных соотношений. Так, интегрируя (1.56) по ν , y и ρ , получим известную формулу

$$\langle \rho^3(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\mathbf{y}) W_X^{\mathcal{J}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) d^3 y, \quad (1.58)$$

устанавливающую тот замечательный факт, что средняя плотность среды или средняя концентрация пассивной примеси в фиксированной точке пространства \mathbf{x} однозначно определяется начальной концентрацией $\rho_0(\mathbf{y})$ и лагранжевой плотностью вероятности координат фиксированной частицы:

$$W_X^{\mathcal{J}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{J}}.$$

Укажем еще родственное (1.58) равенство, следующее из (1.55).

$$\langle j(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathcal{J}} = \int_{-\infty}^{\infty} W_X^{\mathcal{J}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) d^3 y. \quad (1.59)$$

Наиболее простые связи между лагранжевой и эйлеровой статистиками имеют место в случае несжимаемой сплошной среды, для которой $\mathbf{J} = j \equiv 1$. При этом формула связи (1.54) эквивалентна соотношению

$$W_{y,\nu}^{\mathcal{J}}(\mathbf{y}, \mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = W_{X,\nu}^{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \mathbf{y}, t),$$

выражающему своеобразную теорему взаимности. Согласно ей при смене местами лагранжевых и эйлеровых координат случайной несжимаемой среды эйлерова плотность вероятности переходит в лагранжеву.

Выясним теперь, какой вид принимают полученные выше формулы связи в случае статистически однородной, вообще говоря, сжимаемой среды. Поскольку статистические характеристики такой среды не меняются при параллельном переносе эйлеровых либо лагранжевых систем координат, то справедливы равенства типа

$$\begin{aligned} W^{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) &= W^{\mathcal{J}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{v}, j; t), \\ W^{\mathcal{J}}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, j; \mathbf{x}, t) &= W^{\mathcal{J}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{v}, j; t), \\ W^{\mathcal{J}}(\mathbf{v}, j; \mathbf{x}, t) &= W^{\mathcal{J}}(\mathbf{v}, j; t). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Учитывая их, получим из (1.55) простую алгебраическую связь:

$$W^{\rho}(\mathbf{v}, j; t) = jW^{\rho j}(\mathbf{v}, j; t). \quad (1.61)$$

Аналогичная формула связи следует и из (1.57), если начальная плотность среды $\rho_0(\mathbf{y}) = \rho_0$ одинакова во всех точках пространства

$$W^{\rho}(\mathbf{v}, \rho; t) = \rho_0 W^{\rho j}(\mathbf{v}, \rho; t). \quad (1.62)$$

Проинтегрировав ее по \mathbf{v} , приходим к соотношению между лагранжевым и эйлеровым вероятностными распределениями плотности статистически однородной сплошной среды:

$$W_{\rho}^{\rho}(\rho; t) = \frac{\rho}{\rho_0} W_{\rho}^{\rho j}(\rho; t). \quad (1.63)$$

Из (1.61) следует еще, что лагранжева и эйлерова плотности вероятности поля скорости статистически однородной несжимаемой жидкости совпадают

$$W_{\mathbf{v}}^{\rho}(\mathbf{v}; t) = W_{\mathbf{v}}^{\rho j}(\mathbf{v}; t). \quad (1.64)$$

Обратим внимание на то, что эйлерова плотность вероятности (1.61) отличается от лагранжевой на множитель j . В частности, эйлерова и лагранжева плотности вероятности поля расходимости статистически однородной сплошной среды связаны равенством

$$W_j^{\rho}(j; t) = jW_j^{\rho j}(j; t). \quad (1.65)$$

Обусловлено это тем обстоятельством, что расширившиеся жидкие частицы, для которых $j > 1$, имеют в эйлеровой системе координат \mathbf{x} в j раз больший объем, чем в лагранжевой системе координат \mathbf{y} . Соответственно, и статистический вес таких частиц в эйлеровом ансамбле j раз больше, чем лагранжевом.

4. Обсудим еще один, представляющий и самостоятельный интерес пример, иллюстрирующий геометрическую сущность формул связи, аналогичных (1.65). Пусть на оси z задана статистически однородная последовательность точек $\{z_k\}$, статистические свойства длин интервалов между которыми $L_k = z_{k+1} - z_k$ инвариантны к сдвигу номера k . Для определенности начнем нумеровать точки z_k справа от начала координат, как на рис 1.4. Физическим примером, сводящимся к данной задаче, может

служить нелинейная волна, удовлетворяющая уравнению Бюргерса. Как показано в [1] при $\nu \rightarrow 0$ и на достаточно больших временах она представляет собой последовательность пилообразных импульсов, и одной из ее важнейших характеристик является статистика расстояний между разрывами.

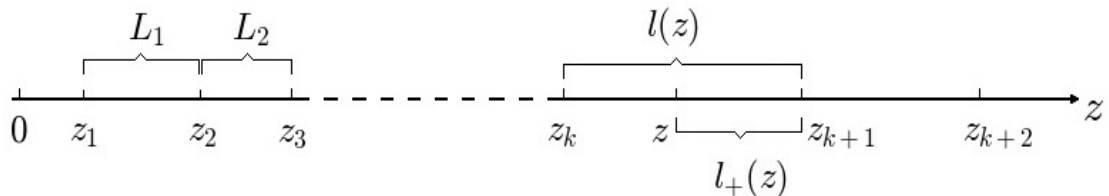


Рис. 1.4. Реализация случайной последовательности интервалов

На практике используют два, казалось бы равноправных, способа измерения статистических характеристик подобных случайных последовательностей, например длин интервалов L_k . Один из них состоит в определении плотности вероятности по статистическому ансамблю реализаций интервала с заданным номером $k \geq 1$; обозначим найденную так плотность вероятности длин интервалов $W(l)$. В другом случае измеряют длины интервалов $l(z)$, включающих в себя заранее фиксированную точку z ; обозначим плотность вероятности, определенную по ансамблю длин этих интервалов, $w(l)$. Может показаться, что из статистической однородности последовательности $\{z_k\}$ следует равенство $W(l)$ и $w(l)$. Однако это не так. Чтобы убедиться в различии $W(l)$ и $w(l)$, обсудим подробнее определение $w(l)$:

$$w(l) = \langle \delta(l(z) - l) \rangle. \quad (1.66)$$

Поскольку $w(l)$ не зависит от z , то справедливо равенство

$$w(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \langle \delta(l(z) - l) \rangle dz. \quad (1.67)$$

Пренебрегая краевыми эффектами, запишем интеграл в (1.67) в виде

$$\int_0^L \langle \delta(l(z) - l) \rangle dz = \left\langle \sum_{k=1}^{N(L)} \delta(L_k - l) L_k \right\rangle = l \left\langle \sum_{k=1}^{N(L)} \delta(L_k - l) \right\rangle.$$

Здесь $N(L)$ – номер последней, попадающей в интервал $(0, L)$ точки z_k . При $L \rightarrow \infty$, в силу закона больших чисел, можно положить $N(L) = \langle N(L) \rangle$, что дает

$$\int_0^L \langle \delta(l(z) - l) \rangle dz = l \langle N(l) \rangle W(l), \quad (1.68)$$

где $W(l) = \langle \delta(l - L_k) \rangle$ – плотность вероятности длины интервала с заданным номером. Подставив (1.68) в (1.66), получим

$$w(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle N(l) \rangle}{L}$$

Из условия нормировки $w(l)$ следует, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle N(l) \rangle}{L} = \frac{1}{\langle l \rangle_L},$$

где

$$\langle l \rangle_L = \langle L_k \rangle = \int_0^\infty l W(l) dl$$

– средняя длина интервала с заданным номером. Таким образом, окончательно

$$w(l) = \frac{1}{\langle l \rangle_L} W(l). \quad (1.69)$$

Эта формула связи аналогично по смыслу формуле (1.65). Причем $w(l)$ естественно назвать эйлеровой, а $W(l)$ – лагранжевой плотностью вероятности длин интервалов. Множитель $1/\langle l \rangle_L$ в (1.69), подобно множителю j в (1.65), отражает тот факт, что чем длиннее интервал L_k , тем более вероятно попадание в него заданной точки z . Вследствие этого средняя длина случайного интервала, включающего данную точку z , всегда больше средней длины интервала с заданным номером

$$\langle l \rangle_z = \langle l(z) \rangle = \frac{1}{\langle l \rangle_L} \int_0^\infty l^2 W(l) dl = \frac{\langle l^2 \rangle_L}{\langle l \rangle_L} > \langle l \rangle_L. \quad (1.70)$$

По аналогии с эйлеровыми и лагранжевыми координатами и полями можно назвать z эйлеровой координатой, k – лагранжевой, $l(z)$ – эйлеровым, а L_k

лагранжевым интервалами. Таким образом, $w(l)$ описывает эйлерову статистику длин интервалов, $W(l)$ – лагранжеву, а равенство (1.69) устанавливает связь между эйлеровой и лагранжевой плотностями вероятности длин интервалов.

Для приложений представляет интерес еще одна эйлерова статистическая характеристика интервалов – плотность вероятности $l_+(z)$ – длины отрезка, заключенного между точкой z и правым концом интервала $l(z)$ (см. рис. 1.4). Имея в виду, что z с равной вероятностью может попасть в любую точку интервала $l(z)$, нетрудно найти плотность вероятности длины

$$w_+(l) = \langle L_k \rangle = \frac{1}{\langle l \rangle} \int_l^\infty W(l') dl'. \quad (1.71)$$

5. Вернемся к обсуждению формул связи между эйлеровой и лагранжевой статистиками случайных полей, характеризующих движения сплошной среды. Подобные проведенным выше связи нетрудно установить и для многоточечных плотностей вероятности. Пусть, например, задана двухточечная лагранжева плотность вероятности полей X , V и J :

$$W_{X,V,J}^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, j_1, j_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}_1, t) - \mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}_2, t) - \mathbf{x}_2) \times \\ \times \delta(\mathbf{V}(\mathbf{y}_1, t) - \mathbf{v}_1) \delta(\mathbf{V}(\mathbf{y}_2, t) - \mathbf{v}_2) \times \delta(J(\mathbf{y}_1, t) - j_1) \delta(J(\mathbf{y}_2, t) - j_2) \rangle.$$

проинтегрировав это равенство по $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ и воспользовавшись соотношением (1.52), получим

$$W^2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, j_1, j_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \\ = j_1 j_2 \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, j_1, j_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t) d^3 y_1 d^3 y_2. \quad (1.72)$$

В случае статистически однородной сплошной среды эта формула несколько упрощается. Покажем это, перейдя здесь к разностям координатам и координатам центра тяжести:

$$s = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad s_0 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2, \quad \mathbf{Q}_0 = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2.$$

В статистически однородной сплошной среде эйлерова плотность вероятности, в левой части равенства (1.72), зависит лишь от s , а лагранжева,

в правой части, только от s , s_0 , и $Q - Q_0$. Переходя в (1.72) к интегрированию по s_0 , Q_0 , при этом получим

$$W^{\rho}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, j_1, j_2; s, t) = j_1 j_2 \int_{-\infty}^{\infty} W^{\pi}(s, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, j_1, j_2; s_0, t) d^3 s_0. \quad (1.73)$$

Здесь фигурирует лагранжева плотность вероятности

$$W^{\pi}(s, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, j_1, j_2; s_0, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(s_0, t) - \mathbf{X}(\mathbf{0}, t) - s) \times \\ \times \delta(\mathbf{V}(s_0, t) - \mathbf{v}_1) \delta(\mathbf{V}(\mathbf{0}, t) - \mathbf{v}_2) \times \delta(J(s_0, t) - j_1) \delta(J(\mathbf{0}, t) - j_2) \rangle_{\pi}.$$

Аналогично обобщаются на двухточечный случай и формулы типа (1.56), связывающие лагранжеву и эйлерову статистики через концентрацию пассивной примеси:

$$\rho_1 \rho_2 W^{\rho}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \rho_1, \rho_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\mathbf{y}_1) \rho_0(\mathbf{y}_2) W^{\pi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \rho_1, \rho_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t) d^3 y_1 d^3 y_2. \quad (1.74)$$

Если сплошная среда статистически однородна, а начальная концентрация $\rho_0(\mathbf{y})$ случайна, статистически однородна и статистически независима от движений сплошной среды, то из (1.74) следует, что корреляционная функция концентрации пассивной примеси равно

$$K_{\rho}^{\rho}(s, t) = \langle \rho^{\rho}(\mathbf{x} + s, t) \rho^{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(s_0) W^{\pi}(s, s_0; t) d^3 s_0, \quad (1.75)$$

где

$$K_0(s_0) = \langle \rho_0(\mathbf{y} + s_0) \rho_0(\mathbf{y}) \rangle,$$

а

$$W^{\pi}(s, s_0; t) = \langle \delta(s - \mathbf{X}(s_0, t) + \mathbf{X}(\mathbf{0}, t)) \rangle \quad (1.76)$$

– лагранжева плотность вероятности вектора относительного смещения двух фиксированных частиц, начальный вектор смещения которых был равен s_0 .

6. В дальнейшем нам понадобятся линейные функционалы от эйлеровых средних. Найдем, как они выражаются через лагранжевы средние на примере одномерной сплошной среды. Пусть $\nu(x, t)$ – некоторое случайное поле, связанное с движением сплошной среды, и требуется вычислить функционал

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle v(x, t) \rangle_{,} f(x) dx,$$

где $f(x)$ – известная детерминированная функция. Переходя к интегрированию по лагранжевой координате, будем иметь

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle V(y, t) f[X(y, t)] J(y, t) \rangle_{,l} dy.$$

Учитывая, что в одномерном случае лагранжево поле расходимости определяется равенством

$$J^l(y, t) = \frac{\partial X(y, t)}{\partial y}, \quad (1.77)$$

получим

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle V(y, t) \frac{\partial F(X(y, t))}{\partial y} \right\rangle_{,l} dy,$$

где $F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$.

Интегрируя еще раз по частям и полагая для простоты, что $V(-\infty, t) = V(\infty, t) = 0$, найдем окончательно

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle F(X(y, t)) \frac{\partial V(y, t)}{\partial y} \right\rangle_{,l} dy.$$

Согласно этой формуле, например, фурье-образ среднего поля $v(x, t)$ равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle v(x, t) \rangle_{,} e^{ikx} dx = \frac{i}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{\partial V(y, t)}{\partial y} \exp(ikX(y, t)) \right\rangle_{,l} dy. \quad (1.78)$$

Аналогичные формулы связи справедливы и для функционалов от двухточечных средних. Так, спектральная плотность эйлера статистически однородного поля $v(x, t)$

$$G_v(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_v(s, t) e^{-iks} ds, \quad (1.79)$$

где

$$B_v(s, t) = \langle v(x+s, t)v(x, t) \rangle - \langle v \rangle^2 \quad (1.80)$$

– эйлерова ковариационная функция, выражается через лагранжево среднее формулой, подобной (1.78):

$$G_v(k, t) = \frac{1}{2\pi k^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{\partial V(y, t)}{\partial y} \frac{\partial V(y+s, t)}{\partial y} \exp\{ik[X(y, t) - X(y+s, t)]\} \right\rangle_L ds, \quad (1.81)$$

7. До сих пор мы считали сплошную среду однопотоковой. Однако во многих физических ситуациях, в пучках невзаимодействующих частиц, в холодной плазме, в оптике после образования каустик возможно появление многопотоковости. В одну и ту же точку пространства может попадать при этом не одна, а сразу несколько частиц, имеющих различные лагранжевы координаты. Соответственно эйлеровы поля становятся многопотоковыми – неоднозначными функциями эйлеровых координат. Усложняются и связи между лагранжевыми и эйлеровыми статистическими характеристиками сплошной среды. Выясним ряд таких взаимосвязей, справедливых для многопотоковых случаев. Заметим прежде всего, что равенству $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ при фиксированном \mathbf{x} может удовлетворять теперь не один набор лагранжевых координат \mathbf{y} , а несколько: $\mathbf{y}_1(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{y}_N(\mathbf{x}, t)$, где $N = N(\mathbf{x}, t)$ – полное число частиц, попадающих в момент t в точку с эйлеровыми координатами \mathbf{x} . Другими словами, при наличии многопотоковости эйлерово поле лагранжевых координат $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ – многозначная функция, имеющая в точке \mathbf{x} не одно, а $N(\mathbf{x}, t)$ значений. Соответственно, многозначными становятся и другие эйлеровы поля. При этом соотношение (1.52) переходит в более общее

$$\delta(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N(\mathbf{x}, t)} \delta(\mathbf{y}_n(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}) / |j_n(\mathbf{x}, t)|, \quad (1.82)$$

где $j(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{y}_n(\mathbf{x}, t), t)$ – расходимость n -й жидкой частицы.

В дальнейшем мы используем следующие общие топологические свойства многопотоковых полей: $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), j(\mathbf{x}, t)$. Если лагранжево поле $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ непрерывно дифференцируемо по \mathbf{y} , а смещения частиц $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{y}$ равномерно ограничены при любых \mathbf{y} , то всюду, за исключением поверхностей с общей

объемной мерой нуль (поверхностей каустик, где плотность частиц обращается в бесконечность, а некоторые из значений $j_n(\mathbf{x}, t)$ – в нуль), число частиц, попадающих в данную точку \mathbf{x} , будет нечетным. Причем $(N + 1)/2$ из них расходимости $j_n(\mathbf{x}, t)$ – положительны, а расходимости $(N - 1)/2$ остальных – отрицательны.

После этих предварительных замечаний перейдем к установлению связей между лагранжевыми и эйлеровыми однотоочечными плотностями вероятности. Рассмотрим вначале лагранжеву плотность вероятности (1.51). Подставив в правую часть (1.51) соотношение (1.82), получим

$$W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) = \frac{1}{|j|} \left\langle \sum_{n=1}^{N(\mathbf{x}, t)} \delta(\mathbf{y}_n(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}) \delta(j_n(\mathbf{x}, t) - j) \right\rangle .$$

Отсюда, согласно формуле полной вероятности,

$$W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) = \frac{1}{|j|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; \mathbf{x}, t) \sum_{n=1}^N W_n^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, j; \mathbf{x}, t | N) , \quad (1.83)$$

где $P(N; \mathbf{x}, t)$ – вероятность того, что эйлеровы поля в точке \mathbf{x} и в момент t имеют N потоков, а $W_n^{\mathcal{L}}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, j; \mathbf{x}, t | N)$ – совместная плотность вероятности эйлеровых полей в n -м потоке при условии, что всего потоков N . Проинтегрировав обе части равенства по лагранжевым координатам, придем к еще одной полезной формуле связи:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, j; \mathbf{y}, t) d^3 y = \frac{1}{|j|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; \mathbf{x}, t) \sum_{n=1}^N W_n^{\mathcal{L}}(\mathbf{v}, j; \mathbf{x}, t | N) . \quad (1.84)$$

Аналогичное обобщение на многопотоковый случай формулы (1.57) таково:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\mathbf{y}) W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \rho; \mathbf{y}, t) d^3 y = \rho \sum_{N=1}^{\infty} P(N; \mathbf{x}, t) \sum_{n=1}^N W_n^{\mathcal{L}}(\mathbf{v}, \rho; \mathbf{x}, t | N) .$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\mathbf{y}) W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) d^3 y = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; \mathbf{x}, t) \sum_{n=1}^N \left\langle \rho_n^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, t) \right\rangle_N .$$

Здесь $\langle \dots \rangle_N$ означает усреднение по эйлеровой статистике при условии, что потоков N .

Поскольку полная плотность многопоточковой среды в точке равно сумме плотностей каждого из потоков:

$$\rho^{\circ}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N(\mathbf{x}, t)} \rho_n^{\circ}(\mathbf{x}, t),$$

то из последнего равенства следует, что средняя плотность и в многопоточковом случае описывается формулой (1.58), выведенной для однопоточкового случая. Точно так же распространяется на многопоточковый случай и формула (1.75).

Одной из важных физических характеристик многопоточковых полей является эйлерово среднее число попадающих в данную точку потоков:

$$\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} NP(N; \mathbf{x}, t).$$

Выразим его через лагранжевы средние. Домножив равенство (1.84) на $|j|$ и проинтегрировав его по ν и j , получим

$$\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle_{\circ} = \int_{-\infty}^{\infty} |j| W^{\circ}(\mathbf{x}, j; \mathbf{y}, t) d^3 y dj.$$

Отдельно обсудим случай статистически однородной многопоточковой сплошной среды. очевидное обобщение равенства (1.61) на этот случай таково:

$$W^{\circ}(\mathbf{v}, j; t) = \frac{1}{|j|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; t) \sum_{n=1}^N W_n^{\circ}(\mathbf{v}, j; t | N). \quad (1.85)$$

Соответственно, среднее число потоков статистически однородной среды

$$\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle_{\circ} = \langle |J(\mathbf{y}, t)| \rangle_{\circ} \quad (1.86)$$

равно среднему лагранжеву модулю расходимости.

Список литературы

1. Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Клемина А.В., Прончатов-Рубцов Н.В. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии (часть 1). Учебное пособие. Н.Новгород: Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ. 2016. 97 С.
(http://www.unn.ru/books/met_files/Nelinvoln_Gurb2016.pdf)
2. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука. 1990. 215 С. (S.N. Gurbatov, A.N. Malakhov, A.I. Saichev. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays, particles. Manchester University Press. 1991. 308 P.)
3. Gurbatov S.N., Rudenko O.V. Statistical Phenomena. Ch. 13 in the Book: Nonlinear Acoustics (Ed. by M.F.Hamilton and D.T.Blackstock) Academic Press. New York. 1998. P. 377-398
4. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах и примерах. М: Физматлит. 2007.176 С. (Rudenko O.V., Gurbatov S.N. Hedberg C.M., Nonlinear Acoustics through Problems and Examples. Trafford Publishing. USA. 2010. 184 P.)
5. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустики М.: Физматлит. 2008. 496 С. (Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. Springer-Verlag Berlin: HeidelbergGmbh & Co. Kg (Germany) and HEP (China). 2012. 500 P.)
6. Бархатов А.Н., Горская Н.В., Горюнов А.А., Гурбатов С.Н., Можаяев В.Г., Руденко О.В. Акустика в задачах. Учебное руководство для вузов. Под ред. С.Н.Гурбатова и О.В.Руденко. Москва: Физматлит. 2009. 336 С.
7. Гурбатов С.Н., Зайцев В.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В. Нелинейные акустические явления в структурно-неоднородных средах: эксперименты и модели. Учебное пособие. Изд. ИПФ РАН. Нижний Новгород. 2009. 268С.
8. Гурбатов С.Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. Т. 141. С. 221–255.
9. Gurbatov S.N., Simdyankin S., Aurell E., Frisch U., Toth G. On the decay of Burgers turbulence // J. Fluid Mech. 1997. V. 344. P. 349–374.
10. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Шандарин С.Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания // УФН. 2012. Т. 182. С. 233–261.
11. Gurbatov S.N.; Saichev A.I. Probable Distributions and Spectra of Potential Hydrodynamic Turbulence Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Radiofizika 1984. V. 27. Iss. 4. P. 456-468
12. Noullez, A., Gurbatov, S.N., Aurell, E., Simdyankin, S.I. The global picture of self-similar and not self-similar decay in Burgers turbulence.//Phys. Rev E. 71, 056305:1-14 (2005)

13. Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Черепенников В.В., Энфло Б.О. Поведение интенсивных акустических шумов на больших расстояниях // Акуст. Журнал. 2007. Т. 53. № 1. С. 55-72.
14. Burgers, J.M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion.// Kon. Ned. Akad. Wet. Verh. 1939. vol. 17, p. 1–53 (also in ‘Selected Papers of J.M. Burgers’, eds. F.T.M. Nieuwstadt & J.A. Steketee, p. 281-334, Kluwer, 1995).
15. Burgers J.M. The Nonlinear diffusion equation. Dordrecht: D. Reidel, 1974.
16. Woyczynski W. A., Burgers–KPZ Turbulence, Gottingen Lectures, Berlin, Springer-Verlag, 1998.
17. Bec J., Khanin K., Burgers turbulence, // Physics Reports 447 (2007) 1–49.
18. Frisch U. Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov, Cambridge university press, 1995. 296 P.
Фриш, У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова: пер. с англ. М. : ФАЗИС. Библиотека "Математика". Вып.4. 1998. 346 С.
19. Karman T., von Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence, //Proc. R. Soc. Lond. A 1938. V. 164, P. 192-215.
20. Loitsyansky L.G. Some basic laws for isotropic turbulent flow, //Trudy Tsentr. Aero.-Gidrodin. Inst, 1939. P. 3–23.
21. Proudman I., Reid W.H. On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field, //Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1954. V. A 247. P. 163–189.
22. Batchelor G.K., Proudman I. The large-scale structure of homogeneous turbulence, //Philos. Trans. Roy. Soc. 1956. 248, 369–405.
23. Eyink G.L., Thomson D.J., Free decay of turbulence and breakdown of self-similarity, //Physics of Fluids., 2000. V. 12. P. 477–479.
24. Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H. 1983. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer, Berlin.
25. Molchanov S.A., Surgailis D., Woyczynski W.A. Hyperbolic asymptotics in Burgers’ turbulence and extremal processes //Comm. Math. Phys. .1995. 168, 209–226.
26. Frachebourg L., Martin Ph.A. Exact statistical properties of the Burgers equation. J. Fluid Mechanics 2000. V. 417. P. 323-349.
27. Kardar M., Parisi G., Zhang Y.C. Dynamical scaling of growing interfaces, //Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 889–892.
28. Varabasi A.-L., Stanley H.E. Fractal Concepts in Surface Growth. Cambridge University Press, Cambridge. 1995.
29. Зельдович Я.Б. Распад однородного вещества на части под действием тяготения // Астрофизика. 1970. Т. 6. № 2. С.319-335.
30. Zel’dovich Ya В Astron. Astrophys. 1970. V. 5. P. 84.
31. Шандарин С.Ф., Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б. Крупномасштабная структура Вселенной // УФН. 1983. Т. 139. С. 83–134.
32. Гуревич А.В., Зыбин К.П. Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория // УФН. 1995. Т. 165. С. 723–758.

33. Gurbatov S.N., Saichev A.I. & Shandarin S.F. The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 1989. V. 236. P. 385–402.
34. Weinberg D.H., Gunn J.E. Large-Scale Structure and the Adhesion Approximation Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1990. V. 247. P. 260-286.
35. Arnold V.I., Baryshnikov Yu.M., Bogayevsky I.A., Supplement 2 «Singularities and bifurcations of potential flows» in the book [2]
36. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 С.
37. Crighton D.G. Model equations of nonlinear acoustics // J. Fluid Mech. 1979. V. 11, P. 11–33.
38. Pernet D.F., Payne R.C. Nonlinear propagation of signals in air // J.Sound and Vib. 1971. V 17. P. 383-387.
39. Бьерно Л., Гурбатов С.Н. Об установлении универсальных высокочастотных асимптотик спектра при распространении интенсивного акустического шума // АкустЖурнал. 1985. Т. 31. № 3. С. 303-308.
40. Webster D.F., Blackstock D.T. Experimental investigation of outdoor propagation of finite-amplitude noise // JASA.1978. V.63. P.687
41. Crighton D.G., Scott J.F. Asymptotic solutions of model equations in nonlinear acoustics // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1979. V. A292, P. 101–134.
42. Scott J.F. Uniform asymptotics for spherical and cylindrical nonlinear acoustic waves generated by a sinusoidal source // Proc. R. Soc. Lond. 1981. V. A375, P. 211–230.
43. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Mech. 1950. V. 3, P.201–230.
44. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. V. 9, P. 225–236.
45. Островский Л.А., Гурбатов С.Н., Диденкулов И.Н. Нелинейная акустика в Нижнем Новгороде (обзор) // Акуст.журн. 2005. Т. 51. № 2, С. 150–166.
46. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио. 1978. 376 С.
47. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1976. 484 С.
48. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1978. 463 С.

**Сергей Николаевич Гурбатов
Игорь Юрьевич Демин
Николай Васильевич Прончатов-Рубцов**

**Нелинейные случайные волны:
акустическая и гравитационная турбулентность
(часть 2)**

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.