МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В АКУСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Практикум

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород
2021

УДК 534.231(075.8)
ББК В323я73
П 76

П 76 ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В АКУСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ. Авторы: Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Демин И.Ю., Клемина А.В., Курин В.В., Прончатов-Рубцов Н.В., Спивак А.Е.: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 39 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.В. Клюев**

В ходе данного практикума проводится ознакомление студентов с принципом взаимности и применением его в акустических измерениях. Проводится экспериментальное исследование частотной характеристики звукоприемника методом, который основан на принципе взаимности. Экспериментально проверяется соблюдение условий взаимности. Одновременно студенты знакомятся с теорией звукового волновода (трубы), применяемой при измерениях. Определяются потери в трубе и оцениваются её собственные частоты.

Практикум предназначен для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 534.231(075.8)
ББК В323я73

СОДЕРЖАНИЕ

Целью данного практикума является знакомство с принципом взаимности в акустике и применением в акустических измерениях. В работе принцип взаимности используется для градуировки звукоприемника-микрофона, т.е. для определения чувствительности микрофона при различных частотах звукового давления, действующего на его поверхность. Проводится также экспериментальная проверка соблюдения условий взаимности для обратимого преобразователя.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Классический принцип взаимности связывает различные типы внешних воздействий на линейную динамическую систему с откликами этих воздействий [1-2]. Принцип взаимности применим к различным системам: электроакустическим (электромеханическим), преобразующим электрическую энергию в акустическую (механическую) или обратно акустическую (механическую) энергию в электрическую.

Рассмотрим соотношение взаимности для систем, связанных друг с другом через среду, в которой благодаря излучению создается поле. Свойство взаимности позволяет в этом случае связать величины, характеризующие распространение колебаний через систему от точки 1 к точке 2, простыми соотношениями с величинами, характеризующими распространение колебаний в обратном направлении [3–5].

В таких системах принцип взаимности допускает различные формулировки. Приведем их в применении к акустическим системам, в состав которых включается звуковое поле.

Допустим, что в акустической среде в точках 1 и 2 (рис. 1) расположены монохроматические источники с объемной скоростью соответственно q_1и q_2 [5]. Источник q_1 создает в точке 2 поле, потенциал скорости которого равен Φ_1, а источник q_2 создает в точке 1 потенциал скорости Φ_2.

Рис. 1. Схема создания полей Φ_1 и Φ_2 монохроматическими источниками q_1и q_2

Волновые уравнения для потенциалов скорости Φ_1 и Φ_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = -q_1 \\ \Delta\Phi_2 + k^2\Phi_2 = -q_2\ , \end{aligned} \tag{1}$$

где k – волновое число, $q_{1,2}$ – объёмная скорость источника, приходящаяся на единицу объёма, занятого источниками (плотность распределения источников).

Воспользуемся формулой Грина [4]:

$$\iint\limits_S \left(\Phi_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right) ds = \iiint\limits_V (\Phi_1\Delta\Phi_2 - \Phi_2\Delta\Phi_1) dV, \tag{2}$$

где n – внешняя нормаль к поверхности S, ограничивающей объём V. С учётом волновых уравнений (1) получим

$$\iint\limits_S \left(\Phi_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right) ds = \iiint\limits_V (q_1\Phi_2 - q_2\Phi_1)\, dV. \tag{3}$$

Соотношение (3) определяет связь между q_1, Φ_1 и q_2, Φ_2. Если Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют одному из следующих граничных условий: $\Phi = 0$, $\partial\Phi/\partial n = 0$ или $\Phi/\partial\Phi/\partial n = const\xi(x, y, z)$ – пространство бесконечно велико, или замкнуто жесткой оболочкой, или содержит поверхности раздела, описываемые локальным импедансом $\xi(x, y, z)$, то поверхностный интеграл (3) равен нулю. Принцип взаимности в этом случае можно записать в виде:

$$\int\limits_V (q_1\Phi_2 - q_2\Phi_1) dV = 0 \tag{4}$$

или

$$\int_V (q_1 P_2 - q_2 P_1) dV = 0, \qquad (5)$$

где $P = j\omega\rho\Phi$ – звуковое давление. Принцип взаимности действителен всегда, когда явления стационарны, и не исключает таких случаев, когда в среде имеются те или иные препятствия (как твердые, так и соколеблющиеся), допускаются так же поверхности раздела двух сред с различными свойствами. Действительно, на поверхности твердых препятствий левая часть (3) исчезает, так как нормальные скорости равны нулю; интегрирование по обеим сторонам поверхности раздела двух сред даст нуль в силу того, что давления в нормальных скоростях непрерывны, а нормали к dS имеют на двух сторонах противоположные знаки. Что же касается соколеблющихся препятствий, то, вводя нормальное удельное сопротивление $\xi_n = P/v_n$, имеем в стационарном режиме

$$\left(\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right)_n = \frac{1}{j\omega\rho}(P_2 v_1 - P_1 v_2)_n = \frac{1}{j\omega\rho}\xi_n(v_{2n}v_{1n} - v_{1n}v_{2n}) = 0,$$

где $v = -\partial\Phi/\partial n$ – колебательная скорость.

Следовательно, интегрирование по поверхности соколеблющихся тел дает нуль в левой части формулы (3). В качестве частного случая рассмотрим два источника, малых по сравнению с длиной волны. Производительность (объемная скорость) первого источника q_1 в окрестности точки 1 и производительность второго источника q_2 в окрестности точки 2 (рис. 1) отличны от нуля. В пространстве, занимаемом источниками, где $q \neq 0$, потенциалы скорости Φ_1 и Φ_2 , создаваемые этими источниками соответственно в точках 2 и 1 можно считать приблизительно постоянными и вынести их из-под знака интеграла в уравнении (4).

Тогда (4) можно записать в виде:

$$\Phi_1 \int_V q_2 dV = \Phi_2 \int_V q_1 dV$$

или

$$\Phi_1 Q_2 = \Phi_2 Q_1,$$

где $Q_1 = \int^1 q_1 dV, \quad Q_2 = \int^2 q_2 dV.$

Таким образом при $Q_1 = Q_2$ имеем Φ_1=Φ_2($P_1 = P_2$). Это означает, что если точечный источник, расположенный в точке 1, создает давление P_1 в точке 2, то при помещение его в точку 2 он будет создавать такое же давление ($P_2 = P_1$) в точке 1.

В большинстве практически интересных случаев имеем дело со звуковыми полями, создаваемыми колебательными движением излучающих поверхностей, которые следует рассматривать как поверхности разрыва непрерывности. Если пространство содержит только колеблющиеся диафрагмы или колеблющиеся тела, то объемный интеграл (3) исчезает и принцип взаимности можно записать в удобной для применения форме, которая сводится к поверхностному интегралу по колеблющимся телам

$$\int_S \left(\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right) dS = 0 \qquad (4')$$

или, выражая потенциал скорости через звуковое давление и колебательную скорость, получим:

$$\int_S (P_1 v_2 - P_2 v_1)\, dS = 0. \qquad (5')$$

В качестве примера рассмотрим взаимодействие двух поршневых диафрагм 1 и 2, которые вмонтированы в акустические экраны или установлены свободно (рис. 2). Если акустические импедансы их равны $P_1/v_1 = P_2/v_2$, то пространственный интеграл в (3) равен нулю, и принцип взаимности можно свести к приведенной выше форме (5’).

Сравним режимы А и В, в каждом из которых колеблется только одна диафрагма 1 или 2, тогда как вторая закреплена. Для поршневой диафрагмы v постоянна и выражение (5’) упрощается:

$$v_2(B)\int^{B} P_1(B)d\sigma = v_1(A)\int^{A} P_2(A)d\sigma,$$

отсюда

$$v_2(B)F_1(B) = v_1(A)F_2(A), \tag{6}$$

где $F_1(B) = \int^B P_1(B)d\sigma,\ F_2(A) = \int^A P_2(A)d\sigma, v_1(A),\ v_2(B)$ – скорости диафрагмы 1 в режиме A и соответственно диафрагмы 2 в режиме B, $P_1(B)$ – звуковое давление, которое создает диафрагма 1 в режиме A в окрестности B, $P_2(A)$ – звуковое давление, которое создает диафрагма 2 в режиме B в окрестности A, $F_1(B)$, $F_2(A)$ – сила, с которой диафрагмы 1(2) в рабочем режиме A(B), действуют на покоящуюся диафрагму в B(A).

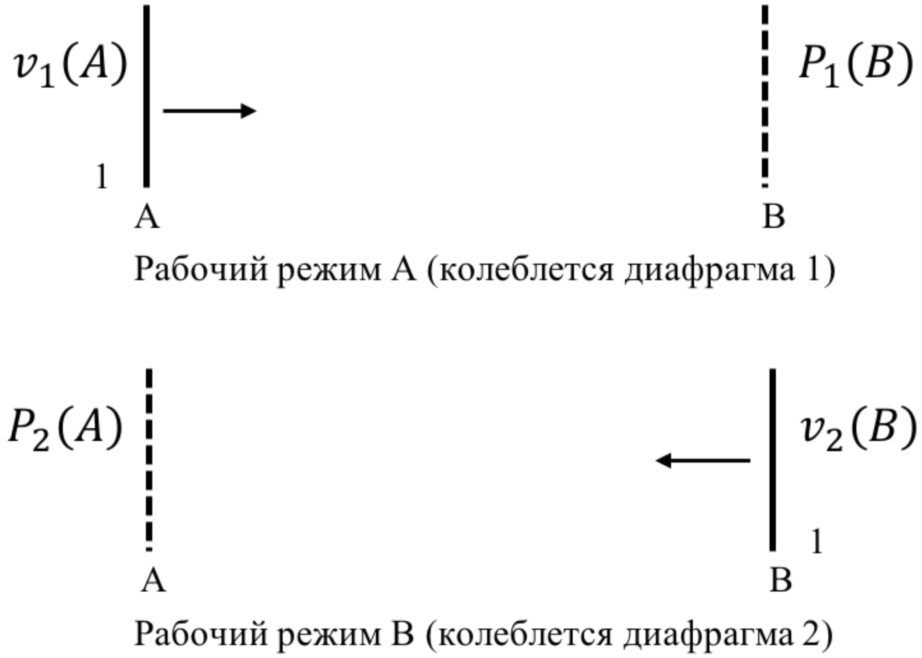

Рис. 2. Схема взаимодействие двух поршневых диафрагм (1 и 2), установленных свободно

Соотношение взаимности в виде (6) позволяет определить свойства преобразователя, работающего в качестве приёмника, если известны его свойства как излучателя. Возможно решение и обратной задачи: определение характеристики излучения по приёмным свойствам преобразователя. Для установления искомого соотношения рассмотрим систему, состоящую из обратимого преобразователя и малой пульсирующей сферой. Для этого отождествим преобразователь 1 с заданными преобразователем, в качестве преобразователя 2 используем малую пульсирующую сферу. Обозначим через P_1 звуковое давление, которое преобразователь 1 создаёт на расстоянии r от него в точке В. Если поверхность сферического источника, находящегося в точке В, закреплена ($v_2 = 0$), то сила, действующая на его поверхность, равна

$$F_1 = 4\pi R^2 P_1 \,, \tag{7}$$

где R – радиус сферы. С другой стороны, звуковое давление в точке А, создаваемое малой пульсирующей сферой в безграничной среде на расстоянии r, равно

$$P_2 = j\rho C \frac{kQ_2}{4\pi r} e^{-jkr} = \frac{j\rho C k R^2 v_2}{r} e^{-jkr}, \tag{8}$$

где Q_2 – значение объёмной скорости сферического излучателя, $Q_2 = 4\pi R^2 v_2$, v_2 – значение колебательной скорости сферического излучателя, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, ρ – плотность среды, C – скорость звука в ней. Таким образом, уравнение (6) с учётом принятых обозначений можно записать в следующей форме:

$$F_1 v_2 = F_2 v_1 \qquad \text{или} \qquad \frac{F_2}{v_1} = \frac{F_1}{v_2}. \tag{9}$$

Если в выражении (9) v_2 выразить через P_2 на основании (8), а F_1 через P_1 согласно (7), то

$$\frac{F_2}{v_2} = \frac{j\rho C k R^2 F_2}{P_2 r} e^{-jkr} = \frac{4\pi R^2 P_1}{v_1} \quad \text{т.е.} \quad \frac{F_2}{P_2} = -\frac{P_1}{v_1} j \frac{2\lambda r}{\rho C} e^{-jkr}. \tag{10}$$

Обозначим $H = -j\frac{2\lambda r}{\rho C} e^{-jkr}$. С учётом введённого обозначения равенство (10) перепишется в следующем виде

$$\frac{F_2}{P_2} = H \frac{P_1}{v_1}. \tag{11}$$

Из выражения (11) следует, что отношение силы, которую точечный источник звука на расстоянии r вызывает на преобразователе, к звуковому давлению в невозмущённой сферической волне в месте нахождения преобразователя пропорционально отношению звукового давления, создаваемого преобразователем в месте нахождения точечного источника, к скорости движения преобразователя. В левой части уравнения (11) отношение F_2/P_2 характеризует свойства (чувствительность) преобразователя как приёмника для сферической волны, в правой части – отношение P_1/v_1 выражает свойства (чувствительность) преобразователя для точки В как излучателя. Так как в большинстве случаев фазовый угол чувствительности преобразователя не представляет практического интереса, то соотношение (11) можно записать для модулей чувствительности и учесть, что

$$|H| = \frac{2\lambda r}{\rho C}. \tag{12}$$

Величина H называется параметром обратимости (или коэффициентом взаимности) для сферических волн. Коэффициент взаимности не зависит от свойств преобразователя (от типа конструкции), а определяется условиями излучения, приёма и свойствами акустической среды.

В аналогичном режиме работы преобразователя (т.е. в условиях безграничной среды) при излучении и приеме цилиндрических волн коэффициент взаимности равен

$$H = \frac{2\sqrt{\lambda r}}{\rho C} L,$$

где L – длина преобразователя. При излучении и приеме плоских волн

$$H = \frac{2S}{\rho c},$$

где S – площадь излучателя.

Таким образом, эффективность линейного обратимого преобразователя в режиме излучения и приёма связаны между собой коэффициентом взаимности. Из уравнений (11) и (12) видно, что преобразователь, работая в режиме излучения, излучает низкие частоты менее эффективно, чем он реагирует на них в режиме приёма. Поэтому преобразователь с равномерной частотной характеристикой в режиме приёма имеет обратно пропорциональный частоте спад частотной характеристики.

Принцип взаимности имеет важное значение в практике акустических измерений. Он позволяет в ряде случаев сводить решение задач об излучении колеблющихся тел, затруднительное или невозможное для прямых методов, к задачам расчета полей рассеяния на этих телах. Свойство взаимности используется так же для экспериментального определения характеристик излучения и приема динамической системы. Например, принцип взаимности применяется для абсолютной градуировки преобразователя звука, оценки мощности различных источников, определения энергетических характеристик, создаваемых сложными вибрирующими конструкциями [6].

В настоящей работе принцип взаимности используется при калибровке электродинамических преобразователей. Существует несколько модификаций метода градуировки с помощью принципа взаимности: метод взаимности с тремя преобразователями в свободном поле (в сферической волне), в плоской или цилиндрической волне, в диффузном поле, метод взаимности в малой камере и др.

Все методы взаимности основываются на том, что один из преобразователей является обратимым и для него отношение чувствительности в режиме излучения равно постоянной величине – коэффициенту взаимности.

Проиллюстрируем свойство обратимости на примере электродинамического преобразователя [6]. Схематически его устройство показано на рис. 3. Подвижная система преобразователя состоит из диафрагмы (1) и звуковой катушку (2), находящейся в радиальном магнитном поле. Магнитная система преобразователя (3) состоит из цилиндрического постоянного магнита и магнитопровода, состоящего из центрального стержня и двух флянцев. Рабочее магнитное поле создается в кольцевом зазоре, образованном отверстием в верхнем флянце и круглом стержне.

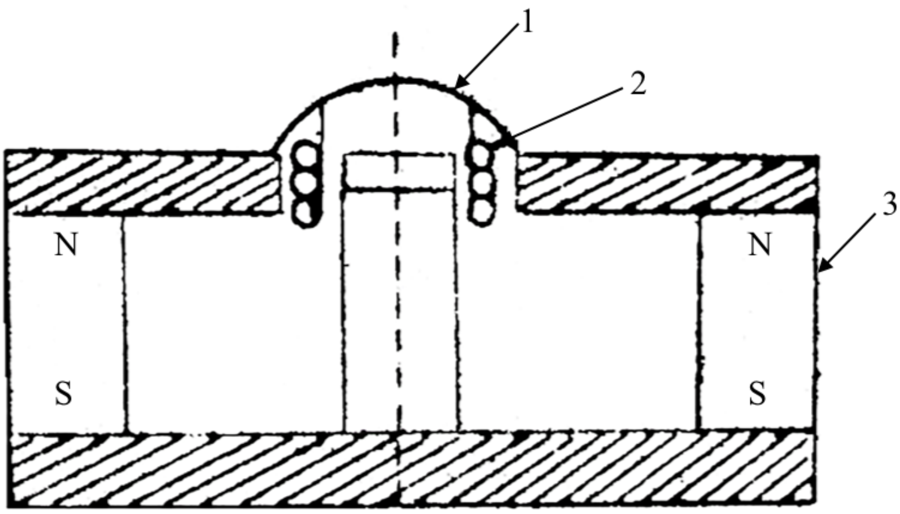

Рис. 3. Схема электродинамического преобразователя

Если на катушку такого преобразователя подано напряжение U, то на него будет действовать сила, возникающая в результате взаимодействия тока катушки и магнитного поля и равная $F' = Bli$, где B – индукция магнитного поля, l – длина провода катушки, i – ток. Если же вблизи преобразователя существует созданное другим излучателем давление P, то звук действует на подвижную систему с силой $F = PS$, где S – площадь диафрагмы преобразователя. Диафрагма преобразователя, находясь под действием сил F' и F, будет колебаться с некоторой скоростью v. Поэтому для механической части преобразователя можем написать уравнение [8]:

$$F' + F = Z_0 \quad \text{или} \quad F = Z_0 v - Bli. \tag{13}$$

Здесь Z_0 – сумма импедансов подвижной системы и волнового сопротивления среды, т.е. $Z_0 = \xi_a S^2 + \xi S$, где ξ – удельное волновое сопротивление среды, ξ_a – акустическое сопротивление преобразователя. При движении катушки в ней будет индуцироваться ЭДС $e = Blv$, препятствующая прохождению тока. Следовательно, для электрической части преобразователя справедливо уравнение

$$U = Z_e i + Blv, \tag{14}$$

где U – напряжение, v – скорость катушки, Z_e – электрическое сопротивление катушки. Уравнения (13) и (14) являются уравнениями электродинамического преобразователя. Коэффициент $K = Bl$, входящий в (13) и (14) называется коэффициентом электромеханической связи.

Для характеристики работы преобразователя пользуются понятиями чувствительности преобразователя-приемника и преобразователя-излучателя. Если преобразователь работает в качестве приемника, то внешнее напряжение не подается, т.е. $U = 0$. При этом можно представить два предельных случая: работу преобразователя в режиме холостого хода, когда электрическая цепь его разомкнута, и работу в режиме короткого замыкания электрической цепи. Соответственно различают чувствительность преобразователя-приемника в режиме холостого хода и короткого замыкания.

Чувствительность φ_i в режиме холостого хода есть соотношение ЭДС, индуцируемой в катушке, к давлению, действующему на диафрагму

$$\varphi_i = \left|\frac{e}{P}\right|_{i=0}.$$

Чувствительность φ_e в режиме короткого замыкания есть отношение тока короткого замыкания i_k к давлению, действующему на диафрагму,

$$\varphi_e = \left|\frac{i_k}{P}\right|_{U=0}.$$

Найдем выражения, связывающие эти величины с параметрами преобразователя. При работе преобразователя в качестве приемника в режиме холостого хода получим (13) и (14), полагая $i = 0$,

$$e = K\frac{F}{Z_0} = K\frac{PS}{Z_0}. \tag{15}$$

Отсюда для чувствительности преобразователя-приемника в режиме холостого хода имеем

$$\varphi_i = \left|\frac{e}{P}\right|_{i=0} = \frac{KS}{Z_0}. \tag{16}$$

При коротком замыкании из (13) и (14) получим, полагая $U = 0$,

$$i_k = -K\frac{PS}{Z_e Z_0 + K^2}$$

и

$$\varphi_e = K \frac{S}{Z_e Z_0 + K^2}\,. \tag{17}$$

Если тот же преобразователь работает в качестве излучателя, то сила F мала по сравнению с силой взаимодействия катушки с магнитным полем, и ею можно пренебречь, т.е. считать в (13), что $F = 0$. Здесь можно также представить два режима работы преобразователя: при поддержании постоянства тока катушки и при поддержании постоянства напряжения. В соответствии с этим различают чувствительность преобразователя по току $T_i = P/i$ и чувствительность по напряжению $T_e = P/U$.

Учитывая, что $F = 0$, из (13) имеем

$$v = Ki/Z_0\,. \tag{18}$$

Реакция среды, равная произведению давления, создаваемого преобразователем, на площадь диафрагмы, выразится следующим образом

$$PS = v\xi S = K\xi Si/Z_0\,.$$

Отсюда для чувствительности преобразователя-излучателя по току находим

$$T_i = P/i = K\xi/Z_0\,. \tag{19}$$

При поддержании постоянства напряжений для этого же преобразователя из (18) и (14) имеем

$$v = \frac{K}{Z_e Z_0 + K^2} U,$$

а реакция среды выразится следующим образом:

$$PS = v\xi S = \frac{K\xi S}{Z_e Z_0 + K^2} U.$$

Используя последнее выражение, получим

$$T_e = \frac{P}{U} = \frac{K\xi}{Z_e Z_0 + K^2}\,. \tag{20}$$

Тогда из (16), (17), (19), и (20) следует, что

$$\frac{\varphi_i}{T_i} = \frac{\varphi_e}{T_e} = \frac{S}{\xi} = H, \tag{21}$$

т.е. чувствительность одного и того же преобразователя как приемника и как излучателя отличается лишь на постоянный множитель H. Соотношение (21) называют теоремой чувствительности. Отметим, что вывод этого соотношения стал возможен лишь потому, что уравнения (13) и (14) линейны и в оба уравнения входит один и тот же коэффициент электромеханической связи $K = Bl$.

Множитель H, называемый параметром взаимности, зависит от волнового сопротивления среды. Волновое сопротивление среды может быть вычислено наиболее просто в случаях:

a) шаровой волны в условиях свободного распространения, т.е. при отсутствии отражающих поверхностей,
b) замкнутой полости, малой по сравнению с длиной волны,
c) плоской волны, распространяющейся в трубе малого по сравнению с длиной волны диаметра.

В первом случае для создания свободного звукового поля необходимо использовать дорогостоящие заглушенные камеры, поэтому данный метод не получил широкого распространения. Второй случай требует создания камеры таких размеров, чтобы можно было пренебречь волновым движением, в связи с чем он может быть использован в области низких частот. Наиболее удобным является метод, основанный на создании плоской волны в трубе малого по сравнению с длиной волны диаметра, с абсолютно жесткими стенками. Этот метод используется в настоящей работе для градуировки звукоприемника.

МЕТОД АБСОЛЮТНОЙ ГРАДУИРОВКИ АКУСТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ВЗАИМНОСТИ

Градуировка означает определение чувствительности излучателя или приемника звука в рабочем диапазоне частот. В работе производится градуировка звукоприемника-микрофона. Находится его чувствительность в режиме холостого хода

$$\varphi = \frac{e}{P}$$

представляющая отношение напряжение e, развиваемого звукоприемником, к давлению P в невозмущенной волне. Последнее следует отличать от действующего давления на поверхности преобразователя, которое благодаря дифракции будет иным, чем давление в падающей невозмущенной волне. Непосредственное измерение давления P в невозмущенной волне связано с известными техническими трудностями. В настоящее время существует много различных методов измерения частотной характеристики чувствительности преобразователей. Например, электростатический, резонансный, метод сравнения с эталонным преобразователем и др. Широкое признание получил метод градуировки на основе принципа взаимности. Основным достоинством этого метода является то, что чувствительность акустических преобразователей, определяемая через электрические и акустические величины, может быть найдена путем выполнения только электрических измерений.

В основе метода абсолютной градуировки акустических преобразователей лежит доказанная ранее теорема о чувствительности (21). Для градуировки по методу взаимности требуется, кроме градуируемого преобразователя, наличие двух вспомогательных преобразователей, один из которых обязательно должен быть обратимым и удовлетворять теореме о чувствительности. Так как частотную характеристику преобразователя относят к свободному пространству, то калибровка методом взаимности должна выполняться в акустически заглушенном помещении. В работе градуировка микрофона проводится по методу взаимности в трубе с жёсткими стенками, поперечные размеры которой невелики по сравнению с длиной волны в той области частот, для которых осуществляется градуировка. При этом вдоль трубы распространяется плоская волна (см. приложение). В этом случае отпадает необходимость в заглушенной камере. Установка с трубой компактна, и ее реализация не требует больших затрат.

Теория метода может быть развита следующим образом. При всех измерениях градуируемый микрофон М, вспомогательный преобразователь Г и обратимый преобразователь П – помещаются на концах трубы длиной L (рис. 4). В общем случае любой из трех преобразователей может быть градуируемым. Для этого, как будет показано ниже, необходимо, чтобы оба вспомогательных преобразователя П и Г были обратимы.

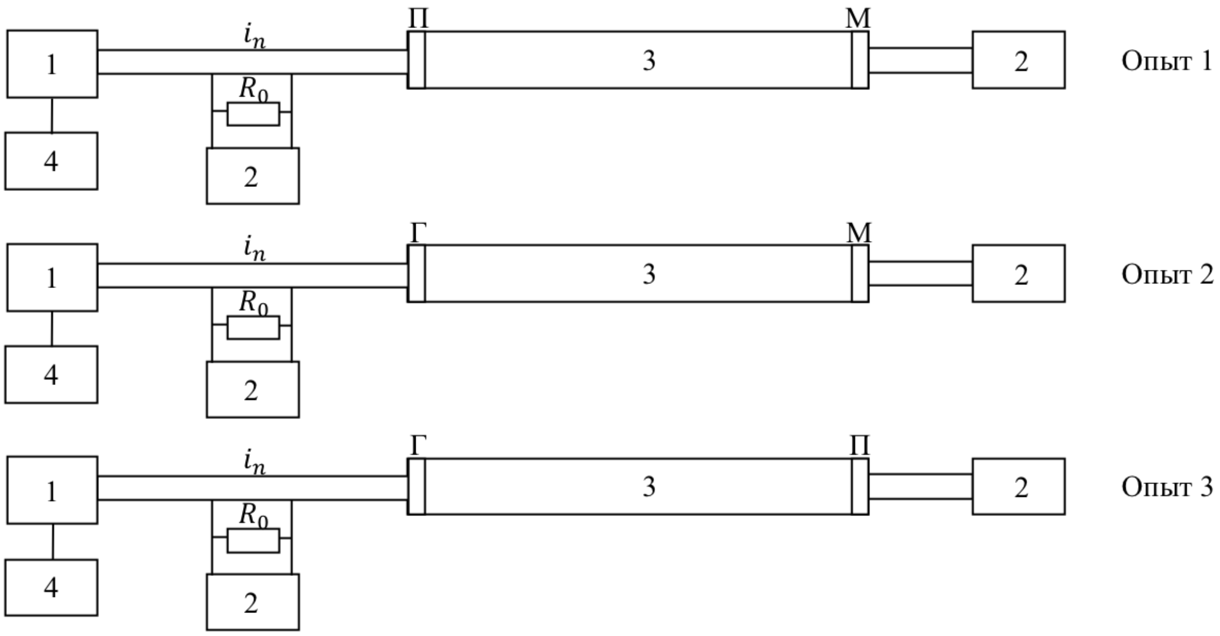

Рис. 4. Схема экспериментальной установки

1 – звуковой генератор, П – обратимый преобразователь, R_0 – активное сопротивление, М – градуируемый микрофон, Г – вспомогательный преобразователь, 2 – вольтметры, 3 – труба, 4 -- частотомер

Проводится три опыта. В первом опыте в качестве излучателя используется обратимый преобразователь П, а в качестве приемника – испытуемый микрофон М. Ток преобразователя i_n поддерживается неизменным. Испытуемый микрофон работает в режиме холостого хода. Звуковое давление, создаваемое обратимым преобразователем П в трубе на расстоянии L, т.е. в точке, где расположен градуируемый микрофон М, можно выразить с (19):

$P_1 = T_{ni} i_n$, где T_{ni} – чувствительность обратимого преобразователя по току в режиме излучения, т.е. отношение звукового давления, создаваемого излучателем на расстоянии L, к току, протекающему через катушку обратимого преобразователя. Напряжение, развиваемое микрофоном М, в соответствии с (16) равно:

$$U'_{\text{м}} = \varphi_x P_1 = \varphi_x T_{ni} i_n \, , \qquad (22)$$

где φ_x – чувствительность микрофона, которую требуется определить. Следовательно, из первого опыта можно найти произведение чувствительностей:

$$T_{ni} \cdot \varphi_x = U'_{\text{м}} / i_n \, . \qquad (23)$$

Во втором опыте в качестве излучателя используется вспомогательный преобразователь Г, приемником служит тот же микрофон. Звуковое давление, создаваемое преобразователем Г в точке, где расположен микрофон М равно:

$$P_2 = T_{\text{г}i} \cdot i_{\text{г}} \, , \qquad (24)$$

где $T_{\text{г}i}$ – чувствительность преобразователя Г в режиме излучения, $i_{\text{г}}$ – ток, протекающий через преобразователь Г, его величина поддерживается постоянной. Напряжение, развиваемое на выходе микрофона М равно:

$$U_{\text{м}} = \varphi_x P_2 = \varphi_x \cdot T_{\text{г}i} \cdot i_{\text{г}} \, . \qquad (25)$$

Таким образом, из второго опыта можно определить произведение чувствительностей:

$$\varphi_x \cdot T_{\text{г}i} = U_{\text{м}} / i_{\text{г}} \, . \qquad (26)$$

В третьем опыте излучатель остается тот же, что и в опыте №2, а в качестве приемника используется обратимый преобразователь П, на выходе которого измеряется напряжение U_n. Если в этом опыте звуковое давление, действующее на обратимый преобразователь П будет таким же, как и во втором опыте, то чувствительность обратимого преобразователя П – приемника в режиме холостого хода равна:

$$\varphi_n = U_n/P_2 \,,$$

а напряжение U_n, если учесть (24) выразится следующим образом:

$$U_n = \varphi_n \cdot T_{\text{г}i} \cdot i_{\text{г}} \,. \qquad (27)$$

Отсюда определим произведение чувствительностей:

$$\varphi_n \cdot T_{\text{г}i} = U_n/i_{\text{г}} \,. \qquad (28)$$

Таким образом, при каждом из независимых измерений имеет место соотношение типа:

$$\varphi \cdot T = U/i.$$

Согласно соотношению (21), имеем:

$$\varphi_n/T_{ni} = H_1 \qquad \text{и} \qquad \varphi_{\text{г}}/T_{\text{г}i} = H_2 \,. \qquad (29)$$

Но $H_1 = H_2 = H$, т.к. коэффициент взаимности не зависит от типа преобразователей, а сопротивление среды при использовании преобразователей как в качестве излучателя, так и в качестве приемника, для простоты в обоих случаях предполагается одинаковым. Расстояние между преобразователями так же сохраняется во всех опытах

Вставляя значения T_{ni} и $T_{\text{г}i}$ из (29) в (23), (26) и (28) найдем:

1. $\varphi_x \cdot \varphi_n = (U'_{\text{м}}/i_n)H$
2. $\varphi_x \cdot \varphi_{\text{г}} = (U_{\text{м}}/i_{\text{г}})H$ (30)
3. $\varphi_n \cdot \varphi_{\text{г}} = (U_n/i_{\text{г}})H$.

Перемножая равенства 1 и 2 в выражении (30), получим

$$\varphi_x{}^2 = \frac{U_{\text{м}} \cdot U'_{\text{м}}}{i_n \cdot i_{\text{г}}} H^2 \frac{1}{\varphi_n \cdot \varphi_{\text{г}}} \,. \qquad (31)$$

Но согласно 3 в (30) $\varphi_n \cdot \varphi_{\text{г}} = (U_n/i_{\text{г}})H$, следовательно,

$$\varphi_x{}^2 = \frac{U_{\text{м}} \cdot U'_{\text{м}}}{i_n \cdot U_n} H \,.$$

Таким образом, для чувствительности микрофона окончательно получаем следующее выражение:

$$\varphi_x = \sqrt{\frac{U_м \cdot U'_м}{i_n \cdot U_n} H}. \qquad (32)$$

Перемножив равенства 1 и 3 в (30), получим

$$\varphi_n{}^2 = \frac{U'_м}{i_n} H \frac{U_n}{i_г} H \frac{1}{\varphi_x \cdot \varphi_г},$$

но $\varphi_x \cdot \varphi_г = (U_м / i_г) H$ на основании 2 в (30). В связи с этим чувствительность преобразователя П равна:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{U'_м \cdot U_n}{i_n \cdot U_м} H}. \qquad (33)$$

Аналогично перемножив 2 и 3 равенство в (30) и учтя 1, находим чувствительность преобразователя Г

$$\varphi_г = \sqrt{\frac{U_м \cdot U_n \cdot i_n}{i_г^2 \cdot U'_м} H}. \qquad (34)$$

В ходе выводов не делалось никаких предположений относительно обратимости микрофона. Преобразователь П должен быть обязательно обратимым. Что же касается преобразователя Г, то несмотря на то, что он применяется только в качестве излучателя, нужно, чтобы он удовлетворял принципу взаимности. Только в этом случае будет справедлива формула (34), определяющая его чувствительность в режиме приема.

В выражения (32) – (34), определяющие чувствительности преобразователей в режиме приема, помимо измеренных величин под корень вошел коэффициент взаимности H.

Простое выражение для вычисления H получается лишь в том случае, когда сопротивление среды при использовании обратимого преобразователя в качестве излучателя и в качестве приемника будет одним и тем же. Однако, в случае акустической связи между преобразователями через трубу оно не одинаково. Так при работе обратимого преобразователя в качестве излучателя (опыт 1) сопротивление среды включает в себя сопротивление градуируемого микрофона М, а при работе обратимого преобразователя в качестве приемника (опыт 3) эта величина отсутствует. Кроме того, при выводе соотношений (32) – (34) чувствительность преобразователей определена по давлению на заторможенном приемнике, однако при колебаниях приемника фактическое давление будет отличаться от давления у закрытого конца трубы. Коэффициент взаимности определяется в этом случае по формуле:

$$H = \left(\frac{1}{\xi_n} + \frac{1}{\xi_{\text{м}}}\right)\cos kL + j\,\frac{S}{\rho C}\left(1 + \frac{(\rho C)^2/S^2}{\xi_n \xi_{\text{м}}}\right)\sin kL, \tag{34}$$

где ξ_n – акустическое сопротивление обратимого преобразователя при его работе приемником, $\xi_{\text{м}}$ – акустическое сопротивление градуируемого микрофона, S – площадь сечения трубы. Выражение для давления в конце трубы, когда к нему прикреплен приемник с акустическим сопротивлением $\xi_{\text{м}}$, а к началу трубы – источник звука с акустическим сопротивлением ξ_o, имеет вид

$$P_L = i\,\frac{Q}{S}\left[\left(\frac{\xi_o}{\xi_{\text{м}}} + 1\right)\cos kL + j\left(\frac{\xi_o}{\rho C}S + \frac{\rho C}{S\xi_{\text{м}}}\right)\sin kL\right]^{-1},$$

где i – ток, питающий источник звука, Q – параметр, зависящий от его мощности.

При $\sin kL = 1$ и $\cos kL = 0$

$$|P_L| = i\,\frac{Q}{S}\left(\frac{\xi_o}{\rho C}S + \frac{\rho C}{S\xi_{\text{м}}}\right)^{-1}.$$

Отсюда видно, что для того, чтобы P_L не зависело от акустического сопротивления приемника необходимо, чтобы

$$\xi_{\text{м}} \gg \frac{(\rho C)^2}{S^2 \xi_o}. \tag{35}$$

Например, если $\xi_{\text{м}}$ и ξ_o будут больше $\rho C/S$ в 10 раз во всем диапазоне измеряемых частот, то при смене преобразователей давление в конце трубы изменится меньше, чем на 1%.

При выполнении условия (35) коэффициент взаимности H в трубе вычисляется по формуле:

$$H = \left(\frac{1}{\xi_n} + \frac{1}{\xi_{м}}\right)\cos kL + j\,\frac{S}{\rho C}\sin kL$$

Наличие членов, содержащих $\cos kL$ и $\sin kL$, объясняется образованием стоячих волн в трубе. Выбирая дискретный ряд частот так, чтобы $\cos kL = 0$, можно исключить влияние на результаты измерения акустических сопротивлений преобразователей, присоединенных к трубе. При этом вдоль трубы укладывается нечетное число четвертей волны. При фиксированной длине трубы эти так называемые антирезонансные частоты чередуются с интервалами $\Delta f = C/2L$ (см. приложение). Нужные частоты легко находятся по минимуму звукового давления на конце трубы.

В этом случае параметр взаимности H вычисляется по простой формуле: $|H| = S/\rho C$, а модуль чувствительности градуируемого микрофона находится по формуле:

$$\varphi_x = \sqrt{\frac{U_{м} \cdot U'_{м}}{i_n \cdot U_n}|H|} \quad (\text{В/Па})$$

Нижний предел частот, на которых можно производить измерения, определяется длиной трубы, т.к. на ее длине должно укладываться нечетное число $\lambda/4$. Верхний предел используемых частот ограничен возникновением поперечных мод в трубе.

Расширение диапазона частот в сторону высоких частот может быть осуществлено заполнением трубы средой с большей скоростью звука, например водородом, а также применением трубы меньшего диаметра.

ЗАДАНИЕ

1. Провести следующие предварительные эксперименты с целью оценки величины погрешностей, появляющихся вследствие неточного соответствия реальной установки идеализированным условиям, принятым в выводе теории.

- Проверить обратимость вспомогательных преобразователей П и Г. Проверка соблюдения принципа взаимности для преобразователей может быть осуществлена следующим образом:

  на одном конце трубы устанавливается преобразователь П, а на другом – преобразователь Г. Сравниваются результаты двух опытов: преобразователь П работает излучателем, а преобразователь Г – приемником, преобразователь П работает приемником, а преобразователь Г – излучателем. В опытах измеряется ток в излучателе и напряжение на выходе приемника. При наличии взаимности должно выполняться условие:

$$\frac{U_2}{i_1} = \frac{U_1}{i_2}$$

  (индексы 1,2 соответствуют номеру опыта) или, если задаются одинаковые токи в первом и втором опытах, то $U_1 = U_2$. Проверку провести на нескольких частотах, лежащих в пределах измеряемого диапозона.

- Измерение величины потерь в трубе.

  Потери можно определить путем измерения ширины резонансной кривой трубы. Затухание α на единицу длины трубы (при условии, что $\alpha L \ll 1$) связано с полушириной резонансной кривой (на уровне 0,7) следующим соотношением:

$$\alpha = 2\pi \Delta f / C$$

  где C – скорость распространения звука. Так как потери в трубе обусловлены трением и теплопроводностью и растут с увеличением частоты, то измерение потерь провести на нескольких частотах, в том числе на частотах, лежащих у верхней и нижней границы частот, на которых производится градуировка в данной трубе.

- Измерить резонансные частоты трубы с прикрепленными к ней преобразователями. Сравнить их с вычисленными собственными частотами трубы. Вычисления собственных частот трубы провести в предположении, что она закрыта с обоих концов абсолютно твердыми стенками.

2. Рассчитать антирезонансные и граничные частоты для трубы, используемой в опыте.
3. Рассчитать коэффициент взаимности *H* с учетом условий опыта.
4. Определить чувствительность микрофона на фиксированных частотах, соответствующих антирезонансным частотам рабочей трубы. Для уменьшения влияния случайных факторов (уход частоты генератора, плохое крепление преобразователя к трубе, плохие контакты, ведущие к появлению наводки и т.д.) следует проводить три серии измерений, для каждой серии определить чувствительность и взять среднее из трех.
5. Определить чувствительность вспомогательных преобразователей П и Г на рабочих частотах.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение принципа взаимности. Какие условия для его применения?
2. Что такое чувствительность?
3. Дайте определение коэффициента взаимности.
4. Опишите поле, возникающее в трубе. Получите граничные условия для жестких и мягких стенок.
5. Что такое резонанс и антирезонанс? Почему для определения чувствительности нужно работать на антирезонансных частотах?
6. Опишите распределение давлениях для разных граничных условий. Для чего используется труба в лабораторной работе? Определите нижнюю и верхнюю границы частотного диапазона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бархатов А. Н. Акустика в задачах / Бархатов А. Н., Горская Н. В., Горюнов А. А., Гурбатов С. Н., Можаев В. Г., Руденко О. В. Под. ред. С. Н. Гурбатова и О. В. Руденко - 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 336 с.
2. Белоусов Ю.И., Римский-Корсаков А.В. Принцип взаимности в акустике и его применение для расчета звуковых полей колеблющихся тел. Обзор // Акустический журнал. Т. 21. № 2. 1975. С. 161-172.
3. Исакович М.А. Общая акустика. Учеб. пособие. М.: Наука. 1973. 502 с.
4. Скучик Е. Основы акустики. Том 1. М.: Мир. 1976. 519 с.
5. Скучик Е. Основы акустики. Том 2. М.: Мир. 1976. 541 с.
6. Таранов Э.С., Тюрин А.М., Сташкевич А.П. Гидроакустические измерения в океанологии. М.: Гидрометеоиздат. 1972. 325 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Плоские стоячие волны в трубах неизменного сечения

Трубы неизменного сечения применяются в качестве звуковых волноводов в ряде областей акустики: акустических измерениях, музыкальной акустике и др. Широкое применение труб для акустических измерений объясняется тем, что только в трубах удается получить звуковую волну, фронт которой с достаточной степенью приближения можно считать плоским, если стенки трубы абсолютно жесткие. Покажем это.

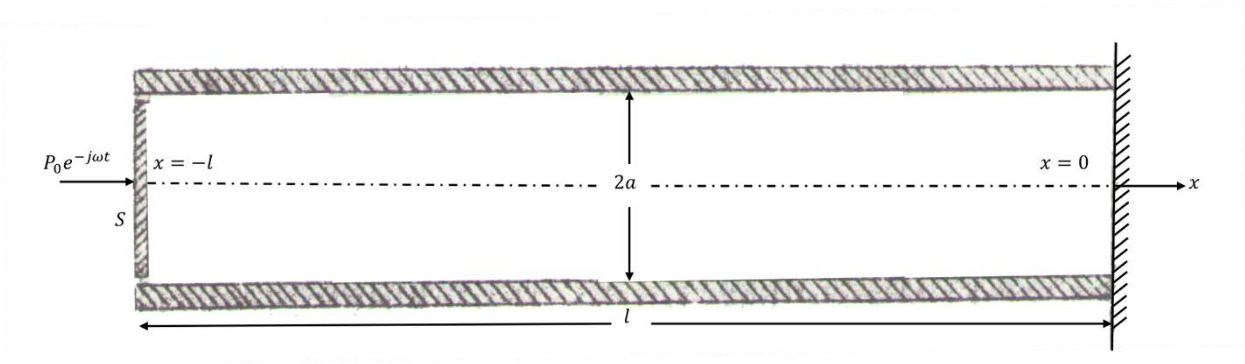

Рис. 5. Цилиндрическая труба длиною *l* с поршневым излучателем

Если на оси трубы ($r = 0$) давление конечно, а нормальная составляющая скорости частиц на стенке трубы ($r = a$) исчезает (стенки трубы абсолютно жесткие), то решение волнового уравнения для звукового давления в трубе имеет вид [4]

$$P = P_0 \cos(m\varphi + \varphi_m)\, I_m\left(\alpha_{mn}\frac{r}{a}\right) e^{\pm jk\prime_{mn} z}\ , \qquad (35)$$

где φ, r, z – цилиндрические координаты точки внутри трубы. I_m – функция Бесселя m-го порядка, $\alpha_{mn} = \gamma_m a$ – корни функции $I'_m(\gamma_m a)$=0, $n = 1,2, \ldots$

$$k'_{mn} = \sqrt{k^2 - \gamma_{mn}^2} = \sqrt{k^2 - (\alpha_{mn}/a)^2} = k\sqrt{1 - (f_{mn}/f)^2},$$

$f_{mn} = \frac{\alpha_{mn} C}{2\pi a}$, C – скорость звука в неограниченной среде. Решение (35) описывает нормальную волну или моду номера m. Полное поле в трубе равно сумме нескольких мод, причем, если частота внешней силы меньше критической частоты f_{mn} для данной моду, то величина k'_{mn} становится мнимой и эта мода в трубе не распространяется, так как быстро затухает при удалении от источника звука. Наименьшим из корней I'_m является корень α_{00}: ему соответствует критическая частота $f_{00} = 0$. Так как $I_0(0) = I$, то звуковое поле по сечению трубы постоянно. Этот случай соответствует обычной плоской волне, распространяющейся со скоростью звука вдоль оси трубы.

Если в начале трубы возбуждается спектр частот, то в трубе распространяются незатухающие волны только тех частот, для которых $f > f_{mn}$. При этом всегда может возбудиться плоская волна с волновым числом k, соответствующим моде (0,0).

Следующее по величине k' становится действительным по частоте, определяемой соотношением

$$k'_{10} = \alpha_{10}/a = 1{,}84/a \qquad f_{10} = 0{,}293c/a \tag{36}$$

или при $z_a \simeq \lambda/2$ (первый радиальный резонанс трубы); тогда к звуковому полю плоской волны добавляется бегущая волна с фазовой скоростью $c_{10} = c_{0k}/k'_{10}$. Амплитуда этой волны изменяется с расстоянием в радиальном направлении как функция Бесселя $I_1(\gamma_{10}r)$.

Второй радиальный резонанс наступает на частоте, при которой k имеет значение $k'_{20} = 3{,}05/a$ и т.д.

Поэтому поле в трубе в общем случае получается довольно сложное. Однако ниже основной частоты, определяемой соотношением (36), распространение звука в трубе носит одномерный характер и описывается плоской волной. Чтобы избежать незатухающих мод высшего порядка применяют трубы таких диаметров, при которых критическая частота лежит выше рабочей области частот. В случае низкой частоты, когда длина звуковой волны λ много больше диаметра трубы a, в ней распространяется плоская волна с амплитудой практически постоянной в сечении трубы. В дальнейшем мы будем подразумевать условие $\lambda > a$ выполненным. Выполнение его исключает возможность возникновения поперечных волн, которые могли бы вызвать изменения давления и колебательной скорости в пределах сечения с заданной координатой x.

Далее рассмотрим возбуждение трубы сторонними гармоническими силами с одного конца. На другом конце труба закрыта крышкой.

Пусть в цилиндрической трубе длиной l, ось которой совпадает с осью x (рис. 5), плоский поршневой излучатель создает гармоническую звуковую волну $P_0 e^{-j\omega t}$. Площадь поперечного сечения трубы $S = \pi a^2$, a – внутренний радиус трубы.

Звуковая волна, создаваемая поршневым излучателем ($x = -l$) будет попеременно отражаться от поверхности, ограничивающей трубу справа ($x = 0$), и от поверхности поршня. В результате многократных отражений образуются две группы волн, перемещающихся в противоположных направлениях. Представив каждую группу в виде одной суммарной волны, можно рассматривать звуковое поле в трубе как результат наложения только двух встречных волн:

$$P = P_{m1} e^{j(\omega t - kx)} + P_{m2} e^{j2\varphi} e^{j(\omega t + kx)} \tag{37}$$

$$\dot{\xi} = \frac{P_{m1}}{\rho C} e^{j(\omega t - kx)} - \frac{P_{m2}}{\rho C} e^{j2\varphi} e^{j(\omega t + kx)}. \tag{38}$$

Здесь P_{m1} и P_{m2} – амплитуда звукового давления P волн, идущих соответственно в положительном и отрицательном направлении оси x. $\dot{\xi}$ – колебательная скорость, для встречной волны она взята с отрицательным знаком, так как деформация положительного знака (т.е. сжатие среды) получается в этой волне при отрицательном направлении вектора скорости.

При отражении от плоскости $x = 0$ волна частично поглощается, поэтому в общем случае $P_{m2} < P_{m1}$. Кроме того, в зависимости от величины и характера акустического сопротивления отражающей поверхности, при отражении может произойти изменение фазы колебаний: угол 2φ в (37), (38) учитывает сдвиг по фазе между двумя волнами при $x = 0$.

Рассмотрим сначала случаи полного отражения, когда амплитуды волн одинаковы: $P_{m1} = P_{m2}$. В выражении (37), (38) вынесем за скобки амплитуды волн совместно с множителем $e^{j\omega t}e^{j\varphi} = e^{j(\omega t+\varphi)}$, кроме того, помножим и поделим выражения для давления на 2, а для скорости на $2j$. Получим:

$$P = 2P_{m1}\cos(kx + \varphi)\, e^{j(\omega t+\varphi)} \tag{39}$$

$$\dot{\xi} = \frac{2P_{m1}}{j\rho C}\sin(kx + \varphi)\, e^{j(\omega t+\varphi)} \tag{40}$$

$$\bar{z_x} = \frac{PS}{\dot{\xi}} = \frac{F}{\dot{\xi}} = j\rho CS\cot(kx + \varphi). \tag{41}$$

Выражения (39), (40) представляют собой стоячие волны давления и скорости, образующиеся в трубе при полном отражении, а (41) – механическое сопротивление столба воздуха длиною x, ограниченного правым концом трубы. В частности, $x = -l$ получим механическое сопротивление z_l всего столба воздуха в трубе, нагружающего поршневой излучатель, расположенный на левом конце трубы (рис. 5).

Полное отражение возможно в двух случаях, когда сопротивление отражающей поверхности ($x = 0$) либо бесконечно велико, либо равно нулю (следует из выражения для коэффициента отражения). Первый случай практически реализуется в виде трубы, конец которой закрыт твердой монолитной стенкой, а второй – трубы с открытым концом. Рассмотрим подробнее эти два случая.

Закрытая труба

В выражении (41) примем $x = 0$ и, считая сопротивление отражающей стенки бесконечно большим, можем написать

$$\bar{z}x/_{x=0} = j\rho CS\cot\varphi = \infty\,.$$

Отсюда находим, что $\varphi = 0$. Подставим $\varphi = 0$ в (39), (40) и, учитывая, что $(-j) = e^{-j\pi/2}$, получим

$$P = 2P_{m1}\cos kx\, e^{j\omega t},\ \ \dot{\xi} = \frac{2P_{m1}}{\rho C}\sin(kx)\, e^{j\left(\omega t - {\pi}/{2}\right)}$$

$$\overline{z_x} = j\rho CS\cot(kx).$$

Перейдем от символической формы записи к тригонометрической ($e^{j\omega t} \to \cos\omega t\,, e^{j\left(\omega t-{\pi}/{2}\right)} \to \sin\omega t = \cos\left(\omega t - {\pi}/{2}\right)$) и определим полное сопротивление столба воздуха, длиною l, т.к. это сопротивление нагружает излучатель, расположенный в начальной плоскости сечения трубы ($x = -l$). Выражения (39) – (41) запишутся в виде:

$$P = 2P_{m1}\cos kx\cos\omega t \qquad (42)$$

$$\dot{\xi} = \frac{2P_{m1}}{j\rho C}\sin kx\sin\omega t \qquad (43)$$

(заменим $\operatorname{ctg}(-kl) = -\operatorname{ctg} kl$)

$$\overline{z_l} = -j\rho CS\operatorname{ctg} kx\,. \qquad (44)$$

Соотношения (42) – (44) позволяют понять картину звукового поля в закрытой трубе. Подставив в (42), (43) $x = 0$, находим

$$P_{x=0} = 2P_{m1}\cos\omega t\,, \dot{\xi}_{x=0} = 0,$$

т.е. колебания давления происходят с двойной амплитудой, а скорость частиц воздуха равна нулю. Иначе говоря, на отражающей поверхности образуется пучность стоячей волны давления и узел стоячей волны скорости.

Отступим теперь от сечения $x = 0$ на четверть длины волны. Приняв во внимание, что $kx = \frac{2\pi x}{\lambda}$, а $x = -\lambda/4$, то $kx = -\pi/2$. Подставив значение kx в (42), (43) получим

$$P_{x={\lambda}/{4}} = 0, \qquad \dot{\xi}_{x={\lambda}/{4}} = -\left(\frac{2P_{m1}}{\rho C}\right)\sin\omega t,$$

т.е. в сечении с координатой $x = \lambda/4$ образовались узел давления (первый, считая от поверхности отражения) и пучность скорости.

Перемещаясь таким же способом вдоль оси трубы в точки с координатами $x = -n\,\lambda/4$ (n=0, 1, 2, 3,…) можно показать, что в сечениях, соответствующих нечетному n, получаются узлы давления и пучности скорости; на расстояниях x, выражаем четным числом n (или целым числом полуволн) образуются пучности давления и узлы скорости. Сказанное иллюстрируется на рис. 6, на котором показано распределение вдоль трубы эффективных значений давления (сплошной линией) и скорости (пунктиром) ($P_э = P_m/\sqrt{2},\ \ \dot{\xi}_э = \dot{\xi}_m/\sqrt{2}$).

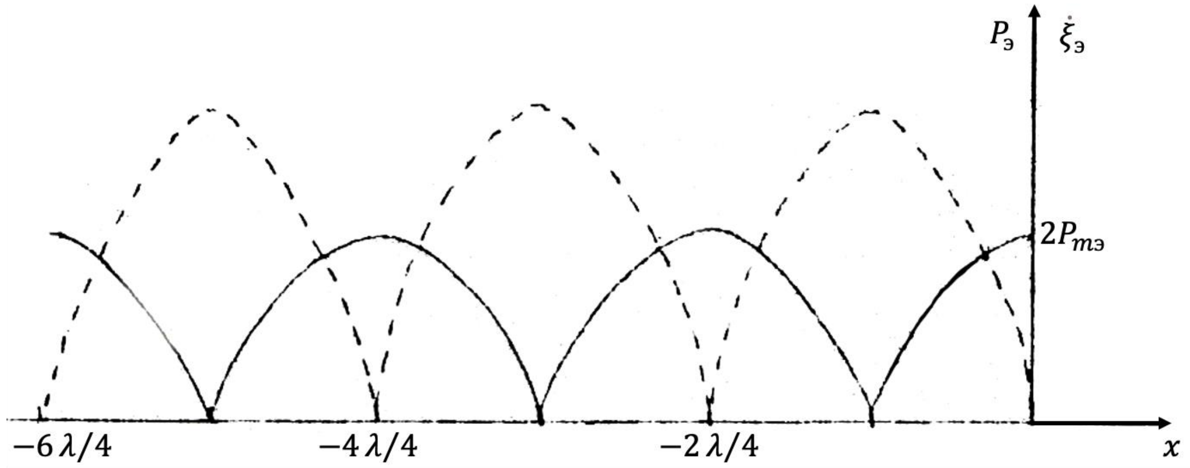

Рис. 6. Распределение эффективных значений давления (сплошная линия) и скорости (пунктирная линия) вдоль трубы

Как видно из рисунка, стоячая волна скорости сдвинута в пространстве на четверть волны по отношению к волне давления. Поскольку эффективные значения P и $\dot{\xi}$ не зависят от фазы колебания, на графике не нашла отражения существенная особенность стоячей волны: колебания в соседних пучностях (и вообще в соседних полуволновых участках, разделенных узловыми сечениями) всегда противофазны. Например, когда в пучности давления на отражающей поверхности происходит максимальное сжатие, в пучности при $x = -\lambda/2$ имеет место максимальное разрежение. Таким образом, при переходе через узловые сечения происходит скачок фазы колебания на угол π либо скорости, либо давления.

Рассмотрим теперь сопротивление $\overline{z_l}$, нагружающее излучатель звука. Согласно (44)

$$\overline{z_l} = -j\rho CS\,\mathrm{ctg}\frac{\omega}{C}l.$$

Как видим, это сопротивление зависит от частоты звука. Частотная зависимость, выражаемая функцией $\mathrm{ctg}\frac{\omega}{c}l$ представлена на рис. 7, где отмечен ряд характерных частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т.д.

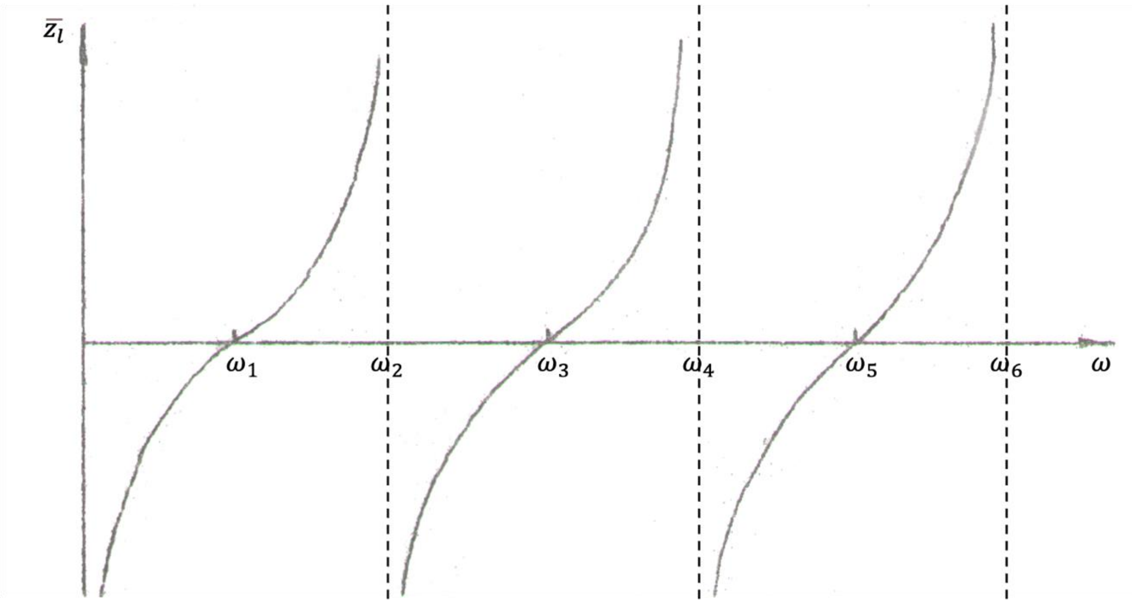

Рис. 7. Зависимость сопротивления столба воздуха от частоты звуковой волны

Частоты $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ и др., на которых сопротивление столба воздуха в трубе обращается в нуль, называется частотами резонанса. Частоты $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ и др., на которых $\bar{z}_l = \infty$, называются частотами антирезонанса. Получение условий резонанса или антирезонанса зависит от картины стоячих волн в трубе. В этом можно убедиться путем несложных расчётов. Например, чтобы получить самую низкую из резонансных частот, надо принять аргумент функции $\mathrm{ctg}\frac{\omega}{c}l$ равным $\pi/2$, т.е.

$$\omega_1 l/C = 2\pi l/\lambda_1 = 2\pi f_1 l/C = \pi/2,$$

откуда

$$l = \lambda_1/4 \qquad \text{и} \qquad f_1 = C/4l.$$

Как видим, на частоте первого резонанса вдоль трубы размещается лишь одна четверть стоячей волны. При этом поверхность излучателя попадает в пучность колебательной скорости и в узел давления (рис. 8а). Поскольку в этом сечении звуковое давление равно нулю, излучатель не встречает противодействие среды, т.е. работает в режиме «акустического короткого замыкания». Рассмотренный случай называют иногда четверть-волновым резонансом, а частоту ω_1 – частотой основного тона трубы.

Чтобы получить самую низкую частоту антирезонанса ω_2 (не считая $\omega = 0$), следует принять

$$\omega_2 l/C = 2\pi f_2 l/C = 2\pi l/\lambda_2 = \pi,$$

откуда

$$l = \lambda_2/2 \qquad \text{и} \qquad f_2 = C/4l = 2f_1 .$$

В этом случае вдоль трубы размещается две четверти стоячей волны, и излучатель попадает в узел скорости, в котором частицы воздуха остаются неподвижными; и пучность давления (рис. 8б). Сопротивление среды, которое встречает излучатель, будет таким же, как если бы он упирался бы непосредственно в отражающую стену, т.е. $z_l = \infty$ и излучатель окажется заторможенным.

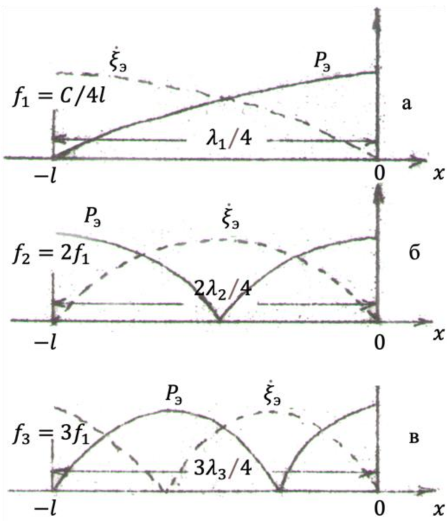

Рис. 8. Схема распределения стоячих волн при выполнении условия резонанса (а, в) и антирезонанса (б)

Частота первого антирезонанса f_2 вдвое выше частоты основного тона трубы f_1. На рис. 8в показана картина стоячих волн $P_э$ и $\dot{\xi}_э$ на частоте второго резонанса f_3. При этом $\overline{z_l} = 0$, $l = 3\lambda_3/4$, $f_3 = 3C/4l = 3f_1$. Таким образом, когда на длине трубы укладывается целое число n четвертей волны, то получается условие либо резонанса (при n нечетном), либо антирезонанса (при n четном). В такой же кратности оказываются соответствующие частоты резонансов и антирезонансов к частоте основного тона, т.е.

$$f_n = nf_1 = n\,C/4l.$$

Определим амплитуду стоячей волны $2P_{m1} = A$. Исходя из условий возбуждения при $x = -l$ уравнение 5 можно записать

$$P_0 = 2P_{m1}\cos(kl + \varphi).$$

Отсюда

$$A = 2P_{m1} = P_0/\cos(kl + \varphi).$$

Найдем далее распределение давления вдоль трубы (используя (39)):

$$P = P_0 \frac{\cos(kx + \varphi)}{\cos(kl + \varphi)}. \qquad (45)$$

Если колебание происходит на одной из антирезонансных частот, то $\cos(kl + \varphi) = \pm 1$, т.к. в этом случае конец трубы, к которому приложено стороннее давление, совпадает с пучностью давления. В этом случае вынужденное колебание, как видно из (45), имеет наименьшую амплитуду, равную амплитуде стороннего давления P_0. При резонансе $kl + \varphi = [(2m - 1)/2]\pi$, (т.к. на излучателе – узел давления) и амплитуда – вынужденного колебания – бесконечно велика. Частота наименьшего возбуждения трубы соответствует в этом случае собственной частоте трубы, закрытой жесткими крышками с обоих концов.

Открытая труба

Если предыдущий случай можно трактовать, как отражение от акустически жесткой стены, то теперь мы должны рассмотреть отражение от акустически мягкой стены, сопротивление которой в соответствии с выражением (41), можем выразить следующим образом:

$\bar{z}_x|_{x=0} = \pm j\rho CS \operatorname{ctg}\varphi = 0$, откуда $\varphi = \pm{}^{\pi}/_{2}$ и соответствующие выражения (39) – (41) для P, $\dot{\xi}$ и $\bar{z}_l$приобретают вид:

$$P = 2P_{m1} \sin kx \sin \omega t$$

$$\dot{\xi} = \frac{2P_{m1}}{\rho C} \cos kx \cos \omega t$$

$$\overline{z_l} = -j\rho CS \operatorname{tg}(-kl) = j\rho CS \operatorname{tg} kl.$$

Сравнивая эти выражения с (42) – (44), видим, что стоячие волны давления и скорости, по сравнению с предыдущим случаем, как бы поменялись местами. Сопротивление отражающей поверхности равно нулю, в связи с чем в сечении с координатой $x = 0$ нет «опоры» для образования сжатия или разрежения: воздух легко выталкивается или втягивается в трубу. Поэтому пучность давления здесь уже не может образоваться и $P_{x=0} = 0$. Зато скорость колебаний максимальна: $\dot{\xi}_{x=0} = (2P_{m1}/\rho C)\cos\omega t$ т.е. в сечении $x = 0$ имеем максимальную пучность скорости и узел давления.

Чередование узлов и пучностей при удалении от сечения $x = 0$ будет таким же, как изображено на рис. 8 с той разницей, что кривые скорости и давления поменяются местами.

Частотная зависимость сопротивления столба воздуха в трубе выражается теперь функцией $\operatorname{tg}\omega l/C = \operatorname{tg} 2\pi l/\lambda$. Поэтому на частотах f_1, f_3, f_5 и др., названных ранее резонансными, сопротивление $\overline{z_l}$ будет бесконечно большим, так как на этих частотах вдоль размера l укладывается нечетное число четвертей волны и излучатель попадает в узел колебательной скорости. Напротив, частотам f_2, f_4, f_6 и д.р., т.е. антирезонасным, соответствует $\overline{z_l} = 0$. В этом случае частоты наибольшего возбуждения соответствуют собственным частотам трубы, замкнутой жесткими крышками с обоих концов. Таким образом, разделение частот на резонансные и антирезонансные является весьма условным, так как оно было произведено в соответствии с получающимися на этих частотах значениями сопротивления $\overline{z_l}$. Если сопоставить резонансные явления в трубах и электрических цепях, частоты, при которых $\overline{z_l} = 0$, можно считать соответствующим частотам резонанса в последовательных цепях; при $\overline{z_l} = \infty$ частотам резонанса в параллельных цепях.

Неполное отражение

В более общем случае поверхность, ограничивающая трубу, характеризуется некоторым комплексным сопротивлением

$$\overline{z_0} = r_0 + jx_0 = z_0 e^{j\sigma}$$

$$z_0 = \sqrt{r_0^2 + x_0^2} \qquad\qquad \sigma = \operatorname{tg}^{-1}(x_0/r_0),$$

где r_0 и x_0 – активная и реактивная составляющие этого сопротивления, а z_0 и σ – его модуль и аргумент.

Наличие активной составляющей r_0 скажется в том, что часть энергии прямой волны будет поглощена при отражении, в связи с чем амплитуда давления отраженной волны станет меньше прямой, т.е. $P_{m1} < P_m$. Скачок фазы при отражении, характеризуемый углом 2φ, в этом случае будет находиться в пределах $0 < 2\varphi < \pi$. Напомним, что при отражении от жесткой стенки $2\varphi = 0$, а от мягкой (в открытой трубе) $2\varphi = \pi$.

Выделим из прямой волны часть, равную по амплитуде давления отраженной волне, т.е. будем считать, что

$$P_m = P_{m1} + \Delta P_m \qquad \text{или} \qquad \Delta P_m = P_m - P_{m1}\,,$$

где ΔP_m – превышение амплитуды давления прямой волны над отраженной.

Подставив это значение в выражение (39) и (40), получим:

$$P_\text{р} = P_{m1}\left[e^{j(kx+\varphi)} + e^{-j(kx+\varphi)}\right]e^{j(\omega t+\varphi)} + \Delta P_m e^{j(\omega t-kx)} \qquad (46)$$

$$\dot{\xi}_\text{р} = \frac{2P_{m1}}{j\rho C}\sin(kx+\varphi)\,e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{\Delta P_m}{\rho C}\,e^{j(\omega t-kx)}. \qquad (47)$$

Здесь $P_\text{р}$ и $\dot{\xi}_\text{р}$ – результирующие значения давления и скорости в трубе.

В полученных соотношениях первый член есть аналитическое выражение стоячей волны, а второй – бегущей. Таким образом, в трубе существует одновременно и стоячая волна, образовавшаяся в результате отражения, и бегущая волна, обусловленная поглощением части энергии прямой волны поверхностью, ограничивающей трубу. В целом звуковое поле в трубе может быть названо псевдостоячей волной, так как в определенных сечениях трубы образуются, как и в стоячей волне, максимумы и минимумы $P_\text{р}$ и $\dot{\xi}_\text{р}$, однако в минимумах эти величины не обращаются в нуль, а в максимумах – не достигаю двойного значения прямой волны.

Поясним на примере волны давления. Псевдоузлы давления образуются в тех сечениях, где давление стоячей волны, т.е. первый член выражения (46) обращается в нуль. Амплитуда давления результирующего поля обусловлена в этом случае бегущей волной, т.е.

$$P_{min} - \Delta P_m = P_m - P_{m1}\,.$$

Координаты сечения трубы с минимальным давлением могут быть найдены из условий $\cos(kx+\varphi)=0$ или

$$kx=(2n+1)\pi/2-\varphi \quad (n=0,1,2,\dots).$$

В частности, для ближайшего к отражающей поверхности псевдоузла (при $n=0$) имеем

$$kx_1=2\pi x_1/\lambda=\frac{\pi}{2}-\varphi \qquad \text{или} \qquad \varphi=(2\pi/\lambda)(\lambda/4-x_1)=kx.$$

Как видим, сравнительно со случаем бесконечно жесткой стенки, здесь наблюдается смещение первого минимума в сторону отражающей поверхности на величину $\Delta x=\lambda/4-x_1$.

Максимумы давления, т.е. псевдопучности, получаются в тех сечениях трубы, где

$$\cos(kx+\varphi)=1 \qquad \text{и} \qquad kx=n\pi-\varphi \quad (n=0,1,2,\dots),$$

так что, согласно (46), имеем

$$P_{m\lambda}=2P_{m1}+\Delta P_m=P_m+P_{m1}\,.$$

Соотношение давлений в максимуме и минимуме псевдостоячей волны является функцией отражающей способности материала, ограничивающего трубу.

ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В АКУСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Авторы:
Сергей Николаевич **Гурбатов**
Ирина Юрьевна **Грязнова**
Игорь Юрьевич **Демин** и др.

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.