

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.А. Федюков

**Методы решения линейных дифференциальных
уравнений второго порядка с постоянными
коэффициентами**

Практикум

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ для студентов
ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04
«Программная инженерия»

Нижегород
2021

УДК 517.956
ББК 22.161.6
Ф-16

Ф-16 Федюков А.А. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ: учебно-методическое пособие. – [электронный ресурс]. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 51 с.

Рецензент: старший преподаватель **Р.С. Бирюков**

В учебно-методическом пособии изложен теоретический материал по решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В каждом разделе поставлена задача и разобраны примеры с подробным алгоритмом решения. Приведены вопросы для самопроверки, задания для самостоятельной работы и задания для тестового контроля, которые позволяют закрепить полученные теоретические знания.

Практикум предназначен для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия».

УДК 517.956
ББК 22.161.6

А.А. Федюков

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

Содержание

Введение.....	4
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия.....	8
2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	10
2.1. Алгоритм нахождения общего решения	11
2.2. Примеры	16
3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	21
3.1. Метод вариации произвольных постоянных	21
3.2. Пример	22
3.3. Метод неопределенных коэффициентов.....	25
3.4. Примеры	27
4. Задача Коши.....	34
4.1. Примеры	34
5. Вопросы для самопроверки.....	37
6. Тест тематического контроля.....	39
7. Задания для самостоятельной работы.....	47
Заключение.....	49
Литература.....	50

Введение

Дифференциальные уравнения описывают множество процессов в физике, химии, биологии, технике, экономике, социологии и изучаются студентами различных направлений подготовки бакалавриата и магистратуры. Учебно-методическое пособие посвящено важному разделу дисциплины **«Высшая математика»** – линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами и нацелено на формирование способности выпускников применять в профессиональной деятельности методы математического моделирования.

Учебно-методическая разработка (практикум) **«Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами»** предназначена для бакалавров 1 курса института ИТММ ННГУ, обучающихся по направлению подготовки **09.03.04 «Программная инженерия»**. В практикум включен материал, изучаемый во втором семестре в теме **«Дифференциальные уравнения»** дисциплины **«Высшая математика»**. Ниже приведены ключевые компетенции, на формирование которых направлен материал, изложенный в практикуме и требования к знаниям и умениям студентов, необходимые при изучении данного материала.

Ключевые компетенции, которые формируются у студентов при изучении материала изложенного в практикуме «Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами».

Учебно-методическая разработка направлена на формирование следующих общекультурной и общепрофессиональной компетенций:

- способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);
- способность применять естественнонаучные и инженерные

знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности (ОПК-1).

Требования к знаниям и умениям студентов, которые необходимы в соответствии с требованиями рабочей программой дисциплины «Высшая математика» при изучении темы «Дифференциальные уравнения».

Знать:

- принципы сбора, отбора и обобщения информации **З1(УК-1)**;
- основы математики, физики, вычислительной техники и программирования **З1(ОПК-1)**;

Уметь:

- соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности **У1(УК-1)**;
- решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования **У1(ОПК-1)**;

Владеть:

- практическим опытом работы с информационными источниками, опытом научного поиска, создания научных текстов **В1(УК-1)**;
- навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности **В1(ОПК-1)**.

Структура практикума «Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами» соответствует последовательности изложения материала в учебной программе дисциплины «Высшая математика». Он разбит на разделы в соответствии с видами дифференциальных уравнений второго

порядка. В первом разделе сформулированы основные понятия и определения. Во втором разделе рассмотрено решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Третий раздел посвящен решению линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Приведены метод вариаций произвольных постоянных и метод неопределенных коэффициентов. В четвертом разделе сформулирована задача Коши и приведено ее решение. В каждом разделе изложен теоретический материал, который позволяет обучающимся систематизировать знания основных понятий, теорем и методов их практического применения при подготовке к контрольным работам и экзаменам; рассмотрены основные типы задач, разобраны примеры. Практикум содержит комплект заданий, который может быть использован в качестве типового для выработки навыков решения задач. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной работы студентов.

В пятом разделе учебно-методической разработки **«Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами»** приведены контрольные вопросы для самопроверки, которые помогают закрепить полученные теоретические знания.

Приведенный в практикуме тест тематического контроля позволяет оценить, насколько сформированы у обучающихся универсальная (УК-1) и общепрофессиональная (ОПК-1) компетенции. В учебно-методической разработке **«Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами»** приведены тестовые задания двух вариантов. Тест состоит из частей *A*, *B*, *C* и *D* и состоит из 16 заданий в каждом варианте как открытого так и закрытого типа. Задания части *A* – это закрытые тестовые задания множественного выбора одного

правильного ответа из предложенных. Содержательная часть тестового задания сформулирована в виде незаконченного предложения, которое становится истинным, если выбран верный вариант ответа, или ложным, если выбраны неверные варианты. Задания части *B* – это закрытые тестовые задания множественного выбора двух правильных ответов из предложенных. Часть *C* состоит из трех открытых тестовых заданий дополнения в виде незаконченных предложений и предложений с пропущенным словом, двух открытых тестовых заданий на установление соответствия и одного открытого тестового задания на установление аналогии. Задания части *D* – это открытые тестовые задания свободного изложения. В тесте приведены правильные ответы. В конце теста приведена шкала оценивания результатов теста.

В конце практикума приведен список литературы, рекомендованный при изучении данной темы дисциплины «**Высшая математика**».

Учебно-методическая разработка может быть полезна преподавателям при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий обучающихся, а также студентам очной формы обучения.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$, ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается как:

$$F(x, y, y') = 0, F(x, y, y', y'') = 0, F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например, функция $y = \ln x$ является решением дифференциального уравнения первого порядка

$$x \cdot y' - 1 = 0. \quad (1)$$

Действительно, т.к. $y'(x) = \frac{1}{x}$ то, подставляя производную в уравнение (1),

получим тождество.

Интегрированием дифференциального уравнения называется процесс нахождения решения дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется функция вида

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

в которую входит столько независимых произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n , каков порядок уравнения.

Видно, что функции $y = \ln x + 1$, $y = \ln x + 5$ также являются решениями дифференциального уравнения (1). Общее решение в данном примере имеет вид

$$y = \ln x + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при различных значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находим при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Например, для случая $y(1) = 2$ частное решение дифференциального уравнения (1) будет иметь вид $y = \ln x + 2$. Его график приведен на Рис. 1.

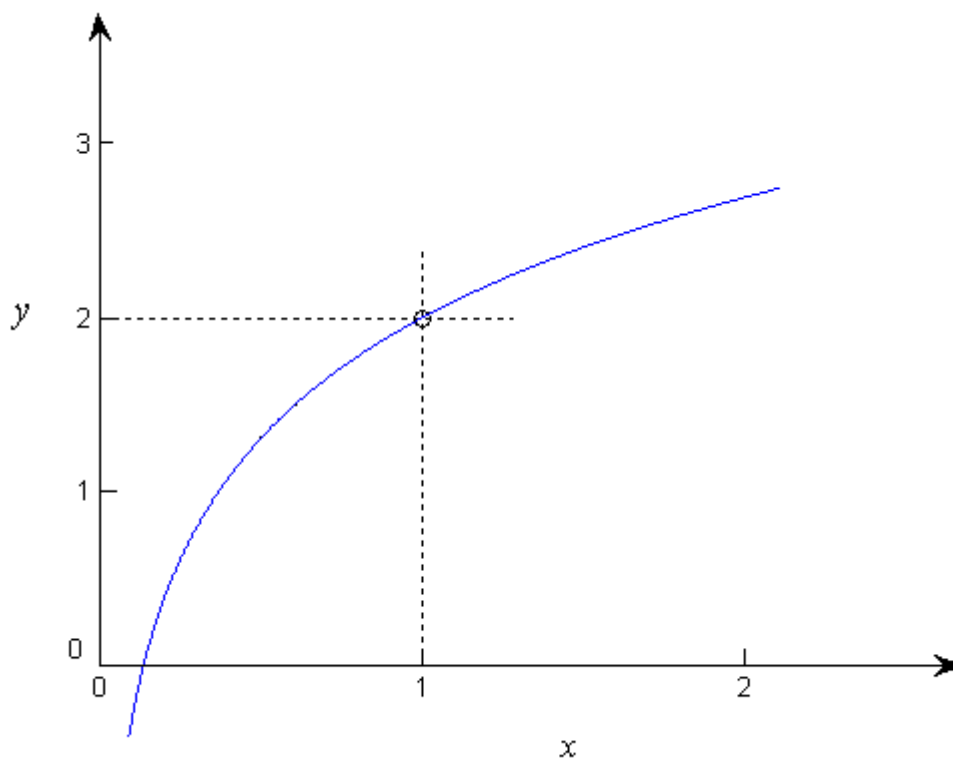


Рис. 1. График интегральной кривой

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (2)$$

где коэффициенты a_1, a_2 – постоянные, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) = 0$, то уравнение (2) называется однородным. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (2) называется неоднородным.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (3)$$

Общим решением уравнения (3) является функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (4)$$

где $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3), C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Фундаментальной системой решений называется всякая система линейно независимых решений, содержащая столько функций, каков порядок дифференциального уравнения.

Функции $y_1(x), y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на интервале (a, b) , если существуют постоянные числа λ_1, λ_2 , не равные нулю, такие что $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ для любых $x \in (a, b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a, b) .

Кратко *критерий линейной независимости* может быть сформулирован следующим образом: функции $y_1(x), y_2(x)$ являются линейно независимыми, если определитель Вронского

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad (5)$$

отличен от нуля для любых $x \in (a, b)$. В противном случае функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы.

2.1. Алгоритм нахождения общего решения

Эйлер предложил искать частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (3)

в виде $y(x) = e^{kx}$, где число $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$. Если принять $y(x) = e^{kx}$ частным

решением линейного однородного дифференциального уравнения (3), то при подстановке этого решения в уравнение мы должны получить тождество.

Подставим:

$$\begin{aligned} (e^{kx})'' + a_1(e^{kx})' + a_2(e^{kx}) &= 0, \\ k^2(e^{kx}) + a_1k(e^{kx}) + a_2(e^{kx}) &= 0, \\ e^{kx} \cdot (k^2 + a_1k + a_2) &= 0, \\ k^2 + a_1k + a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы получили так называемое *характеристическое уравнение* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решения квадратного уравнения (6) имеют вид

$$k_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \quad k_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \quad (7)$$

Утверждение 1. В общем виде, решения квадратного уравнения

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0. \quad (8)$$

имеет вид

$$k_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}, \quad k_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}. \quad (9)$$

Доказательство. Представим (8) в виде:

$$a_0 k^2 + a_1 k = -a_2. \quad (10)$$

Умножим обе части уравнения (10) на выражение $4a_0$

$$4a_0^2 k^2 + 4a_0 a_1 k = -4a_0 a_2$$

и добавим слева и справа в равенстве слагаемое

$$4a_0^2 k^2 + 4a_0 a_1 k + a_1^2 = -4a_0 a_2 + a_1^2. \quad (11)$$

Выражение, стоящее в (11) справа, представляет собой полный квадрат

$$(2a_0 k + a_1)^2 = -4a_0 a_2 + a_1^2. \quad (12)$$

Учитывая, что уравнение (12) имеет два корня

$$(2a_0 k_{1,2} + a_1) = \pm \sqrt{-4a_0 a_2 + a_1^2}$$

получим формулы (9).

Утверждение доказано.

Таким образом, полученное квадратное уравнение (6) может иметь, в зависимости от дискриминанта $D = a_1^2 - 4a_0 a_2$, два различных действительных решения, два совпадающих действительных решения (кратный корень) или пару комплексно-сопряженных решений.

В зависимости от корней характеристического уравнения выделяются частные решения (соответствующие корням характеристического уравнения), образующие фундаментальную систему решений и записывается соответствующее общее решение (4). Корни и вид общего решения дифференциального уравнения (3) представлены в Таблице 1.

Таблица 1

	Корни и вид общего решения дифференциального уравнения
1 случай	k_1, k_2 – действительные и различные $k_1 \neq k_2$ $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2 случай	k_1, k_2 – действительные и совпадают $k_1 = k_2$ $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x \cdot e^{k_1 x}$
3 случай	k_1, k_2 – комплексно-сопряженные, т.е. $k_1 = a + i \cdot b, k_2 = a - i \cdot b$. $y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$

В первом случае линейно независимыми частными решениями исходного дифференциального уравнения являются $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$.
 Функции $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$ действительно линейно независимы, т.к. для этих функций определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{k_1 x} e^{k_2 x} \neq 0.$$

Вывод: общее решение дифференциального уравнение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Во втором случае одним частным решением является функция $y_1(x) = e^{k_1 x}$. В качестве второго решения берем функцию $y_2(x) = x e^{k_1 x}$.
 Покажем, что функция $y_2(x) = x e^{k_1 x}$ действительно является частным решением дифференциального уравнения (3).

Подставим $y_2(x)$ в уравнение $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} (x e^{k_1 x})'' + a_1 (x e^{k_1 x})' + a_2 (x e^{k_1 x}) &= (e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x})' + a_1 (e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}) + a_2 (x e^{k_1 x}) = \\ &= k_1 e^{k_1 x} + k_1 (e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}) + a_1 (e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}) + a_2 (x e^{k_1 x}) = \\ &= e^{k_1 x} \cdot (2k_1 + k_1^2 x + a_1 + a_1 k_1 x + a_2 x) = x e^{k_1 x} \cdot (k_1^2 + a_1 k_1 + a_2) + e^{k_1 x} \cdot (2k_1 + a_1). \end{aligned}$$

Заметим, что k_1 является корнем уравнения

$$k_1^2 + a_1 k_1 + a_2 = 0,$$

и, что в случае равенства корней уравнения (6), дискриминант $D=0$, т.е.

$$k_1 = -\frac{a_1}{2}.$$

То есть $0 \equiv 0$. Что и требовалось показать.

Таким образом, $y_2(x) = xe^{k_1x}$ является частным решением дифференциального уравнения (3).

Покажем линейную независимость функций $y_1(x) = e^{k_1x}$ и $y_2(x) = xe^{k_1x}$.

Для этого вычислим определитель Вронского

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ k_1e^{k_1x} & e^{k_1x} + k_1xe^{k_1x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{k_1x} \cdot (e^{k_1x} + k_1xe^{k_1x}) - k_1xe^{k_1x}e^{k_1x} = e^{2k_1x} \neq 0 \end{aligned}$$

Вывод: общее решение дифференциального уравнение имеет вид:

$$y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2x \cdot e^{k_1x}.$$

В третьем случае имеем пару комплексных частных решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1(x) = e^{(a+ib)x}$ и $y_2(x) = e^{(a-ib)x}$.

Воспользовавшись формулой Эйлера из теории функций комплексного переменного, связывающей комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями

$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \sin x,$$

представим решения в виде

$$y_1(x) = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \cdot \sin bx),$$

$$y_2(x) = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \cdot \sin bx).$$

Далее, построим линейные комбинации этих решений следующего вида:

$$y_1^*(x) = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax} \cos bx,$$

$$y_2^*(x) = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{ax} \sin bx.$$

По теореме о линейных свойствах решений данные функции также будут являться решениями исходного дифференциального уравнения. Составим определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1^*(x) & y_2^*(x) \\ y_1^{*\prime}(x) & y_2^{*\prime}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{ax} \cos bx & e^{ax} \sin bx \\ ae^{ax} \cos bx - e^{ax} \sin bx & ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \end{vmatrix} = be^{ax}.$$

Так как экспоненциальная функция строго положительна, а характеристическое уравнение имеет комплексные корни (значит $b \neq 0$), то этот определитель отличен от нуля. В соответствии с критерием фундаментальности, решения $y_1^*(x) = e^{ax} \cos bx$, $y_2^*(x) = e^{ax} \sin bx$ являются линейно независимыми, и для уравнения второго порядка образуют фундаментальную систему решений.

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx.$$

Обобщим теорию.

Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

1. Записываем характеристическое уравнение $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.
2. Находим корни характеристического уравнения k_1, k_2 .
3. В зависимости от значений корней характеристического уравнения записываем общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в виде:
 - $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in R$;
 - $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x \cdot e^{k_1 x}$, если $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in R$;
 - $y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$, если $k_1 = a + i \cdot b, k_2 = a - i \cdot b$.

Рассмотрим примеры для каждого случая.

2.2. Примеры

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$4y'' - 11y' + 6y = 0 \quad (13)$$

Составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$4k^2 - 11k + 6 = 0.$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{11 + \sqrt{11^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4}, \quad k_2 = \frac{11 - \sqrt{11^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4}.$$

Откуда

$$k_1 = 2, \quad k_2 = \frac{3}{4}.$$

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных решения, т.е. имеем первый случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{\frac{3}{4}x}$$

и получить общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

$$y' = \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right)' = \left(C_1 e^{2x} \right)' + \left(C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right)' = 2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x},$$

$$y'' = \left(2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right)' = (2C_1 e^{2x})' + \left(\frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right)' = 4C_1 e^{2x} + \frac{9}{16} C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в исходное уравнение (13).

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \left(4C_1 e^{2x} + \frac{9}{16} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right) - 11 \cdot \left(2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right) + 6 \cdot \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x} \right) = \\ & = 16C_1 e^{2x} + \frac{9}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} - 22C_1 e^{2x} - \frac{33}{4} C_2 e^{\frac{3}{4}x} + 6C_1 e^{2x} + 6C_2 e^{\frac{3}{4}x} = \\ & = (16 - 22 + 6)C_1 e^{2x} + \left(\frac{9}{4} - \frac{33}{4} + 6 \right) C_2 e^{\frac{3}{4}x} = 0. \end{aligned}$$

То есть $0 \equiv 0$. Что и требовалось показать.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$4y'' - 4y' + y = 0 \tag{14}$$

Составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$4k^2 - 4k + 1 = 0.$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{14 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}, \quad k_2 = \frac{14 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}.$$

Откуда

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня (или один действительный корень кратности два), т.е. имеем второй случай в Таблице 1.

В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}, \quad y_2(x) = x e^{\frac{1}{2}x}$$

и получить общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}.$$

$$y' = \left(C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \left(C_1 e^{\frac{1}{2}x} \right)' + \left(C_2 x e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} C_2 x e^{\frac{1}{2}x},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \left(\frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} \right)' + \left(C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \\ &= \frac{1}{4} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в исходное уравнение (14).

$$\begin{aligned} &4 \cdot \left(\frac{1}{4} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 \left(1 + \frac{1}{4}x \right) e^{\frac{1}{2}x} \right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 \left(1 + \frac{1}{2}x \right) e^{\frac{1}{2}x} \right) + \\ &+ \left(C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x} \right) = (1 - 2 + 1) C_1 e^{\frac{1}{2}x} + (4 + x - 4 - 2x + x) C_2 e^{\frac{1}{2}x} = 0. \end{aligned}$$

То есть $0 \equiv 0$. Что и требовалось показать.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 37y = 0 \tag{15}$$

Составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 - 2k + 37 = 0. \tag{16}$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 37}}{2}, \quad k_2 = \frac{2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 37}}{2}.$$

Откуда

$$k_1 = \frac{2 + \sqrt{-144}}{2}, \quad k_2 = \frac{2 - \sqrt{-144}}{2},$$

$$k_1 = 1 + 6i, \quad k_2 = 1 - 6i,$$

где

$$i = \sqrt{-1}.$$

Характеристическое уравнение (16) имеет два комплексно-сопряженных решения, т.е. имеем третий случай в Таблице 1. В соответствии с приведенной таблицей можно выписать фундаментальную систему решений данного уравнения

$$y_1(x) = e^x \cos 6x, \quad y_2(x) = e^x \sin 6x$$

и получить общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 e^x \cos 6x + C_2 e^x \sin 6x.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$y(x) = C_1 e^x \cos 6x + C_2 e^x \sin 6x.$$

$$y' = (C_1 e^x \cos 6x + C_2 e^x \sin 6x)' = (C_1 e^x \cos 6x)' + (C_2 e^x \sin 6x)' =$$

$$= C_1 e^x \cos 6x - 6 \cdot C_1 e^x \sin 6x + C_2 e^x \sin 6x + 6 \cdot C_2 e^x \cos 6x,$$

$$y'' = ((C_1 + 6 \cdot C_2) \cdot e^x \cos 6x + (C_2 - 6 \cdot C_1) \cdot e^x \sin 6x)' =$$

$$= ((C_1 + 6 \cdot C_2) \cdot e^x \cos 6x)' + ((C_2 - 6 \cdot C_1) \cdot e^x \sin 6x)' =$$

$$= (C_1 + 6 \cdot C_2) \cdot e^x \cos 6x - 6 \cdot (C_1 + 6 \cdot C_2) \cdot e^x \sin 6x +$$

$$+ (C_2 - 6 \cdot C_1) \cdot e^x \sin 6x + 6 \cdot (C_2 - 6 \cdot C_1) \cdot e^x \cos 6x.$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в исходное уравнение (15).

$$\begin{aligned}
& (-35C_1 + 12 \cdot C_2) \cdot e^x \cos 6x + (-12 \cdot C_1 - 35C_2) \cdot e^x \sin 6x - \\
& -2 \cdot ((C_1 + 6 \cdot C_2) \cdot e^x \cos 6x + (C_2 - 6 \cdot C_1) \cdot e^x \sin 6x) + \\
& + 37 \cdot (C_1 e^x \cos 6x + C_2 e^x \sin 6x) = \\
& = (-35 - 2 + 37)C_1 \cdot e^x \cos 6x + (-12 + 12)C_1 \cdot e^x \sin 6x + \\
& + (12 - 12)C_2 \cdot e^x \cos 6x + (-35 - 2 + 37)C_2 \cdot e^x \sin 6x = 0.
\end{aligned}$$

То есть $0 \equiv 0$. Что и требовалось показать.

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (2):

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Покажем решение данного дифференциального уравнения двумя методами: методом вариации произвольных постоянных и методом неопределенных коэффициентов.

3.1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

В общем случае это уравнение может быть решено *методом вариации произвольных постоянных* (методом Лагранжа). Алгоритм нахождения решения методом Лагранжа состоит в следующем:

1. Находим общее решение линейного однородного уравнения (3), соответствующее исходному неоднородному уравнению (2)

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

2. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде общего решения однородного уравнения, считая, что произвольные постоянные являются функциями независимой переменной x , т.е. в виде

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \quad (17)$$

Таким образом, функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ уравнения (17) могут быть найдены как решения системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \end{cases} \quad (18)$$

которая является линейной системой двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными относительно $C_1(x)$, $C_2(x)$. Представим систему (18) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются линейно независимыми, то определитель Вронского (5)

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

для любых x . Тогда система (19) имеет единственное решение

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Поэтому и система двух уравнений (18) имеет единственное решение $C_1'(x) = g_1(x)$, $C_2'(x) = g_2(x)$. Интегрируя полученные равенств, найдем функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ и тем самым получим общее решение исходного неоднородного уравнения.(2).

3.2. Пример

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x} \quad (20)$$

Шаг 1. Найдем $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

Для этого составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 - 3k - 4 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим корни характеристического уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = 4$. Эти корни являются действительными и различными (первый случай), поэтому фундаментальная система решений, соответствующая этим корням, будет иметь вид:

$$y_1(x) = e^{-x},$$

$$y_2(x) = e^{4x}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой:

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Шаг 2. Будем искать общее решение неоднородного линейного уравнения в виде общего решения однородного линейного уравнения, считая, что произвольные постоянные являются функциями независимой переменной x , т.е. в виде

$$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{4x}. \quad (21)$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ могут быть найдены из решения системы (18),

где

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{4x}, \quad y_1'(x) = -e^{-x}, \quad y_2'(x) = 4e^{4x}, \quad f(x) = 6xe^{-x}, \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{4x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + 4C_2'(x)e^{4x} = 6xe^{-x}. \end{cases} \quad (22)$$

Преобразуем уравнения (22).

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} = -C_2'(x)e^{4x}, & \begin{cases} C_1'(x)e^{-x} = -C_2'(x)e^{4x}, \\ -C_1'(x)e^{-x} + 4C_2'(x)e^{4x} = 6xe^{-x}, \end{cases} \\ -C_1'(x)e^{-x} + 4C_2'(x)e^{4x} = 6xe^{-x}, & \begin{cases} 5C_2'(x)e^{4x} = 6xe^{-x}, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} = -C_2'(x)e^{4x}, & \begin{cases} C_1'(x)e^{-x} = -\frac{6x}{5}e^{-5x}e^{4x}, \\ C_2'(x) = \frac{6x}{5}e^{-5x}, \end{cases} \\ C_2'(x) = \frac{6x}{5}e^{-5x}, & \begin{cases} C_2'(x) = \frac{6x}{5}e^{-5x}, \end{cases} \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\frac{6x}{5}, \\ C_2'(x) = \frac{6x}{5}e^{-5x}. \end{cases}$$

Так как функция $C_1'(x) = -\frac{6x}{5}$, то $\int C_1'(x)dx = -\int \frac{6x}{5}dx$.

Тогда

$$C_1(x) = -\frac{3}{5}x^2 + A,$$

где A – произвольная постоянная.

Так как функция $C_2'(x) = \frac{6x}{5}e^{-5x}$, то.

$$\int C_2'(x)dx = \int \frac{6x}{5}e^{-5x}dx. \quad (23)$$

Найдем интеграл (23), применяя формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u = x$, $dv = \frac{6}{5}e^{-5x}dx$, $du = dx$, $v = -\frac{6}{25}e^{-5x}$.

$$C_2(x) = \int \frac{6x}{5}e^{-5x}dx = -\frac{6}{25}xe^{-5x} - \int -\frac{6}{25}e^{-5x}dx = -\frac{6}{25}xe^{-5x} - \frac{6}{125}e^{-5x} + B,$$

где B – произвольная постоянная.

Подставляя $C_1(x)$, $C_2(x)$ в (21) получим решение дифференциального уравнения

$$y(x) = \left(-\frac{3}{5}x^2 + A\right) \cdot e^{-x} + \left(-\frac{6}{25}xe^{-5x} - \frac{6}{125}e^{-5x} + B\right) \cdot e^{4x}. \quad (24)$$

Раскроем в формуле (24) скобки и сгруппируем элементы

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{3}{5}x^2e^{-x} + A \cdot e^{-x} - \frac{6}{25}xe^{-5x}e^{4x} - \frac{6}{125}e^{-5x}e^{4x} + B \cdot e^{4x} = \\ &= -\frac{3}{5}x^2e^{-x} + A \cdot e^{-x} - \frac{6}{25}xe^{-x} - \frac{6}{125}e^{-x} + B \cdot e^{4x} = \\ &= \left(A - \frac{6}{125}\right) \cdot e^{-x} + B \cdot e^{4x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{-x}. \end{aligned}$$

Обозначив произвольные постоянные

$$C_1 = A - \frac{6}{125}, \quad C_2 = B,$$

запишем решение исходного неоднородного линейного уравнения (20) в виде

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{-x}. \quad (25)$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x} + \left(-\frac{6}{5}x - \frac{6}{25}\right)e^{-x} - \left(-\frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{-x} = \\ &= -C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x} + \left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{25}x - \frac{6}{25}\right)e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= C_1 \cdot e^{-x} + 16C_2 \cdot e^{4x} + \left(\frac{6}{5}x - \frac{24}{25}\right)e^{-x} - \left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{25}x - \frac{6}{25}\right)e^{-x} = \\ &= C_1 \cdot e^{-x} + 16C_2 \cdot e^{4x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 + \frac{54}{25}x - \frac{18}{25}\right)e^{-x}. \end{aligned}$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в левую часть исходного уравнения (20)

$$\begin{aligned} y'' - 3y' - 4y &= C_1 \cdot e^{-x} + 16C_2 \cdot e^{4x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 + \frac{54}{25}x - \frac{18}{25}\right)e^{-x} - \\ &- 3 \cdot \left(-C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x} + \left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{25}x - \frac{6}{25}\right)e^{-x}\right) - \\ &- 4 \cdot \left(C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{-x}\right) = \\ &= (1 + 3 - 4)C_1 \cdot e^{-x} + (16 - 12 - 4)C_2 \cdot e^{4x} + \\ &+ \left(\left(-\frac{3}{5} - \frac{9}{5} + \frac{12}{5}\right)x^2 + \left(\frac{54}{25} + \frac{72}{25} + \frac{24}{25}\right)x + \left(\frac{18}{25} - \frac{18}{25}\right)\right)e^{-x} = \\ &= \frac{150}{25}xe^{-x} = 6xe^{-x}. \end{aligned}$$

То есть $6xe^{-x} \equiv 6xe^{-x}$. Что и требовалось показать.

3.3. Метод неопределенных коэффициентов

Метод вариации произвольных постоянных достаточно сложен, поэтому в ряде случаев, когда правая часть дифференциального уравнения имеет специальный вид, можно использовать другой метод – *метод неопределенных коэффициентов*. Для этого воспользуемся следующим

утверждением о структуре общего решения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

Утверждение 2. Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (2) равно сумме общего решения $y_{одн}(x)$ соответствующего однородного уравнения (3) и частного решения $y_{част}(x)$ исходного неоднородного уравнения.(2)

$$y(x) = y_{одн} + y_{част}.$$

Общее решение $y_{одн}(x)$ линейного однородного уравнения находим по алгоритму, приведенному выше. Далее необходимо найти частное решение $y_{част}(x)$ неоднородного уравнения. В случае, когда правая часть исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – полиномы степени n, m соответственно, a, b – некоторые постоянные числа, то частное решение неоднородного уравнения будет иметь следующую структуру:

$$y_{част} = x^r e^{ax} (N_l(x) \cos bx + M_l(x) \sin bx), \quad (26)$$

где $N_l(x)$, $M_l(x)$ – полиномы степени $l = \max(n, m)$, записанные с неопределенными коэффициентами; величина r равна числу корней характеристического уравнения (8), совпадающих с числом $a + i \cdot b$.

Таким образом,

- $r = 0$, если среди корней характеристического уравнения k_1, k_2 нет числа $a + i \cdot b$;
- $r = 1$, если один корень совпадает с этим числом;
- $r = 2$, если оба корня совпадают с этим числом.

Далее, в соответствии с алгоритмом, зная структуру частного решения неоднородного уравнения (26), неизвестными которого являются коэффициенты полиномов, подставим его вместе с производными в исходное уравнение. Приравниваем коэффициенты подобных членов слева и справа.

Получим систему линейных алгебраических уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов.

Таким образом, процесс нахождения частного решения $y_{\text{част}}(x)$ неоднородного уравнения сводится к применению таких элементарных операций, как дифференцирование и решение линейных алгебраических уравнений. Заметим, что в этом методе не используется операция интегрирования, которая необходима в методе вариации произвольных постоянных.

3.4. Примеры

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x} \quad (27)$$

Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение $y(x)$ имеет вид:

$$y(x) = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}}, \quad (28)$$

где $y_{\text{одн}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{\text{част}}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Шаг 1. Запишем общее решение соответствующего однородного уравнения (получено выше в **Примере 4**):

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Шаг 2. Найдем $y_{\text{част}}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения. Рассмотрим правую часть исходного неоднородного уравнения

$$f(x) = 6xe^{-x}.$$

Видно, что правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$f(x) = 6xe^{-x} \equiv e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx),$$

где

$$a = -1, b = 0, \text{ полином } P_n(x) = 6x, \text{ т.е. } n = 1, \text{ полином } Q_m(x) = 0, \text{ т.е. } m = 0.$$

Так как правая часть имеет специальный вид, то структура частного решения в общем случае будет иметь вид:

$$y_{\text{част}} = x^r e^{ax} (N_l(x) \cos bx + M_l(x) \sin bx),$$

где величины r , l и полиномы $N_l(x)$, $M_l(x)$ находятся следующим образом.

Так как

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a + i \cdot b = -1 + 0 \cdot i = k_1 \Rightarrow r = 1,$$

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x) = 6x \\ Q_m(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n = 1, m = 0 \Rightarrow l = \max(n, m) = 1.$$

Значит $N_l(x) = Ax + B$, $M_l(x) = Cx + D$, где A , B , C , D – постоянные. Тогда структура частного решения исходного неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами будет иметь вид:

$$y_{\text{част}} = x^1 e^{-1 \cdot x} ((Ax + B) \cdot \cos(0 \cdot x) + (Cx + D) \cdot \sin(0 \cdot x)) = x e^{-x} (Ax + B).$$

Коэффициенты A , B определим методом неопределенных коэффициентов. Для этого подставим частное решение с неопределенными коэффициентами в исходное уравнение, предварительно вычислив первую и вторую производные.

$$y = x e^{-x} (Ax + B),$$

$$y' = -e^{-x} (Ax^2 + Bx) + e^{-x} (2Ax + B) = e^{-x} (-Ax^2 + (2A - B) \cdot x + B),$$

$$\begin{aligned} y'' &= -e^{-x} (-Ax^2 + (2A - B) \cdot x + B) + e^{-x} (-2Ax + 2A - B) = \\ &= e^{-x} (Ax^2 + (B - 4A) \cdot x + 2A - 2B). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y'' - 3y' - 4y &= e^{-x} (Ax^2 + (B - 4A) \cdot x + 2A - 2B) - \\ &- 3 \cdot e^{-x} (-Ax^2 + (2A - B) \cdot x + B) - 4x e^{-x} (Ax + B) = \\ &= e^{-x} ((-10A) \cdot x + 2A - 5B). \end{aligned}$$

Подставим данное выражение в уравнение (27).

$$e^{-x} ((-10A) \cdot x + 2A - 5B) = 6x e^{-x}.$$

Разделим обе части уравнения на e^{-x} и приравняем коэффициенты при x^0 и x^1 . Получим систему

$$\begin{cases} -10A = 6, \\ 2A - 5B = 0, \end{cases}$$

из которой найдем коэффициенты A , B :

$$\begin{cases} A = -\frac{3}{5}, \\ B = -\frac{6}{25}. \end{cases}$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{част}} = xe^{-x} \left(-\frac{3}{5}x - \frac{6}{25} \right),$$

а общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения (27) определяется формулой (28):

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + xe^{-x} \left(-\frac{3}{5}x - \frac{6}{25} \right).$$

Видно, что общее решение дифференциального уравнения (27), полученное с помощью применения метода неопределенных коэффициентов, совпадает с решением (25), полученным методом вариации произвольных постоянных в

Примере 4.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x \quad (29)$$

Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение $y(x)$ имеет вид:

$$y(x) = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}}, \quad (30)$$

где $y_{\text{одн}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{\text{част}}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Шаг 1. Найдем $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Для этого составим характеристическое уравнение по приведенному выше способу. Получим квадратное уравнение

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

Решим его.

$$k_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13}}{2}, k_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13}}{2}.$$

Откуда

$$k_1 = -3 + 2i, k_2 = -3 - 2i.$$

Мы имеем два комплексно-сопряженных корня (третий случай) поэтому фундаментальная система решений, соответствующая этим корням, будет иметь вид:

$$y_1(x) = e^{-3x} \cos 2x,$$

$$y_2(x) = e^{-3x} \sin 2x.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой:

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x.$$

Шаг 2. Найдем $y_{част}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения. Рассмотрим правую часть исходного неоднородного уравнения

$$f(x) = e^{-3x} \cos 5x.$$

Видно, что правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$f(x) = e^{-3x} \cos 5x \equiv e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx),$$

где

$$a = -3, b = 5, \text{ полином } P_n(x) = 1, \text{ т.е. } n = 0, \text{ полином } Q_m(x) = 0, \text{ т.е. } m = 0.$$

Так как правая часть имеет специальный вид, то структура частного решения в общем случае будет иметь вид:

$$y_{\text{част}} = x^r e^{ax} (N_l(x) \cos bx + M_l(x) \sin bx),$$

где величины r , l и полиномы $N_l(x)$, $M_l(x)$ находятся следующим образом.

Так как

$$\left. \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a + i \cdot b = -3 + 5 \cdot i \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x) = 1 \\ Q_m(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n = 0, m = 0 \Rightarrow l = \max(n, m) = 0.$$

Значит $N_l(x) = A$, $M_l(x) = B$, где A , B – постоянные.

Тогда структура частного решения исходного неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами будет иметь вид:

$$y_{\text{част}} = x^0 e^{-3x} (A \cos 5x + B \sin 5x) = e^{-3x} (A \cos 5x + B \sin 5x).$$

Коэффициенты A , B определим методом неопределенных коэффициентов. Для этого подставим частное решение с неопределенными коэффициентами в исходное уравнение, предварительно вычислив первую и вторую производные.

$$y = e^{-3x} (A \cos 5x + B \sin 5x),$$

$$\begin{aligned} y' &= -3e^{-3x} (A \cos 5x + B \sin 5x) + e^{-3x} (A \cos 5x + B \sin 5x)' = \\ &= -3e^{-3x} (A \cos 5x + B \sin 5x) + e^{-3x} (-5A \sin 5x + 5B \cos 5x) = \\ &= e^{-3x} ((-3A + 5B) \cdot \cos 5x - (3B + 5A) \cdot \sin 5x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -3e^{-3x} ((-3A + 5B) \cdot \cos 5x - (3B + 5A) \cdot \sin 5x) + \\ &+ e^{-3x} ((-3A + 5B) \cdot \cos 5x - (3B + 5A) \cdot \sin 5x)' = \\ &= -3e^{-3x} ((-3A + 5B) \cdot \cos 5x - (3B + 5A) \cdot \sin 5x) + \\ &+ e^{-3x} (-5 \cdot (-3A + 5B) \cdot \sin 5x - 5 \cdot (3B + 5A) \cdot \cos 5x) = \\ &= e^{-3x} ((-16A - 30B) \cdot \cos 5x + (30A - 16B) \cdot \sin 5x). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
y'' + 6y' + 13y &= e^{-3x} \left((-16A - 30B) \cdot \cos 5x + (30A - 16B) \cdot \sin 5x \right) + \\
&+ 6 \cdot e^{-3x} \left((-3A + 5B) \cdot \cos 5x - (3B + 5A) \cdot \sin 5x \right) + 13 \cdot e^{-3x} (A \cos 5x + B \sin 5x) = \\
&= e^{-3x} (-21A \cdot \cos 5x - 21B \cdot \sin 5x).
\end{aligned}$$

Подставим данное выражение в уравнение (29).

$$e^{-3x} (-21A \cdot \cos 5x - 21B \cdot \sin 5x) = e^{-3x} \cos 5x.$$

Разделим обе части уравнения на e^{-3x} и приравняем коэффициенты при $\cos 5x$ и $\sin 5x$. Получим систему

$$\begin{cases} -21A = 1, \\ -21B = 0, \end{cases}$$

из которой найдем коэффициенты A , B :

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{21}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{част}} = -\frac{1}{21} e^{-3x} \cos 5x,$$

а общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения (29) определяется формулой (30):

$$y(x) = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x - \frac{1}{21} e^{-3x} \cos 5x.$$

Сделаем проверку найденного общего решения. Для этого найдем первую и вторую производные общего решения

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -3C_1 e^{-3x} \cos 2x - 2C_1 e^{-3x} \sin 2x - 3C_2 e^{-3x} \sin 2x + 2C_2 e^{-3x} \cos 2x + \\
&+ \frac{3}{21} e^{-3x} \cos 5x + \frac{5}{21} e^{-3x} \sin 5x = (-3C_1 + 2C_2) e^{-3x} \cos 2x - \\
&- (2C_1 + 3C_2) e^{-3x} \sin 2x + \frac{3}{21} e^{-3x} \cos 5x + \frac{5}{21} e^{-3x} \sin 5x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''(x) &= -3 \cdot (-3C_1 + 2C_2)e^{-3x} \cos 2x - 2 \cdot (-3C_1 + 2C_2)e^{-3x} \sin 2x + \\
&+ 3 \cdot (2C_1 + 3C_2)e^{-3x} \sin 2x - 2 \cdot (2C_1 + 3C_2)e^{-3x} \cos 2x - \frac{9}{21}e^{-3x} \cos 5x - \\
&- \frac{15}{21}e^{-3x} \sin 5x - \frac{15}{21}e^{-3x} \sin 5x + \frac{25}{21}e^{-3x} \cos 5x = \\
&= (5C_1 - 12C_2)e^{-3x} \cos 2x + (12C_1 + 5C_2)C_2e^{-3x} \sin 2x - \frac{30}{21}e^{-3x} \sin 5x + \\
&+ \frac{16}{21}e^{-3x} \cos 5x.
\end{aligned}$$

Подставим общее решение вместе с найденными производными в левую часть исходного уравнения (29)

$$\begin{aligned}
y'' + 6y' + 13y &= (5C_1 - 12C_2)e^{-3x} \cos 2x + (12C_1 + 5C_2)e^{-3x} \sin 2x - \\
&- \frac{30}{21}e^{-3x} \sin 5x + \frac{16}{21}e^{-3x} \cos 5x + 6 \cdot ((-3C_1 + 2C_2)e^{-3x} \cos 2x) + \\
&+ 6 \cdot \left(-(2C_1 + 3C_2)e^{-3x} \sin 2x - \frac{3}{21}e^{-3x} \cos 5x + \frac{5}{21}e^{-3x} \sin 5x \right) + \\
&+ 13 \cdot \left(C_1e^{-3x} \cos 2x + C_2e^{-3x} \sin 2x - \frac{1}{21}e^{-3x} \cos 5x \right) = \\
&= (5C_1 - 12C_2 - 18C_1 + 12C_2 + 13C_1)e^{-3x} \cos 2x + \\
&+ (12C_1 + 5C_2 - 12C_1 - 18C_2 + 13C_2)e^{-3x} \sin 2x + \\
&+ \left(-\frac{30}{21} + \frac{30}{21} \right) e^{-3x} \sin 5x + \left(\frac{16}{21} + \frac{18}{21} - \frac{13}{21} \right) e^{-3x} \cos 5x = e^{-3x} \cos 5x.
\end{aligned}$$

То есть $e^{-3x} \cos 5x \equiv e^{-3x} \cos 5x$. Что и требовалось показать.

4. Задача Коши

Общее решение любого дифференциального уравнения $y = y(x, C_1, C_2)$, как следует из алгоритма его получения, содержит бесчисленное множество частных решений. Возникает естественный вопрос: как из полученного множества решений выделить интересующее нас частное решение или, другими словами, как выделить нужную интегральную кривую?

Задача Коши – это одна из основных задач теории дифференциальных уравнений. Она состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям (начальным данным).

Задачи Коши обычно возникают при анализе процессов, определяемых законом эволюции и начальным состоянием, математическим выражением которых являются дифференциальные уравнения и начальное состояние. Начальные данные задаются при $x = x_0$, а искомое решение $y(x)$ ищется для $x > x_0$.

4.1. Примеры

Пример 7. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$4y'' - 11y' + 6y = 0 \quad (31)$$

если

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \quad (32)$$

В **примере 1** получено общее решение исходного дифференциального уравнения. Так как

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x},$$

тогда

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + \frac{3}{4}C_2 e^{\frac{3}{4}x}.$$

Учитывая (32), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ y'(0) = 2C_1 + \frac{3}{4}C_2 = 1. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ 2C_1 + \frac{3}{4}C_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ 2 + \left(\frac{3}{4} - 2\right)C_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{5}, \\ C_2 = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Искомое частное решение дифференциального уравнения (31) имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{4}{5}e^{\frac{3}{4}x}.$$

Пример 8. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x \quad (33)$$

если

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \quad (34)$$

В **примере 6** получено общее решение исходного дифференциального уравнения. Так как

$$y(x) = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x - \frac{1}{21} e^{-3x} \cos 5x,$$

тогда

$$\begin{aligned} y'(x) = & (2C_2 - 3C_1)e^{-3x} \cos 2x - (3C_2 + 2C_1)e^{-3x} \sin 2x + \\ & + \frac{3}{21} e^{-3x} \cos 5x + \frac{5}{21} e^{-3x} \sin 5x. \end{aligned}$$

Учитывая (34), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 - \frac{1}{21} = 1, \\ y'(0) = 2C_2 - 3C_1 + \frac{3}{21} = 1. \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} C_1 = 1\frac{1}{21}, \\ C_2 = 2. \end{cases}.$$

Искомое частное решение дифференциального уравнения (33) имеет вид:

$$y(x) = 1\frac{1}{21}e^{-3x} \cos 2x + 2e^{-3x} \sin 2x - \frac{1}{21}e^{-3x} \cos 5x.$$

5. Вопросы для самопроверки

1. Какой вид имеет линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
2. Какие функции называются линейно независимыми?
3. Какой вид имеет определитель Вронского?
4. Как связаны линейная независимость системы функций и определитель Вронского для них?
5. Что называют характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
6. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни его характеристического уравнения действительные и различные? Дайте обоснование.
7. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни его характеристического уравнения комплексные? Дайте обоснование.
8. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни его характеристического уравнения действительные и совпадают? Дайте обоснование.
9. Установите линейную зависимость или линейную независимость системы функций: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$.
10. Установите линейную зависимость или линейную независимость системы функций: $y_1 = e^{2x} \cos 3x$, $y_2 = e^{2x} \sin 3x$.
11. Установите линейную зависимость или линейную независимость системы функций: $y_1 = \sin 3x \cdot \cos 3x$, $y_2 = \sin 6x$.

12. В чем состоит метод вариации произвольных постоянных?
13. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов?
14. Что такое задача Коши?

6. Тест тематического контроля

ТЕСТ ТЕМАТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

по теме «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами»

Тест состоит из частей А, В, С и D. На его выполнение отводится 40 минут. Задания рекомендуется выполнять по порядку, не пропуская ни одного, даже самого легкого.

ВАРИАНТ 1-2

Часть А

К каждому заданию части А дано несколько ответов, из которых только один верный. Выберите верный, по Вашему мнению, ответ.

A1. Множество всех решений дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$ имеет вид ..., где C_1 и C_2 – константы

1) $y = C_1 e^{6t} + C_2 e^x$

2) $y = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-x}$

3) $y = C_1 e^{-6t} + C_2 e^x$

4) $y = C_1 e^{-6t} + C_2 e^{-x}$

A1. Множество всех решений дифференциального уравнения $y'' + 7y' + 6y = 0$ имеет вид ..., где C_1 и C_2 – константы

1) $y = C_1 e^{6t} + C_2 e^x$

2) $y = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-x}$

3) $y = C_1 e^{-6t} + C_2 e^x$

4) $y = C_1 e^{-6t} + C_2 e^{-x}$

A2. Множество всех решений дифференциального уравнения ... имеет вид $y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}$, где C_1 и C_2 – константы

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$

2) $4y'' - 11y' + 6y = 0$

3) $4y'' - 4y' + y = 0$

4) $3y'' - 3y' + 2y = 0$

A2. Множество всех решений дифференциального уравнения ... имеет

вид $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{3}{4}x}$, где C_1 и C_2 – константы

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$

2) $4y'' - 11y' + 6y = 0$

3) $4y'' - 4y' + y = 0$

4) $3y'' - 3y' + 2y = 0$

A3. Функция ... является частным решением дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$

1) $y = e^{2x} \sin 3x$

2) $y = x \sin 3x$

3) $y = \cos 3x + 2 \sin 3x$

4) $y = x e^{2x}$

A3. Функция ... является частным решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$

1) $y = e^{2x} \sin 3x$

2) $y = x \sin 3x$

3) $y = \cos 3x + 2 \sin 3x$

4) $y = x e^{2x}$

A4. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются линейно независимыми, если

определитель ... $W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ отличен от нуля для любых

$x \in (a, b)$.

1) Бернулли

2) Вронского

3) Лагранжа

4) Риккати

A4. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ не являются линейно независимыми, если определитель Вронского $W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \dots$ для любых $x \in (a, b)$.

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1) больше нуля | 2) меньше нуля |
| 3) отличен от нуля | 4) <u>равен нулю</u> |

A5. Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$ нужно искать в виде

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) $y_{\text{част}} = xe^{-x}$ | 2) $y_{\text{част}} = e^{-x}(Ax + B)$ |
| 3) $y_{\text{част}} = Axe^{-x}$ | 4) <u>$y_{\text{част}} = xe^{-x}(Ax + B)$</u> |

A5. Частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$ нужно искать в виде

- | | |
|--|---|
| 1) $y_{\text{част}} = Ae^{-3x} \cos 5x$ | 2) <u>$y_{\text{част}} = e^{-3x}(A \cos 5x + B \sin 5x)$</u> |
| 3) $y_{\text{част}} = (Ax + B)e^{-3x} \cos 5x$ | 4) $y_{\text{част}} = xe^{-3x}(A \cos 5x + B \sin 5x)$ |

Часть В

В заданиях части В выберите все верные, по Вашему мнению, ответы.

В6. Функция ... является частным решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$

- | | |
|---|--|
| 1) <u>$y = 2e^{2x} \cos 3x + e^{2x} \sin 3x$</u> | 2) <u>$y = 2e^{2x} \cos 3x$</u> |
|---|--|

3) $y = \cos 3x + 2\sin 3x$

4) $y = \cos 3x$

В6. Функция ... является частным решением дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$

1) $y = 2e^{2x} \cos 3x + e^{2x} \sin 3x$

2) $y = 2e^{2x} \cos 3x$

3) $y = \cos 3x + 2\sin 3x$

4) $y = \cos 3x$

В7. Среди перечисленных дифференциальных уравнений линейными уравнениями второго порядка являются

1) $x^2 + y^2 y'' = 1$

2) $y'' + 3y = -xe^{2x}$

3) $y'' - y = 3x - 2$

4) $y'' = \cos(y - x)$

В7. Среди перечисленных дифференциальных уравнений линейными уравнениями второго порядка являются

1) $y'' - y = 2x - 3$

2) $2x^2 yy'' + y^2 = 2$

3) $y'' = \sin(y - x)$

4) $y'' - 2y = xe^{-x}$

Часть С

Вставьте пропущенные слова в заданиях С8, С9, С10, так, чтобы получились верные высказывания. Ответ (слово) запишите на бланке заданий рядом с номером задания. В заданиях С11, С12 найдите соответствие и запишите ответы на бланке заданий в виде последовательности цифр и букв рядом с номером задания, например 1АБ2ВД3Г. В задании С13 найдите аналогию и запишите ответ (слово) рядом с номером задания.

С8. Дифференциальное уравнение называется ..., если искомая функция

зависит от одного независимого переменного.

(Ответ: обыкновенным)

С8. Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от ... независимого переменного.

(Ответ: одного)

С9. Дифференциальное уравнение вида $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, где коэффициенты a_1, a_2 – постоянные, называется линейным ... дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

(Ответ: однородным)

С9. Дифференциальное уравнение вида $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, где коэффициенты a_1, a_2 – постоянные, называется линейным однородным дифференциальным уравнением ... порядка с постоянными коэффициентами.

(Ответ: второго)

С10. Функции $y_1(x), y_2(x)$ называются линейно ... на интервале (a,b) , если тождество $\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) = 0$ для любых $x \in (a,b)$ выполняется только в случае, когда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$.

(Ответ: независимыми)

С10. Функции $y_1(x), y_2(x)$ называются линейно ... на интервале (a,b) , если существуют числа λ_1, λ_2 отличные от нуля при которых для любых $x \in (a,b)$ выполняется тождество $\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) = 0$.

(Ответ: зависимыми)

С11. Найдите соответствие

<i>Дифференциальное уравнение</i>	<i>Корни характеристического полинома</i>
1. $y'' - 4y = 0$	А. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$
2. $y'' - 4y' = 0$	Б. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$	В. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$	Г. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2$

(Ответ: 1В2А3Б4Г)

С11. Найдите соответствие

<i>Дифференциальное уравнение</i>	<i>Корни характеристического полинома</i>
1. $y'' - y = 0$	А. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$
2. $y'' - y' = 0$	Б. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$
3. $y'' - 2y' + y = 0$	В. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$
4. $y'' + 2y' + y = 0$	Г. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$

(Ответ: 1Б2В3Г4А)

С12. Найдите соответствие

<i>Дифференциальное уравнение</i>	<i>Фундаментальная система решений</i>
1. $y'' - y = 0$	А. $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$
2. $y'' - y' = 0$	Б. $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}$
3. $y'' - 2y' + y = 0$	В. $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x$
4. $y'' + 2y' + y = 0$	Г. $y_1 = 1, y_2 = e^x$

(Ответ: 1В2Г3А4Б)

С12. Найдите соответствие

<i>Дифференциальное уравнение</i>	<i>Фундаментальная система решений</i>
-----------------------------------	--

уравнение	
1. $y'' - 4y = 0$	А. $y_1 = e^{-2x}, y_2 = xe^{-2x}$
2. $y'' - 4y' = 0$	Б. $y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$	В. $y_1 = 1, y_2 = e^{4x}$
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$	Г. $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{2x}$

(Ответ: 1Г2В3Б4А)

С13. Установите аналогию

$$y'' = \cos x : y_{\text{общ}} = -\cos x + C_1x + C_2 = \quad y'' = \sin x : ?$$

(Ответ: $y_{\text{общ}} = -\sin x + C_1x + C_2$)

С13. Установите аналогию

$$y'' = \sin x : y_{\text{общ}} = -\sin x + C_1x + C_2 = \quad y'' = \cos x : ?$$

(Ответ: $y_{\text{общ}} = -\cos x + C_1x + C_2$)

Часть D

В заданиях части D решите уравнение и напишите ответ.

D14. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + 1y = 0$.

(Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$, где C_1 и C_2 – константы).

D14. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

(Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$, где C_1 и C_2 – константы)

D15. Решите уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

(Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, где C_1 и C_2 – константы).

D15. Решите уравнение $y'' + 2y' + 2y = 0$.

(Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, где C_1 и C_2 – константы).

D16. Решите задачу Коши $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 9$.

(Ответ: $y = 3\sin 3x + 2\cos 3x$).

D16. Решите задачу Коши $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(Ответ: $y = \cos 3x$).

Результаты теста по теме «**Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**» оцениваются оценками «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Критерии оценки:

- ✓ правильное выполнение 90% - 100% заданий теста – отметка «отлично»;
- ✓ правильное выполнение 89% - 75% заданий теста – отметка «хорошо»;
- ✓ правильное выполнение 74% - 51% заданий теста – отметка «удовлетворительно»;
- ✓ правильное выполнение 50% заданий теста и менее – отметка «неудовлетворительно».

7. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $4y'' - 3y' - 2y = 0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = x$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Вариант 2.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $3y'' - 4y' - 2y = 0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - y' + 2y = 0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 1y = 0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = e^x$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Вариант 3.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+16y'-2y=0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $4y''-3y'+2y=0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-8y'+16y=0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y''-3y'-4y=2x$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения $4y''-4y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Вариант 4.

1. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $2y''-3y'+y=0$.
2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $3y''-4y'+2y=0$.
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-4y'+4y=0$.
4. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y''-3y'-4y=1$.
5. Найти частное решение дифференциального уравнения $4y''-4y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Заключение

Учебно-методическая разработка содержит теоретический материал, задания практического характера, методические рекомендации по их выполнению, которые способствуют усвоению, закреплению пройденного материала и проверке знаний по теме «**Дифференциальные уравнения**» дисциплины «**Высшая математика**».

В соответствии с требованиями рабочей программой дисциплины «**Высшая математика**» по формированию универсальной (**УК-1**) и общепрофессиональной (**ОПК-1**) компетенций, при изучении материала, изложенного в учебно-методической разработке (практикум) «**Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами**»:

1. студенты знакомятся с методами теории дифференциального исчисления;
2. подготавливается фундаментальная база для изучения других дисциплин;
3. происходит воспитание у студентов математической культуры;
4. формируется математическое мышление;
5. прививаются навыки работы в команде;
6. развиваются способности к самоорганизации и самообразованию.

Учебно-методическая разработка может быть полезна преподавателям при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий обучающихся, а также студентам очной формы обучения.

Литература

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 439 с.
2. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1996. 479 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. М.: Высшая школа, 1986. 416 с.
4. Барбаумов В.Е., Ермаков В.И., Кривенцова Н.Н. Справочник по математике для экономистов. М.: Высшая школа, 1997. 384 с.
5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2-х ч. Ч.1. М.: Высшая школа, 1982. 320 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1981. 716 с.
7. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.
8. Киселев А. И., Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 1978. 287 с.
9. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для студентов вузов. М.: Наука, 1985. 128 с.

Александр Анатольевич Федюков

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.