**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.В. Пройдакова
Т.С. Бородина

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО ТЕМЕ «МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
09.03.04 «Программная инженерия», 01.03.02 «Прикладная математика
и информатика», 09.03.03 «Прикладная информатика»
и 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Нижний Новгород
2021

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.17я73-4
П80

П80 Пройдакова Е.В., Бородина Т.С. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО ТЕМЕ «МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 86 с.

Рецензент: к.т.н., доцент **С.Н. Стребуляев**

Учебно-методическое пособие содержит вопросы для собеседования, практические и тестовые задания по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», относящиеся к разделу «Многомерные случайные величины».

Пособие будет полезно при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» студентам ИИТММ, обучающимся по направлениям подготовки «Программная инженерия», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.17я73-4

Оглавление

Введение

В свете современных требований к образованию и воспитанию, особую актуальность приобретает воспитание у студентов потребности в самообразовании, формировании навыков самостоятельной работы. В результате самообразовательной деятельности студентов происходит процесс приобретения, структурирования и закрепления знаний. Самоконтроль - один из важнейших факторов, обеспечивающих самостоятельную деятельность учащихся. Его назначение заключается в своевременном предотвращении или обнаружении уже совершенных ошибок. Учебно-методическое пособие «Задания для самоконтроля по теме «Многомерные случайные величины»» как раз и направлено на формирование навыка самоконтроля у студентов.

В представленном учебно-методическом пособии содержатся вопросы для собеседования, практические и тестовые задания для самостоятельного контроля по таким темам, как: двумерные дискретные и непрерывные случайные величины, их законы распределения, числовые характеристики многомерных случайных величин, условные законы распределения случайных величин, функциональные зависимости многомерных случайных величин, статистическая зависимость случайных величин и элементы теории корреляции.

Данный материал относится к разделу «Многомерные случайные величины» дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Выполнение предложенных в пособии заданий позволит обучающемуся проконтролировать себя, оценить свой уровень подготовки, обнаружить, если они имеются, пробелы в освоении дисциплины и провести соответствующую работу.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов ИИТММ очной формы обучения, обучающихся по направлениям подготовки «Программная инженерия», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

1. Вопросы для собеседования

Раздел содержит контрольные вопросы по теме «Многомерные случайные величины».

1. Дайте определение многомерной случайной величины и ее интегральной функции распределения.
2. Дайте определение двумерной случайной величины, приведите примеры.
3. Сформулируйте определение интегральной функции распределения двумерной случайной величины.
4. Перечислите свойства двумерной интегральной функции распределения.
5. Приведите формулы для вычисления вероятности попадания в полосу и прямоугольник двумерной случайной величины $(\xi(\omega),\eta(\omega))$.
6. Дайте определение статистически независимых случайных величин.
7. Дайте определение двумерной непрерывной случайной величины.
8. Перечислите свойства двумерной плотности распределения.
9. Как найти интегральную функцию распределения непрерывной двумерной случайной величины, зная плотность распределения?
10. Как найти плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины, зная интегральную функцию распределения?
11. Перечислите все возможные способы вычисления вероятности попадания в прямоугольник для непрерывной двумерной случайной величины.
12. Как проверить независимость случайных величин, если $(\xi(\omega),\eta(\omega))$ является непрерывной двумерной случайной величиной?
13. Как найти одномерные функции распределения, зная двумерную интегральную функцию распределения?
14. Как найти одномерные плотности распределения, зная двумерную плотность распределения?

15. Дайте определение двумерной дискретной случайной величины.
16. Что называется распределением двумерной дискретной случайной величины?
17. Как найти интегральную функцию распределения дискретной двумерной случайной величины?
18. Какой вид имеет таблица или матрица распределения двумерной дискретной случайной величины?
19. Как найти интегральные одномерные функции распределения, зная матрицу распределения двумерной дискретной случайной величины?
20. Как найти распределение каждой из одномерных случайных величин, зная матрицу распределения двумерной дискретной случайной величины?
21. Как проверить независимость случайных величин, если $(\xi(\omega),\eta(\omega))$ является дискретной двумерной случайной величиной?
22. Можно ли, зная законы распределения одномерных случайных величин, найти распределение соответствующей двумерной случайной величины? Верно ли обратное утверждение.
23. Сформулируйте определение математического ожидания двумерной случайной величины.
24. Пусть известно распределение дискретной двумерной случайной величины $(\xi(\omega),\eta(\omega))$. Как найти математическое ожидание и дисперсию каждой из одномерных дискретных случайных величин?
25. Пусть известна плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины $(\xi(\omega),\eta(\omega))$. Как найти математическое ожидание и дисперсию каждой из одномерных непрерывных случайных величин?
26. Как найти математическое ожидание случайной величины $\varsigma = g(\xi,\eta)$, где $g(x,y): R^2 \to R$ - однозначное отображение, если: *а*) (ξ,η) - дискретная случайная величина и задано ее распределение $\{p_{ij} : i, j = 1,2,...\}$

б) (ξ,η) - непрерывная случайная величина и задана ее плотность $f_{\xi\eta}(x,y)$?

27. Дайте определение корреляционного момента или ковариации случайных величин.
28. Какие случайные величины называются некоррелированными?
29. Как вычислить ковариацию, если: *а*) (ξ,η) - дискретная случайная величина и задано ее распределение $\{p_{ij}: i,j=1,2,...\}$ *б*) (ξ,η) - непрерывная случайная величина и задана ее плотность $f_{\xi\eta}(x,y)$?
30. Перечислите свойства ковариации.
31. Чему равна ковариация для независимых случайных величин?
32. Как вычислить математическое ожидание от произведения случайных величин? Как изменится формула, если случайные величины являются независимыми?
33. Как вычислить дисперсию суммы случайных величин? Как изменится формула, если случайные величины являются независимыми?
34. Если случайные величины независимы, то ковариация равна нулю. Верно ли обратное утверждение?
35. Дайте определение коэффициента корреляции случайных величин.
36. Какие значения может принимать коэффициент корреляции?
37. Как можно определить дисперсию многомерной случайной величины?
38. Какой вид имеет ковариационная матрица? Какими свойствами она обладает?
39. Какой вид имеет корреляционная матрица? Какими свойствами она обладает?
40. В каком случае ковариационная матрица будет иметь диагональный вид?
41. Как вычислить условную интегральную функцию распределения случайной величины ξ относительно события *B*? Рассмотрите случаи, если

а) ξ - дискретная случайная величина; *б*) ξ - непрерывная случайная величина.

42. Как найти условные законы распределения одной случайной величины при известных значениях другой случайной величины, если: *а*) (ξ,η) - дискретная случайная величина и задано ее распределение $\{p_{ij}: i,j=1,2,...\}$ *б*) (ξ,η) - непрерывная случайная величина и задана ее плотность $f_{\xi\eta}(x,y)$?
43. Сформулируйте теорему умножения для плотностей. Рассмотрите в случае зависимости и независимости случайных величин.
44. Приведите формулы полной вероятностей и Байеса для несчетного числа гипотез.
45. Как найти интегральную функцию распределения случайной величины $\varsigma = g(\xi,\eta)$, где $g(x,y): R^2 \to R$ - однозначное отображение, если: *а*) (ξ,η) - дискретная случайная величина и задано ее распределение $\{p_{ij}: i,j=1,2,...\}$ *б*) (ξ,η) - непрерывная случайная величина и задана ее плотность $f_{\xi\eta}(x,y)$?
46. Как найти интегральную функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$, если известна плотность распределения $f_{\xi_1\xi_2}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ_1,ξ_2)?
47. Что такое свертка функций?
48. Что такое композиция распределений и композиционная устойчивость? Приведите примеры композиционно устойчивых законов распределения.
49. Что показывает коэффициент корреляции случайных величин?
50. Если коэффициент корреляции по модулю равен единице, то как связаны между собой случайные величины?

51. Какие числовые характеристики характеризуют линейную статистическую зависимость двух случайных величин?
52. В каком случае мерой статистической зависимости между случайными величинами является их условное математическое ожидание?
53. Как определяют условное математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi \mid B)$ случайной величины ξ относительно события B, $\mathrm{P}(B) > 0$, если: a) ξ - дискретная случайная величина; б) ξ - непрерывная случайная величина?
54. Как найти математическое ожидание случайной величины ξ при условии, что случайная величина η приняла конкретное значение, если a) ξ и η - дискретные случайные величины; б) ξ и η - непрерывные случайные величины?
55. Перечислите свойства условных математических ожиданий.
56. Как определяется условная дисперсия случайной величины ξ относительно значения y другой случайной величины η?

2. Тестовые задания

Раздел содержит тестовые задания по теме «Многомерные случайные величины».

2.1. Двумерные непрерывные случайные величины, их законы распределения

Вопрос 1

Укажите определение интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины $(\xi(\omega),\eta(\omega))$:

Варианты ответов:

1. $F_{\xi\eta}(x,y) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y)$, $(x,y) \in R^2$
2. $F_{\xi\eta}(x,y) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) \geq y\})$, $(x,y) \in R^2$
3. $F_{\xi\eta}(x,y) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) > x, \eta(\omega) > y\})$, $(x,y) \in R^2$
4. $F_{\xi\eta}(x,y) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) \geq x, \eta(\omega) < y\})$, $(x,y) \in R^2$
5. $F_{\xi\eta}(x,y) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) > y\})$, $(x,y) \in R^2$
6. $F_{\xi\eta}(x,y) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) > x, \eta(\omega) < y\})$, $(x,y) \in R^2$

Вопрос 2

Укажите верные утверждения относительно интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η):

Варианты ответов:

1. Функция $F_{\xi\eta}(x,y)$ принимает значение на отрезке $[0,1]$.

2. Функция $F_{\xi\eta}(x,y)$ принимает значение на единичном квадрате.
3. Функция $F_{\xi\eta}(x,y)$ является неубывающей функцией по каждому аргументу.
4. Функция $F_{\xi\eta}(x,y)$ является возрастающей функцией по каждому аргументу.
5. Функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ непрерывна слева по каждому аргументу.
6. Функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ непрерывна справа по каждому аргументу.

Вопрос 3:

Укажите верные утверждения относительно интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η):

Варианты ответов:

1. Если $a_2 > a_1$, то $F_{\xi\eta}(a_2,y) \geq F_{\xi\eta}(a_1,y)$.
2. Если $a_2 > a_1$, то $F_{\xi\eta}(a_2,y) \leq F_{\xi\eta}(a_1,y)$.
3. Если $a_2 \geq a_1$, то $F_{\xi\eta}(a_2,y) > F_{\xi\eta}(a_1,y)$.
4. Если $b_2 > b_1$, то $F_{\xi\eta}(x,b_2) \geq F_{\xi\eta}(x,b_1)$.
5. Если $b_2 \geq b_1$, то $F_{\xi\eta}(x,b_2) > F_{\xi\eta}(x,b_1)$.
6. Если $b_2 > b_1$, то $F_{\xi\eta}(x,b_2) \leq F_{\xi\eta}(x,b_1)$.

Вопрос 4:

Укажите верные утверждения относительно интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η):

Варианты ответов:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(-\infty,-\infty) = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{\xi\eta}(x,y) \neq 0$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(-\infty,-\infty) \neq 0$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\eta}(y) \neq 0$, где $F_{\eta}(y)$ – интегральная функция распределения случайной величины η.
6. $\lim\limits_{y\to-\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi}(x) \neq 0$, где $F_{\xi}(x)$ – интегральная функция распределения случайной величины ξ.

Вопрос 5:

Укажите верные утверждения относительно интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η):

Варианты ответов:

1. $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(x,+\infty) = F_{\xi}(x)$, где $F_{\xi}(x)$ – интегральная функция распределения случайной величины ξ.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_{\eta}(y)$, где $F_{\eta}(y)$ – интегральная функция распределения случайной величины η.

3. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1$.

4. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{\xi\eta}(x, y) \neq F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1$.

5. $\lim\limits_{y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(x, +\infty) = 1$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(+\infty, y) = 1$.

Вопрос 6:

Вероятность попадания в прямоугольник двумерной случайной величины (ξ, η) вычисляется по следующей формуле:

Варианты ответов:

1. $\mathrm{P}(a_1 \le \xi < b_1, a_2 \le \eta < b_2) = F_{\xi\eta}(b_1, b_2) + F_{\xi\eta}(a_1, a_2) - F_{\xi\eta}(a_1, b_2) - F_{\xi\eta}(b_1, a_2)$.

2. $\mathrm{P}(a_1 \le \xi < b_1, a_2 \le \eta < b_2) = F_{\xi\eta}(a_1, a_2) + F_{\xi\eta}(a_1, b_2) - F_{\xi\eta}(b_1, b_2) - F_{\xi\eta}(b_1, a_2)$.

3. $\mathrm{P}(a_1 \le \xi < b_1, a_2 \le \eta < b_2) = F_{\xi\eta}(b_1, b_2) + F_{\xi\eta}(b_1, a_2) - F_{\xi\eta}(a_1, a_2) - F_{\xi\eta}(a_1, b_2)$.

4. $\mathrm{P}(a_1 \le \xi < b_1, a_2 \le \eta < b_2) = F_{\xi\eta}(b_1, b_2) - F_{\xi\eta}(a_1, a_2)$.

5. $\mathrm{P}(a_1 \le \xi < b_1, a_2 \le \eta < b_2) = F_{\xi\eta}(b_1, b_2) + F_{\xi\eta}(a_1, a_2) - 2F_{\xi\eta}(a_1, b_2)$.

Вопрос 7:

Выберите условие статистической независимости случайных величин ξ, η:

Варианты ответов:

1. Имеет место равенство $\mathrm{P}(\xi < y, \eta < y) = \mathrm{P}(\xi < y)\mathrm{P}(\eta < y)$ для $(x, y) \in R^2$.

2. Имеет место равенство $F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi}(x) F_{\eta}(y)$ для $(x, y) \in R^2$, где $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ - интегральные функции одномерных случайных величин ξ и η.

3. Имеет место равенство $\mathrm{P}(\xi < y, \eta < y) = \mathrm{P}(\xi < y) + \mathrm{P}(\eta < y)$ для $(x, y) \in R^2$.

4. Имеет место равенство $F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi}(x) + F_{\eta}(y)$ для $(x, y) \in R^2$, где $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ - интегральные функции одномерных случайных величин ξ и η.

5. Имеет место равенство $F_{\xi\eta}(x, y) = \dfrac{F_{\xi}(x)}{F_{\eta}(y)}$ для $(x, y) \in R^2$, где $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ - интегральные функции одномерных случайных величин ξ и η

6. Имеет место равенство $\mathrm{P}(\xi < y, \eta < y) = \dfrac{\mathrm{P}(\xi < y)}{\mathrm{P}(\eta < y)}$ для $(x, y) \in R^2$.

Вопрос 8:

Укажите верные утверждения относительно интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ непрерывной случайной величины (ξ, η):

Варианты ответов:

1. $F_{\xi\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u, v) du dv$, где $f_{\xi\eta}(x, y)$ - плотность распределения случайной величины (ξ, η).

2. $F_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} (\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u,v)du)dv$, где $f_{\xi\eta}(x,y)$ - плотность распределения случайной величины (ξ,η).

3. $F_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} (\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)dv)du$, где $f_{\xi\eta}(x,y)$ - плотность распределения случайной величины (ξ,η).

4. $F_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,v)du)dv$, где $f_{\xi\eta}(x,y)$ - плотность распределения случайной величины (ξ,η).

5. $F_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,v)dv)du$, где $f_{\xi\eta}(x,y)$ - плотность распределения случайной величины (ξ,η).

6. $F_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,v)dudv$, где $f_{\xi\eta}(x,y)$ - плотность распределения случайной величины (ξ,η).

Вопрос 9:

Двумерная непрерывная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0 < x < 2, 0 < y < 2; \\ 0, & x, y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Найти константу k.

Варианты ответов:

1. 0,5
2. 0,8
3. 0,25
4. 1
5. 4
6. 8

Вопрос 10:

Известна плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η):

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} A(x+y), & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G, \end{cases}$$ где $G=\{(x,y):0\le x\le 2; 0\le y\le 1\}$.

Найти константу A.

Варианты ответов:

1. 1/2
2. 8
3. 1/4
4. 1
5. 4
6. 1/3

Вопрос 11:

Известна плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η):

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{54}(x^2+y^2), & 0\le x\le 3, 0\le y\le 3; \\ 0, & x,y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Вычислить вероятность $\mathrm{P}(0<\xi<1, 0<\eta<1)$.

Варианты ответов:

1. 1/2
2. 81
3. 1/4
4. 2
5. 1/81
6. 4

Вопрос 12:

Известна плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η):

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} A(x^2+y^2), & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G, \end{cases}$$

где $G=\{(x,y): 0\le x\le 3; 0\le y\le 3\}$.

Найти константу A.

Варианты ответов:

1. 1/24
2. 81
3. 1/54
4. 54
5. 1/81
6. 24

2.2. Двумерные дискретные случайные величины, их законы распределения

Вопрос 1:

Укажите определение интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной дискретной случайной величины (ξ,η):

Варианты ответов:

1. $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x} \sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij}$, где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

2. $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x} \sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij}$, где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi < x_i, \eta < y_j)$.

3. $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij}$, где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta < y_j)$.

4. $F_{\xi\eta}(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x} p_{ij}$, где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi < x_i, \eta = y_j)$.

Вопрос 2:

Как интегральные функции $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ одномерных случайных величин ξ и η могут быть получены из совместного распределения $\{p_{ij} : i, j = 1,2,...\}$ двумерной дискретной случайной величины (ξ,η)?

Варианты ответов:

1. Имеет место равенство $F_{\xi}(x) = \sum\limits_{i:x_i<x} \sum\limits_{j} p_{ij}$.

2. Имеет место равенство $F_{\xi}(x)=\sum\limits_{i:x_i>x}\sum\limits_{j}p_{ij}$.

3. Имеет место равенство $F_{\eta}(y)=\sum\limits_{j:y_j<y}\sum\limits_{i}p_{ij}$.

4. Имеет место равенство $F_{\eta}(y)=\sum\limits_{j:y_j>y}\sum\limits_{i}p_{ij}$.

5. Имеет место равенство $F_{\xi}(x)+F_{\eta}(y)=\sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_{j:y_i<y}p_{ij}$.

6. Имеет место равенство $F_{\xi}(x)-F_{\eta}(y)=\sum\limits_{i:x_i<x}\sum\limits_{j}p_{ij}$.

7. Имеет место равенство $F_{\eta}(x)-F_{\xi}(y)=\sum\limits_{i}\sum\limits_{j:y_j>y}p_{ij}$.

Вопрос 3:

Укажите верные утверждения относительно интегральной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η):

Варианты ответов:

1. $F_{\xi\eta}(x,+\infty)=F_{\xi}(x)$.

2. $F_{\xi\eta}(x,+\infty)=1$.

3. $F_{\xi\eta}(+\infty,y)=F_{\eta}(y)$.

4. $F_{\xi\eta}(-\infty,y)=0$.

5. $F_{\xi\eta}(x,+\infty)=F_{\xi\eta}(+\infty,y)$.

6. $F_{\xi\eta}(x,y)=F_{\xi}(x)\cdot F_{\eta}(y)$.

Вопрос 4:

Выберите верные утверждения, касающиеся связи распределения $\{p_{ij} : i, j = 1,2,...\}$ двумерной случайной величины (ξ,η) и частных распределений случайных величин ξ и η:

Варианты ответов:

1. Имеет место равенство $\mathrm{P}(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij}$.
2. Имеет место равенство $\mathrm{P}(\eta = y_j) = \sum_i \sum_j p_{ij}$.
3. Одномерные распределения случайных величин ξ и η не определяют в общем случае двумерное распределение $\{p_{ij} : i, j = 1,2,...\}$ случайной величины (ξ,η).
4. Одномерные распределения случайных величин ξ и η полностью определяют двумерное распределение $\{p_{ij} : i, j = 1,2,...\}$ случайной величины (ξ,η).
5. Всегда выполняется соотношение
   $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathrm{P}(\xi = x_i) \cdot \mathrm{P}(\eta = y_j)$.

Вопрос 5:

Дискретные случайные величины ξ и η с известными совместным и частными распределениями являются статистически независимыми, если

Варианты ответов:

1. Условие $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathrm{P}(\xi = x_i) \cdot \mathrm{P}(\eta = y_j)$ выполняется для всех $i, j = 1,2,...$

2. Условие $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathrm{P}(\xi = x_i) \cdot \mathrm{P}(\eta = y_j)$ выполняется хотя бы для одной пары индексов i, j.

3. Условие $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathrm{P}(\xi = x_i) \cdot \mathrm{P}(\eta = y_j)$ не выполняется хотя бы для одной пары индексов i, j.

4. Условие $\dfrac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathrm{P}(\xi = x_i)} = \dfrac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathrm{P}(\eta = y_j)}$ выполняется для всех $i, j = 1, 2, \ldots$

5. Условие $\dfrac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathrm{P}(\xi = x_i)} = \dfrac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathrm{P}(\eta = y_j)}$ выполняется хотя бы для одной пары индексов i, j.

6. Условие $\dfrac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathrm{P}(\xi = x_i)} = \dfrac{\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}{\mathrm{P}(\eta = y_j)}$ не выполняется хотя бы для одной пары индексов i, j.

Вопрос 6:

Известно, что дискретные случайные величины принимают по два возможных значения $\xi \in \{2; 4\}$ и $\eta \in \{1; 3\}$. Интегральная функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) имеет следующий вид:

$y \backslash x$	$(-\infty; 2]$	$(2; 4]$	$(4; +\infty)$
$(-\infty; 1]$	0	a	0
$(1; 3]$	0	0,2	0,35
$(3; +\infty)$	0	0,45	b

Найти значения неизвестных параметров a и b.

Варианты ответов:

1. $a = 0, b = 0$
2. $a = 0, b = 1$
3. $a = 1, b = 0$
4. $a = 1, b = 1$
5. $a = 0{,}5\ , b = 0{,}5$
6. $a = 0, b = 0{,}5$

Вопрос 7:

Дано распределение двумерной случайной величины (ξ, η):

$\eta \backslash \xi$	1	2
0	0,1	0,2
1	0,3	0,4

Являются ли одномерные случайные величины ξ и η статистически независимыми?

Варианты ответов:

1. Да
2. Нет

Вопрос 8:

Задана матрица распределения двумерной случайной величины (ξ, η).

$\eta \backslash \xi$	1	9
-1	0,16	a
1,5	0,27	0,43

Найти значение неизвестного параметра a.

Варианты ответов:

1. $a = 0{,}16$
2. $a = 1$
3. $a = 0{,}15$
4. $a = 0{,}14$
5. $a = 0{,}17$
6. $a = 0{,}1$

Вопрос 9:

Известно распределение двумерной случайной величины (ξ, η):

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
1	$2/27$	$1/9$	$4/27$
2	$1/27$	a	$2/9$
3	$1/9$	$1/27$	$5/27$

Найти значение неизвестного параметра a.

Варианты ответов:

1. $a = 1/27$
2. $a = 2/27$
3. $a = 0$
4. $a = 1/9$

5. $a = 4/27$
6. $a = 5/27$

Вопрос 10:

Что изображено на следующем рисунке?

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
3	0,15	0,25	0,15

Варианты ответов:

1. Интегральная функция распределения некоторой одномерной случайной величины.
2. Интегральная функция распределения некоторой двумерной дискретной случайной величины
3. Интегральная функция распределения некоторой произвольной двумерной случайной величины
4. Матрица распределения двумерной дискретной случайной величины

Вопрос 11:

Что изображено на следующем рисунке?

$y \backslash x$	$(-\infty;6]$	$(6;12]$	$(12;+\infty)$
$(-\infty;-3]$	0	0	0
$(-3;2,5]$	0	0,2	0,35
$(2,5;+\infty)$	0	0,45	1

Варианты ответов:

1. Интегральная функция распределения некоторой одномерной случайной величины.
2. Интегральная функция распределения некоторой двумерной дискретной случайной величины
3. Интегральная функция распределения некоторой произвольной двумерной случайной величины
4. Матрица распределения двумерной дискретной случайной величины

2.3. Числовые характеристики многомерных случайных величин

Вопрос 1:

Выберите верные утверждения:

Варианты ответов:

1. Математическое ожидание двумерной случайной величины (ξ,η) равно $\mathrm{M}(\xi,\eta)=(\mathrm{M}\xi,\mathrm{M}\eta)$, где величины $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ – это математические ожидания одномерных случайных величин ξ и η соответственно.

2. Математическое ожидание двумерной случайной величины (ξ,η) равно $\mathrm{M}(\xi,\eta)=\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta$, где величины $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ – это математические ожидания одномерных случайных величин ξ и η соответственно.
3. Математическое ожидание двумерной случайной величины (ξ,η) нельзя выразить через математические ожидания одномерных случайных величин ξ и η.
4. Математическое ожидание двумерной случайной величины (ξ,η) равно $\mathrm{M}(\xi,\eta)=\dfrac{\mathrm{M}\xi+\mathrm{M}\eta}{2}$, где величины $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ – это математические ожидания одномерных случайных величин ξ и η соответственно.

Вопрос 2:

Задано распределение $\{p_{ij}: i,j=1,2,...\}$ двумерной дискретной случайной величины (ξ,η), где $p_{ij}=\mathrm{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)$, $\xi\in\{x_1,x_2,...\}$ и $\eta\in\{y_1,y_2,...\}$. Выберите верные утверждения:

Варианты ответов:

1. $\mathrm{M}\xi=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}$
2. $\mathrm{M}\eta=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}y_j p_{ij}$
3. $\mathrm{M}(\xi,\eta)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_i y_j p_{ij}$
4. $\mathrm{M}\xi=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i p_{ij}$

5. $\mathrm{M}\eta = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}$

Вопрос 3:

Пусть задана плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной непрерывной случайной величины (ξ,η). Тогда математические ожидания одномерных случайных величин ξ и η будут вычисляться по формулам:

Варианты ответов:

1. $\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy$

2. $\mathrm{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy$

3. $\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi\eta}(x,y)\,dx$

4. $\mathrm{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi\eta}(x,y)\,dy$

5. $\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,v)\,dudv$

6. $\mathrm{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)\,dudv$

Вопрос 4:

Корреляционным моментом или ковариацией $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, называется:

Варианты ответов:

1. Математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий
2. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{D}[(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta)]$ при $|\mathrm{M}\xi| < \infty$ и $|\mathrm{M}\eta| < \infty$
3. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta)]$ при $|\mathrm{M}\xi| < \infty$ и $|\mathrm{M}\eta| < \infty$
4. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \dfrac{\mathrm{M}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}$, где $\mathrm{M}(\xi,\eta)$ математическое ожидание с. в. (ξ,η), а $\sigma(\xi) > 0$ и $\sigma(\eta) > 0$ - средние квадратические отклонения с. в. ξ и η
5. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \dfrac{\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}$ при $|\mathrm{M}\xi| < \infty$ и $|\mathrm{M}\eta| < \infty$ и $\sigma(\xi) > 0$, $\sigma(\eta) > 0$
6. Дисперсия произведения отклонений этих случайных величин от их математического ожидания

Вопрос 5:

Задано распределение $\{p_{ij} : i, j = 1,2,...\}$ двумерной дискретной случайной величины (ξ,η), где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $\xi \in \{x_1, x_2, ...\}$ и $\eta \in \{y_1, y_2, ...\}$. Тогда дисперсии одномерных дискретных случайных величин ξ и η вычисляется по формулам:

Варианты ответов:

1. $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_i - \mathrm{M}\xi)^2 p_{ij}$

2. $\mathrm{D}\eta = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_j p_{ij}$

3. $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$

4. $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_i - \mathrm{M}\xi) p_{ij}$

5. $\mathrm{D}\eta = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} (y_j - \mathrm{M}\eta) p_{ij}$

6. $\mathrm{D}\eta = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} (y_j - \mathrm{M}\eta)^2 p_{ij}$

Вопрос 6:

Пусть задана плотность распределения $f_{\xi\eta}(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (ξ, η). Тогда дисперсии одномерных случайных величин ξ и η будут вычисляться по формулам:

Варианты ответов:

1. $\mathrm{D}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi\eta}(x, y) dxdy$

2. $\mathrm{D}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi\eta}(x, y) dxdy$

3. $\mathrm{D}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi) f^2{}_{\xi\eta}(x, y) dxdy$

4. $\mathrm{D}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - \mathrm{M}\eta) f^2{}_{\xi\eta}(x, y)dxdy$

5. $\mathrm{D}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^2 f_{\xi\eta}(x, y)dxdy$

6. $\mathrm{D}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - \mathrm{M}\eta)^2 f_{\xi\eta}(x, y)dxdy$

Вопрос 7:

Выберите верные утверждения, касающиеся ковариации $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η:

Варианты ответов:

1. $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{cov}(\eta,\xi)$
2. $\mathrm{cov}(\xi,\eta) \neq \mathrm{cov}(\eta,\xi)$
3. $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = \mathrm{D}\xi$
4. $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = \mathrm{M}\xi$
5. $\mathrm{cov}(\eta,\eta) = \mathrm{D}\eta$
6. $\mathrm{cov}(\eta,\eta) = \mathrm{M}\eta$

Вопрос 8:

Выберите верные утверждения, касающиеся ковариации $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η:

Варианты ответов:

1. если для случайных величин ξ и η существует величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, то $\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)=\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta+\mathrm{cov}(\xi,\eta)$
2. если для случайных величин ξ и η существует величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, то $\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)=\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta-2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$
3. если для случайных величин ξ и η существует величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, то $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)-\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta$
4. если для случайных величин ξ и η существует величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, то $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)+2\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta$
5. если для случайных величин ξ и η существует величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta)\neq-\infty$, то $\mathrm{D}(\xi+\eta)=\mathrm{D}\xi+\mathrm{D}\eta+2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$
6. если для случайных величин ξ и η существует величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta)\neq-\infty$, то $\mathrm{D}(\xi+\eta)=\mathrm{D}\xi+\mathrm{D}\eta-\mathrm{cov}(\xi,\eta)$

Вопрос 9:

Выберите верные утверждения, касающиеся дисперсии многомерной случайной величины $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$:

Варианты ответов:

1. Рассеивание случайной величины $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ нельзя охарактеризовать вектором $(\mathrm{D}\xi_1,\mathrm{D}\xi_2,...,\mathrm{D}\xi_n)$ из дисперсий случайных величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$
2. Дисперсия случайной величины $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ равна вектору $(\mathrm{D}\xi_1,\mathrm{D}\xi_2,...,\mathrm{D}\xi_n)$ из дисперсий случайных величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$

3. Дисперсию многомерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ можно определить в направлении произвольного единичного вектора $\mathrm{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, где $(b_1)^2 + (b_2)^2 + ... + (b_n)^2 = 1$

Вопрос 10:

Может ли матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ являться ковариационной для случайного вектора (ξ, η)?

Варианты ответов:

1. Да
2. Нет

Вопрос 11:

Может ли матрица $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ являться ковариационной для случайного вектора (ξ, η)?

Варианты ответов:

1. Да
2. Нет

Вопрос 12:

Может ли матрица $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ являться ковариационной для случайного вектора (ξ, η)?

Варианты ответов:

1. Да
2. Нет

Вопрос 13:

Укажите, что изображено на следующем рисунке:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \dots & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_2) & \dots & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_2) & \dots & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

1. Ковариационная матрица многомерной случайной величины $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$.
2. Корреляционная матрица n-мерной случайной величины $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$
3. Матрица коэффициентов корреляции многомерной случайной величины $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$.
4. Ковариационная матрица n одномерных случайных величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$
5. Корреляционная матрица n одномерных случайных величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$
6. Матрица коэффициентов корреляции n одномерных случайных величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$

2.4. Условные законы распределения случайных величин

Вопрос 1:

Условная интегральная функция распределения $F_{\xi}(x\,|\,B)$ случайной величины ξ относительно события $B \in \mathfrak{F}$ определяется следующим образом:

Варианты ответов:

1. $F_{\xi}(x\,|\,B) = \mathrm{P}(\{\xi < x\}\,|\,B)$
2. $F_{\xi}(x\,|\,B) = \mathrm{P}(\{\xi > x\}\,|\,B)$
3. $F_{\xi}(x\,|\,B) = \dfrac{\mathrm{P}(\{\xi < x\} \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$
4. $F_{\xi}(x\,|\,B) = \dfrac{\mathrm{P}(\{\xi < x\} \cup B)}{\mathrm{P}(B)}$
5. $F_{\xi}(x\,|\,B) = \dfrac{\mathrm{P}(\{\xi < x, B\})}{\mathrm{P}(B)}$
6. $F_{\xi}(x\,|\,B) = \mathrm{P}(\{\xi < x\}) \cdot \mathrm{P}(B)$

Вопрос 2:

Выберите соотношения, определяющие условные законы распределения дискретной случайной величины $\xi \in \{x_1, x_2, ...\}$ относительно события B.

Варианты ответов:

1. $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\}\,|\,B) = \dfrac{\mathrm{P}(\{\xi = x_i, B\})}{\mathrm{P}(B)}$, $\mathrm{P}(B) > 0$ и $i = 1, 2, ...$

2. $F_\xi(x \mid B) = \dfrac{\sum\limits_{i:x_i<x} \mathrm{P}(\{\xi = x_i, B\})}{\mathrm{P}(B)}$, $\mathrm{P}(B) > 0$ и $i = 1,2,\ldots$

3. $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \cup B)}{\mathrm{P}(B)}$, $\mathrm{P}(B) > 0$ и $i = 1,2,\ldots$

4. $F(\{\xi = x_i\} \mid B) = P(\{\xi = x_i, B\}) \cdot \mathrm{P}(B)$, $i = 1,2,\ldots$

5. $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid B) = \sum\limits_{i:x_i<B} \mathrm{P}(\{\xi = x_i\}) \cdot \mathrm{P}(B)$, $i = 1,2,\ldots$

Вопрос 3:

Выберите верные утверждения относительно условных законов распределения случайной величины.

Варианты ответов:

1. Условными называются законы распределения случайных величин, которые рассматриваются на пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot \mid B))$, где условная вероятность $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.
2. Условными являются законы распределения случайных величин, которые рассматриваются на пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$, где вероятность $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)$.
3. Условные и безусловные законы распределения случайной величины имеют одинаковые свойства.
4. Условные и безусловные законы распределения случайной величины всегда имеют разные свойства.
5. Свойства условных и безусловных законов распределения случайной величины при некоторых условиях могут совпадать.

Вопрос 4:

Каким образом совместная интегральная функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерного случайного вектора (ξ,η) может быть вычислена через условные интегральные функции $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ случайных величин ξ и η?

Варианты ответов:

1. $F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\eta}(y) \cdot F_{\xi}(x \mid B_y)$, где $B_y = \{\omega : \eta(\omega) < y\}$
2. $F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\eta}(y) \cdot F_{\xi}(x \mid B_y)$, где $B_y = \{\omega : \xi(\omega) < y\}$
3. $F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\eta}(y) \cdot F_{\xi}(x)$
4. $F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y \mid B_x)$, где $B_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$
5. $F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y \mid B_x)$, где $B_x = \{\omega : \eta(\omega) < x\}$

Вопрос 5:

Пусть ξ и η - дискретные случайные величины с заданными законами распределения, $\xi \in \{x_1, x_2, ...\}$, $\eta \in \{y_1, y_2, ...\}$ и известна вероятность $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, i, j = 1,2,...$ Выберите соотношения, определяющие условные законы распределения с. в. ξ при условии, что с. в. η приняла конкретное значение y_j.

Варианты ответов:

1. $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid \{\eta = y_j\}) = \dfrac{p_{ij}}{\sum\limits_j p_{ij}}, i = 1,2,...$

2. $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid \{\eta = y_j\}) = \dfrac{p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}, j = 1,2,...$

3. $F_\xi(x \mid \{\eta = y_j\}) = \dfrac{\sum\limits_{i:x_i < x} p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}, j = 1,2,...$

4. $F_\xi(x \mid \{\eta = y_j\}) = \dfrac{\sum\limits_{i:x_i < x} p_{ij}}{\sum\limits_j p_{ij}}$

5. $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \mid \{\eta = y_j\}) = \dfrac{\sum\limits_i p_{ij}}{p_{ij}}, j = 1,2,...$

6. $F_\xi(x \mid \{\eta = y_j\}) = \dfrac{\sum\limits_i p_{ij}}{\sum\limits_{i:x_i < x} p_{ij}}, j = 1,2,...$

Вопрос 6:

Пусть ξ и η - непрерывные случайные величины с известными плотностями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$. Выберите соотношения для условных законов распределения случайной величины ξ относительно значения $y, -\infty < y < +\infty$ случайной величины η.

Варианты ответов:

1. $F_\xi(x \mid \eta = y) = \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u, y)du}{f_\eta(y)}$

2. $f_{\xi}(x \mid \eta = y) = \dfrac{f_{\xi\eta}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dx}$

3. $f_{\xi}(x \mid \eta = y) = \dfrac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_{\eta}(y)}$

4. $F_{\xi}(x \mid \eta = y) = \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(u,y)du}{f_{\eta}(y)}$

5. $F_{\xi}(x \mid \eta = y) = \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u,y)du}{f_{\eta}(y) f_{\xi}(x)}$

6. $f_{\xi}(x \mid \eta = y) = \dfrac{f_{\xi\eta}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u,y)du}$

Вопрос 7:

Укажите ошибочное соотношение, не соответствующее теореме умножения для плотностей.

Варианты ответов:

1. $f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\eta}(y) \cdot f_{\xi|\eta}(x \mid y)$.
2. $f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta|\xi}(y \mid x)$.
3. $f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\xi|\eta}(x \mid y) \cdot f_{\eta|\xi}(y \mid x)$.
4. $f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta|\xi}(y \mid x)$, если случайные величины ξ и η независимые.

5. $f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\eta}(y) \cdot f_{\xi|\eta}(x \mid y)$, если случайные величины ξ и η независимые.

6. $f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\eta}(y) \cdot f_{\xi}(x)$, если случайные величины ξ и η независимые.

Вопрос 8:

Пусть задана непрерывная случайная величина ξ с плотностью распределения $f_{\xi}(x)$, событие A и $\mathrm{P}(A \mid x)$ – условная вероятность события A относительно значения x случайной величины ξ. Выберите формулу полной вероятности для несчетного числа гипотез.

Варианты ответов:

1. $\mathrm{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(A \mid x) f_{\xi}(x) dx$

2. $\mathrm{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{f_{\xi}(x)}{\mathrm{P}(A \mid x)} dx$

3. $\mathrm{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(x \mid A) f_{\xi|A}(x \mid A) dx$

4. $\mathrm{P}(x \mid A) = \dfrac{f_{\xi}(x \mid A)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(A \mid x) f_{\xi}(x) dx}$

5. $\mathrm{P}(A \mid x) = \dfrac{f_{\xi}(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(A \mid x) f_{\xi}(A \mid x) dx}$

Вопрос 9:

Для двумерной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

$\eta \diagdown \xi$	1	3	5	7
0	0	0,13	0,15	0,1
2	0,1	0	0,03	0,06
4	0,07	0,12	0,2	0,04

Сколько условных законов распределения существует для случайных величин ξ и η?

Примечание: имеется в виду сумма количества условных законов распределения случайной величины ξ и количества условных законов распределения случайной величины η.

Варианты ответов:

1. 3
2. 4
3. 12
4. 7
5. 8
6. 6

Вопрос 10:

Для двумерной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

η \ ξ	3	6
0	0,25	0,1
2	0	0,2
4	0,22	0,1
7	0,1	0,03

Сколько условных законов распределения существует для случайных величин ξ и η?

Примечание: имеется в виду сумма количества условных законов распределения случайной величины ξ и количества условных законов распределения случайной величины η.

Варианты ответов:

1. 3
2. 4
3. 12
4. 7
5. 8
6. 6

Вопрос 11:

Для двумерной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

η \ ξ	-1	0	1	2
1	0,1	0,15	0,3	0,15
2	0,1	0,05	0,1	0,05

где $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, i = \overline{1,4}, j = 1,2$.

Вычислить вероятность $\mathrm{P}(\eta = 1 \mid \xi = 0)$.

Варианты ответов:

1. 1
2. 0,75
3. 0,5
4. 0,25
5. 0,85
6. 0,4

Вопрос 12:

Для двумерной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	2
1	0,1	0,05	0,3	0,05
2	0,1	0,15	0,1	0,15

где $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, i = \overline{1,4}, j = 1,2$.

Вычислить вероятность $\mathrm{P}(\xi = 2 \mid \eta = 2)$.

Варианты ответов:

1. 0
2. 0,75
3. 0,5
4. 0,3
5. 0,85

6. 0,4

Вопрос 13:

Для двумерной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	2
1	0,1	0,05	0,3	0,05
2	0,1	0,15	0,1	0,15

где $\mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, i = \overline{1,4}, j = 1,2$.

Вычислить вероятность $\mathrm{P}(\xi = 0 \mid \eta = 1)$.

Варианты ответов:

1. 0,2
2. 0,7
3. 0,5
4. 0,3
5. 0,1
6. 0,4

2.5. Функциональные зависимости многомерных случайных величин

Вопрос 1:

Пусть на $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$определены двумерная дискретная случайная величина (ξ_1,ξ_2) и одномерная случайная величина $\eta = g(\xi_1,\xi_2)$, где $g(x,y): R^2 \to R$ - измеримое отображение. Известно распределение двумерной с. в. (ξ_1,ξ_2)

$\mathrm{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = p_{ij}, i, j = 1,2,\ldots$, с. в. $\xi_1 \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, с. в. $\xi_2 \in \{y_1, y_2, \ldots\}$. Выберите верное соотношение для вычисления интегральной функции распределения $F_\eta(z), -\infty < z < +\infty$ случайной величины $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$.

Варианты ответов:

1. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \sum\limits_{i,j:(x_i, y_j) \in \mathrm{B}^2} p_{ij}$, где

   $\mathrm{B}^2 = \{(x_i, y_j) : g(x_i, y_j) < z\}, -\infty < z < +\infty$

2. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \sum\limits_{i:z_i \in \mathrm{B}} p_{ij}$, где $\mathrm{B} = \{z_i : \eta(z_i) < z\}, -\infty < z < +\infty$

3. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \mathrm{P}(g(x_i, y_j) < z) = \sum\limits_{i,j:(x_i, y_j) < z} p_{ij}$

4. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2} f_{\xi_1\xi_2}(x, y)dxdy$, где

   $\mathrm{B}^2 = \{(x, y) : g(x, y) < z\}, -\infty < z < +\infty$

5. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}} f_{\xi_1\xi_2}(x, y)dxdy$, где $\mathrm{B} = \{z_i : \eta(z_i) < z\}, -\infty < z < +\infty$

6. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2} x \cdot y \cdot f_{\xi_1\xi_2}(x, y)dxdy$, где

   $\mathrm{B}^2 = \{(x, y) : g(x, y) < z\}, -\infty < z < +\infty$

Вопрос 2:

Пусть на $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$ определены двумерная непрерывная случайная величина (ξ_1, ξ_2) с плотностью распределения $f_{\xi_1\xi_2}(x, y), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ и одномерная случайная величина $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$, где $g(x, y) : R^2 \to R$ - измеримое отображение. Выберите верное соотношение для вычисления интегральной функции распределения $F_\eta(z), -\infty < z < +\infty$ случайной величины $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$

.

Варианты ответов:

1. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \sum\limits_{i,j:(x_i, y_j) \in \mathrm{B}^2} p_{ij}$, где

   $\mathrm{B}^2 = \{(x_i, y_j) : g(x_i, y_j) < z\}, -\infty < z < +\infty$

2. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \sum\limits_{i:z_i \in \mathrm{B}} p_{ij}$, где $\mathrm{B} = \{z_i : \eta(z_i) < z\}, -\infty < z < +\infty$

3. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \mathrm{P}(g(x_i, y_j) < z) = \sum\limits_{i,j:(x_i, y_j) < z} p_{ij}$

4. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2} f_{\xi_1 \xi_2}(x, y) dxdy$, где

   $\mathrm{B}^2 = \{(x, y) : g(x, y) < z\}, -\infty < z < +\infty$

5. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}} f_{\xi_1 \xi_2}(x, y) dxdy$, где $\mathrm{B} = \{z_i : \eta(z_i) < z\}, -\infty < z < +\infty$

6. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\eta < z) = \mathrm{P}(g(\xi_1, \xi_2) < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2} x \cdot y \cdot f_{\xi_1 \xi_2}(x, y) dxdy$, где

   $\mathrm{B}^2 = \{(x, y) : g(x, y) < z\}, -\infty < z < +\infty$

Вопрос 3:

Пусть случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ и известна плотность распределения $f_{\xi_1 \xi_2}(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2). Укажите верные соотношения для интегральной функции распределения $F_\eta(z)$ случайной величины η.

Варианты ответов:

1. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2(z)=\{(x,y):x+y<z\}} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)dxdy$

2. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 < z) = \iint\limits_{\mathrm{B}^2(z)=\{(x,y):x+y<z\}} x \cdot y \cdot f_{\xi_1\xi_2}(x,y)dxdy$

3. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 < z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dy \Big) dx$

4. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 < z) = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\int\limits_{0}^{x-z} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dy \Big) dx$

5. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 < z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{z-y} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dx \Big) dy$

6. $F_\eta(z) = \mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 < z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{0}^{y-z} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dx \Big) dy$

Вопрос 4:

Пусть случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ и известна плотность распределения $f_{\xi_1\xi_2}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2). Укажите верные соотношения для плотности распределения $f_\eta(z)$ с. в. η.

Варианты ответов:

1. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(x, z-x)dx$

2. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(x, z-y)dx$

3. $f_\eta(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(z-x,z)dx$

4. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(z-y,y)dy$

5. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(z-x,y)dy$

6. $f_\eta(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(z,z-y)dy$

Вопрос 5:

Пусть задана случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$, где одномерные случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и известны их плотности распределения $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(y)$. Укажите верные соотношения для плотности распределения $f_\eta(z)$ случайной величины η.

Варианты ответов:

1. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x)dx$

2. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x-z) f_{\xi_2}(z)dx$

3. $f_\eta(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} f_{\xi_1}(x-z) f_{\xi_2}(y)dx$

4. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(z-y) f_{\xi_2}(y)dy$

5. $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(z) f_{\xi_2}(y-z)dy$

6. $f_\eta(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} f_{\xi_1}(z-x) f_{\xi_2}(y)dy$

Вопрос 6:

Пусть ξ_1 и ξ_2 - независимые дискретные случайные величины с известными законами распределения $\mathrm{P}(\xi_1 = x_i), \xi_1 \in \{x_1, x_2, ...\}$ и $\mathrm{P}(\xi_2 = y_j), \xi_2 \in \{y_1, y_2, ...\}$. Укажите соотношения для распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Варианты ответов:

1. $\mathrm{P}(\eta = z_k) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = z_k)\mathrm{P}(\xi_2 = y_j - z_k)$, $\eta \in \{z_1, z_2, ...\}$

2. $\mathrm{P}(\eta = z_k) = \sum\limits_{j=0}^{k} \mathrm{P}(\xi_1 = z_j - y_j)\mathrm{P}(\xi_2 = y_j)$, $\eta \in \{z_1, z_2, ...\}$

3. $\mathrm{P}(\eta = z_k) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = z_k - y_j)\mathrm{P}(\xi_2 = y_j)$, $\eta \in \{z_1, z_2, ...\}$

4. $\mathrm{P}(\eta = z_k) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = x_i)\mathrm{P}(\xi_2 = z_k - x_i)$, $\eta \in \{z_1, z_2, ...\}$

5. $\mathrm{P}(\eta = z_k) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = x_i - z_k)\mathrm{P}(\xi_2 = z_k)$, $\eta \in \{z_1, z_2, ...\}$

6. $\mathrm{P}(\eta = z_k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{P}(\xi_1 = x_i)\mathrm{P}(\xi_2 = z_i - x_i)$, $\eta \in \{z_1, z_2, ...\}$

Вопрос 7:

Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta = y_j$ \ $\xi = x_i$	-1	0	1	3
1	0,2	0,17	0,1	0,05
2	0,15	0,05	0,03	0,25

где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

Указать, сколько различных значений принимает случайная величина $\gamma = |\xi - \eta|$.

Варианты ответов:

1. 2
2. 7
3. 5
4. 3
5. 1
6. 4

Вопрос 8:

Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta = y_j$ \ $\xi = x_i$	-1	0	1
1	0,2	0,27	0,1
0	0,15	0,15	0,13

где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

Указать, сколько различных значений принимает случайная величина $\gamma = \xi^2 - \eta$.

Варианты ответов:

1. 2
2. 7
3. 5
4. 3
5. 1
6. 4

Вопрос 9:

Для двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

$\eta = y_j$ \ $\xi = x_i$	-1	0	1
-1	0,1	0,1	0,03
0	0,15	0,15	0,1
1	0,1	0,17	0,1

где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

Указать, сколько различных значений принимает случайная величина $\gamma = \xi^3 + \eta^2$.

Варианты ответов:

1. 2

2. 7
3. 4
4. 3
5. 1
6. 5

Вопрос 10:

Для двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

$\eta = y_j$ \ $\xi = x_i$	-1	0
-1	0,1	0,1
0	0,15	0,15
1	0,1	0,17

где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

Указать, сколько различных значений принимает случайная величина $\gamma = \left|\eta^3 + \xi\right|$.

Варианты ответов:

1. 2
2. 7
3. 4
4. 3
5. 1
6. 5

Вопрос 11:

Отметьте, у каких законов распределения наблюдается композиционная устойчивость.

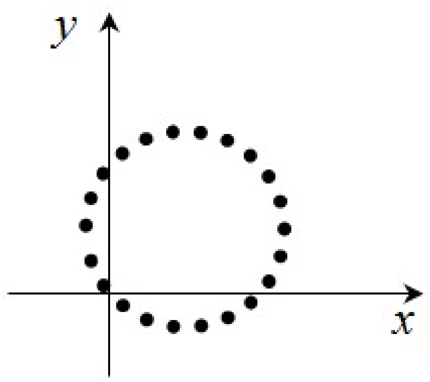
Варианты ответов:

1. закон Пуассона
2. закон Гаусса
3. биномиальное распределение
4. геометрическое распределение
5. равномерный закон распределения

2.6. Статистическая зависимость случайных величин и элементы теории корреляции

Вопрос 1:

Выберите верное утверждение, касающееся коэффициента корреляции $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, если множество возможных значений двумерной случайной величины (ξ,η) изображено на представленном ниже рисунке.

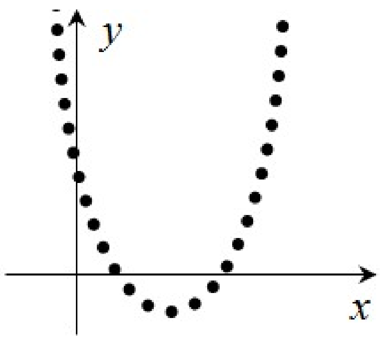


Варианты ответов:

1. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=0$
2. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=1$
3. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=-1$
4. $0<\mathrm{corr}(\xi,\eta)<1$
5. $-1<\mathrm{corr}(\xi,\eta)<0$
6. $|\mathrm{corr}(\xi,\eta)|=1$

Вопрос 2:

Выберите верное утверждение, касающееся коэффициента корреляции $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, если множество возможных значений двумерной случайной величины (ξ,η) изображено на представленном ниже рисунке.



Варианты ответов:

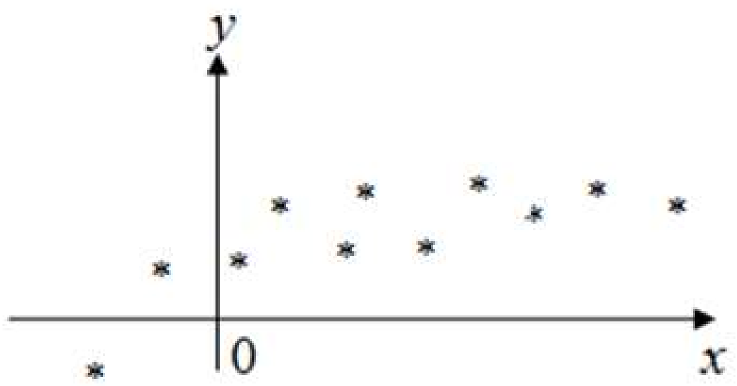
1. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=0$
2. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=1$
3. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=-1$
4. $0<\mathrm{corr}(\xi,\eta)<1$

5. $-1 < \mathrm{corr}(\xi,\eta) < 0$

6. $|\mathrm{corr}(\xi,\eta)| = 1$

Вопрос 3:

Выберите верное утверждение, касающееся коэффициента корреляции $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, если множество возможных значений двумерной случайной величины (ξ,η) изображено на представленном ниже рисунке.

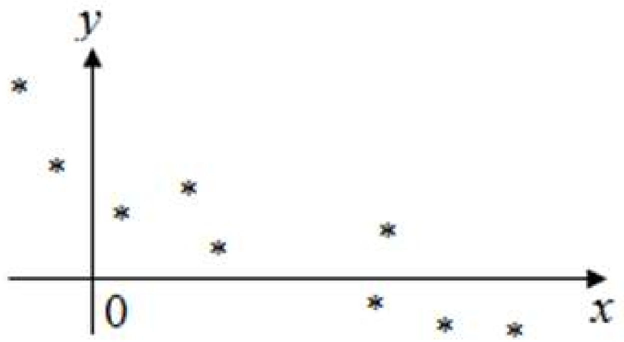


Варианты ответов:

1. $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0$
2. $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 1$
3. $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = -1$
4. $0 < \mathrm{corr}(\xi,\eta) < 1$
5. $-1 < \mathrm{corr}(\xi,\eta) < 0$
6. $|\mathrm{corr}(\xi,\eta)| = 1$

Вопрос 4:

Выберите верное утверждение, касающееся коэффициента корреляции $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, если множество возможных значений двумерной случайной величины (ξ,η) изображено на представленном ниже рисунке.

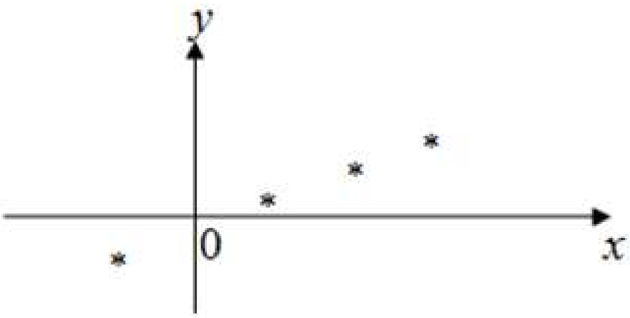


Варианты ответов:

1. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=0$
2. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=1$
3. $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=-1$
4. $0<\mathrm{corr}(\xi,\eta)<1$
5. $-1<\mathrm{corr}(\xi,\eta)<0$
6. $|\mathrm{corr}(\xi,\eta)|=1$

Вопрос 5:

Выберите верное утверждение, касающееся коэффициента корреляции $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, если множество возможных значений двумерной случайной величины (ξ,η) изображено на представленном ниже рисунке.



Варианты ответов:

1. $\text{corr}(\xi,\eta)=0$

2. $\text{corr}(\xi,\eta)=1$

3. $\text{corr}(\xi,\eta)=-1$

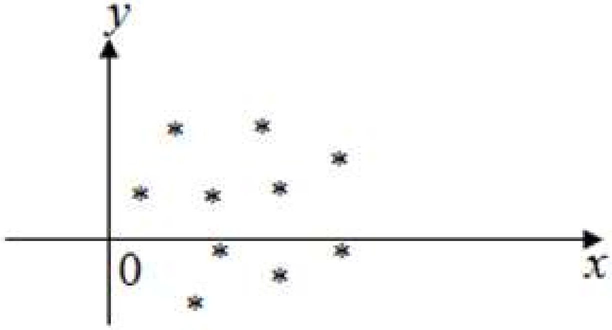
4. $0<\text{corr}(\xi,\eta)<1$

5. $-1<\text{corr}(\xi,\eta)<0$

6. $|\text{corr}(\xi,\eta)|=1$

Вопрос 6:

Выберите верное утверждение, касающееся коэффициента корреляции $\text{corr}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, если множество возможных значений двумерной случайной величины (ξ,η) изображено на представленном ниже рисунке.



Варианты ответов:

1. $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=0$

2. $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=1$

3. $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=-1$

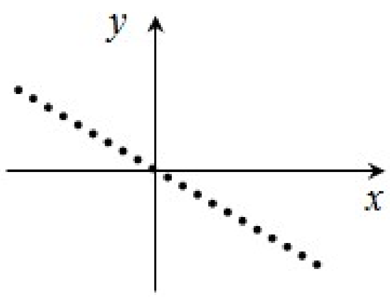
4. $0<\operatorname{corr}(\xi,\eta)<1$

5. $-1<\operatorname{corr}(\xi,\eta)<0$

6. $|\operatorname{corr}(\xi,\eta)|=1$

Вопрос 7:

Выберите верное утверждение, касающееся коэффициента корреляции $\operatorname{corr}(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η, если множество возможных значений двумерной случайной величины (ξ,η) изображено на представленном ниже рисунке.



Варианты ответов:

1. $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=0$

2. $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=1$

3. $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=-1$

4. $0<\operatorname{corr}(\xi,\eta)<1$

5. $-1 < \operatorname{corr}(\xi, \eta) < 0$

6. $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$

Вопрос 8:

Выберите верные определения условного математического ожидания $\mathrm{M}(\xi \mid B)$ случайной величины ξ относительно события B, где $\mathrm{P}(B) > 0$.

Варианты ответов:

1. $\mathrm{M}(\xi \mid B) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(\xi = x_i \mid B)$, если с. в. ξ является дискретной и $\xi \in \{x_1, x_2, ...\}$

2. $\mathrm{M}(\xi \mid B) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x \mid B) dx$, если с. в. ξ является непрерывной с плотностью распределения $f_{\xi}(x)$

3. $\mathrm{M}(\xi \mid B) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(\{\xi = x_i\} \cap B)$, если с. в. ξ является дискретной и $\xi \in \{x_1, x_2, ...\}$

4. $\mathrm{M}(\xi \mid B) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) \mathrm{P}(\xi = x \mid B) dx$, если с. в. ξ является непрерывной с плотностью распределения $f_{\xi}(x)$

Вопрос 9:

Пусть ξ и η являются независимыми случайными величинами, для которых существуют конечные математические ожидания $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$.

Выберите верные утверждения.

Варианты ответов:

1. Имеет место равенство $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=1$
2. Имеет место равенство $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=0$
3. Имеет место равенство $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$
4. Имеет место равенство $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=1$
5. Имеет место равенство $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=-1$
6. Имеет место равенство $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=-1$

Вопрос 10:

Пусть ξ и η являются случайными величинами, для которых существуют конечные математические ожидания $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$.

Укажите верное утверждение.

1. Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$, то случайные величины ξ и η будут независимыми.
2. Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta)\neq 0$, то случайные величины ξ и η будут зависимыми.
3. Если $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=0$, то случайные величины ξ и η будут зависимыми.
4. Если $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=0$, то случайные величины ξ и η будут независимыми.

Вопрос 11:

Пусть ξ и η являются случайными величинами, для которых существуют конечные математические ожидания $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$.

Укажите верные соотношения.

1. $1+\mathrm{corr}(\xi,\eta)\geq 0$

2. $1+\operatorname{corr}(\xi,\eta)\le 0$
3. $1-\operatorname{corr}(\xi,\eta)\ge 0$
4. $1-\operatorname{corr}(\xi,\eta)\le 0$
5. $1-2\operatorname{corr}(\xi,\eta)\ge 0$
6. $1+2\operatorname{corr}(\xi,\eta)\ge 0$

Вопрос 12:

Пусть ξ и η являются случайными величинами, для которых числовые характеристики $\mathrm{M}|\xi|<+\infty$ и $\mathrm{M}|\eta|<+\infty$.

Укажите верное утверждение.

1. $|\operatorname{corr}(\xi,\eta)|\le 1$
2. $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)|<3$
3. $|\operatorname{corr}(\xi,\eta)|\le \frac{1}{3}$
4. $|\operatorname{corr}(\xi,\eta)|>1$
5. $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)|>1$
6. $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)|\le \frac{1}{3}$

3. Ответы к тестам

Двумерные непрерывные случайные величины, их законы распределения

Номер вопроса	Ответ
1	1
2	1, 3, 5
3	1, 4
4	1, 4
5	1, 2, 3
6	1
7	1, 2
8	1, 2, 3
9	3
10	6
11	5
12	3

Двумерные дискретные случайные величины, их законы распределения

Номер вопроса	Ответ
1	1
2	1, 3
3	1, 3
4	1, 3
5	1
6	2
7	2
8	4
9	2
10	4
11	2

Числовые характеристики многомерных случайных величин

Номер вопроса	Ответ
1	1
2	1, 2
3	1, 2
4	1, 3
5	1, 6
6	5, 6
7	1, 3, 5
8	1, 3, 5
9	1, 3
10	2
11	1
12	2
13	1

Условные законы распределения случайных величин

Номер вопроса	Ответ
1	1, 3, 5
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 4
5	2, 3
6	1, 2, 3
7	3
8	1
9	4
10	6
11	2
12	4
13	5

Функциональные зависимости многомерных случайных величин

Номер вопроса	Ответ
1	1
2	4
3	1, 3, 5
4	1, 4
5	1, 4
6	3, 4
7	6
8	4
9	3
10	1
11	4
12	1, 2, 3

Статистическая зависимость случайных величин и элементы теории корреляции

Номер вопроса	Ответ
1	1
2	1
3	4
4	5
5	2
6	1
7	3
8	1, 2
9	2, 3
10	2
11	1, 3
12	1

4. Практические задания

Раздел содержит типовые практические задания по теме «Многомерные случайные величины» для проведения контрольных работ в аудитории.

4.1. Двумерные непрерывные случайные величины, их законы распределения

Задача 1. Случайный вектор (ξ,η) имеет равномерное распределение в квадрате R. Найти плотность вероятностей $f_{\xi\eta}(x,y)$ и интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ с. в. (ξ,η), частные плотности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Задача 2. Задана $f_{\xi\eta}(x,y)$ плотность распределения двумерной с. в. (ξ,η). Выразить через $f_{\xi\eta}(x,y)$ вероятности следующих событий: 1) $\{\xi>\eta\}$; 2) $\{\xi>|\eta|\}$; 3) $\{|\xi|>\eta\}$; 4) $\{\eta-\xi>1\}$.

Задача 3. Определить вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ,η): а) в область $G_1=\{(x,y):2\le x\le 4;1\le y\le 2\}$, б) в область $G_2=\{(x,y):x\le 4;y\le 4\}$, если совместная функция распределения имеет вид:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}1-a^{-x^2}-a^{-2y^2}+a^{-x^2-2y^2}, & x,y>0;\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

здесь $a>1$.

Задача 4. Плотность распределения случайной величины (ξ,η) равна:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le R^2;\\ 0, & x^2+y^2>R^2.\end{cases}$$

Найти постоянную c, вычислить вероятность попадания с. в. (ξ,η) в круг радиуса $a<R$ с центром в начале координат.

Задача 5. Случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} a\sin(x+y),\ 0<x,y\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \qquad x,y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Найти константу a, интегральную функцию $F_{\xi\eta}(x,y)$ с. в. (ξ,η) и частную плотность распределения $f_{\xi}(x)$ случайной величины ξ.

Задача 6. Случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)},\ x,y>0, \\ 0, \qquad x,y \text{ - другие,} \end{cases}$$

где $\lambda>0$. Найти частные плотности распределения $f_{\xi}(x)$ и $f_{\eta}(y)$ случайных величин ξ и η, определить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

Задача 7. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{5}{16}xy^2,\ 0<x<y<2, \\ 0, \qquad x,y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Требуется а) найти интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ с. в. (ξ,η); б) определить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

Задача 8. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} kxy^2,\ 0<x<y<1, \\ 0, \qquad x,y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Найти: а) постоянную k; б) частные плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ случайных величин ξ и η.

Задача 9. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} kxy^2, & 0<x<y<1, \\ 0, & x,y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Найти: а) постоянную k; б) частные плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ случайных величин ξ и η.

Задача 10. Случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{A}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty.$$

Найти: а) постоянную A; б) совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$; в) вероятность $\mathrm{P}(0\le\xi\le1, 0\le\eta\le1)$.

Задача 11. Найти вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ,η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1, x=2, y=3, y=5$, если ее интегральная функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x,y>0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Задача 12. Плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{A}{(x^2+y^2+1)^3}, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty.$$

Найти постоянную A.

Задача 13. Совместное распределение случайных величин ξ и η является равномерным в круге $x^2 + y^2 \le 1$. Вычислить вероятность $\mathrm{P}\left(|\xi| \le \frac{3}{4}, |\eta| \le \frac{3}{4} \right)$.

Задача 14. Известна плотность распределения $f_{\xi\eta}(x, y)$ случайной величины (ξ, η):

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} A(x + y), & (x, y) \in G; \\ 0, & (x, y) \notin G, \end{cases}$$

где $G = \{(x, y) : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$.

Найти : а) постоянную A; б) совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$; в) частные плотности распределения $f_{\xi}(x)$ и $f_{\eta}(y)$ случайных величин ξ и η.

4.2. Двумерные дискретные случайные величины, их законы распределения

Задача 1. Задана матрица распределения двумерной случайной величины (ξ, η).

$\eta \backslash \xi$	2	9
-1	a	0,06
1,5	0,24	0,5

Найти неизвестный параметр a, построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ и частные интегральные функции распределения $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$.

Задача 2. Матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид:

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-1	0,2	0,17	0,1
2	0,25	a	0,03

Найти неизвестный параметр a, построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ и частные интегральные функции распределения $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$.

Задача 3. В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Производится две последовательных выборки без возвращения каждый раз по два шара. Определены две случайные величины ξ - число белых шаров в первой выборке и η - число белых шаров во второй выборке. Построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$.

Задача 4. В ящике 6 шаров, на двух из них написана цифра «1» и на четырех написана цифра «2». Один за другим без возвращения наудачу вынимают два шара. Найти совместное распределение двумерной случайной величины (ξ,η), где с. в. ξ - цифра на первом извлеченном шаре, а с. в. η - цифра на втором извлеченном шаре.

Задача 5. В кошельке лежат 8 пятирублевых монет и 6 двухрублевых. Наудачу без возвращения одну за другой вынимают две монеты. Найти совместное распределение двумерной случайной величины (ξ,η), где с. в. ξ - достоинство первой монеты, а с. в. η - достоинство второй монеты.

Задача 6. Из 12 лотерейных билетов 4 выигрышных. Двое вытягивают по билету, сначала тянет первый игрок, затем второй. Определены две случайные величины ξ - число выигрышных билетов у первого игрока и η - число выигрышных билетов у второго игрока. Построить совместную интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$.

Задача 7. Двое стрелков производят по два выстрела. Стреляют они независимо друг от друга, причем каждый выстрел не зависит от предыдущего. Вероятность попадания первого стрелка при одном выстреле равна p_1, второго – p_2. Определены две случайные величины ξ - число попаданий первого стрелка, η - число попаданий второго стрелка. Найти совместное распределение двумерной случайной величины (ξ,η).

Задача 8. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано:

$\eta \backslash \xi$	-1	1
-1	$1/8$	$5/24$
0	$1/12$	$1/6$
1	$7/24$	$1/8$

Найти одномерные распределения с. в. ξ и η.

Задача 9. Матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
3	0,15	0,25	0,15

Найти интегральную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ двумерной случайной величины (ξ,η) и частные ряды распределения с. в. ξ и η.

Задача 10. Задана матрица распределения двумерной случайной величины (ξ,η).

η \ ξ	-1	2	5
0	0,1	0,2	0,1
11	0,3	0,25	0,05

Найти все частные законы распределения с. в ξ и η и проверить эти случайные величины на статистическую независимость.

Задача 11. Матрица распределения двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид:

η \ ξ	6	12
-3	0,07	a
2,5	0,43	0,13

Найти неизвестный параметр a и выяснить, являются ли случайные величины ξ и η статистически независимыми.

Задача 12. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей:

η \ ξ	0	5	7
-1	0,12	0,08	0,1
2	0,05	0,25	0,03
3	0,15	0,17	0,05

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η статистически независимыми.

4.3. Числовые характеристики многомерных случайных величин

Задача 1. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$1)\ \mathrm{K}_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ 2)\ \mathrm{K}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Задача 2. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$1)\ \mathrm{K}_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ 2)\ \mathrm{K}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Задача 3. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$1)\ \mathrm{K}_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ 2)\ \mathrm{K}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}?$$

Задача 4. При каких значениях x существует случайный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 5. При каких значениях x существует случайный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & x & -x \\ x & 1 & x \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 6. Случайный вектор (ξ,η) имеет следующее распределение:

$\eta \backslash \xi$	1	2
-1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

Найти $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$, $\mathrm{M}(\xi,\eta)$ и построить ковариационную матрицу.

Задача 7. Дискретная случайная величина (ξ,η) задана таблицей распределения:

$\eta \backslash \xi$	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{M}(\xi,\eta)$, $\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)$ и построить ковариационную матрицу.

Задача 8. Распределение случайного вектора (ξ,η) задано таблицей:

$\eta \backslash \xi$	3	6
10	0,25	0,1
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{M}(\xi,\eta)$ и $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$.

Задача 9. Плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{(x^2+2xy+3y^2)}{2}\right\},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\,.$$

Вычислить $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$, $\mathrm{M}(\xi,\eta)$ и построить ковариационную матрицу.

Задача 10. Известно, что двумерная случайной величины (ξ,η) является нормальной, причем $\mathrm{M}\xi=-2$, $\mathrm{M}\eta=3$ и матрица ковариации имеет вид $\mathrm{K}(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 25\end{pmatrix}$. Привести выражение для плотности распределения с. в. (ξ,η).

Задача 11. Двумерная случайная величина подчинена закону распределения с плотностью $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}Axy, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$, где $D=\{(x,y): x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

Найти A, $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$, $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$.

Задача 12. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Найти $\mathrm{M}(\xi,\eta)$, $\mathrm{M}(\xi-\eta)^2$ и построить ковариационную матрицу $\mathrm{K}(\xi,\eta)$.

Задача 13. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение, причем $\mathrm{M}\xi=\mathrm{M}\eta=0$, $\mathrm{D}\xi=4$, $\mathrm{D}\eta=9$. Вычислить $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$, $\mathrm{M}(\xi-\eta)$, $\mathrm{D}(\xi-\eta)$.

Задача 14. Случайная величина (ξ,η) распределена равномерно внутри единичного квадрата. Найти $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{M}(\xi\cdot\eta)$, $\mathrm{D}(\xi\cdot\eta)$.

4.4. Условные законы распределения случайных величин

Задача 1. Случайный вектор (ξ,η) задан таблицей распределения:

$\eta \backslash \xi$	1	2
-1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

Найти все условные законы распределения случайной величины η и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{\xi=1\}\,|\,\{\eta\le 0\})$.

Задача 2. Для двумерной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти вероятности $\mathrm{P}(\{\xi=x_i\}\,|\,\{\eta=0{,}8\}), x_i\in\{2,\ 5,\ 8\}$ и
$\mathrm{P}(\{\eta=y_j\}\,|\,\{\xi=5\}), y_j\in\{0{,}4,\ 0{,}8\}$.

Задача 3. Случайный вектор (ξ,η) задан матрицей распределения:

$\eta \backslash \xi$	3	6
0	0,25	0,1
2	0,15	0,05
4	0,32	0,13

Найти вероятности $\mathrm{P}(\{\eta=y_j\}\,|\,\{\xi=6\}), y_j\in\{0,\ 2,\ 4\}$ и $\mathrm{P}(\{\xi=3\}\,|\,\{\eta\le 2\})$.

Задача 4. Для случайной величины (ξ,η) задана таблица распределения:

$\eta \backslash \xi$	1	2
-2	1/6	1/8
1	1/4	1/6
3	1/6	1/8

Найти вероятности $\mathrm{P}(\{\eta=1\}\,|\,\{\xi=1\})$ и $\mathrm{P}(\{\xi=1\}\,|\,\{\eta\le 1\})$.

Задача 5. Случайный вектор (ξ,η) задан матрицей распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	2
1	0,1	0,15	0,3	0,15
2	0,1	0,05	0,1	0,05

Найти все условные законы распределения с. в. ξ.

Задача 6. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 1-\dfrac{x}{2};\\ 0,\ \ x,y \text{ - другие.}\end{cases}$$

Найти условную плотность $f_{\eta|\xi}(y\,|\,x)$.

Задача 7. Известно, что двумерная случайная величина (ξ,η) распределена равномерно в области $R=\{(x,y):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\}$. Найти условные плотности распределения $f_{\xi}(x\,|\,\eta=y)$, $f_{\eta}(y\,|\,\xi=x)$.

Задача 8. Положение случайной точки (ξ,η) равновозможно внутри круга $x^2 + y^2 = R^2$. Определить условную плотность $f_\xi(x \mid \eta = y)$, вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{\frac{R}{4} \le \xi < \frac{R}{2}\} \mid \{\eta = 0\})$.

Задача 9. Двумерная случайная величина (ξ,η) подчинена равномерному закону внутри квадрата со стороной a, диагонали которого совпадают с осями координат. Найти условные плотности распределения $f_\xi(x \mid \eta = y)$, $f_\eta(y \mid \xi = x)$.

Задача 10. Случайный вектор (ξ,η) равномерно распределен внутри треугольника с вершинами (0,0), (0,8) (8,0). Найти совместную плотность $f_{\xi\eta}(x,y)$ условную плотность $f_\xi(x \mid \eta = y)$ и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{0 < \xi < 2\} \mid \{\eta = 2\})$.

Задача 11. Совместная плотность распределения с. в. ξ и η имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} A(yx + y^2),\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2; \\ 0,\ \ x, y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Определить константу A, найти условную плотность $f_\eta(y \mid \xi = x)$ и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\{\eta < 2\} \mid \{2\xi = 1\})$.

Задача 12. Плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y) = Ae^{-4x^2 - 4xy - 4y^2}$. Найти константу A и условные плотности распределения $f_\xi(x \mid \eta = y)$, $f_\eta(y \mid \xi = x)$.

Задача 13. Определить вероятность попадания в объект, если расстояние до него, измеряемое в метрах, есть равномерная случайная величина, принимающая значения в интервале (350, 400). При этом известно, что если расстояние до объекта равно x, то вероятность попадания $50/x$.

4.5. Функциональные зависимости многомерных случайных величин

Задача 1. Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-1	0,2	0,17	0,1
0	0,15	0,05	0,03
1	0,1	0,01	0,19

Найти закон распределения случайной величины $\gamma = \xi - \eta^2$, вычислить математическое ожидание $\mathrm{M}\gamma$ и вероятность $\mathrm{P}(\gamma < 1)$.

Задача 2. Для двумерной дискретной случайной величины (ξ,η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	3
1	0,2	0,17	0,1	0,05
2	0,15	0,05	0,03	0,25

Найти законы распределения случайных величин $\gamma = |\xi - \eta|$ и $\nu = 2\xi - \eta$.

Задача 3. Независимые случайные величины ξ и η имеют следующие ряды распределения:

$\xi = x_i$	-1	0	1
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,1	0,7	0,2

$\eta = y_j$	1	2	3
$P(\eta = y_j)$	0,3	0,2	0,5

Построить ряд распределения случайной величины $\gamma = 3\xi + \eta$ и вычислить $M\gamma$

Задача 4. Независимые случайные величины ξ и η имеют следующие ряды распределения:

$\xi = x_i$	-1	1
$P(\xi = x_i)$	0,3	0,7

$\eta = y_j$	-1	0	1	2
$P(\eta = y_j)$	0,1	0,2	0,4	0,3

Построить ряд распределения случайной величины $\gamma = |\xi + \eta|$.

Задача 5. Пусть ξ_1 и ξ_2 - дискретные случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти закон распределения для случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Задача 6. Смешаны две группы деталей, содержащих n_1 и n_2 деталей каждая. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 соответствуют числу бракованных деталей в каждой группе и имеют биномиальное распределение с параметрами (n_1, p) и (n_2, p) соответственно. Найти закон распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Задача 7. Проверить композиционную устойчивость для закона распределения Гаусса.

Задача 8. Пусть ξ и η - независимые случайные величины с известными законами распределения: $P(\xi = i) = (1-a)a^i, i \geq 0, 0 < a < 1$ и $P(\eta = j) = (1-b)b^j, j \geq 0, 0 < b < 1$. Найти закон распределения с. в. $\gamma = \xi + \eta$.

Задача 9. Совместная плотность распределения случайных величин η и ξ имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} Bxy^2, & 0 < x < y < 3, \\ 0, & x, y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Найти константу B, плотность распределения $f_\eta(x)$ с. в. η и плотность распределения $f_\gamma(z)$, где с. в. $\gamma = \xi \cdot \eta$, вычислить математическое ожидание $M\gamma$

Задача 10. Случайная величина (ξ, η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} C(x+y^2), & 0 < x < y < 1, \\ 0, & x, y \text{ - другие.} \end{cases}$$

Найти константу C, плотность распределения $f_\xi(x)$ с. в. ξ, плотность распределения $f_\gamma(z)$ с. в. $\gamma = \max\{\xi, \eta\}$, вычислить $P(\gamma \geq 0{,}5)$.

Задача 11. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена внутри единичного квадрата. Найти закон распределения площади η прямоугольника со сторонами ξ_1 и ξ_2.

Задача 12. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют плотности распределения $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ и $f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [2,5], \\ 0, & x \notin [2,5], \end{cases}$ соответственно.

Найти плотность распределения $f_\eta(z)$, интегральную функцию распределения $F_\eta(z)$ и математическое ожидание $\mathrm{M}\eta$ случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Задача 13. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют плотности распределения

$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}, & x \in [2,4], \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$ и $f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [1,3), \\ 0, & x \notin [1,3), \end{cases}$ соответственно. Найти плотность распределения $f_\eta(z)$ и интегральную функцию распределения $F_\eta(z)$ случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Задача 14. Известно, что независимые случайные величины ξ и η имеют интегральные функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ соответственно. Найти интегральные функции распределения следующих случайных величин: 1) $\gamma_1 = \max\{2\xi, \eta\}$; 2) $\gamma_2 = \min\{\xi, \eta\}$.

4.6. Статистическая зависимость случайных величин и элементы теории корреляции

Задача 1. Для двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-1	0,21	0,16	0,11
0	0,14	0,05	0,02
2	0,11	0,01	0,19

Проверить независимость и коррелированность случайных величин ξ и η, вычислить условное математическое ожидание $M(\xi \mid \eta = 0)$.

Задача 2. Для двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	3
0	0,15	0,17	0,15	0,05
2	0,15	0,05	0,03	0,25

Проверить коррелированность случайных величин ξ и η, вычислить условные математические ожидания $M(\xi \mid \eta = 0)$, $M(\xi \mid \eta = 2)$ и условные дисперсии $D(\xi \mid \eta = 0)$, $D(\xi \mid \eta = 2)$.

Задача 3. Число ξ выбирается случайным образом из множества $\{1,2,3\}$. Затем из того же множества выбирается наудачу число η большее или равное первому. Требуется описать закон распределения случайного вектора (ξ, η) и определить, зависимы или независимы с. в. ξ и η.

Задача 4. Дважды подбрасывается правильная игральная кость. Пусть ξ - число появлений шести очков, а η - число появлений четного числа очков. Найти $M(\xi \mid \eta = 2)$.

Задача 5. Для двумерной случайной величины (ξ, η) известна матрица распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	2
1	0,1	0,05	0,3	0,05
2	0,1	0,15	0,1	0,15

Проверить коррелированность случайных величин ξ и η, вычислить условные математические ожидания $\mathrm{M}(\eta\,|\,\xi=0)$, $\mathrm{M}(\xi\,|\,\eta=2)$ и условные дисперсии $\mathrm{D}(\eta\,|\,\xi=0)$, $\mathrm{D}(\xi\,|\,\eta=2)$.

Задача 6. Известно, что плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}$. Проверить коррелированность и независимость одномерных случайных величин ξ и η.

Задача 7. Положение случайной точки (ξ,η) равновозможно в любом месте эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Проверить коррелированность и независимость одномерных случайных величин ξ и η.

Задача 8. Случайная точка (ξ,η) подчинена равномерному закону внутри квадрата со стороной a, диагонали которого совпадают с осями координат. Проверить зависимость и коррелированность случайных величин ξ и η.

Задача 9. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид

$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}A(x+2y), & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & x,y \text{ - другие.}\end{cases}$. Определить константу A, установить, зависимы или нет случайные величины ξ и η.

Задача 10. Совместная плотность распределения с. в. (ξ,η) имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}A(xy+y^2), & 0<x<2, 0<y<2,\\ 0, & x,y \text{ - другие.}\end{cases}$. Найти константу A, проверить коррелированность случайных величин ξ и η.

Задача 11. Система двух случайных величин подчиняется нормальному закону распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y)=b\exp\left\{-\frac{1}{0,72\sigma^2}[(x-5)^2+0,8(x-5)(y+2)+0,25(y+2)^2]\right\}.$$

Определить условные математические ожидания $\mathrm{M}(x\,|\,\eta=y)$, $\mathrm{M}(y\,|\,\xi=x)$ и условные дисперсии $\mathrm{D}(x\,|\,\eta=y)$, $\mathrm{D}(y\,|\,\xi=x)$.

Задача 12. Плотность вероятностей системы двух случайных величин задана в виде $f_{\xi\eta}(x,y)=Ae^{-ax^2+bxy-cy^2}$, где $a>0, c>0$. При каких условиях случайные величины ξ и η являются независимыми?

Заключение

При изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» тема «Многомерные случайные величины» является одной из самых сложных, тем более что при знакомстве с непрерывными многомерными случайными величинами необходимы достаточно прочные знания математического анализа. Для успешного освоения раздела «Многомерные случайные величины» помимо лекций и практических занятий очень важна самостоятельная работа, для которой данное пособие как раз и предназначено.

При изучении каждого из шести разделов необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, используя теоретический материал, потом пройти самостоятельно тест, сверив его с ответами, и далее закрепить свои знания решением практических задач разного уровня сложности. Авторы полагают, что такая последовательность в освоении материала будет способствовать его лучшему усвоению.

Данное учебно-методическое пособие «Задания для самоконтроля по теме «Многомерные случайные величины»» является дополнением к теоретическому материалу лекций и практическим занятиям по предмету «Теория вероятностей и математическая статистика».

Авторы надеются, что пособие поможет студентам освоить тему «Многомерные случайные величины», разобраться в нюансах предмета и вызовет интерес к теории вероятностей.

Список литературы

1. Федоткин М. А. Модели в теории вероятностей. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.

2. Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: МЦНМО, 2004.

3. Боровков А. А. Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.

4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 2005.

5. Федоткин М. А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. – М.: Высшая школа, 2006.

6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистики и теории случайных функций / Под общей ред. А. А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.

7. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.

8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1984.

9. Пытьев Ю. П., Шишмарев И. А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. – М.: МГУ, 1983.

10. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.

11. Агапов Г. И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 1994.

Екатерина Вадимовна **Пройдакова**
Татьяна Сергеевна **Бородина**

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО ТЕМЕ «МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.