МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.Д. Морозов
К.Е. Морозов

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»

Нижний Новгород
2022

УДК 517
ББК 22.161
М-80

М-80 Морозов А.Д., Морозов К.Е. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 17 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **В.М. Сандалов**

Учебно-методическое пособие содержит методы построения решений для набора нелинейных дифференциальных уравнений, играющих фундаментальную роль в теории колебаний. Это уравнения типа Дуффинга, маятниковое уравнение, уравнения Эйлера движения волчка и др. Решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции Якоби. Приводятся краткие сведения о таких функциях.

Пособие предназначено для преподавателей ИИТММ, ведущих дисциплины «Математические методы нелинейной динамики», «Теория колебаний» и студентов, изучающих данные дисциплины. Оно может быть использовано при проведении зачетов и экзаменов.

УДК 517
ББК 22.161

Содержание

Введение

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ – некоторая непрерывная *нелинейная* функция. Иногда это уравнение называют нелинейным осциллятором. Оно допускает первый интеграл (интеграл энергии)

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = h, \qquad (2)$$

где $T = \frac{\dot{x}^2}{2}$ кинетическая энергия, а $U(x) = \int f(x)dx$ – потенциальная энергия системы. Существование первого интеграла означает, что полная энергия материальной точки, движущейся в силу уравнения (1), сохраняется. Подобные уравнения, в которых выполняется закон сохранения энергии, называют консервативными.

Уравнение (1) эквивалентно системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -f(x). \end{cases} \qquad (3)$$

Состояния равновесия системы лежат на оси абсцисс. Координата x_0 определяется из уравнения $f(x) = 0$. Если $f'(x_0) > 0$, то $(x_0, 0)$ – положение равновесия типа центр, если $f'(x_0) < 0$ – типа седло. Состояния равновесия типа центр окружены неизолированными замкнутыми траекториями. Обратимся к построению решений на этих траекториях. Из первого интеграла (2) выразим dt:

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(h - U(x))}}.$$

Отсюда получаем

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2(h - U(x))}}. \qquad (4)$$

Из этой формулы вытекает интегрируемость уравнения (1) *в квадратурах*. Чтобы построить явные формулы для решений, необходимо обратить интеграл в формуле (4). Такое обращение возможно не всегда. Когда функция $f(x)$ является многочленом степени не выше 4 или тригонометрической функцией, интеграл в формуле (4) является эллиптическим и его обращение приводит к эллиптическим функциям Якоби. Приведем краткие сведения из теории эллиптических интегралов и функций Якоби.

1. Эллиптические функции Якоби

1.1. Эллиптические интегралы

Прежде всего напомним определение эллиптических интегралов. Интегралы вида

$$\int_0^{\sin\varphi} \frac{d\chi}{\sqrt{(1-\chi^2)(1-k^2\chi^2)}}, \qquad \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{(1-\chi^2)(1-k^2\chi^2)}\, d\chi$$

называются неполными эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода соответственно в нормальной форме Лежандра. Эти интегралы можно переписать в тригонометрической форме:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}, \qquad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}d\psi.$$

Число k называется модулем эллиптических интегралов. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то получаем полные эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода:

$$\boldsymbol{K}\,(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}, \qquad \boldsymbol{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}d\psi.$$

На рис. 1 показаны графики функций $\boldsymbol{K}\,(k)$ и $\boldsymbol{E}(k)$ в зависимости от $k \in (0; 1)$.

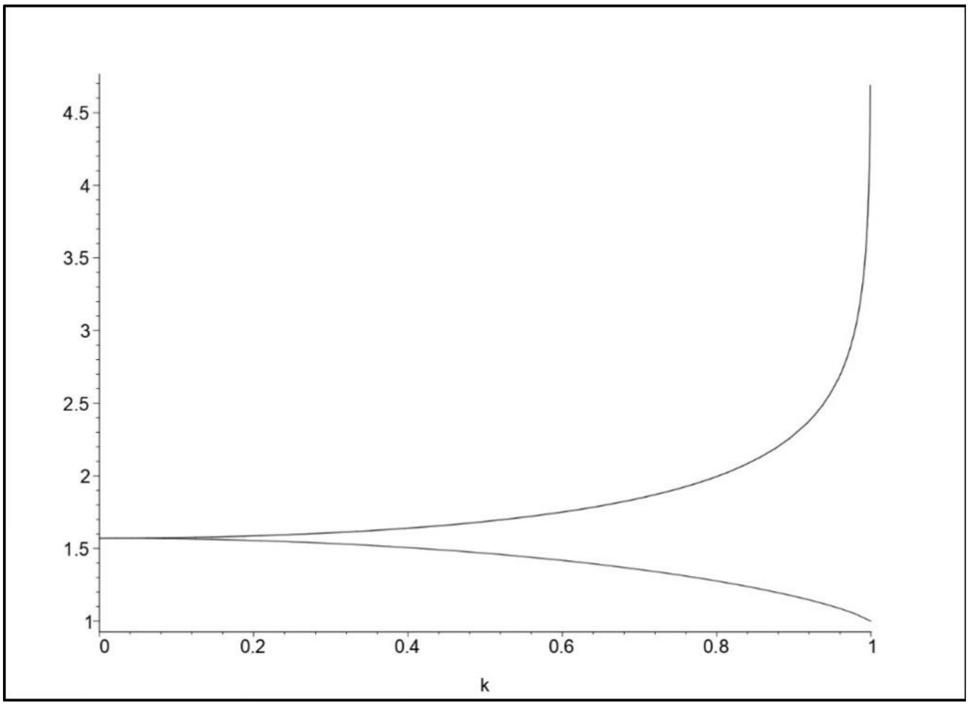

Рис. 1. Зависимости $\boldsymbol{K}(k)$ (верхний график) и **E**(k) (нижний график).

Общим эллиптическим интегралом называется интеграл вида $\int R(z,w)dz$, где R – рациональная функция своих аргументов; $w^2 = P(z)$, $P(z)$ - полином 3-ей или 4-ой степени. Введем в рассмотрение эллиптический интеграл 3-го рода

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + n\sin^2\psi)\sqrt{(1 - k^2\sin^2\psi)}},$$

где n – параметр. Справедлива следующая

Теорема. *Всякий общий эллиптический интеграл может быть представлен как линейная комбинация элементарных функций и эллиптических интегралов 1-го, 2-го и 3-го родов в нормальной форме Лежандра. Для действительных эллиптических интегралов это представление можно произвести так, что модуль* $k \in [0,1]$ *и действителен,* n *– действительно,* $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Формулы приведения можно найти, например, в справочнике [1].

1.2. Эллиптические функции Якоби

Если $u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}$ – неполный эллиптический интеграл 1-го рода, то φ называется *амплитудой* и обозначается $\varphi = \mathrm{am}(u,k)$; она является бесконечнозначной периодической (с комплексным периодом) функцией от u и обладает свойствами:

$$\mathrm{am}(u + 2\boldsymbol{K}, k) = \mathrm{am}(u,k) + \pi;$$

$$\mathrm{am}(-u, k) = -\mathrm{am}(u,k).$$

Эллиптические функции Якоби $\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(u)$, $\mathrm{dn}(u)$ получаются посредством формул

$$\mathrm{sn}(u,k) = \sin\varphi = \sin \mathrm{am}(u,k);$$

$$\mathrm{cn}(u,k) = \cos\varphi = \cos \mathrm{am}(u,k);$$

$$\mathrm{dn}^2(u,k) = 1 - k^2\mathrm{sn}^2(u,k).$$

Вещественные периоды этих функций соответственно равны $4\boldsymbol{K}$, $4\boldsymbol{K}$, $2\boldsymbol{K}$. Иногда функции $\mathrm{sn}(u,k)$ и $\mathrm{cn}(u,k)$ называют эллиптическим синусом и косинусом соответственно, а функцию $\mathrm{dn}(u,k)$ – дельта-амплитудой. Далее нам понадобятся следующие частные значения этих функций:

$$\mathrm{sn}(u,0) = \sin u;$$

$$\mathrm{cn}(u,0) = \cos u;$$

$$\mathrm{sn}(u,1) = \mathrm{th}\, u;$$

$$\mathrm{cn}(u,1) = \mathrm{dn}(\mathrm{u},1) = 1/\mathrm{ch}\, u.$$

Таким образом, эллиптические функции Якоби при изменении параметра k заполняют пробел между элементарными тригонометрическими функциями и гиперболическими функциями.

В силу определения функции Якоби обладают свойствами

$$\mathrm{sn}(-u,k) = -\mathrm{sn}(u,k);$$
$$\mathrm{cn}(-u,k) = \mathrm{cn}(u,k);$$
$$\mathrm{dn}(-u,k) = \mathrm{dn}(u,k);$$
$$\mathrm{sn}^2(u) + \mathrm{cn}^2(u) = 1$$
$$\mathrm{dn}^2(u) + k^2\mathrm{sn}^2(u) = 1.$$

Производные от эллиптических функций Якоби имеют вид:

$$\frac{d}{du}\, sn(u) = cn(u)dn(u);$$
$$\frac{d}{du} cn(u) = -sn(u)dn(u);$$
$$\frac{d}{du} dn(u) = -k^2 sn(u)cn(u).$$

Для функций Якоби справедливы следующие разложения в тригонометрические ряды:

$$\mathrm{sn}(u) = \frac{2\pi}{k\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1-a^{2n-1}} \sin\frac{(2n-1)\pi u}{2\boldsymbol{K}};$$

$$\mathrm{cn}(u) = \frac{2\pi}{k\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1+a^{2n-1}} \cos\frac{(2n-1)\pi u}{2\boldsymbol{K}};$$

$$\mathrm{dn}(u) = \frac{\pi}{2\boldsymbol{K}} + \frac{2\pi}{\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n}}{1+a^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\boldsymbol{K}};$$

где $a = exp\left(-\frac{\pi \boldsymbol{K}\left(\sqrt{1-k^2}\right)}{\boldsymbol{K}(k)}\right)$.

2. Уравнения с одной степенью свободы

2.1. Построение решений уравнения Дуффинга

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \alpha\, x + \beta x^3 = 0, \tag{2.1}$$

где α, β отличные от нуля постоянные. При построении периодических решений уравнения (2.1) необходимо знать его фазовый портрет, так как периодические решения отвечают решениям на замкнутых фазовых кривых. Фазовые кривые определяются из первого интеграла уравнения (2.1):

$$\dot{x}^2/2 + \alpha x^2/2 + \beta x^4/4 = h = \text{const}. \tag{2.2}$$

Фазовые портреты уравнения (1) для различных знаков параметров α,β приведены на рис. 2. Случай $\alpha < 0$, $\beta < 0$ сразу же выпадает из рассмотрения ввиду отсутствия замкнутых траекторий.

Из (2.2) находим

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\left(h - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{4}x^4\right)}}.$$

Обозначим через $\pm x_1, \pm x_2$ корни уравнения $h - \frac{\alpha x^2}{2} - \beta \frac{x^4}{4} = 0$. Тогда получаем

$$t - t_0 = \pm\sqrt{2} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\beta\left(x_1^2 - x^2\right)\left(x^2 - x_2^2\right)}}. \tag{2.3}$$

Заметим, что в случае $\alpha > 0$, $\beta > 0$ корни $\pm x_2$ суть комплексно-сопряженные числа, то есть. $x_2^2 < 0$. Зная направление движения на траекториях, для каждой начальной точки всегда можно определить конкретный знак в формуле (2.3).

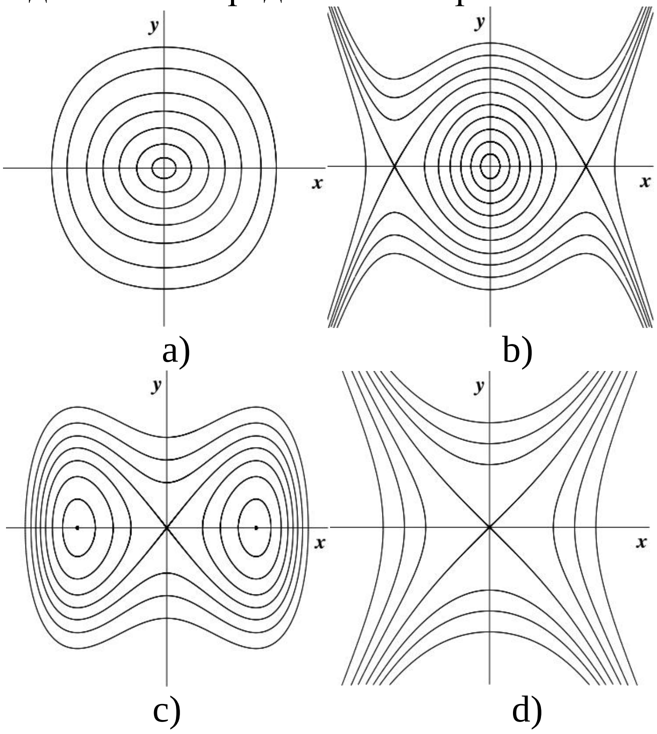

Рис. 2. Фазовые портреты для уравнения Дуффинга при: (a) $\alpha > 0$, $\beta > 0$;
(b) $\alpha > 0, \beta < 0$; (c) $\alpha < 0$, $\beta > 0$; (d) $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

При построении решений уравнения (2.3) важен лишь знак параметров α, β. Далее, не ограничивая общности, будем считать $\alpha = \pm 1,\ \beta = \pm 1$.

Случай $\boldsymbol{\alpha = 1, \beta = 1}$. Фазовый портрет приведен на рис. 2(a). Замкнутые фазовые кривые отвечают значениям $h > 0$. Фазовая точка двигается с ростом t по часовой стрелке. Положим $t_0 = 0, x_0 = x_1$. Тогда в формуле (2.3) следует выбрать знак «минус»:

$$t = -\sqrt{2}\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x_1^2 - x^2)(x^2 - x_2^2)}}.$$

Делая в этом интеграле замену

$$x = x_1 \cos\varphi, \tag{2.4}$$

находим

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}} F(\varphi, k), \quad k = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}. \tag{2.5}$$

Отметим, что при $h \in (0, \infty)$ модуль эллиптического интеграла F изменяется в интервале $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Из (2.4) следует, что

$$x = x_1 \cos \operatorname{am}(F) = x_1 \operatorname{cn}(F).$$

Из (2.5) находим

$$F(\varphi, k) = \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}{\sqrt{2}} t. \tag{2.6}$$

Тогда

$$x(t) = x_1 \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{2}}\, t\right).$$

Представим решение в более удобной форме. Для этого найдем период $T(h)$ движения по замкнутым фазовым кривым. Подставим в (2.6) $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{T}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}} \boldsymbol{K}(k).$$

Частота движения $\omega(h)$ по замкнутым фазовым кривым определяется как $2\pi/T(h)$. Тогда $\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{2}} = \frac{2\boldsymbol{K}\omega}{\pi}$. Обозначая $\theta = \omega t$, окончательно находим

$$x(\theta) = x_1 \operatorname{cn}\left(2\boldsymbol{K}\frac{\theta}{\pi}\right). \tag{2.7}$$

Задание 1. Каким начальным условиям удовлетворяет решение (2.7)?

Случай $\boldsymbol{\alpha = 1, \beta = -1}$. Фазовый портрет представлен на рис. 2(b). Замкнутым фазовым кривым соответствуют значения $h \in (0, \frac{1}{4})$. Положим $t_0 = 0, x_0 = 0$. Замена

$$x = x_1 \sin\varphi \tag{2.8}$$

приводит интеграл (2.3) к эллиптическому в нормальной форме Лежандра:

$$t = \sqrt{2}F(\varphi, k)/x_2, \qquad k = x_1/x_2. \tag{2.9}$$

При $h \in (0, \frac{1}{4})$ модуль эллиптического интеграла F изменяется в интервале (0,1). Из (2.8) следует, что

$$x = x_1 \sin \mathrm{am}(F) = x_1 \mathrm{sn}(F).$$

Выражая F из (2.9), получим

$$x(t) = x_1 \mathrm{sn}\left(\frac{x_2 t}{\sqrt{2}}\right).$$

Далее, аналогично предыдущему случаю, находим

$$x(\theta) = x_1 \mathrm{sn}\left(\frac{2\boldsymbol{K}\theta}{\pi}\right),$$

где $\theta = \omega t$, $\omega = \pi \frac{x_2}{2\sqrt{2}\boldsymbol{K}}$.

Случай $\boldsymbol{\alpha = -1, \beta = 1}$. Фазовый портрет показан на рис. 2(c). Замкнутым фазовым кривым отвечают значения $h > 0$ (ячейка, заполненная траекториями, охватывающим три состояния равновесия) и $-1/4 < h < 0$ (ячейки внутри петель сепаратрисы).

Сначала рассмотрим ячейку, отвечающую значениям $h > 0$. Построение решений в этом случае принципиально не отличается от случая, когда $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Аналогично, получаем

$$x(\theta) = x_1 \mathrm{cn}\left(\frac{2\boldsymbol{K}\theta}{\pi}\right).$$

Отличие этого решения от (2.7) состоит в интервале изменения модуля k эллиптического интеграла. Здесь $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ при изменении $h \in (0, \infty)$.

Задание 2. Найдите решение при $h = 0$.

Теперь обратимся к случаю $0 > h > -1/4$. В силу симметрии достаточно рассмотреть ячейку, для которой $x > 0$. Решение в левой ячейке отличается знаком. Замена

$$x = x_1\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

приводит интеграл в формуле (2.3) к эллиптическому:

$$t = \frac{\sqrt{2}F(\varphi, k)}{x_1}, \qquad k = \sqrt{x_1^2 - x_2^2}/x_1.$$

Используя известные соотношения для функций Якоби, находим

$$x(\theta) = x_1 \,\mathrm{dn}\left(\frac{\boldsymbol{K}\theta}{\pi}\right), \qquad \theta = \omega t, \qquad \omega = \frac{\pi x_1}{\sqrt{2}\boldsymbol{K}}, \qquad x_1 = \left(\frac{2}{2 - k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь ω – частота движения на замкнутых фазовых кривых $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = h$, $\theta \in [0, 2\pi]$ – угловая переменная.

2.2. Построение решений уравнения нелинейного маятника

Фазовым пространством уравнения математического маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ является цилиндр $R^1 \times S^1 = (x \bmod 2\pi,\ \dot{x})$. Фазовые кривые можно разбить на два класса: неохватывающие фазовый цилиндр (стягиваемые в точку) и охватывающие его. Первым соответствуют значения энергии $h \in (-1,1)$, а вторым – значения $h > 1$. Интеграл энергии имеет вид $\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = h$. Фазовый портрет уравнения показан на рис. 3.

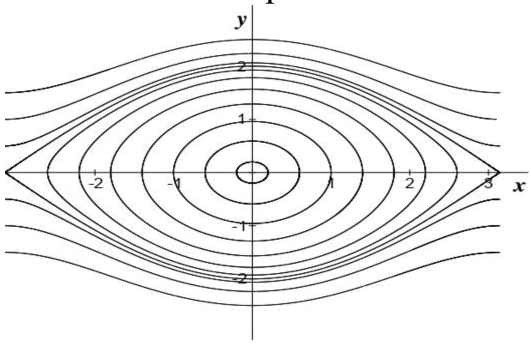

Рис. 3. Фазовый портрет уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$

Из первого интеграла находим

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2(h+\cos x)}}. \qquad (2.10)$$

Положим $t_0 = 0,\ x_0 = 0$ и выберем знак «плюс».

Случай $h \in (-1, 1)$. В формуле (2.10) сделаем следующую замену

$$\sin\frac{x}{2} = k \sin\varphi. \qquad (2.11)$$

В результате приходим к интегралу в нормальной форме Лежандра:

$$t = F(\varphi, k), \qquad k^2 = (1+h)/2.$$

Тогда из (2.11) находим

$$x(t) = 2\arcsin(k \sin \mathrm{am}(F)) = 2\arcsin(k\,\mathrm{sn}\ F) = 2\arcsin(k\,\mathrm{sn}\ t).$$

Для периода колебаний имеем $T = 4\boldsymbol{K}$. Тогда собственная частота выражается следующим образом $\omega = 2\pi/T = \pi/(2\boldsymbol{K})$**.** Отсюда окончательно получаем

$$x(\theta) = 2\arcsin(k\,\mathrm{sn}(2\boldsymbol{K}\theta/\pi)), \qquad \theta = \omega\, t.$$

Задание 3. Найдите решение на сепаратрисе ($h = 1$).

Случай $h > 1$. С помощью подстановки $x = 2\varphi$ приходим к интегралу в нормальной форме Лежандра:

$$t = kF(\varphi, k), \qquad k^2 = \frac{2}{1+h}.$$

Тогда

$$x(t) = 2\mathrm{am}(F) = 2\mathrm{am}\left(\frac{t}{k}\right).$$

Аналогично предыдущему случаю, период колебаний равен $T = 2k\boldsymbol{K}$, откуда $\omega = \pi/(k\boldsymbol{K})$. Окончательно получаем

$$x(\theta) = 2am\left(\frac{\boldsymbol{K}\theta}{\pi}\right), \quad \theta = \omega t.$$

2.3. Уравнение с квадратичной нелинейностью

Рассмотрим построение периодических решений уравнения с квадратичной нелинейностью, записанного в виде

$$\ddot{x} + x - x^2 = 0. \tag{2.12}$$

Первый интеграл уравнения имеет вид

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = h.$$

Фазовый портрет (2.12) показан на рис. (4).

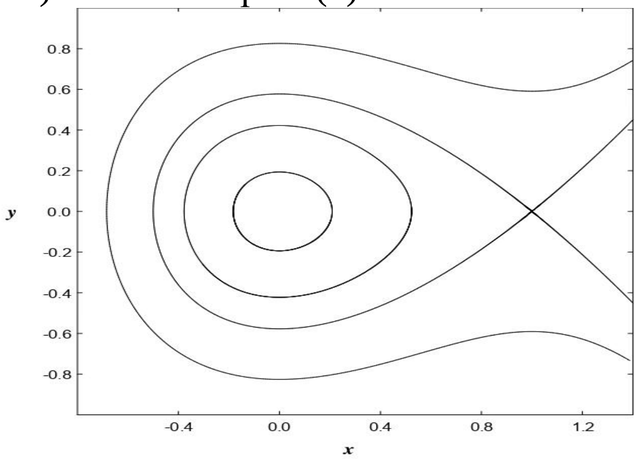

Рис. 4. Фазовый портрет уравнения $\ddot{x} + x - x^2 = 0$.

Замкнутым фазовым кривым отвечают значения энергии h из интервала $(0, 1/6)$. Для этих значений уравнение $x^3/3 - x^2/2 + h = 0$ имеет три вещественных корня. Обозначим их $x_1 < x_2 < x_3$. Из первого интеграла, как и раньше, находим

$$t - t_0 = \pm\sqrt{3/2} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)}}.$$

Полагая $x_0 = x_1,\ t_0 = 0$, выбирая знак «плюс» и делая замену

$$\sin^2 \varphi = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2},$$

получим

$$t = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{x_3 - x_1}} F(\varphi, k),\ k^2 = (x_2 - x_1)/(x_3 - x_1). \tag{2.13}$$

Откуда имеем

$$x = x_1 - (x_1 - x_2)\sin^2 \varphi = x_1 - (x_1 - x_2)\sin^2 \operatorname{am} F = x_1 - (x_1 - x_2)\operatorname{sn}^2 F.$$

Используя (2.13), получим решение в виде

$$x(\theta) = x_1 - (x_1 - x_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{K}\theta}{\pi}\right),$$

где $\theta = \omega t,\ \omega = \pi(x_3 - x_1)/(\boldsymbol{K}\sqrt{6})$.

Задание 4. Найдите решение на петле сепаратрисы.

3. Трехмерные интегрируемые системы

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = F(x),\ x \in\ R^3. \qquad (3.1)$$

Система (3.1) будет интегрируемой, если она допускает 3 независимых первых интеграла. Во многих случаях для интегрируемости *в квадратурах* достаточно знать два первых интеграла. Не существует общих рецептов интегрирования таких систем. Поэтому рассмотрим лишь некоторые примеры трехмерных систем, которые удается проинтегрировать и которые играют важную роль в приложениях, а именно:

1) уравнения Эйлера движения асимметричного волчка;

2) уравнения гидродинамического типа;

3) уравнения динамики квантового генератора;

4) систему Лоренца.

3.1. Уравнения Эйлера

Для трех компонент вектора момента $\boldsymbol{X}$ уравнений движения асимметричного волчка имеем систему (см., например, [1])

$$\dot{X}_1 = aX_2X_3;\ \dot{X}_2 = bX_1X_3;\ \dot{X}_3 = cX_1X_2 \qquad (3.2)$$

где $a = (J_2 - J_3)/(J_2J_3\ ),\ b = (J_3 - J_1)/(J_1J_3),\ c = (J_1 - J_{2)})/(J_1J_2)$. Здесь J_1,J_2,J_3 – главные моменты инерции волчка. Система (3.2) допускает два первых интеграла

$$X_1^2/J_1 +\ X_2^2/J_2 +\ X_3^2/J_3 =\ C_1,\ C_1 \geq 0 \qquad (3.3)$$

$$X_1^2\ +\ X_2^2\ +\ X_3^2\ =\ C_2,\ C_2 \geq 0. \qquad (3.4)$$

В соответствии с (3.3)–(3.4) конец вектора $\boldsymbol{X}$ лежит на пересечении эллипсоида со сферой. Предположим, что полуоси эллипсоида (3.3) удовлетворяют неравенствам

$$\sqrt{C_1J_1}\ < \sqrt{C_1J_2}\ < \sqrt{C_1J_3}\,.$$

Для реальных движений волчка также выполняется условие

$$C_1J_1 <\ C_2 <\ C_1J_3.$$

Выражая из интегралов (3.3)–(3.4) компоненты X_1 и X_3 через X_2 и подставляя полученные выражения во второе уравнение в (3.2), придем к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dX_2}{dt} = bX_1X_3 = b([A_1 - A_2X_2^2][B_1 - B_2X_2^2])^{\frac{1}{2}},$$

где $b = 1/\sqrt{(J_1J_3)}$, $A_1 = C_1J_3 - C_2$; $A_2 = (J_3 - J_2)/J_2$, $B_1 = C_2 - C_1J_1, B_2 = (J_2 - J_1)/J_2$. Разделяя переменные в этом уравнении и полагая $t_0 = 0$, $X_2^0 = 0$ придем к выражению

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = F(\varphi, k), \tag{3.5}$$

где

$$x = \frac{X_2}{J_2}\sqrt{\frac{J_2(J_3-J_2)}{C_1J_3-C_2}} = \sin(\varphi), \tag{3.6}$$

$$\tau = t\sqrt{\frac{(J_3-J_2)(C_2-C_1J_1)}{J_1J_2J_3}}, \tag{3.7}$$

$$k^2 = \frac{(J_1-J_3)(C_1J_2-C_2)}{(J_3-J_2)(C_2-C_1J_1)}. \tag{3.8}$$

Так как $x = \sin\varphi$, то из (3.5) следует

$$x(\tau) = \sin \operatorname{am} F = \operatorname{sn} F = \operatorname{sn} \tau.$$

Тогда, используя (3.6) – (3.8), находим

$$X_2 = \sqrt{\frac{(C_1J_3-C_2)J_2}{J_3-J_2}} \operatorname{sn} \tau.$$

Используя выражения для первых интегралов (3.3)–(3.4) и известные тождества для эллиптических функций найдем формулы для оставшихся компонент.

$$X_1 = \sqrt{\frac{(C_1J_3 - C_2)J_1}{J_3 - J_1}} \operatorname{cn} \tau$$

$$X_3 = \sqrt{\frac{(C_2 - C_1J_1)J_3}{J_3 - J_1}} \operatorname{dn} \tau.$$

В заключение этого пункта отметим, что к уравнениям типа Эйлера приводит система уравнений гидродинамического типа (см., например, [2]).

3.2. Уравнения динамики квантового генератора

Кратко остановимся на уравнении динамики квантового генератора и интегрируемом случае системы Лоренца. Согласно [2], система уравнений динамики одномодового квантового генератора близка к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = xz, \\ \dot{z} = -xy. \end{cases} \tag{3.9}$$

К системе вида (3.9) в некоторых случаях также приводит известная система Лоренца. Система (3.9) допускает два первых интеграла

$$y^2 + z^2 = C_1, \qquad C_1 \geq 0$$

$$\frac{x^2}{2} + z = C_2, \qquad C_2 \in R$$

Подставляя первое уравнение системы (3.9) в $y^2 + z^2 = C_1$, возводя $z = C_2 - x^2/2$ в квадрат и вычитая одно из другого, получим

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\left(\sqrt{C_1} - C_2 + 0.5x^2\right)\left(\sqrt{C_1} + C_2 - 0.5x^2\right)},$$

т.е.

$$\frac{dx}{dt} = \pm\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 - x^2)},$$

где $a^2 = 2(\sqrt{C_1} - C_2)$, $b^2 = 2(\sqrt{C_1} + C_2)$. Тогда интегрированием находим

$$t - t_0 = \pm 2\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 - x^2)}}$$

Полагая $t_0 = 0, x_0 = 0$ и делая в интеграле замену

$$x = b\cos\varphi,$$

имеем

$$t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F(\varphi, k).$$

Окончательно получаем выражение

$$x = b\,\mathrm{cn}(\sqrt{a^2 + b^2}\,t),$$

где $b \geq a,\ b > x \geq 0, k = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Список литературы

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. – М: Изд-во «Наука», 1971. – 1108 с.
2. Морозов А.Д. Математические методы тории колебаний: учебное пособие. – М.: Ижевск: Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2017. – 144 с.

Альберт Дмитриевич **Морозов**
Кирилл Евгеньевич **Морозов**

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.