**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.А. Голубева

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано учебно-методической комиссией
Павловского филиала ННГУ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика»

Нижний Новгород
2022

УДК 512.64
ББК 22.143
Г-62

Г-62 Голубева Е.А. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 31 с.

Рецензент: кандидат технических наук **Д.Ю. Васин**

В учебно-методическом пособии в краткой форме излагается теоретический материал и даны примеры решения типовых задач по следующим темам линейной алгебры: «Матрицы», «Системы линейных уравнений», «Собственные значения и собственные векторы матриц». Приведены вопросы для подготовки к промежуточной аттестации, касающиеся этих тем дисциплины, и варианты контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика». Оно поможет сориентироваться при написании контрольной работы, подготовке к практическим занятиям и экзамену.

Ответственный за выпуск:
председатель учебно-методической комиссии Павловского филиала ННГУ к.э.н., доцент **Н.А. Ягунова**

УДК 512.64
ББК 22.143

Е.А. Голубева

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс линейной алгебры является важной составной частью подготовки бакалавра экономики и бакалавра прикладной информатики в экономике и управлении. Данный курс является математической основой для многих разделов большинства общенаучных и специальных экономических дисциплин таких, как «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Эконометрика», «Методы оптимальных решений», «Экономико-математические методы и модели», «Методы моделирования социально-экономических процессов».

Настоящее пособие предназначено для помощи студентам, обучающимся по направлениям подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика» как очной, так и очно-заочной и заочной форм обучения.

В основу структуры пособия положен тематический принцип. Сюда вошёл материал, относящийся к таким разделам дисциплины, как «Матрицы», «Системы линейных уравнений», «Собственные значения и собственные векторы матриц». Наряду с изложением основного теоретического материала по вышеперечисленным темам, в пособии приведены примеры решения типовых задач, вопросы для подготовки к экзамену и варианты контрольной работы.

Тема 1. МАТРИЦЫ

1.1. Понятие матрицы

Определение. *Матрицей* размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы снабжается *двумя индексами*: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца, в котором расположен этот элемент.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ - матрица размера 2×3.

Определение. Две матрицы называются *равными*, если числа их строк и столбцов совпадают и равны элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц.

Пример. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ равна матрице $B = \begin{pmatrix} 2^0 & \sqrt{4} & \log_2 8 \\ \sin 0^0 & \log_{\frac{1}{2}} 2 & \sqrt[3]{-8} \end{pmatrix}$.

Определение. Матрица, имеющая одну строку, называется *матрицей-строкой*, матрица, имеющая один столбец - *матрицей-столбцом*.

Определение. Матрица размера $m \times n$ называется *трапецеидальной (ступенчатой)*, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где числа a_{11}, a_{22}, …, a_{rr} отличны то нуля.

Определение. Матрица, содержащая только нули, называется *нулевой*.

Определение. Если число столбцов матрицы n равно числу её строк, то матрицу называют *квадратной матрицей порядка n*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратной матрицы порядка n образуют её *главную диагональ*, элементы a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} - *побочную диагональ*.

Определение. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Определение. Диагональная матрица называется *единичной*, если все её элементы, расположенные на главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Операции над матрицами

Над матрицами в линейной алгебре вводят следующие операции:

1. *Умножение матрицы на число*: чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$k\cdot A=\begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \dots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \dots & k\cdot a_{2n} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & \dots & k\cdot a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \dots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. *Сложение матриц*: суммой двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица, элементы которой равны суммам элементов матриц A и B, расположенных на соответствующих местах:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -2 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

3. *Умножение матриц*. Матрицу A можно умножить на матрицу B только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получится матрица C, у которой

столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

а элементы c_{ij} матрицы C вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

то есть для получения элемента c_{ij}, расположенного в i-той строке и j-том столбце матрицы C, надо элементы i-той строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Пример. Вычислить произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 1 + (-5)\cdot 2 & 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + (-5)\cdot 0 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + (-3)\cdot 1 + 4\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-3)\cdot 3 + 4\cdot 0 \\ -1\cdot 3 + (-2)\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 2 & -1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 3\cdot 3 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 16 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>Как правило, умножение матриц не перестановочно, то есть $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если же $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются перестановочными. Перестановочными могут быть только квадратные матрицы.</u>

4. <u>*Транспонирование матрицы*</u>: чтобы транспонировать матрицу, нужно элементы i-той строки записать в i-тый столбец. Обозначение - A^T.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \; A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами.

Свойства операций над матрицами

1. $A + B = B + A$.
2. $A \cdot B \neq B \cdot A$.
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
4. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
6. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.
7. $A \cdot E = E \cdot A = A$.
8. $(A^T)^T = A$.
9. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

10. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

11. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.3. Определители матриц

Определителем квадратной матрицы называется число, обозначаемое $\det A$ или $|A|$ и вычисляемое по следующим правилам:

I. Если A - квадратная матрица первого порядка: $A = (a_{11})$, то её определитель равен самому элементу матрицы: $|A| = a_{11}$.

II. Если A - квадратная матрица второго порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то её определитель вычисляется по следующей формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 = -10.$$

III. Если A - квадратная матрица третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, то её определитель вычисляется по правилу треугольников:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 9 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0.$$

Определение. Матрица, определитель которой равен нулю, называется вырожденной; в противном случае матрица называется невырожденной.

IV. Определители матриц n-го порядка вычисляются по *правилу Лапласа*.

Определение. <u>*Минором*</u> M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается в результате вычеркивания в определителе n-го порядка строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}.

Пример. Например, минор элемента a_{32} в определителе третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ таков:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6.$$

Определение. <u>*Алгебраическим дополнением*</u> A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

В предыдущем примере $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-6) = 6$.

По правилу Лапласа определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \qquad (1)$$

где $i = 1,2,3,\ldots,n$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \qquad (2)$$

где $j = 1,2,3,\ldots,n.$

Равенства (1) и (2) называют соответственно разложениями определителя матрицы по элементам i-той строки и j-того столбца. Эти формулы можно использовать для вычисления определителей матриц.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, разлагая его по элементам второго столбца.

Вычисляем миноры элементов второго столбца:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}=36-42=-6,\ M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix}=9-21=-12,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6-12=-6.$$

Вычисляем алгебраические дополнения элементов второго столбца:

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=6,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=-12,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=6.$

Раскладывая определитель по элементам второго столбца, получим

$$|A|=2\cdot 6+5\cdot(-12)+8\cdot 6=0.$$

Определители матриц обладают следующими свойствами.

Свойства определителей матриц

1. Определитель, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.
2. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца) равен нулю.
3. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю.
4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.
5. Определитель не меняет своего значения при транспонировании.
6. Перестановка двух строк или двух столбцов определителя равносильна его умножению на (-1).
7. Определитель не изменяется, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
8. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей: $\begin{vmatrix}a_1+a_2 & c\\ b_1+b_2 & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & c\\ b_1 & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_2 & c\\ b_2 & d\end{vmatrix}$.

1.4. Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется <u>*обратной*</u> для **квадратной** матрицы A, если выполняется равенство:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема: Если A - невырожденная квадратная матрица, то

1) матрица A имеет обратную;

2) A^{-1} единственная.

Обратная матрица обладает следующими свойствами.

Свойства обратных матриц

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Существует два способа нахождения обратных матриц.

Способы нахождения обратной матрицы

1. С использованием алгебраических дополнений:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

2. С помощью элементарных преобразований строк матрицы

К элементарными преобразованиям строк матрицы относятся следующие преобразования:

1) умножение всех элементов строки матрицы на отличное от нуля число $k \neq 0$;

2) прибавление к каждому элементу одной строки соответствующего элемента другой строки, умноженного на отличное от нуля число $k \neq 0$.

При отыскании обратной матрицы этим способом, нужно:

1) Построить объединённую матрицу: к данной матрице приписать справа единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

2) С помощью элементарных преобразований объединённой матрицы привести матрицу A к единичной матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

3) Матрица A^{-1} имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдем двумя способами матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1-ый способ: с использованием алгебраических дополнений.

$|A| = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Получаем,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2-ой способ: с помощью элементарных преобразований строк матрицы:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to -3 \cdot r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to -r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.5. Матричные уравнения

Матричными уравнениями называются уравнения вида

$$AX = B,\ YA = B,$$

где A, B – заданные матрицы, X, Y – неизвестные матрицы.

Для решения уравнения типа $AX = B$ его нужно умножить на обратную к A матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot \big|\ AX = B.$$

Получим

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B.$$

Учитывая, что $A^{-1} \cdot A = E$, имеем

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

или, согласно свойствам операций над матрицами,

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Аналогично, умножая обе части уравнения $YA = B$ на A^{-1} справа, получим

$$YA = B \quad \big| \cdot A^{-1},$$
$$YA \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$
$$YE = B \cdot A^{-1},$$
$$Y = B \cdot A^{-1}.$$

Пример. Решить матричные уравнения $AX = B,\ YA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользовавшись ранее найденным значением матрицы A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

получим

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$Y = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.6. Ранг матрицы

Определение. *Рангом* матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $rangA$.

Из определения ранга матрицы следует, что:

1) Ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из её размеров, то есть $rangA \le \min(m; n)$.

2) Ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.

3) Для квадратной матрицы n-го порядка $rangA = n$ тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A имеет четвертый порядок, поэтому $rangA \le 4$, но ее определитель равен нулю: $|A| = 0$, так как матрица содержит нулевой столбец, поэтому $rangA \le 3$. Все миноры третьего порядка тоже содержат нулевой столбец и поэтому имеют нулевые определители, значит $rangA \le 2$. Все миноры второго порядка либо имеют нулевой столбец, либо пропорциональные столбцы, поэтому тоже имеют нулевые определители, таким образом $rangA \le 1$. Поскольку матрица содержит ненулевые элементы, то есть невырожденные миноры первого порядка, то $rangA = 1$.

Очевидно, что *ранг трапецеидальной (ступенчатой) матрицы равен числу её ненулевых строк*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Каждую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести в ступенчатому виду. Следовательно, для отыскания ранга матрицы нужно:

1) элементарными преобразованиями превратить матрицу в трапецеидальную,

2) подсчитать число ненулевых строк в полученной трапецеидальной матрице.

Пример. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_1 - r_3]{r_2 \to 2r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to 2r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Тема 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Понятие системы линейных уравнений

Система линейных уравнений – это система, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

b_i - свободные члены, $i = 1,2,3,\ldots,n$, $j = 1,2,3,\ldots,m.$

Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной матрицей системы*.

Расширенной называется матрица

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

которая получается приписыванием к основной матрице системы столбца свободных членов.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема Кронекера-Капели: Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы.

Совместная система линейных уравнений имеет либо одно, либо бесконечно много решений. В первом случае она называется *определённой*, а во втором *неопределенной*.

2.2. Крамеровские системы линейных уравнений

Крамеровской называют совместную и определённую систему из n линейных уравнений с n неизвестными, то есть систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема: Система из n уравнений с n неизвестными является крамеровской тогда и только тогда, определитель её основной матрицы отличен от нуля: $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$.

Теорема: Решение крамеровской системы уравнений находится по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$ - формулы Крамера,

где Δ - определитель основной матрицы системы, Δ_k - определитель, получаемый из определителя Δ заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Он отличен от нуля, следовательно, система крамеровская.

Находим определители Δ_k:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 10.$$

Следовательно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2$.

Выполним проверку путем подстановки полученных значений неизвестных в исходную систему:

$$\begin{cases} 6 + 1 - 2 = 5 - \textit{верно}, \\ 9 + 3 - 4 = 8 - \textit{верно}, \\ 3 + 1 + 2 = 6 - \textit{верно}. \end{cases}$$

Ответ: $(3,1,2)$.

Если определитель Δ основной матрицы системы равен нулю и хотя бы один из определителей Δ_1, …, Δ_n отличен от нуля, то система не имеет решений (несовместна).

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$, то система либо совсем не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

Во всех перечисленных случаях, а также при $\Delta \neq 0$ решить систему помогает метод Гаусса.

2.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса основан на следующих свойствах:

1) Если в системе поменять местами два уравнения, то система своего решения не изменит.
2) Если одно из уравнений умножить на число, отличное от нуля, то система своего решения не изменит.
3) Если к одному из уравнений системы прибавить другое, умноженное на некоторое число, то система своего решения не изменит.

При решении систем линейных уравнений методом Гаусса составляют расширенную матрицу коэффициентов (A/B). Эту матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду (к трапецеидальной форме). Далее по полученной матрице выписывают новую систему и решают её методом исключения переменных снизу вверх: начиная с последних по номеру переменных находят все остальные.

Пример. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ 5x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_3 - 2x_4 = 8, \\ 7x_4 = -7. \end{cases}.$$

Решение. $(A/B) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$. Матрица (A/B) уже имеет ступенчатый вид.

Восстанавливаем систему и решаем её снизу вверх:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ 5x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_3 - 2x_4 = 8, \\ 7x_4 = -7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -1, \\ 3x_3 = 8 + 2x_4,\, x_3 = 2 \\ 5x_2 = -5 + 2x_3 - x_4,\, x_2 = 0 \\ 2x_1 = 6 + 3x_2 - x_3 + 2x_4,\, x_1 = 1. \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2+2+2=6 \ - \textit{верно}, \\ -4-1=-5 - \textit{верно}, \\ 6+2=8 - \textit{верно}, \\ -7=-7 - \textit{верно}. \end{cases}$$

Ответ: $(1,0,2,-1)$.

Пример. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Решение. $(A/B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix}$. Приведем матрицу (A/B) к ступенчатому виду:

$$(A/B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to 3r_1 - r_3]{r_2 \to r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 12 & 16 & -52 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to 4r_2 - r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ 3x_2 + 2x_3 = -11, \\ -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Решаем систему методом исключения переменных снизу вверх:

$$\begin{cases} x_3 = -1, \\ 3x_2 = -11 - 2x_3,\, x_2 = -3 \\ x_1 = -9 - 2x_2 - 5x_3,\, x_1 = 2. \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2-6-5=-9-\textit{верно}, \\ 2+3-3=2-\textit{верно}, \\ 6+18+1=25-\textit{верно}. \end{cases}$$

Ответ: $(2,-3,-1)$.

Пример. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+8x_3+9x_4=9, \\ x_1+3x_2+5x_3+5x_4=5, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4. \end{cases}$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы и приводим её к ступенчатому виду:

$$(A/B)=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_1 - r_3]{r_2 \to 2r_1 - r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Восстанавливаем систему:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+5x_4=5, \\ x_2+2x_3+x_4=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=1-2x_3-x_4, \\ x_1=5-3+6x_3+3x_4-5x_3-5x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=1-2x_3-x_4, \\ x_1=2+x_3-2x_4. \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2+x_3-2x_4+3-6x_3-3x_4+5x_3+5x_4=5-\textit{верно}, \\ 4+2x_3-4x_4+5-10x_3-5x_4+8x_3+9x_4=9-\textit{верно}, \\ 2+x_3-2x_4+2-4x_3-2x_4+3x_3+4x_4=4-\textit{верно}. \end{cases}$$

Ответ: $(2+c_1-2c_2, 1-2c_1-c_2, c_1, c_2),\ c_1, c_2 \in R.$

Пример. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3-x_4=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=1, \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=2, \\ -3x_1-2x_2+2x_3+x_4=3. \end{cases}$$

Решение.

$$(A/B)=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to 3r_1 + r_4]{\substack{r_2 \to 2r_1 - r_2 \\ r_3 \to r_1 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -17 & 11 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \to 3r_3 - r_2 \\ r_3 \to r_3 \div (-2)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -17 & 11 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \to 2r_2 - r_3 \\ r_4 \to 17r_2 + r_4}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 12 & 21 & 20 \\ 0 & 0 & 96 & 168 & 162 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to 8r_3 - r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 12 & 21 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Восстанавливаем систему:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 9, \\ 12x_3 + 21x_4 = 20, \\ 0 = -2. \end{cases}$$

Система не имеет решений, то есть система несовместна.

Ответ: система несовместна.

Тема 3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Определение. Число λ называется собственным значением квадратной матрицы A порядка n, если можно подобрать такой ненулевой n-мерный вектор $\vec{\mathrm{x}}$, что выполняется равенство $A\vec{\mathrm{x}} = \lambda\vec{\mathrm{x}}$.

Множество всех собственных значений матрицы A совпадает с множеством всех решений уравнения $|A - \lambda\mathrm{E}| = 0$, которое называется характеристическим уравнением матрицы A.

Пример. Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы A. Так как

$$A - \lambda\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

то

$$|A - \lambda\mathrm{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

Следовательно, характеристическое уравнение матрицы A имеет вид:

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим

$$-\lambda^3 + \lambda + 2\lambda + 2 = 0,$$
$$\lambda\left(1 - \lambda^2\right) + 2(\lambda + 1) = 0,$$
$$\lambda(1 - \lambda)(1 + \lambda) + 2(\lambda + 1) = 0,$$
$$(1 + \lambda)(\lambda(1 - \lambda) + 2) = 0,$$
$$(1 + \lambda)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0,$$
$$1 + \lambda = 0 \quad \text{или} \; -\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

Следовательно, матрица A имеет два собственных значения:

$$\lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -1.$$

Ответ: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{\mathrm{x}}$ называется *собственным вектором* квадратной матрицы A, принадлежащим её собственному значению λ, если выполняется равенство $A\vec{\mathrm{x}} = \lambda\vec{\mathrm{x}}$.

Множество всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих её собственному значению λ, совпадает с множеством всех ненулевых решений однородной системы линейных уравнений $(A - \lambda\mathrm{E})\vec{\mathrm{x}} = \vec{0}$. Множество решений этой системы обозначают $A(\lambda)$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Собственные значения матрицы найдём из уравнения $|A-\lambda\mathrm{E}|=0$:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0&0\\1&1-\lambda&1&1\\1&0&1-\lambda&0\\0&1&0&1-\lambda\end{pmatrix}.$$

$$|A-\lambda E|=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)^3-(1-\lambda)\right],$$

$$(1-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)^3-(1-\lambda)\right]=0,$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_2=2.$$

2) Собственные векторы найдём из системы уравнений $(A-\lambda\mathrm{E})\vec{x}=\vec{0}$.

а) $\lambda_1=1$

$$A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}x_1+x_3+x_4=0,\\x_1=0,\\x_2=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=0,\\x_4=-x_3.\end{cases}$$

Следовательно,

$$A(1)=C(0;0;1;-1),\ C\in R.$$

б) $\lambda_2=1$

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}x_1=0,\\x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_1+x_3=0,\\x_2+x_4=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=0,\\x_3=0,\\x_4=-x_2.\end{cases}$$

Следовательно,

$$A(0)=C(0;1;0;-1),\ C\in R.$$

а) $\lambda_3=2$

$$A-\lambda_3 E=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&1&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&1&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-x_1=0,\\x_1-x_2+x_3+x_4=0,\\x_1-x_3=0,\\x_2-x_4=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=x_3=0,\\x_4=x_2.\end{cases}$$

Следовательно,

$$A(2)=C(0;1;0;1),\ C\in R.$$

Ответ: $A(1)=C(0;0;1;-1)$, $A(0)=C(0;1;0;-1)$ $A(2)=C(0;1;0;1)$.

Приложение 1. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Операции над матрицами и их свойства. Примеры.
3. Определители квадратных матриц. Правила вычисления определителей. Примеры.
4. Свойства определителей.
5. Обратная матрица. Способы её нахождения. Примеры.
6. Метод обратной матрицы решения матричных уравнений. Примеры.
7. Линейная зависимость строк матрицы. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Ранг матрицы. Примеры.
8. Системы линейных уравнений. Основная и расширенная матрицы системы. Теорема Кронекера-Капели. Виды систем линейных уравнений.
9. Квадратные неоднородные системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Примеры.
10. Нахождение решений произвольной системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Примеры.
11. Собственные значения квадратных матриц. Примеры.
12. Собственные векторы квадратных матриц. Примеры.

Приложение 2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

1. Дана матрица A (см. таблицу 1). Найдите матрицу A^{-1} и установите, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

2. Проверьте, что система линейных уравнений (см. таблицу 2) является крамеровской и найдите её решение. Выполните проверку.

3. Найдите общее решение системы линейных уравнений (см. таблицу 3) методом Гаусса. Выполните проверку.

4. Найти собственные значения и собственные векторы матриц (см. таблицу 4).

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Таблица 2. **Варианты задания 2**

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

2	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$	17	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_3 = -1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2. \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$	23	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$	25	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_3 = -1. \end{cases}$	27	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

14	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вари-ант	Система уравнений	Вари-ант	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2, \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -13, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 9, \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$
7	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$

8	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=-2, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=7, \\ 2x_1-4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=1 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=4, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=6, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=2, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=5 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_5=2, \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=-4, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=1, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=-7 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=10, \\ 8x_1+4x_2+2x_3+3x_5=5, \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=7 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=1, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=-1, \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=6, \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4+2x_5=4, \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=8 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5=8, \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=-2, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4-3x_5=-3, \\ x_1+7x_2+6x_3-2x_4+6x_5=2, \\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4+9x_5=-7, \\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5=-6 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+8x_5=5, \\ 10x_1-5x_2+5x_3+9x_4+15x_5=10, \\ 4x_1-2x_2+x_3+2x_4+2x_5=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4+11x_5=8 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 5x_1+6x_2+x_3+10x_4+7x_5=3, \\ 5x_1+x_2+2x_3+5x_4+4x_5=7, \\ 4x_1+3x_2+x_3+7x_4+5x_5=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5=3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=3, \\ x_1-3x_2+x_3-x_5=-2, \\ 4x_1-7x_2+5x_3-x_4-2x_5=-1, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-3x_4+2x_5=3, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4-3x_5=2, \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4-2x_5=4, \\ 2x_1+3x_2-5x_3-17x_4+10x_5=-7 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5, \\ 3x_1-x_2-x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3, \\ 4x_1-4x_2-2x_3-3x_5=-1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 5x_2-x_3+5x_4+3x_5=-4, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=4, \\ x_1+x_2+3x_3+2x_5=1, \\ -3x_1+3x_2-2x_3+x_4=-7 \end{cases}$

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вари-ант	Матрица	Вари-ант	Матрица	Вари-ант	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортаковский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. — 3-е изд., стер. — Москва: ИНФРА-М, 2020. - 592 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-010586-4. - Текст: электронный. - URL: (Доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1045621).

2. Киркинский А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / Киркинский А.С. - Москва: Академический Проект, 2020. - 258 с. (Gaudeamus) - ISBN 978-5-8291-3039-8. - Текст: электронный // ЭБС "Консультант студента": [сайт]. - URL: (Доступно в ЭБС «Консультант студента», режим доступа https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785829130398.html).

3. Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 472 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=558399).

4. Протасов Ю.М, Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Протасов Ю.М. - М.: ФЛИНТА, 2017. - 168 с. - ISBN 978-5-9765-0956-6 - Текст: электронный // [сайт]. - URL: (доступно в ЭБС «Консультант студента», режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976509566.html).

5. Рудык Б.М. Линейная алгебра: учебное пособие / Б.М. Рудык. - Москва: ИНФРА-М, 2019. - 318 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004533-7. - Текст: электронный. - URL: (Доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1010102).

6 Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 544 с. - ISBN 978-5-9776-0258-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1015326.

7. Шершнев В.Г Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 168 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=558491

8. Элементы линейной алгебры: Учебное пособие / Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Жукова В.А. - Ставрополь:Сервисшкола, 2017. - 88 с.: ISBN. - Текст: электронный. - URL: (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: https://new.znanium.com/catalog/product/976992).

Екатерина Александровна **Голубева**

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.