МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт экономики и предпринимательства

Болдыревский П.Б.
Граница Ю.В.
Винник В.К.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов ННГУ, обучающихся по направлению 38.03.01 Экономика

Нижний Новгород

2022

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1

Введение в теорию вероятностей и математическую статистику Авторы: Болдыревский П.Б., Граница Ю.В., Винник В.К. учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. - 24 с.

Учебно-методическое пособие «Введение в теорию вероятностей и математическую статистику» для преподавателей и студентов высшего профессионального обучения очной, очно-заочной и заочной формы обучения. Даются рекомендации по изучению курса дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика". Предложен теоретический материал, сопровождающийся примерами решения практических задач.

Рецензент: к. ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования экономических процессов ИЭП Перова В.И.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, Макарова С.Д.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1

Болдыревский П.Б.
Граница Ю.В.
Винник В.К.

Оглавление

Введение

Данное учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов третьего поколения по экономическим специальностям. Включает в себя кратко, но всесторонне изложенный теоретический материал с разобранными на каждую тему практическими заданиями, с объяснением экономического смысла каждого введенного понятия, а также задачи для самостоятельного решения.

Пособие может быть использовано в качестве основной литературы для проведения лекций и практических занятий для студентов очной и заочной формы обучения. При написании пособия были учтены современные требования и компетенции, предъявляемые к бакалавру экономики. Материал был подобран так, чтобы не только можно было уловить суть предмета, но и понять его назначение в современном мире. Содержание данного пособия не только целиком соответствует рабочей программе по дисциплине, но охватывает даже больше необходимого минимума. Некоторые темы приведены для самостоятельного разбора студентами. Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» является важнейшей частью модуля «Математические методы анализа». Ее прикладная значимость в экономике достаточно велика. На ней зиждется эконометрика, многомерный статистический анализ, нейронные сети, распознавание образов и многие другие научные области. Современный экономист должен уметь использовать аппарат математической статистики на высоком уровне.

Можно сказать, что жизнь человека, да и в целом вся окружающая среда состоит из череды некоторых событий. Хотелось бы все эти события не только отслеживать, но и пытаться прогнозировать. При этом стоит понимать, что многие события или, другими словами, явления – случайные, т. е. они могут наступить, а могут не наступить. Например, выиграть в лотерею автомобиль –событие случайное. Задача любой науки, в том числе и экономической, состоит в выявлении и исследовании закономерностей, которым подчиняются реальные процессы. Найденные закономерности, относящиеся к экономике, имеют не только теоретическую ценность, но и широко применяются на практике. Таким образом, очевидно, что необходимо уметь исследовать случайные явления и находить их закономерности. Этим как рази занимается теория вероятностей. При этом в названии пособия есть еще «математическая статистика» – что же это такое и где она применяется? Давайте для начала приведем определения, а затем уже поймем принципиальную разницу между теорией вероятностей и математической статистикой.

Т е о р и я в е р о я т н о с т ей – это математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

С л у ч а й н о е я в л е н и е – это явление с неопределенным исходом, происходящее при неоднократном воспроизведении определенного комплекса условий. Стоит отметить, что в природе, технике и экономике в каждом явлении присутствует случайность: в спросе на товар, в погодных условиях и прочем. Существует два подхода к изучению явлений: «детерминистский» и «вероятностный». При первом подходе выделяют основные факторы, характеризующие явление, а при втором – учитывают, помимо основных факторов, второстепенные, которые, если их не учесть, как раз и приводят к случайным возмущениям и искажениям результата.

М а т е м а т и ч е с к а я с т а т и с т и к а – это раздел математики, изучающий математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей. Таким образом, теория вероятностей изучает закономерности случайных явлений на основе абстрактного описания, а математическая статистика уже на основе этого описания оперирует непосредственно результатами конкретных наблюдений. Можно сказать, что теория вероятностей – это базис, фундаментальная надстройка математической статистики, которая уже применяется в реальной жизни. В связи с этим план изучения таков: сначала понять основные моменты теории вероятностей, а затем на их основе уже рассмотреть инструментарий математической статистики.

Как уже стало понятно, теория вероятностей позволяет находить степень объективной возможности наступления (вероятность)«сложных» событий через «простые», а математическая статистика по наблюдаемым значениям оценивает эту степень либо осуществляет проверку предположений (гипотез) относительно этой степени. Так или иначе, все завязано на событиях, поэтому сейчас настало время перейти к изучению их свойств и операций над ними.

§ 1.Случайные события. Вероятность события

Теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает закономерности в случайных событиях. К основным понятиям теории вероятностей относятся испытания и события.

Под *испытанием (опытом)* понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие.

Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – события.

Случайным событием называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Слово «случайное» для краткости часто опускают и говорят просто «событие». Например, выстрел по цели – это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие в данных условиях называется *достоверным*, если в результате опыта оно непременно должно произойти, и *невозможным*, если оно заведомо не произойдет. Например, выпадание не более шести очков при бросании одной игральной кости – достоверное событие; выпадание десяти очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

События называются *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе. Например, попадание и промах при одном выстреле – это несовместные события.

Говорят, что несколько событий в данном опыте образуют *полную систему* событий, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадании одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий.

События называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадание герба или числа – события равновозможные.

Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Числовая мера степени объективной возможности события – это вероятность события. Вероятность события А обозначается Р(А).

Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию А. Тогда *вероятностью* события А называют отношение m числа исходов, благоприятствующих событию А, к числу всех исходов данного испытания:

$$P(A) = m/n.$$

Эта формула носит название классического определения вероятности.

Если В – достоверное событие, то m=n и P(B)=1; если С – невозможное событие, то m=0 и P(C)=0; если А – случайное событие, то m≤n и P(A) ≤ 1.

Таким образом, вероятность события заключается в следующих пределах: 0≤ P(A)≤ 1.

Пример 7. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность событий: А – появление четного числа очков; В – появление не менее пяти очков; С – появление не более пяти очков.

Решение. Опыт имеет шесть равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков), образующих полную систему.

Событию А благоприятствуют три исхода (выпадание двух, четырех и шести очков), поэтому P(A)=3/6=1/2; событию В – два исхода (выпадание пяти и шести очков), поэтому P(B)=2/6=1/3; событию С – пять исходов (выпадание одного, двух, трех, четырех и пяти очков), поэтому P(C)=5/6.

При вычислении вероятности часто приходится использовать формулы комбинаторики.

Рассмотрим примеры непосредственного вычисления вероятностей.

Пример 8. В урне находится 7 красных и 6 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара красные (событие А)?

Решение. Число равновозможных независимых исходов равно

$$n = C_{13}^{2} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

Событию А благоприятствуют $m = C_{7}^{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ исходов. Следовательно, $P(A) = \frac{21}{78} = \frac{7}{26}$.

Пример 9. В партии из 24 деталей пять бракованных. Из партии выбирают наугад 6 деталей. Найти вероятность того, что среди этих 6 деталей окажутся 2 бракованных (событие В).

Решение. Число равновозможных независимых исходов равно

$$n = C_{24}^{6} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 134596 .$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию B. Среди шести взятых наугад деталей должно быть 2 бракованных и 4 стандартных. Две бракованные детали из пяти можно выбрать $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ способами, а 4 стандартных детали из 19 стандартных деталей можно выбрать $C_{19}^4 = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3876$ способами.

Каждая комбинация бракованных деталей может сочетаться с каждой комбинацией стандартных деталей, поэтому m = 3876 · 10 = 38760. Следовательно,

$$P(B) = \frac{38760}{134596} = \frac{510}{1771} \approx 0{,}3.$$

Пример 10. Девять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что четыре определенные книги окажутся поставленными рядом (событие C).

Решение. Здесь число равновозможных независимых исходов есть $n=P_9=9!$ Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию C. Представим себе, что четыре определенные книги связаны вместе, тогда эту связку можно расположить на полке $P_6=6!$ способами (связка плюс остальные пять книг). Внутри связки четыре книги можно переставлять $P_4=4!$ способами. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждым из P_6 способов образования связки, т.е. $m = 6! \cdot 4!$. Следовательно, $P(C) = \frac{6! \cdot 4!}{9!} = \frac{1}{21}$.

Вопросы и упражнения для самопроверки

1. Какое событие называется невозможным; достоверным?

2. Какие события называются несовместными; равновозможными?

3. Какие события образуют полную систему событий?

4. Что понимается под вероятностью события?

5. Дайте классическое определение вероятности события.

6. а) В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?

б) В урне 4 красных и 7 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара красные?

в) Первенство по футболу оспаривают 18 команд, среди которых 5 лидирующих. Путем жеребьевки команды распределены на две группы по 9 команд в каждой. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу?

Ответы. 6. а) 3/4; б) 6/55; в) 1/3.

§ 2. Понятие суммы событий

Непосредственный подсчет случаев, благоприятствующих данному событию, может оказаться затруднительным. Поэтому для определения вероятности события бывает выгоднее представить данное событие в виде комбинации других более простых. При этом надо знать правила, которым подчиняется вероятность при комбинации событий. Самым простым и важным является правило сложения.

Определение: Суммой двух событий (А+В) называется такое третье событие С, которое состоит в появлении события А или В, или того и другого, если они совместны.

§ 3. Теоремы о сложении вероятностей

Теорема 1. Вероятность наступления одного из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

P(A+B) = P(A) + P(B)

Применение теоремы сложения всегда требует проверки несовместности рассматриваемых событий!

Задача № 11. В лотерее разыгрывается 1000 билетов, на один выигрыш 100 руб., на 5 билетов – 20 руб., на 100 билетов – 5 руб.

Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей по одному лотерейному билету.

Решение.

Пусть A_1 – событие выигрыша 5 руб., тогда

$$P(A_1) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$

Пусть A_2 – событие выигрыша 20 руб., тогда

$$P(A_2) = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

Пусть A_3 – событие выигрыша 100 руб., тогда

$$P(A_3) = \frac{1}{1000}$$

События A_1, A_2, A_3 – несовместные.

Пусть А – событие выигрыша ≥ 20 руб., тогда $A=A_2+A_3$, так как наступит A_2 или A_3, тогда по теореме 1 получим:

$$P(A)=P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{5}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{6}{1000}=0{,}006.$$

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, то есть

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$$

Задача № 12. Найти вероятность, что при подбрасывании двух игральных кубиков хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение.

Введем события:

А – выпадение 6 очков на 1-ом кубике

В – выпадение 6 очков на 2-ом кубике

Ввиду того, что события А и В совместны, то есть 6 очков по условию задачи может появиться либо на одном из кубиков, либо на обоих сразу, то используем теорему 2.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$$

Учитывая, что $P(A)=\frac{1}{6}, P(B)=\frac{1}{6}, P(AB)=\frac{1}{36}$, получаем:

$$P(A+B) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

§ 4. Противоположные события

Обозначим буквами A_1, A_2, …, A_n все равновозможные несовместные события, которые могут появиться в результате некоторого опыта. Такую группу событий называют полной системой событий. Тогда сумма этих событий $(A_1+A_2+\ldots+A_n)$ является достоверным событием, так как одно из них обязательно появится. Следовательно,

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = 1$ или по теореме 1 получим

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) = 1.$$

Если полная система состоит из двух событий, то они называются *противоположными* и обозначаются А и $\overline{A}$, тогда Р(А)+Р($\overline{A}$)=1 или Р(А)=1–Р($\overline{A}$). Обозначив Р(А)=р, Р($\overline{A}$)=q, получим р=1-q.

Задача № 13. В ящике находится 20 белых шаров, 15 черных шаров и 5 цветных. Найти вероятность того, что наудачу взятый шар будет не цветным.

***Решение*.**

I способ. Введем три события – А, В и С.

А – извлечение белого шара, тогда

$$P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

В – извлечение черного шара, тогда

$$P(B) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}.$$

Тогда событие С – извлечение не цветного шара, которое состоит в появлении события А или В, то есть: С = А + В, а поскольку А и В несовместны, то получим:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$$

II способ. Для события С, которое состоит в извлечении не цветного шара есть противоположное событие $\overline{C}$ – извлечение цветного шара, причем $P(\overline{C}) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$, тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

§ 5. Понятие произведения событий

Определение: Произведением двух событий (А · В) называется такое третье событие С, которое состоит в совместном появлении события А и события В.

Два события называются *независимыми*, если наступление события А не изменяет вероятности события В.

Например: 1) два стрелка стреляют в одну цель и делают по одному выстрелу; тогда попадание и промах – независимые события;

2) монета брошена два раза, вероятность появления герба во II испытании не зависит от появления герба или цифры в I испытании.

Два события называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого события.

Например: В ящике 100 деталей, 80 из них – стандартных и 20 – нестандартных. Наудачу берут одну деталь, не возвращая ее в ящик. Если появилась стандартная деталь (соб. А), то вероятность извлечения стандартной детали при втором испытании (соб. В)

$$P(A) = \frac{80}{100} \qquad\qquad P(B) = \frac{79}{99}$$

Если в первом испытании вынута нестандартная деталь, то

$$P(B) = \frac{80}{99}$$

Таким образом, вероятность события В зависит от наступления или ненаступления события А.

События А и В зависимы.

§ 6. Условная вероятность

Пусть события А и В – зависимые, значит вероятность одного из них зависит от появления или непоявления другого.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что событие А уже имело место, называется условной вероятностью и обозначается

$$P(B/A) \text{ или } P_A(B).$$

Например: В урне содержится три белых и три черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (соб. В), если при первом испытании был извлечен черный шар (соб. А).

***Решение*.**

В урне после I испытания 5 шаров, из них 3 белых, значит

$$P(B/A) = \frac{3}{5}.$$

§ 7. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Задача № 14. Имеются 3 ящика, содержащие по 10 деталей. В 1 ящике – 8 стандартных деталей, во 2 – 7 стандартных деталей, в 3 – 9 стандартных деталей. Из каждого ящика вынимают наудачу по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными?

Решение.

События A, B, C – извлечение стандартной детали из 1, 2, 3 ящиков.

P(A) = 0,8 P(B) = 0,7 P(C) = 0,9.

События A, B, C – независимые, поэтому

$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$.

Задача № 15. На фабрике брак при изготовлении каблука составляет 1%, подметки – 4%, верха – 5%.

Какова вероятность покупки хорошей обуви?

Решение.

A – выпуск хорошего каблука $\overline{A}$ - брак каблука

B – выпуск хорошей подметки $\overline{B}$ - брак подметки

C – выпуск хорошего верха $\overline{C}$ - брак верха

$P(\overline{A}) = 0{,}01$ $P(\overline{B}) = 0{,}04$ $P(\overline{C}) = 0{,}05$

$P(A) = 1-0{,}01=0{,}99$ $P(B)= 1-0{,}04=0{,}96$ $P(C) = 1-0{,}05=0{,}95$

$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}99 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}95 = 0{,}913$.

P(хорошей пары) = P(хор. лев. бот. и хор. пр. бот.) = 0,913 · 0,913 = 0,833.

§ 8. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления 2-х зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленного при предположении, что первое событие уже наступило.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \text{ или}$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Задача № 16. Студент должен сдать по математике зачет и экзамен. Вероятность сдачи зачета равна 0,8. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого для студента равна 0,9. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен.

Решение. Введем события

A – сдача студентом зачета, тогда P(A) = 0,8.

B – сдача студентом экзамена после A, тогда P(B/A)=0,9, так как B зависит от A, следовательно, $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$.

Задача № 17. Буквы слова «задача» написаны на отдельных карточках. Наудачу извлекают по одной четыре карточки без возврата. Какова вероятность того, что при этом получится слово «дача»?

Решение:

Введем события

A_1 – извлечение буквы «д», тогда $P(A_1) = \frac{1}{6}$

A_2 – извлечение буквы «а», тогда $P(A_2/A_1) = \frac{3}{5}$,

так как после наступления события A_1 осталось 5 карточек, из которых три содержат букву «а», следовательно, A_2 и A_1 – зависимые события.

A_3 – извлечение буквы «ч», тогда $P(A_3/A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{4}$, так как A_3 зависит от наступления событий A_1 и A_2.

A_4 – извлечение буквы «а», тогда $P(A_4/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{2}{3}$, так как A_4 зависит от наступления событий A_1 и A_2 и A_3.

В – событие, которое состоит в появлении слова «дача», то есть наступят события A_1 и A_2 и A_3 и A_4, которые являются зависимыми, поэтому $P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{60}$.

Задача № 18. Вероятность попадания в цель каждого из трех орудий соответственно равна $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Решение.

Пусть события A_1, A_2, A_3 – попадание в цель первым, вторым и третьим орудием, тогда $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}9$. Тогда события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ - промахи первого, второго и третьего орудия, следовательно

$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 = q_1$.

$P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 = q_2$.

$P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 = q_3$.

Событие А состоит в том, чтобы хотя бы одно орудие попало в цель, тогда противоположное событие $\overline{A}$ будет состоять в том, что все три орудия промахнутся, то есть $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$, тогда

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$$

Вычислим искомую вероятность

$P(A) = 1 – P(\overline{A}) = 1 – 0{,}006 = 0{,}994$.

§ 9. Формула полной вероятности

Если событие А наступает только с одним из событий B_1, B_2, B_3, … B_n, которые образуют полную систему событий, поэтому $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$, причем известны условные вероятности наступления события А, а именно $P(A/B_1)$, $P(A/B_2)$ … $P(A/B_n)$, тогда полная вероятность события А вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$$

или, используя знак суммирования, эта формула выглядит следующим образом:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i).$$

Задача № 19. Партия деталей содержит

20% деталей, изготовленных заводом № 1

30% деталей, изготовленных заводом № 2

50% деталей, изготовленных заводом № 3

Соответственные вероятности выпуска брака 0,05; 0,01; 0,06.

Чему равна вероятность того, что наудачу взятая из партии деталь окажется бракованной?

Решение.

А – бракованная деталь,

B_1 – деталь с завода № 1 $\qquad P(B_1) = \dfrac{20}{100}.$

B_2 – деталь с завода № 2 $\qquad P(B_2) = \dfrac{30}{100}$

B_3 – деталь с завода № 3 $\qquad P(B_3) = \dfrac{50}{100}$

$P(A/B_1) = 0{,}05 \qquad P(A/B_2) = 0{,}01 \qquad P(A/B_3) = 0{,}06$

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 = 0{,}043.$

§ 10. Вероятность гипотез. Формула Байеса

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную систему событий. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами.

Вероятность появления события А определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие А. Определим, каковы вероятности гипотез в связи с тем, что событие А уже наступило, то есть вычислим условные вероятности $P(B_1/A)$, $P(B_2/A)$, …, $P(B_i/A)$, …, $P(B_n/A)$.

Учитывая, что события А и B_i зависимые, и применив теорему умножения зависимых событий, имеем:

$$P(A \cdot B_i) = P(A) \cdot P(B_i/A) = P(B_i) \cdot P(A/B_i).$$

Отсюда получим формулу Байеса:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)},$$

где P(A) – полная вероятность наступления события А.

Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Задача № 20. На сборку поступают детали с 3-х станков:

50% деталей поступает с 1 станка, дающего 1% брака;

30% деталей поступает со 2 станка, дающего 2% брака;

20% деталей поступает с 3 станка, дающего 1,5% брака.

Наугад извлечена бракованная деталь из поступивших на сборку. Найти вероятность того, что эта бракованная деталь изготовлена

а) на 1 станке

б) на 2 станке

в) на 3 станке

Решение.

А – бракованная деталь.

B_1 – дет. выпуск, I станком $P(B_1) = \dfrac{50}{100}$ $P(A/B_1) = \dfrac{1}{100}$

B_2 – дет. выпуск, II станком $P(B_2) = \dfrac{30}{100}$ $P(A/B_2) = \dfrac{2}{100}$

B_3 – дет. выпуск, III станком $P(B_3) = \dfrac{20}{100}$ $P(A/B_3) = \dfrac{1{,}5}{100}$,

тогда $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}015 = 0{,}014$.

Вычислим вероятности гипотезы, что извлеченная сборщиком бракованная деталь изготовлена

а) на 1-ом станке, а именно:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,01}{0,014} = 0,357;$$

б) на 2-ом станке:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,02}{0,014} = 0,429;$$

в) на 3-ем станке:

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,015}{0,014} = 0,214.$$

Правильность вычислений подтверждается тем, что:

$$P(B_1/A) + P(B_2/A) + P(B_3/A) = 0,357 + 0,429 + 0,214 = 1.$$

§ 11. Статистическое определение вероятности

Определение № 1. Испытания называются независимыми относительно события А, если вероятность появления события А в каждом из этих испытаний не зависит от результата, полученного в других испытаниях.

Например: многократные подбрасывания монеты, серия выстрелов из винтовки по цели, многочисленные вызовы на АТС – являются повторными независимыми испытаниями.

Рассмотрим понятие частоты испытания. Допустим, производится n независимых однотипных испытаний, одним из исходов которых является данное событие А.

Определение № 2. Отношение числа появлений m события А к общему числу испытаний n называется относительной частотой события А.

Обозначив через $W_n(A)$ относительную частоту события А при n испытаниях, будем иметь:

$$W_n(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Очевидно, что $0 \le m \le n$, тогда

$$0 \le W_n(A) \le 1.$$

Из формулы (1) получаем:

$$m = W_n(A) \cdot n \qquad (2),$$

то есть число появлений события A равно его относительной частоте, умноженной на число испытаний.

В результате наблюдений и экспериментов установлено, что частота W(A) при достаточно большом количестве испытаний, то есть когда $n \to \infty$, приобретает свойство устойчивости и колеблется около некоторого постоянного числа p.

Определение № 3. Под вероятностью события A в статистическом смысле понимается предел его относительной частоты при неограниченно растущем числе испытаний, то есть:

$$p \approx W(A) \quad \text{при } n \to \infty \qquad (3)$$

С этой точки зрения величина

$$\overline{m} = n \cdot p \qquad (4)$$

представляет собой среднее значение числа появлений события A при n испытаниях.

Замечание: вероятности события A в классическом и статистическом смыслах совпадают между собой.

Задача № 21. В результате ряда испытаний было обнаружено, что при 200 выстрелах стрелок попадает в цель в среднем 190 раз.

Какова вероятность поражения цели этим стрелком? Сколько для него попаданий в цель можно ожидать при 1000 выстрелах?

Решение:

1. Используя статистическое определение вероятности (3), имеем:

$$p \approx W(A) = \frac{190}{200} = 0{,}95,$$

где n = 200 – число испытаний;

m = 190 – число наступлений события A, то есть попадание в цель при одном выстреле.

2. Чтобы найти число попаданий при 1000 выстрелах, используем формулу (4):

$$\overline{m} = 1000 \cdot 0{,}95 = 950 \text{ попаданий.}$$

§ 12 Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться или не появиться, то есть наступит $\overline{A}$. Пусть вероятность наступления события A в каждом испытании равна P(A) = p, тогда $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Поставим перед собой задачу: вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится k раз и, следовательно, не осуществится (n – k) раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности, она может меняться, включая появление и события $\overline{A}$.

Эта вероятность вычисляется по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad (5)$$

Замечание: если в данной задаче нужно вычислить вероятность наступления события A от k_1 до k_m раз при n независимых испытаниях, то формула имеет вид:

$$P_n(k_1 \le k \le k_m) = \sum_{i=1}^{m} P_n(k_i) \qquad (6)$$

Задача № 22. Вероятность того, что расход электроэнергии в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии:

1) не превысит нормы: а) в течение 4-х суток; б) в течение от 3-х до 4-х суток;

2) превысит норму по крайней мере в течение двух суток.

Решение:

1. Введем событие A – это нормальный расход энергии в течение суток, поэтому P(A) = 0,75, тогда событие $\overline{A}$ – превышение нормы расхода электроэнергии в течение суток, то есть:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

Ответим на поставленные вопросы задачи:

а) число испытаний n = 6.

Событие A наступит 4 раза, то есть k = 4, тогда p = P(A) = 0,75;

$$q = P(\overline{A}) = 0{,}25.$$

Используя формулу Бернулли (5), получим:

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}30;$$

б) число испытаний n = 6.

Событие A наступит от 3-х до 4-х раз, то есть 3 ≤ k ≤ 4, тогда $p = P(A) = 0{,}75$; $q = P(\overline{A}) = 0{,}25$.

Используя формулы (6), (5), получим:

$$P_6(3 \le k \le 4) = P_6(3) + P_6(4) = C_6^3 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^3 + C_6^4 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 =$$
$$= 0{,}131 + 0{,}30 = 0{,}431.$$

2. Число испытаний n = 6.

Событие A наступит от 0 до 2-х раз, то есть 0 ≤ k ≤ 2, тогда $p = P(\overline{A}) = 0{,}25$; $q = P(A) = 0{,}75$.

Используя формулы (6), (5), получим:

$$P_6(0 \le k \le 2) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^6 +$$
$$+ C_6^1 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^5 + C_6^2 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^4 = 0{,}178 + 0{,}356 + 0{,}30 = 0{,}478.$$

Контрольные задания

1. Брокер может приобрести акции одной из трех компаний А, В, С. Риск прогореть при покупке акций компании А составляет 50 %, В – 40 %, С – 20 %. Брокер решает вложить все деньги в акции одной случайно выбранной компании. Какова вероятность того, что брокер прогорит?

2. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна p=0,75. Какова вероятность события, заключающегося в том, что в ближайшие шесть суток расход электроэнергии в течение четырех суток не превысит нормы?

3. Перечислите основные числовые характеристики случайных величин (СВ). Как они вычисляются для дискретных и непрерывных СВ?

4. Задан закон распределения СВ X:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,06	0,29	0,44	0,21

Необходимо: а) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, коэффициент вариации $V(X)$; б) определить функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

5. Следующая таблица представляет распределение годовой прибыли (X) некоторой фирмы:

x_i	–10	–5	0	10	15	20
p_i	0,05	0,15	0,25	0,30	0,20	0,05

Необходимо определить ожидаемую прибыль, среднее квадратическое отклонение. Определить вероятность положительной прибыли.

6. СВ X распределена по нормальному закону с параметрами m = 15, σ^2 = 0,04.

Написать выражения для плотности вероятности и функции распределения этой СВ. С помощью правила трех сигм определить границы значений СВ *X*.

7. Запишите формулы для расчета дисперсии суммы (разности) двух СВ, коррелирующих друг с другом.

8. Как вычисляются основные выборочные числовые характеристики?

9. Приведите формулы для расчета выборочных ковариаций и коэффициента корреляции.

10. Анализируется размер дивидендов по акциям компании А и компании В. Для этого отобраны данные за последние 10 лет:

размер годовых дивидендов (в процентах);

комп. А – 5, 8, 6, –5, –3, –5, 10, 15, 7, 3

комп. В – 7, 5, 3, 3, 0, 3, 5, 2, 4, 6.

Необходимо оценить ожидаемый размер дивидендов и риск от вложений в ту или иную компанию.

11. Данные наблюдений за СВ X и СВ Y представлены следующей таблицей:

X	1	2	3	4	5	6
Y	9	6	4	3	2	2

Необходимо вычислить ковариацию и коэффициент корреляции; сделать выводы о линейной зависимости между величинами *X* и *Y* (о силе и направлении).

Список литературы

1. Перов А.А., Перова В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: практическое руководство по решению задач. Том 1. Теория вероятностей: Учебное пособие. –Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2019. –161 с.

2. Перов А.А.,Перова В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: практическое руко-водство по решению задач. Том 2. Математическая статистика: Учебное пособие. –Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2019. –116 с.

3. Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Сагитов Р.В., Швед Е.В., Матвеев В.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Под ред. В.И. Матвеева. - 2-е изд., испр. и доп. –М.: ИНФРА-М, 2017. –289 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=370899 4. Сапожников П.Н., Макаров А.А., Радионова М.В. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах: учеб. пособие. –М.:КУРС:ИНФРА-М, 2016. –495 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=548242#

4. Тихов М.С., Котельникова М.В. Контрольные работы по теории вероятностей: учебно-методическое пособие по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика" ФОЭР, рег. No 824.14.17. Год размещения 2014.

5. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А., Зорин В.А. Практикум по теории вероятностей. Часть 1: Прак-тикум. ФОЭР, рег. No948-15-08. Год размещения 2015.

6. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А., Зорин В.А. Практикум по теории вероятностей. Часть 2: Прак-тикум. ФОЭР, рег. No949-15-09. Год размещения 2015.

7. Сморкалова В.М. Задачи оценивания неизвестных параметров распределений. Учебно-методическое пособие. ФОЭР, рег. No 982.15.08. Год размещения 2015.

Павел Борисович **Болдыревский**

Юлия Валентиновна **Граница**

Валерия Константиновна **Винник**

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.