МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского"

Е.Л. Панкратов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2022

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: Автор: Панкратов Е.Л. учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. - 110 с.

Рецензент: к.т.н., доцент **В.С. Громницкий**
к.ф.-м.н. доцент **М.Е. Елисеев**

Учебное пособие «Дифференциальные уравнения» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», с соответствующим разделом курса «Математика». Оно содержит основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, основные аналитические методы их решения и ряд приложений в экономике. Для закрепления теоретических знаний по дифференциальным уравнениям в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **С.Д. Макарова**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В настоящее время имеется большое количество экономических, для описания которых необходимо решать дифференциальные уравнения. В рамках проведения такого моделирования необходимо решать как линейные, так и нелинейные дифференциальные уравнения с постоянными и переменными параметрами. В данном пособии приведен обзор методов решения обыкновенных дифференциальные уравнения. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОК-15 и ОК-16 образовательного стандарта специальности 38.05. 01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела математики «Дифференциальные уравнения» курса «Математика» студенты должны знать основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, уметь решать обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с частными производными, а также системы дифференциальных уравнений, уметь применять дифференциальные уравнения для прогноза экономических процессов.

I. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. *Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений*

Определение 1

Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию независимой переменной $y(x)$ и производные функции $y\,(x)$ до n-го порядка включительно называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Определение 2

Пусть $F\,(x,y,\ldots)$ - непрерывная функция. Уравнение

$$F\left(x, y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}, \frac{d^2 y(x)}{d^2 x}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{d^n x}\right) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, неразрешённым относительно старшей производной.

Определение 3

Пусть $f(x,y,\ldots)$ - непрерывная функция. Уравнение

$$\frac{d^n y(x)}{d^n x} = f\left(x, y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}, \frac{d^2 y(x)}{d^2 x}, \ldots, \frac{d^{n-1} y(x)}{d^{n-1} x}\right)$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешённым относительно старшей производной.

Определение 4

Функция $y = y\,(x)$ называется решением (интегралом) дифференциального уравнения, если при её подстановке в данное уравнение оно обращается в тождество.

Определение 5

Общим решением дифференциального уравнения называется его решение, содержащее все постоянные интегрирования.

Замечание 1

Количество постоянных интегрирования совпадает с порядком уравнения.

Определение 6

Если в общем решении выбрано конкретное значение постоянных интегрирования, то решение называется частным.

Определение 7

Особым решением называется такое решением дифференциального уравнения, для всех точек которого нарушается свойство единственности. Например, отдельные слагаемые могут обращаться в нуль или бесконечность. Особое решение состоит из особых точек.

Пример 1

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{y}{x},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Правые части данных уравнений, а также уравнений

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y},\ \frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y},\ \frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{x+y},\ \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$$

разрывны в точке x=0 и y=0. Интегрирование исходных уравнений позволяет получить следующие решения

$$y=Cx^2,\ y=C/x,\ \sqrt{x^2+y^2}=C\exp\left[arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right],\ x^2+y^2=C^2.$$

Данные особые точки называются соответственно узлом, седлом, фокусом и центром.

Определение 8

График частного решения называется интегральной кривой.

Определение 9

Если решение дифференциального уравнения $y=y(x)$ удовлетворяет начальным условиям, т.е. при $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0$, …, $y^{(n)}(x_0)=y^{(n)}{}_0$, то считается, что оно удовлетворяет задаче Коши.

Определение 10

Если решение дифференциального уравнения $y=y(x)$ на интервале $x\in[a,b]$ удовлетворяет граничным условиям, т.е. при $x=a$ $y(a)=y_a$ и при $x=b$ $y(b)=y_b$, то считается, что оно удовлетворяет краевой задаче.

1.2. Задачи, приводящие к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

Необходимость решения дифференциальных уравнений возникает в ряде прикладных задачах. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2

Рассмотрим точку, движущуюся вдоль оси Оx со скоростью $v(t)$. Будем также считать, что известна абсцисса x_0 этой точки в некоторый момент времени t_0, принятый за начальный. Найдём закон движения данной точки. Под законом движения понимается зависимость абсциссы движущейся точки от времени. Такая задача сводится к необходимости нахождения решения следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt}=v(t).$$

Общее решение такого уравнения имеет следующий вид

$$x(t)=C+\int_0^t v(\tau)\,d\tau.$$

Решение имеет единственную постоянную интегрирования, но при $t=t_0$ оно должно обращаться в $x=x_0$. Из данного условия получаем

$$C = x_0 - \int_0^{t_0} v(\tau)\, d\tau\,.$$

Тогда

$$x(t) = x_0 - \int_0^{t_0} v(\tau)\, d\tau + \int_0^{t} v(\tau)\, d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau\,.$$

Пример 3

Известно, что скорость распада радия прямо пропорционально наличному количеству радия. Будем считать, что в момент времени t_0 имелось M_0 *г* радия. Определим массу радия в момент времени t. Обозначим коэффициент пропорциональности как $a>0$. Тогда задача сводится к нахождению такого решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\,M(t)}{d\,t} = -a\,M(t),$$

которое при $t=t_0$ обращается в $M=M_0$. Искомым решением будет убывающая во времени экспоненциальная функция

$$M(t) = C\,e^{-a\,t}\,.$$

Наложенное условие позволяет получить

$$C = M_0 e^{a\,t_0}\,.$$

Таким образом, решение рассмотренного уравнения, удовлетворяющее наложенным условиям, имеет следующий вид

$$M(t) = M_0 e^{-a(t-t_0)}.$$

Из рассмотренных примеров следует, что одному и тому же дифференциальному уравнению может удовлетворять большое количество функций. Поэтому для определения искомой функции задавалось не только дифференциальное уравнение, которому она должна удовлетворять, но также и её значение при определённом (например, начальном) значении аргумента. В рассмотренных примерах начальные значения определяли единственным образом соответствующие им решения дифференциальных уравнений. Нахождение решений дифференциального уравнения называется интегрированием данного уравнения.

Пример 4

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора ёмкостью C, катушки индуктивностью L, резистора с сопротивлением R и источника ЭДС E. (см. рис.1 .1). Падение напряжения на первых трёх элементах соответственно

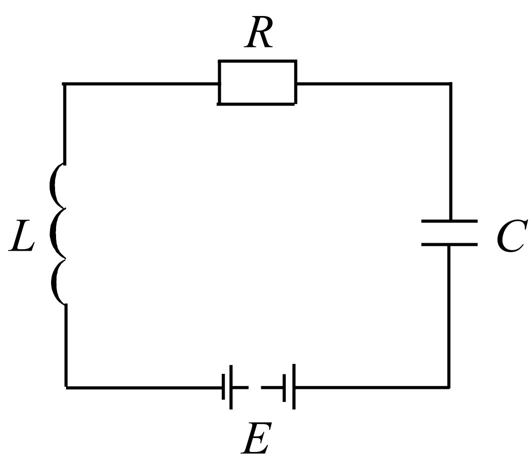

Рис. 1.1.

равно $\frac{q}{C}$ (q - заряд на обкладках конденсатора), $L\frac{di}{dt}$ ($i=\frac{dq}{dt}$ - сила тока) и iR. Второй закон Кирхгофа при постоянном значении индуктивности в данном случае имеет вид

$$L\frac{d^2 q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=E\,.$$

Общее решение такого уравнения имеет представимо в следующей форме

$$q=E\frac{C}{L}+C_1\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}+\frac{R}{2L}\right)t\right]+C_2\exp\left[\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}-\frac{R}{2L}\right)t\right],$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, t - время. Если $\frac{R^2}{4L^2}>\frac{1}{LC}$, получаем затухающее во времени решение исходного дифференциального уравнения. Если $\frac{R^2}{4L^2}<\frac{1}{LC}$, получаем колебательное с уменьшающейся во времени амплитудой решение исходного дифференциального уравнения, т.е.

$$q(t)=E\frac{C}{L}+C_1\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}+\frac{R}{2L}\right)jt\right]+C_2\exp\left[\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}-\frac{R}{2L}\right)jt\right].$$

где $j=\sqrt{-1}$. Эквивалентная форма записи (с учётом формул Эйлера) данного соотношения имеет следующий вид

$$q(t)=E\frac{C}{L}+\widetilde{C}_1\cos\left[-\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}+\frac{R}{2L}\right)t\right]+\widetilde{C}_2\sin\left[\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}-\frac{R}{2L}\right)t\right].$$

Пусть $q(0)=q_0$ и $q'(0)=0$. Из таких начальных условий получаем

$$C_1 = q_0 - E\frac{C}{L} - \left[\left(q_0 - E\frac{C}{L}\right)\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}+\frac{R}{2L}\right) - E\frac{C}{L}\right] \Big/ 2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}},$$

$$C_2 = \left[\left(q_0 - E\frac{C}{L}\right)\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}+\frac{R}{2L}\right) - E\frac{C}{L}\right] \Big/ 2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}.$$

1.3. *Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка*

Определение 11

Уравнения

$$F\left(x, y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}\right) = 0 \text{ и } \frac{d\,y(x)}{d\,x} = f\left(x, y(x)\right),$$

называются обыкновенными дифференциальными уравнением первого порядка неразрешённым и разрешённым относительно первой производной.

Определение 12

Пусть в каждой точке (x,y) определён такой угол α, что $tg\,(\alpha)=f\,(x,y(x))$. Тогда точка (x,y) вместе с отрезком малой длины, составляющим угол α с положительным направлением оси абсцисс, называется линейным элементом.

Определение 13

Совокупность линейных элементов образует поле направлений, наглядно изображающее рассматриваемое дифференциальное уравнение.

Метод изоклин

Рассмотри уравнение

$$\frac{d\,y(x)}{d\,x} = f\left(x, y(x)\right).$$

Функция $k=f\,(x,y(x))$ является угловым коэффициентом касательной к искомой интегральной кривой. Геометрическое место точек, в которых касательные к интегральным кривым сохраняют постоянное значение ($k=const$), называются изоклинами.

Пример 5

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x}.$$

Угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению $k=y/x$, т.е. совпадает с угловым коэффициентом прямой, направленной из начала координат в точку (x,y). Интегральными кривыми в данном случае будут линии $y = Cx$ (C - постоянная интегрирования), т.к. направления этих линий совпадают с направлением поля.

Пример 6

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению $k = -x/y$. Такой угловой коэффициент и угловой коэффициент касательной в предыдущем примере удовлетворяют условию ортогональности (т.е. интегральная кривая перпендикулярна своей касательной), т.е. $-(x/y)(y/x) = -1$. Поэтому поле направлений, определяемое данным дифференциальным уравнением, ортоганально полю направлений, рассмотренному в предыдущем примере. Тогда интегральными кривыми в рассмотренном примере являются две полуокружности $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$, образующие окружность с центром в начале координат и радиусом, равным постоянной интегрирования.

Пример 7

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k = const \Leftrightarrow x^2 + y^2 = k^2.$$

Таким образом, изоклинами являются окружности с центром в начале координат и равным k радиусом. Для построения поля направлений присвоим постоянной k некоторые определённые значения (см. рис. 1.2).

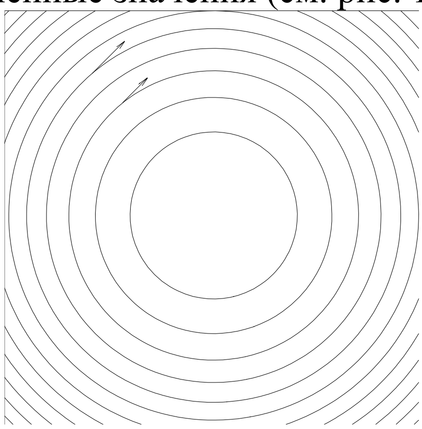

Рис. 1.2.

Теперь можно приближённо провести искомые интегральные кривые, похожие на $y = Cx^2$ (C - постоянная интегрирования).

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 14

Если обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка представимо в следующей форме

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x),$$

где $f(y)\neq 0$, то оно называется уравнением с разделяющимися переменными. Для его решения разделим переменные. Тогда

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx.$$

Интегрирование такого уравнения позволяет получить

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + C.$$

Если необходимо выделить частное решение, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, тогда решение рассматриваемого дифференциального уравнения может быть представлено в следующей форме

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)dx.$$

Пример 8

Решим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Далее разделим переменные. Тогда

$$ydy + xdx = 0.$$

В окончательном виде решение данного уравнения представимо в следующей форме

$$y^2 + x^2 = C.$$

Пример 9

Найдём решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \ln(y)\exp(x^2).$$

Далее разделим переменные. Тогда

$$\frac{d\,y}{\ln(y)} = \exp\left(x^2\right) d\,x\,.$$

В окончательном виде решение данного уравнения представимо в следующей форме

$$\int \frac{d\,y}{\ln(y)} = \int \exp\left(x^2\right) d\,x + C\,.$$

Полученные интегралы не вычисляются в элементарных функциях, но рассматриваемое дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, т.к. решение доведено до квадратур.

Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными
Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f\left(a\,x + b\,y\right),$$

где a и b - постоянные величины. Замена переменных $z = a\,x + b\,y$ позволяет преобразовать данное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Переходя к новым переменным, получаем

$$\frac{d\,z}{d\,x} = a + b\frac{d\,y}{d\,x},\ \frac{d\,z}{d\,x} = a + b\,f(z).$$

Разделение переменных приводит к следующему результату

$$\frac{d\,z}{a + b\,f(z)} = d\,x\,.$$

Общий интеграл такого уравнения имеет вид

$$x = \int \frac{d\,z}{a + b\,f(z)} + C\,.$$

Пример 10
Найдём решение уравнения

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 2\,x + y\,.$$

Замена переменных $z = ax + by$ приводит к следующему результату

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,z}{d\,x} - 2\,,\ \frac{d\,z}{d\,x} - 2 = z\,.$$

Разделение переменных в новом уравнении позволяет получить

$$d\,x = \frac{d\,z}{z+2}.$$

В результате последовательных интегрирования и потенцирования получаем

$$x^2 + ln|C| = ln|z+2| \Rightarrow z = Ce^x - 2.$$

Возвращение к исходным переменным приводит к решению исходного дифференциального уравнения в окончательной форме

$$2x + y = Ce^x - 2 \Leftrightarrow y = Ce^x - 2x - 2.$$

<u>Пример 11</u>

Решим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

Замена переменных $z=x-y$ позволяет получить

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 1 - \frac{d\,z}{d\,x},\ 1 - \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{z} + 1.$$

Такая система уравнений может быть преобразована к одному уравнению

$$\frac{d\,z}{d\,x} = -\frac{1}{z}.$$

Последовательные разделение переменных и интегрирование приводят к следующему решению данного уравнения

$$z\,dz = -dx,\ z^2 = C - 2x.$$

Возвращение к исходным переменным позволяет получить искомое решение в окончательной форме

$$(x-y)^2 = C - 2x \Leftrightarrow y = x \mp \sqrt{C - 2\,x}\,.$$

К уравнениям с разделяющимися переменными также приводятся

Однородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

После подстановки $z=y/x$ или $y=z\cdot x$ получаем

$$\frac{d\,y}{d\,x} = x\frac{d\,z}{d\,x} + z = f\left(z\right).$$

Разделение переменных приводит к следующему результату

$$\frac{d\,z}{f(z)-z}=\frac{d\,x}{x}.$$

Общий интегрирование такого уравнения имеет вид

$$\int\frac{d\,z}{f(z)-z}=\ln|z|+\ln|C|.$$

Потенцирование такого соотношения позволяет получить

$$x=C\exp\left[\int\frac{d\,z}{f(z)-z}\right].$$

Пример 12

Найдём форму зеркала, собирающего параллельные лучи в одну точку. Для решения данной задачи будем считать, что лучи падают параллельно оси Оx справа. Из соображений симметрии следует, что форма поверхности зеркала является поверхностью вращения. Примем плоскость Оxy за мередианную плоскость данной поверхности. В сечении находится искомая кривая $y=y\,(x)$. Если воспользоваться условием, что угол падения φ равен углу отражения (как следствие – равны соответствующие тангенсы, выраженные через x, $y\,(x)$ и $y'(x)$), можно получить искомое дифференциальное уравнение в следующем виде

$$tg(\varphi)=\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{y}{x+\sqrt{y^2+x^2}}.$$

Преобразуем данное уравнение к эквивалентной форме

$$x\,d\,x+y\,d\,y=\sqrt{y^2+x^2}\,d\,x.$$

Умножим полученное уравнение на функцию $\mu=1\big/\sqrt{y^2+x^2}$, т.е.

$$\frac{x\,d\,x+y\,d\,y}{\sqrt{y^2+x^2}}=d\,x.$$

Интегрирование позволяет получить

$$\sqrt{y^2+x^2}=x+C.$$

Решением данного уравнения является квадратичная парабола

$$y^2=2C(x+C/2).$$

Пример 13

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

Такое уравнение может быть преобразовано к однородному уравнению после переноса начала координат в точку (x_1,y_1) пересечения прямых $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$ и $a_2x_2+b_2y_2+c_2=0$. В новых координатах $X=x-x_1$ и $Y=y-y_1$ рассматриваемое уравнение принимает следующий вид

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\,Y/X}{a_2+b_2\,Y/X}\right)=F\left(\frac{Y}{X}\right),$$

соответствующий однородному уравнению.

Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

Если левая часть такого уравнения является дифференциалом некоторой функции $d\,U\,(x,y)$, то рассмотренное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах. Тогда

$$dU(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

Интегрирование такого уравнения позволяет получить

$$U(x,y)=C.$$

Для того, чтобы левая часть исходного уравнения являлась полным дифференциалом функции $d\,U\,(x,y)$ необходимо и достаточно выполнения сформулированного Эйлером условия

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Функцию $U\,(x,y)$ можно также восстановить из полного дифференциала с помощью следующего соотношения

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}N(x,y)dy.$$

<u>Пример 14</u>

Рассмотрим уравнение

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0.$$

Равенство друг другу производных

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x-y^2+3\right)}{\partial x}\Leftrightarrow 1=1$$

подтверждает, что исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Далее вычисляем интеграл $U(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)$. Тогда

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y).$$

Вычисление производной $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ позволяет получить

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=x+\frac{\partial C(y)}{\partial y}=x-y^2+3\Leftrightarrow\frac{\partial C(y)}{\partial y}=3-y^2.$$

Восстановление $C(x,y)$ по её производной приводит к следующему результату

$$C(y)=3y+C_1-\frac{y^3}{3}.$$

В окончательной форме искомая функция $U(x,y)$ определяется соотношением

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+3y-\frac{y^3}{3}+C_1,$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Интегрирующий множитель

Часто левая часть уравнения

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Но иногда удаётся подобрать такой множитель $\mu(x,y)$, который приводит рассматриваемое уравнение в уравнение в полных дифференциалах, т.е.

$$dU(x,y)=\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

В таком случае функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем для рассматриваемого уравнения.

Пример 15

Рассмотрим уравнение

$$x\,dx+y\,dy+x^2(x^2+y^2)\,dx=0.$$

Умножим левую часть уравнения на функцию $\mu(x,y)=1/(x^2+y^2)$, т.е.

$$\frac{x\,dx}{x^2+y^2}+\frac{y\,dy}{x^2+y^2}+x^2dx=0.$$

Проверка с использованием соотношения

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

подтверждает, что полученное соотношение является уравнением в полных дифференциалах. Тогда уравнение с учётом интегрирующего множителя легко интегрируется

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{x^3}{3}=\ln\left|C_1\right|\Leftrightarrow\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^3}{3}=\ln\left(C_1\right)^2.$$

Потенцирование данного соотношения позволяет получить

$$\left(x^2+y^2\right)e^{2x^3/3}=C_1.$$

В общем виде интегрирующий множитель может быть определён с помощью следующего соотношения

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)M(x,y)\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[\mu(x,y)N(x,y)\right]}{\partial x}.$$

Линейное уравнение

Линейным уравнением называется уравнение, линейное относительно искомой функции, т.е.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x),$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – известные функции. Если $f(x)=0$, то оно называется однородным. Если $f(x)\neq 0$, то оно называется неоднородным. Однородное уравнение может быть решено методом разделения переменных. Тогда

$$y=C\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Для решения неоднородного уравнения может быть использован

Метод вариации произвольной постоянной

В рамках данного метода решение однородного уравнения подставляется в исходное неоднородное уравнение. Но при этом считается, что постоянная интегрирования c является функцией независимой переменной x, т.е. $c=c(x)$. После рассмотренной подстановки получаем

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{dc(x)}{dx}=f(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Тогда

$$c(x) = \int f(x) e^{\int p(v) d v} d x + C_1 .$$

<u>Пример 16</u>

Найдём решение уравнения

$$\frac{d y}{d x} - \frac{y}{x} = x^2 .$$

Решением однородного уравнения является следующая функция

$$y=Cx.$$

Далее считаем C функцией x. Тогда

$$x\frac{d C(x)}{d x} + C(x) - C(x)\frac{x}{x} = x^2 \Leftrightarrow x\frac{d C(x)}{d x} = x^2 \Leftrightarrow \frac{d C(x)}{d x} = x .$$

Решение уравнения для $C(x)$ и его подстановка в решение однородного уравнения для $y(x)$ позволяет получить

$$y=x(C_1+x^2/2).$$

<u>Пример 17</u>

Определим функцию $y(x)$ из уравнения

$$\frac{d y}{d x} - y\,ctg(x) = 2x\sin(x).$$

Решением однородного уравнения является функция

$$y=C\cdot sin(x).$$

Вариация постоянной C приводит к следующему результату

$$\frac{d C(x)}{d x}\sin(x) + C(x)\cos(x) - C(x)\sin(x)ctg(x) = 2x\sin(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d C(x)}{d x}\sin(x) = 2x\sin(x) \Leftrightarrow \frac{d C(x)}{d x} = 2x .$$

Общий интеграл данного уравнения определяется соотношением

$$y=(C_1+x^2)sin(x).$$

Некоторые нелинейные уравнения могут быть сведены к линейным заменой переменных. Примером таких уравнений является

Уравнение Бернулли

Данное уравнение имеет следующий вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n,$$

где $n\neq 1$. Разделим правую и левую часть уравнения Бернулли на $y^n(x)$, т.е.

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+\frac{p(x)}{y^{1-n}}=f(x).$$

Замена переменной $z(x)=y^{n-1}(x)$ приводит рассматриваемое уравнение к следующему виду

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=f(x).$$

Пример 18

Решим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}.$$

Преобразуем его к виду

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}+x^2.$$

Проведём замену переменных $y^2=z$. Тогда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+x^2.$$

Интегрирование данного уравнения приводит к следующему результату

$$z=x(C_1+x^2/2).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$y^2=x(C_1+x^2/2).$$

Уравнение Риккарти

Такое уравнение в общем случае имеет следующий вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2=f(x).$$

Данное уравнение не интегрируется в квадратурах, т.е. в общем случае его решение не может быть найдено в элементарных функциях. Однако, если известно одно частное решение уравнения Риккарти $y_1(x)$, то заменой $y(x)=y_1(x)+z(x)$ рассматриваемое уравнение можно преобразовать в уравнение Бернулли. После проведения рассмотренной замены получаем

$$\frac{d\,y_1}{d\,x}+\frac{d\,z}{d\,x}+p(x)y_1+p(x)z+q(x)y_1^2+2q(x)y_1z+q(x)z^2=f(x).$$

Из-за того, что $y_1(x)$ является решением уравнения Риккарти, сумма соответствующих членов уравнения равна нулю. Тогда

$$\frac{d\,z}{d\,x}+\left[p(x)+2q(x)y_1\right]z+q(x)z^2=f(x).$$

Пример 19

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x}=y^2-\frac{2}{x^2}.$$

Частным решением такого уравнения является следующая функция $y_1(x)=1/x$. Полагая $y(x)=z(x)+1/x$, получаем $y'(x)=z'(x)-\frac{1}{x^2}$. Тогда

$$\frac{d\,z}{d\,x}-\frac{1}{x^2}=\left(z+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x^2}\Leftrightarrow\frac{d\,z}{d\,x}=z^2+2\frac{z}{x}.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Приводим его к следующему виду

$$\frac{1}{z^2}\frac{d\,z}{d\,x}=\frac{2}{x\,z}+1.$$

Замена переменных $z=1/u$ позволяет получить

$$\frac{d\,u}{d\,x}=-2\frac{u}{x}-1.$$

Последовательные разделение переменных, интегрирование и потенцирование дают связь между u и x

$$\frac{d\,u}{u}=-2\frac{d\,x}{x};\ \ln|u|=-2\ln|x|+\ln|C|\Leftrightarrow u=\frac{C}{x^2}.$$

Вариация постоянной приводит к следующему результату

$$\frac{1}{x^2}\frac{d\,C(x)}{d\,x}-2\frac{C(x)}{x^3}=-2\frac{C(x)}{x^3}-1\Leftrightarrow\frac{d\,C(x)}{d\,x}=-x^2\Rightarrow C(x)=C_1-\frac{x^3}{3}.$$

Тогда

$$u(x)=\frac{1}{x^2}\left(C_1-\frac{x^3}{3}\right)\Rightarrow z(x)=\frac{3\,x^2}{3C_1-x^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{3x^2}{3C_1-x^3}-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow y(x)=\frac{3x^4+x^3-3C_1}{x^2\left(3C_1-x^3\right)}.$$

Уравнение Клеро

Уравнением Клеро называется следующее уравнение

$$y=x\frac{dy}{dx}-g\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Общий интеграл уравнения Клеро имеет вид

$$y=xC+g(C),$$

где C – произвольная постоянная.

1.4. *Дифференциальные уравнения второго порядка*

В данном разделе рассматриваются методы интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка. Данные методы обобщаемы и на случай уравнений более высокого порядка

Определение 15

Уравнения

$$F\left(x,y(x),\frac{dy(x)}{dx},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=0 \text{ и } \frac{d^2y(x)}{d^2x}=f\left(x,y(x),\frac{dy(x)}{dx}\right)$$

называются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, соответственно неразрешённым и разрешённым относительно старшей производной.

Замечание 2

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка имеет следующий вид: при $x=x_0$ *искомая функция и её первая производная соответственно равны* $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0$.

Понижение порядка дифференциальных уравнений

(*i*) *Уравнение, не содержащее искомой функции*

Рассмотрим уравнение, не содержащее искомой функции, т.е.

$$F\left(x,\frac{dy(x)}{dx},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=0.$$

В данном случае замена искомой функции $z(x)=\dfrac{dy(x)}{dx}$ позволяет понизить порядок уравнения, т.е.

$$F\left(x, z(x), \frac{d\,z(x)}{d\,x}\right) = 0.$$

После нахождения решения z=$z(x)$ функция y=$y(x)$ находится интегрированием

$$y(x) = \int z(x)\,d\,x + C.$$

<u>Пример 20</u>

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} - \frac{1}{x}\frac{d\,y}{d\,x} = 0.$$

Проведём замену искомой функции $z(x) = \dfrac{d\,y(x)}{d\,x}$. Тогда

$$\frac{d\,z}{d\,x} - \frac{z}{x} = 0.$$

Разделение переменных позволяет получить

$$\frac{d\,z}{z} = \frac{d\,x}{x}.$$

Результат интегрирования данного уравнения имеет вид

$$z=C_1 x.$$

Возвращение к исходной искомой функции приводит к следующему соотношению

$$y=C_2+C_1 x^2/2.$$

(*ii*) *Уравнение, не содержащее независимой переменной*

Рассмотрим уравнение, не содержащее независимой переменной, т.е.

$$F\left(y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}, \frac{d^2 y(x)}{d^2 x}\right) = 0.$$

Тогда замена искомой функции $z(x) = \dfrac{d\,y(x)}{d\,x}$ позволяет понизить порядок уравнения, т.е.

$$z = \frac{d\,y}{d\,x};\ \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{d\,z}{d\,y}\frac{d\,y}{d\,x} = z\frac{d\,z}{d\,y}.$$

Таким образом, достигается понижение порядка исходного дифференциального уравнения за счёт его сведения к следующему виду

$$F\left(y(x),\frac{d\,y(x)}{d\,x},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=0\to\tilde{F}\left(y,z(y),\frac{d\,z(y)}{d\,y}\right).$$

Тогда после решения уравнения в переменных (y,z), полученное уравнение формально интегрируется в исходных переменных (x,y).

<u>Пример 21</u>

Рассмотрим уравнение

$$y\frac{d^2y}{d\,x^2}-\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2=0\,.$$

Проведём замену искомой функции $z(x)=\dfrac{d\,y(x)}{d\,x}$. Тогда получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$y\,z\frac{d\,z}{d\,y}-z^2=0\,.$$

Последовательные разделение переменных и интегрирование приводят к следующему результату

$$\frac{d\,z}{z}=\frac{d\,y}{y}\Rightarrow\ln(z)=\ln(y)+\ln(C_1)\Leftrightarrow z=C_1y=\frac{d\,y}{d\,x}\,.$$

Повторные последовательные разделение переменных и интегрирование позволяют получить общее решение исходного уравнения в окончательном виде

$$\frac{d\,y}{y}=C_1d\,x\Rightarrow\ln(y)=C_1\,x+\ln(C_2)\Leftrightarrow y=C_2\,e^{C_1x}\,.$$

(*iii*) *Левая часть уравнения является полным дифференциалом функции*

Рассмотрим уравнение, левая часть которого является производной некоторого дифференциального выражения, т.е.

$$F\left(x,y(x),\frac{d\,y(x)}{d\,x},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=\frac{d}{d\,x}\tilde{F}\left(x,y(x),\frac{d\,y(x)}{d\,x}\right)=0\,.$$

Тогда формальным интегрированием левой и правой частей уравнения получаем так называемый “первый интеграл”, т.е.

$$\tilde{F}\left(x,y(x),\frac{d\,y(x)}{d\,x}\right)=C_1\,.$$

<u>Пример 22</u>

Рассмотрим уравнение

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Такое уравнение эквивалентно следующему

$$\frac{d}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Первый интеграл такого соотношения имеет вид

$$y\frac{dy}{dx}=C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}=C_1.$$

Являющийся в данном случае вторым общий интеграл вычисляется аналогично, т.е.

$$y^2=2C_1x+C_2.$$

<u>Пример 23</u>

Рассмотрим уравнение

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Преобразуем данное уравнение к следующей форме

$$\frac{1}{y^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Первый интеграл данного соотношения имеет вид

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=C_1 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\ln|y|=C_1.$$

Являющийся в данном случае вторым общий интеграл вычисляется аналогично, т.е.

$$\ln|y|=C_1x+\widetilde{C}_2 \Leftrightarrow y=C_2e^{C_1x}.$$

(*iv*) *Понижение порядка уравнения, имеющего одинаковые коэффициенты перед искомой функцией и её производными*

Рассмотрим уравнение, имеющее одинаковые коэффициенты перед искомой функцией и её производными (оно также имеет название однородного относительно искомой функции и её производных), т.е.

$$F\left(x, k\,y(x), k\frac{d\,y(x)}{d\,x}, k\frac{d^2 y(x)}{d^2 x}\right) = k^p \widetilde{F}\left(x, k\,y(x), k\frac{d\,y(x)}{d\,x}, k\frac{d^2 y(x)}{d^2 x}\right).$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу с помощью следующей замены: $y(x) = e^{\int z(x)d\,x}$. Вычисление производных от искомой функции подтверждает понижение порядка, т.е.

$$\frac{d\,y(x)}{d\,x} = z(x)\,e^{\int z(x)d\,x},\ \frac{d^2 y(x)}{d\,x^2} = \left[z^2(x) + \frac{d\,z(x)}{d\,x}\right]e^{\int z(x)d\,x}.$$

Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение следующего вида

$$a_2(x)\frac{d^2 y(x)}{d\,x^2} + a_1(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x} + a_0(x)\,y(x) = b(x). \tag{1}$$

Замечание 3

Порядок указывает на то, что решение уравнения должно содержать две постоянные интегрирования. Если известны два линейно независимых частных решения рассматриваемого дифференциального уравнения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то структура общего решения такого уравнения представима в виде

$$y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x),$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Определение 16

Если $b(x)=0$, то дифференциальное уравнение (1) называется однородным. В противоположном случае данное уравнение называется неоднородным.

Определение 17

Если $a_0(x)=const_0$, $a_1(x)=const_1$, $a_2(x)=const_2$ и $b(x)=const_b$, то дифференциальное уравнение (11.1) называется уравнением с постоянными коэффициентами.

Определение 18

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … называются линейно зависимыми на отрезке $x\in[a,b]$, если существуют такие постоянные величины α_1, α_2, … (хотя бы одна из них не равна нулю), что на данном отрезке выполняется соотношение

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots\equiv 0.$$

Если данное тождество выполняется только при $\alpha_1\equiv\alpha_2\equiv\ldots\equiv 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … называются линейно независимыми на отрезке $x\in[a,b]$.

Метод Эйлера

Метод Эйлера применяется для решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 y(x)}{d x^2} + a_1 \frac{d\, y(x)}{d x} + a_0 y(x) = 0\,.$$

Подстановка $y(x)=e^{\lambda x}$ преобразует рассмотренное дифференциальное уравнение в алгебраическое

$$a_2 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0,$$

называемое “характеристическим”. Далее сокращаем каждый из членов уравнения на ненулевой множитель $e^{\lambda x}$. Тогда параметр λ определяется корнями следующего квадратичного полинома

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Искомые корни определяются с помощью стандартного соотношения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}\,.$$

В окончательной форме искомое решение рассматриваемого уравнения имеет следующий вид

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\,.$$

Если параметры λ получаются комплексными, то в зависимости от значения корней представляет интерес тригонометрическая или смешанная (экспоненциально-тригонометрическая) форма решения дифференциального уравнения (с применением формул Эйлера).

Пример 24

Решим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 4\frac{d\, y}{d x} + 5\, y = 0\,.$$

Подстановка $y(x)=e^{\lambda x}$ позволяет получить следующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Его корни равны следующим величинам: $\lambda_{1,2}=-2\pm j$, $j = \sqrt{-1}$. Тогда искомое решение рассматриваемого уравнения имеет следующий вид

$$y(x)=e^{-2x}[C_1 e^{jx} + C_2 e^{-jx}].$$

После незначительных преобразований с использованием формул Эйлера получаем

$$y(x) = e^{-2x}\left[\widetilde{C}_1 \cos(x) + \widetilde{C}_2 \sin(x)\right].$$

Пример 25

Решим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 3\frac{d y}{d x} + 2 y = 0 .$$

Подстановка $y(x)=e^{\lambda x}$ позволяет получить характеристическое уравнение

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Его корни равны: $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$. Тогда искомое решение данного уравнения имеет следующий вид

$$y(x)=C_1 e^x+C_2 e^{2x}.$$

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные (в случае дифференциального уравнения второго порядка возможно два кратных корня), то решение необходимо искать в другом виде, т.е.

$$y(x)=(C_1+C_2 x)\, e^{\lambda x}.$$

<u>Пример 26</u>
Решим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 4\frac{d y}{d x} + 4 y = 0 .$$

Подстановка $y(x)=e^{\lambda x}$ позволяет получить следующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2-4\lambda+4=0.$$

Его корни равны следующим величинам: $\lambda_1=\lambda_2=2$. Тогда искомое решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(x)=(C_1+C_2 x)\, e^{2x}.$$

Формула Лиувилля

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - два линейно независимых решения однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Если одно из них (например, $y_1(x)$) известно, то второе может быть определено с помощью формулы Лиувилля

$$y_2 = C_1 y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int a_1(x) d\, x\right) d\, x ,$$

где C - произвольная постоянная. Частное решение соответствующего неоднородного уравнения определяется с помощью следующего соотношения

$$y_s = \frac{y_2(x)}{C_1} \int b(x) y_1(x) \exp\left[\int a_1(x) d\, x\right] d\, x - \frac{y_1(x)}{C_1} \int b(x) y_2(x) \exp\left[\int a_1(x) d\, x\right] d\, x + C_2 .$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Рассматриваемое уравнение имеет следующий вид

$$a_2 \frac{d^2 y(x)}{d x^2} + a_1 \frac{d y(x)}{d x} + a_0 y(x) = b.$$

Общее решение данного уравнения представимо в форме

$$y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+y_s(x),$$

где $y_s(x)$ - частное решение дифференциального уравнения, остальная часть - общее решение соответствующего однородного уравнения. Иногда удаётся подобрать частное решение. Например, у уравнения

$$\frac{d^2 y(x)}{d x^2} + y(x) = x$$

частным решением является функция $y_s(x)=x$. Часто частные решения определяют для некоторых специальных зависимостей $b(x)$. Пусть функция $b(x) = Q_k(x) \cdot e^{mx}$, где $Q_k(x)$ - многочлен степени k. Тогда частное решение ищется в виде: $y_s(x) = R_k(x)e^{mx}$ (если m не является корнем характеристического уравнения) или $y_s(x)=x^{q\text{-}1}\cdot R_k(x)e^{mx}$ (если m является q-кратным корнем характеристического уравнения), где $R_k(x)$ - полином с неопределёнными пока коэффициентами. Пусть функция $b(x)=Q_k(x)e^{mx}sin(\omega x)$ или $b(x)=Q_k(x)e^{mx}cos(\omega x)$, где $Q_k(x)$ - многочлен степени k. Тогда частное решение определяется в виде: $y_s(x)=e^{mx}[R_k(x)cos(\omega x)+ S_k(x)sin(\omega x)]$ (если m не является корнем характеристического уравнения) или $y_s(x)=x^{q\text{-}1}e^{mx}[R_k(x)\,cos(\omega x)+S_k(x)sin(\omega x)]$ (если m является q-кратным корнем характеристического уравнения), где $R_k(x)$ и $S_k(x)$ - полиномы с неопределёнными пока коэффициентами.

Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

Если общее решение однородного уравнения найдено, а нахождение частного решения неоднородного уравнения затруднено, то можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Данный метод заключается в том, чтобы в общем решении однородного уравнения

$$y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)$$

объявить произвольные постоянные объявить функциями независимой переменной, т.е.

$$y(x)=C_1(x) y_1(x)+C_2(x) y_2(x)$$

и подобрать их таким образом, чтобы получившееся решение удовлетворяло бы неоднородному уравнению. Для этого необходимо сформулировать два дополнительных условия, которые могут быть представлены в следующей форме

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x} y_1(x) + \dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x} y_2(x) = 0 \\ \dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + \dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} = b(x) \end{cases}.$$

Пример 27

Рассмотрим колебание тела массы m на пружине жёсткости k. Потери энергии учитывать не будем. Зависимость координаты тела от времени описываются вторым законом Ньютона

$$m\frac{d^2x(t)}{d\,t^2} + k\,x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x(t)}{d\,t^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

Общее решение данного уравнения описывается следующим соотношением

$$x(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Такие колебания тела называются собственными. Далее рассмотрим вынужденные колебания тела, т.е. при воздействии внешней силы. Тогда второй закон Ньютона записывается в следующей форме

$$\frac{d^2x(t)}{d\,t^2} + \frac{k}{m}x(t) = f(t).$$

Для нахождения зависимости координаты колеблющегося тела от времени проварьируем произвольные постоянные. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(t)}{d\,t}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) + \dfrac{d\,C_2(t)}{d\,t}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) = 0 \\ -\sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{d\,C_1(t)}{d\,t}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) + \sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{d\,C_2(t)}{d\,t}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) = f(t) \end{cases}.$$

Преобразуем данную систему к следующему виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(t)}{d\,t} = -\sqrt{\dfrac{m}{k}}f(t)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \\ \dfrac{d\,C_2(t)}{d\,t} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}f(t)\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

Интегрирование данной системы позволяет получить следующий результат

$$\begin{cases} C_1(t) = -\sqrt{\dfrac{m}{k}} \int f(t) \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) d\,t + \widetilde{C}_1 \\ C_2(t) = \sqrt{\dfrac{m}{k}} \int f(t) \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) d\,t + \widetilde{C}_2 \end{cases}$$

Закон изменения координаты колеблющегося тела под действием внешней силы в окончательном виде определяется следующим соотношением

$$x(t) = \left[\sqrt{\frac{m}{k}} \int f(t) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) d\,t + \widetilde{C}_1\right] \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) +$$

$$+ \left[\sqrt{\frac{m}{k}} \int f(t) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) d\,t + \widetilde{C}_2\right] \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right),$$

где $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ - постоянные интегрирования. В качестве частного случая внешней силы рассмотрим гармоническое воздействие $f(t)=A\cos(\omega t)$. Тогда

$$x(t) = \left[\widetilde{C}_1 A \sqrt{\frac{m}{k}} \int \cos(\omega\, t) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) d\,t\right] \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \times$$

$$\times \left[A \sqrt{\frac{m}{k}} \int \cos(\omega t) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) d\,t + \widetilde{C}_2\right] = \left\{\widetilde{C}_1 + \frac{A\sqrt{m/k}}{2\left(\sqrt{k/m} - \omega\right)} \cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} - \omega\right) t\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{A\sqrt{m/k}}{2\left(\sqrt{k/m} + \omega\right)} \cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \omega\right) t\right]\right\} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right).$$

Из данного соотношения следует, что с уменьшением разницы между частотой внешнего воздействия ω и собственной частотой колебаний $\sqrt{k/m}$ неограниченно увеличивается амплитуда колебаний тела. Такое явление называется “резонанс”.

1.5. *Системы линейных дифференциальных уравнений.*

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

К нормальным системам относятся системы следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) \\ \dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) \\ \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) \end{cases}$$

Пусть коэффициенты уравнений постоянны. Для нахождения решения такой системы решим следующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Каждому корню λ_i характеристического уравнения соответствует система частных решений

$$y_1(x)=A_1 exp(\lambda_i x),\ y_2(x)=A_2 exp(\lambda_i x),\ \ldots,\ y_n(x)=A_n exp(\lambda_i x).$$

Коэффициенты A_i определяются из следующей системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22}-\lambda)A_2 + \ldots + a_{2n}A_n = 0 \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)A_n = 0 \end{cases}$$

Из этой системы могут быть определены только отношения A_i. Поэтому полученная данным способом система частных решений для каждого λ_i будет содержать единственную произвольную постоянную. Если все корни характеристического уравнения различны, то сумма всех частных решений будет содержать n независимых произвольных постоянных. Такая сумма частных решений даёт общее решение исходной системы дифференциальных уравнений. Если хотя бы один корень λ_i характеристического уравнения имеет кратность q, то этому корню будет соответствовать система частных решений вида

$$y_1(x)=A_1(x)\ exp(\lambda_i x),\ y_2(x)=A_2(x)\ exp(\lambda_i x),\ \ldots,\ y_n(x)=A_n(x)\ exp(\lambda_i x),$$

где $A_i(x)$ - многочлены степени не выше q-1. После подстановки этих выражения с неопределёнными коэффициентами в данную систему и приравнивания (после сокращения экспоненциального множителя) коэффициенты при одинаковых степенях x в правых и левых частях равенств получаются уравнения, позволяющие определить все неизвестные коэффициенты.

Пример 28

Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} = 2y_1(x) + 2y_2(x) - y_3(x) \\ \dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} = -2y_1(x) + 4y_2(x) + y_3(x) \\ \dfrac{d\,y_3(x)}{d\,x} = -3y_1(x) + 8y_2(x) + 2y_3(x) \end{cases}$$

Характеристическое уравнение данной системы имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & 1 \\ -3 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-6)(\lambda-1)^2 = 0.$$

Для простого корня λ=6 получается следующая система уравнений для коэффициентов A_i, $i \in [1,3]$

$$\begin{cases} -4A_1 + 2A_2 - A_3 = 0 \\ -2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0 \\ -3A_1 + 8A_2 - 4A_3 = 0 \end{cases}$$

Корни этой системы равны следующим величинам: A_1=0, A_2=A_3/2=C_1. Тогда: $y_1(x)$=0, $y_2(x)$=C_1e^{6x}, $y_3(x)$=$2C_1e^{6x}$. Для кратного корня λ=1 искомые решения системы с учётом неопределённых коэффициентов определяются соотношениями

$$y_1(x)=(P_1x+Q_1)e^x,\ y_2(x)=(P_2x+Q_2)e^x,\ y_3(x)=(P_3x+Q_3)e^x.$$

После подстановки предполагаемой формы решения в исходную систему уравнений, сокращения на e^x и приведения подобных получаем систему уравнений для коэффициентов P_i и Q_i

$$\begin{cases} P_1 + (P_1x + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3)x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3) \\ P_2 + (P_2x + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3)x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3) \\ P_3 + (P_3x + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3)x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3) \end{cases}$$

Приравнивание друг другу коэффициентов при различных степенях x преобразует полученную систему в следующие две

$$\begin{cases} P_1 = 2P_1 + 2P_2 - P_3 \\ P_2 = -2P_1 + 4P_2 + P_3 \\ P_3 = -3P_1 + 8P_2 + 2P_3 \end{cases}; \quad \begin{cases} P_1 + Q_1 = 2Q_1 + 2Q_2 - Q_3 \\ P_2 + Q_2 = -2Q_1 + 4Q_2 + Q_3 \\ P_3 + Q_3 = -3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3 \end{cases}$$

Решение этих систем позволяет получить

$$P_1=5C_2,\ P_2=C_2,\ P_3=7C_2;\ Q_1=5C_3\text{-}6C_2,\ Q_2=C_2,\ Q_3=7C_3\text{-}11C_2.$$

В таком случае общее решение уравнения имеет вид

$$y_1(x)=(5C_2x+5C_3-6C_2)\,e^x,\ y_2(x)=C_1e^{6x}+(C_2x+C_3)\,e^x,\ y_3(x)=2C_1e^{6x}+(7C_2x+7C_3-11C_2)\,e^x.$$

Системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассматриваемые системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+a_{12}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x}+b_{11}y_1(x)+b_{12}y_2(x)+\ldots+b_{1n}y_n(x)=0\\ a_{21}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+a_{22}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x}+b_{21}y_1(x)+b_{22}y_2(x)+\ldots+b_{2n}y_n(x)=0\\ \quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\ a_{n1}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+a_{n2}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x}+b_{n1}y_1(x)+b_{n2}y_2(x)+\ldots+b_{nn}y_n(x)=0 \end{cases}$$

Данная система может быть также записана в более компактной форме

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{d\,y_k(x)}{d\,x}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}y_k(x)=0,\ i\in[1,n].$$

Если определитель матрицы, состоящей из коэффициентов a_{ik}, не равен нулю, то данная система может быть приведена к нормальному виду. Однако решение рассматриваемой системы может быть получено без её преобразования. Характеристическое уравнение данной системы имеет следующий вид: $|a_{ik}\lambda+b_{ik}|=0$. Коэффициенты A_i, соответствующие простому корню λ_i, определяется из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\lambda_i+b_{ik}\right)A_k=0,\ i\in[1,n].$$

В остальном методика нахождения решения данной системы та же, что и в случае нормальной системы. Системы дифференциальных уравнений, у которых определитель матрицы, состоящей из коэффициентов a_{ik}, равен нулю, необходимо дополнительно исследовать.

<u>Пример 29</u>

Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}-2\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+4y_1(x)-y_2(x)=0\\ \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+8y_1(x)-3\,y_2(x)=0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение данной системы имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} 5\lambda+4 & -2\lambda-1 \\ \lambda+8 & -3 \end{vmatrix} = 2\lambda^2+2\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=1.$$

Найдём коэффициенты A_1 и A_2 для λ_1=-2. В данном случае

$$\begin{cases} -6A_1+3A_2=0 \\ 6A_1-3A_2=0 \end{cases}$$

Решением данной системы являются следующие значения коэффициентов A_i: $A_2=2A_1=2C_1$. Далее найдём коэффициенты $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ для λ_2=1. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 9\widetilde{A}_1-3\widetilde{A}_2=0 \\ 9\widetilde{A}_1-3\widetilde{A}_2=0 \end{cases}$$

Решением данной системы являются следующие значения искомых коэффициентов $\widetilde{A}_2=3\widetilde{A}_1=3C_2$. Таким образом, общее решение имеет вид

$$y_1(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x},\ y_2(x)=2C_1e^{-2x}+3C_2e^{x}.$$

Системы неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Общий вид таких систем

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+a_{12}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x}+b_{11}y_1(x)+\ldots+b_{1n}y_n(x)=d_1(x) \\ a_{21}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+a_{22}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x}+b_{21}y_1(x)+\ldots+b_{2n}y_n(x)=d_2(x) \\ \quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots \\ a_{n1}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+a_{n2}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x}+b_{n1}y_1(x)+\ldots+b_{nn}y_n(x)=d_n(x) \end{cases}$$

Данная система может быть представлена в следующей, более компактной, форме

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{d\,y_k(x)}{d\,x}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}y_k(x)=d_i(x),\ i\in[1,n].$$

Рассмотрим решение данной системы с помощью метода вариации произвольной постоянной. Общее решение однородной системы подставляется в неоднородную. При этом постоянные интегрирования C_i считаются функциями независимой переменной x, т.е. $C_i=C_i(x)$. При этом в выражениях для производных искомых функций появятся члены, содержащие производные от искомых функций, а также члены, содержащие производные от $C_i(x)$

$$a_{11}C_1(x)\frac{d\,\tilde{y}_1(x)}{d\,x}+a_{12}C_2(x)\frac{d\,\tilde{y}_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}C_n(x)\frac{d\,\tilde{y}_n(x)}{d\,x}+a_{11}\tilde{y}_1(x)\times$$

$$\times\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{12}\tilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}\tilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}+b_{11}\tilde{y}_1(x)+b_{12}\tilde{y}_2(x)+$$

$$+\ldots+b_{1n}\tilde{y}_n(x)=d_1(x)$$

$$a_{21}C_1(x)\frac{d\,\tilde{y}_1(x)}{d\,x}+a_{22}C_2(x)\frac{d\,\tilde{y}_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}C_n(x)\frac{d\,\tilde{y}_n(x)}{d\,x}+a_{21}\tilde{y}_1(x)\times$$

$$\times\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{22}\tilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}\tilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}+b_{21}\tilde{y}_1(x)+b_{22}\tilde{y}_2(x)+$$

$$+\ldots+b_{2n}\tilde{y}_n(x)=d_2(x)$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$a_{n1}C_1(x)\frac{d\,\tilde{y}_1(x)}{d\,x}+a_{n2}C_2(x)\frac{d\,\tilde{y}_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}C_n(x)\frac{d\,\tilde{y}_n(x)}{d\,x}+a_{n1}\tilde{y}_1(x)\times$$

$$\times\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{n2}\tilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}\tilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}+b_{n1}\tilde{y}_1(x)+b_{n2}\tilde{y}_2(x)+$$

$$+\ldots+b_{nn}\tilde{y}_n(x)=d_n(x).$$

Первые члены компенсируются более поздними слагаемыми уравнений рассматриваемой системы (т.к. являются решениями однородной системы), т.е.

$$\begin{cases}a_{11}\tilde{y}_1(x)\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{12}\tilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}\tilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}=d_1(x)\\ a_{21}\tilde{y}_1(x)\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{22}\tilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}\tilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}=d_2(x)\\ \quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\quad\ldots\\ a_{n1}\tilde{y}_1(x)\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{n2}\tilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}\tilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}=d_n(x)\end{cases}$$

Далее из этой системы находятся функции $C_i(x)$.

<u>Пример 30</u>

Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}-2\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+4y_1(x)-y_2(x)=e^{-x} \\ \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+8y_1(x)-3\,y_2(x)=5\,e^{-x} \end{cases}$$

Решение соответствующей однородной системы, найденное в предыдущем примере, имеет следующий вид

$$y_1(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x,\ y_2(x)=2C_1e^{-2x}+3C_2e^x.$$

Далее постоянные C_i будем считать функциями независимой переменной x, т.е. $C_i=C_i(x)$. Тогда

$$\begin{cases} 5\,e^{-2x}\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}-10C_1(x)e^{-2x}+5\,e^x\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}+5\,C_2(x)e^x-4\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^{-2x}+ \\ +8C_1(x)e^{-2x}-6\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x-6C_2(x)e^x+4C_1(x)e^{-2x}+4C_2(x)e^x-2C_1(x)\times \\ \times\,e^{-2x}-3\,C_2(x)e^x=e^{-x} \\ e^{-2x}\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}-2C_1(x)e^{-2x}+\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x+C_2(x)e^x-6\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}e^{-2x}+ \\ +12C_1(x)e^{-2x}-9\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x-9\,C_2(x)e^x+8\,C_1(x)e^{-2x}+8\,C_2(x)e^x=5\,e^{-x} \end{cases}$$

Приведение подобных и сокращение экспоненты позволяет получить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}e^{-2x}-\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x=e^{-x} \\ 5\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}e^{-2x}+8\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x=-5\,e^{-x}, \end{cases}$$

которая приведением подобных может быть преобразована к более простой форме

$$\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}=\frac{3}{13}e^x,\ \frac{d\,C_2(x)}{d\,x}=-\frac{10}{13}e^{-2x}.$$

Решение такой системы имеет вид

$$C_1(x)=\widetilde{C}_1-\frac{3}{26}e^x,\ C_2(x)=\widetilde{C}_2+\frac{5}{13}e^{-2x}.$$

Общее решение исходной системы неоднородных уравнений представимо в следующей форме

$$y_1(x)=\left(\widetilde{C}_1-\frac{3}{26}e^{-2x}\right)e^{-2x}+\left(\widetilde{C}_2+\frac{5}{26}e^{-2x}\right)e^{x};$$

$$y_2(x)=2\left(\widetilde{C}_1-\frac{3}{26}e^{-2x}\right)e^{-2x}+3\left(\widetilde{C}_2+\frac{5}{26}e^{-2x}\right)e^{x}.$$

Системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Данные системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} a_{11}\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}+a_{12}\frac{d^2y_2(x)}{dx^2}+\ldots+a_{1n}\frac{d^2y_n(x)}{dx^2}+b_{11}\frac{dy_1(x)}{dx}+b_{12}\frac{dy_2(x)}{dx}+\ldots+ \\ +b_{1n}\frac{dy_n(x)}{dx}+c_{11}y_1(x)+c_{12}y_2(x)+\ldots+c_{1n}y_n(x)=0 \\ a_{21}\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}+a_{22}\frac{d^2y_2(x)}{dx^2}+\ldots+a_{2n}\frac{d^2y_n(x)}{dx^2}+b_{21}\frac{dy_1(x)}{dx}+b_{22}\frac{dy_2(x)}{dx}+\ldots+ \\ +b_{2n}\frac{dy_n(x)}{dx}+c_{21}y_1(x)+c_{22}y_2(x)+\ldots+c_{2n}y_n(x)=0 \\ \quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots \\ a_{n1}\frac{d^2y_1(x)}{dx}+a_{n2}\frac{d^2y_2(x)}{dx}+\ldots+a_{nn}\frac{d^2y_n(x)}{dx}+b_{n1}\frac{dy_1(x)}{dx}+b_{n2}\frac{dy_2(x)}{dx}+\ldots+ \\ +b_{nn}\frac{dy_n(x)}{dx}+c_{n1}y_1(x)+c_{n2}y_2(x)+\ldots+c_{nn}y_n(x)=0 \end{cases}$$

Рассматриваемая система также может быть представлена в более компактной форме

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{d^2y_k(x)}{dx^2}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{k=1}^{n}c_{ik}y_k(x)=0,\ i\in[1,n].$$

Такие системы решаются аналогично системам дифференциальных уравнений первого порядка, т.е. в виде линейной комбинации частных решений $y_i(x)=A_i e^{\lambda_i x}$, где параметры λ_i определяются из характеристического уравнения

$$|a_{ik}\lambda^2+b_{ik}\lambda+c_{ik}|=0.$$

Параметры A_i определяются из соответствующих линейных алгебраических уравнений.

1.6. *Применение обыкновенных дифференциальных уравнений к анализу экономических процессов*

В данном разделе рассматривается возможность анализа изменений во времени экономических процессов с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.6.1. *Об определении количества реализованной продукции*

Найти выражение для объёма реализованной продукции $y=y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задаётся уравнением $p(y)=2-y$, норма акселерации $1/l=2$, норма инвестиций $m=0{,}5$, $y(t)=0{,}5$. Для решения используем формулу, отражающую модель роста в условиях конкурентного рынка

$$y' = mlp(y)y\,.$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение

$$y' = (2-y)y$$

Далее разделим переменные

$$\frac{dy}{(2-y)y} = dt;\ \frac{dy}{y^2-2y+1-1} = -dt;\ \frac{dy}{(y-1)^2-1} = -d\,t\,.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln\left(\frac{y-1-1}{y-1+1}\right) = -t + \ln C;\ \ln\frac{y-2}{Cy} = -t;\ \frac{y-2}{Cy} = e^{-t};\ 1-\frac{2}{y} = Ce^{-t};$$

$$y = \frac{2}{1-Ce^{-t}}\,.$$

Учитывая, что $y(0)=0{,}5$, получаем, что $C=-3$. Таким образом, решение рассматриваемого уравнения имеет вид $y = \dfrac{2}{1+3e^{-2t}}$.

1.6.2. *Об определении функции дохода*

Найти функцию дохода $Y=Y(t)$, если известно, что величина потребления задаётся функцией $C=2t$, коэффициент капиталоёмкости прироста дохода $b=0{,}5$, $Y(0)=2$. Известно, что функция дохода равна

$$Y(t)=I(t)+C(t),$$

где $I(t)$ - сумма инвестиций, $C(t)$ - величина потребления. А также имеет место дифференциальное уравнение

$$bY'(t) = I(t)\,,$$

где b – коэффициент капиталоёмкости прироста дохода. По условию задачи составим дифференциальное уравнение:

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t\,, \text{ или } y'(t) - 2y(t) = -4t$$

Итак, функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Будем искать его решение в виде $Y(t) = u(t)v(t)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$, подставим в уравнение $u'v + v'u - 2uv = -4t$

1) $u(v'-2v) = 0$ 2) $u'v = -4t$

$$\frac{dv}{v} = 2dt \qquad\qquad u'e^{2t} = -4t$$
$$\ln v = 2t \qquad\qquad du = -\int 4te^{-2t}dt$$
$$v = e^{2t} \qquad\qquad u = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$$

Общее решение $y = uv$ или $y = Ce^{2t} + 2t + 1$. Используя начальные условия $Y(0) = 2$, найдём C: $2 = C + 1$ или $C = 1$. Итак, функция дохода имеет вид $y = e^{2t} + 2t + 1$.

1.6.3. Об аналитической методике анализа активности промышленных предприятий

Одним из важнейших факторов, определяющих повышение конкурентоспособности и успешное функционирование промышленных предприятий, является развитие всех сфер своей деятельности. По этой причине предприятия должны разрабатывать эффективные методы и придерживаться стратегической концепции инновационного развития. В данном разделе предложена модель прогнозирования производственной активности предприятий с учетом изменения объема производимой продукции во времени, а также с учетом изменения ее отгрузки, и на ее основе проведен анализ ее изменения. Данная методика базируется на решении обыкновенного дифференциального уравнения. Описание искомых величин с помощью дифференциальных уравнений позволяет учитывать их мгновенные изменения по сравнению со стационарным описанием. Предложена аналитическая методика решения данного дифференциального уравнения. В рамках данной методики проведем анализ производственной активности предприятий с учетом отгрузки производимой продукции с помощью анализа следующей начальной задачи

$$\frac{dY(t)}{dt} = a \cdot Y(t) + b \cdot Y(t-\tau) + c(t) \tag{2}$$

с начальным условием

$$Y(0)=0,$$

где $Y(t)$ - объем отгружаемой продукции; τ - задержка (т.е. $Y(t-\tau)$ - объем отгружаемой продукции с задержкой τ); a и b - коэффициента модели, определяемые эмпирическими данными; $c(t)$ - приращение объема продукции за счет ее производства. Данная задержка может быть вызвана ограниченной скоростью производства продукции, ограниченным объемом транспортных единиц и т.д. В рамках данного раздела рассмотрим простейший случай одной задержки. В рамках предложенной методики может быть учтено большее количество задержек. Далее уравнение (2) преобразуем к интегральной форме (2a)

$$Y(t) = a \cdot \int_0^t Y(\theta)d\theta + b \cdot \int_0^t Y(\theta-\tau)d\theta + \int_0^t c(\theta)d\theta . \tag{2a}$$

Решим уравнение (2) с помощью метода Бубнова-Галеркина. В рамках данного метода будем искать решение данного уравнения в виде суммы экспоненциальных функций

$$Y(t)=d_1e^{-at}+d_2e^{-bt}. \tag{3}$$

Данные функции являются наиболее естественными решениями уравнения (2) в рамках классической теории дифференциальных уравнений. Подстановка функции (3) в уравнение (2) позволяет получить

$$d_1e^{-at}+d_2e^{-bt}=a\cdot\int_0^t\left(d_1e^{-a\theta}+d_2e^{-b\theta}\right)d\theta+b\cdot\int_0^t\left(d_1e^{-a\theta}e^{a\tau}+d_2e^{-b\theta}e^{b\tau}\right)d\theta+\int_0^t c(\theta)d\theta.$$

Вычисление интегралов в правой части уравнения позволяет получить

$$d_1e^{-at}+d_2e^{-bt}=d_1\left(1-e^{-at}\right)+d_2\frac{a}{b}\left(1-e^{-bt}\right)+$$

$$+d_1\frac{b}{a}\left(1-e^{-at}\right)e^{a\tau}+d_2\left(1-e^{-bt}\right)e^{b\tau}+\int_0^t c(\theta)d\theta.$$

Умножаем левую и правую часть соотношения на e^{-at} или на e^{-bt} и интегрируем от 0 до ∞. В результате данной операции получаем уравнения для вычисления коэффициентов a и b

$$\begin{cases} d_1\dfrac{b^2e^{a\tau}}{a(a+b)}+d_2\dfrac{be^{b\tau}}{a+b}=-\displaystyle\int_0^\infty e^{-at}c(t)dt \\ d_1\dfrac{b}{a+b}\left(1-\dfrac{a}{b}-e^{a\tau}\right)+d_2\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a}{b}-e^{b\tau}\right)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-bt}c(t)dt \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений приводит к следующему результату

$$d_1=\frac{e^{a\tau}\displaystyle\int_0^\infty e^{-bt}c(t)dt+a^{-1}b\left(1-ab^{-1}-e^{a\tau}\right)\int_0^\infty e^{-at}c(t)dt}{\dfrac{1}{2}e^{a\tau}\left(1-a^{-1}b-e^{b\tau}\right)-\dfrac{e^{b\tau}}{1+a^{-1}b}\left(1-\dfrac{a}{b}-e^{a\tau}\right)}$$

$$d_2=-\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}+1\right)\left(1-\dfrac{a}{b}-e^{b\tau}\right)\displaystyle\int_0^\infty e^{-at}c(t)dt+e^{b\tau}\int_0^\infty e^{-bt}c(t)dt}{\dfrac{be^{a\tau}}{2a}\left(1-\dfrac{a}{b}-e^{b\tau}\right)-\dfrac{be^{b\tau}}{a+b}\left(1-\dfrac{a}{b}-e^{a\tau}\right)}$$

В простейшем случае при $c=c_0$ получаем

$$\begin{cases} d_1=2\dfrac{c_0}{a}\dfrac{(a+b)\left[a^2e^{a\tau}+b\left(b-a-be^{a\tau}\right)\right]}{e^{a\tau}b\left(a+b\right)\left(a-b-ae^{b\tau}\right)-2a^2e^{b\tau}\left(b-a-be^{a\tau}\right)} \\ d_2=-\dfrac{c_0}{b^2}\dfrac{(a+b)^2\left(b-a-be^{b\tau}\right)+2ae^{b\tau}}{e^{a\tau}(a+b)\left(b-a-be^{b\tau}\right)-2ae^{b\tau}\left(b-a-be^{a\tau}\right)} \end{cases}$$

Воспользуемся полученными соотношениями для анализа активности предприятий с учетом изменения объема производимой продукции, а также с учетом изменения ее отгрузки. На рис. 1.3 приведены типичные зависимости объема отгружаемой продукции от времени при различных значениях параметров a и b при постоянном приращении объема продукции c_0. На рис. 1.4 приведены типичные зависимости объема отгружаемой продукции от величины параметра a при различных значениях параметра b, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0. Аналогичными являются зависимости объема отгружаемой продукции от параметра b (см. рис. 1.5). Типичные зависимости объема отгружаемой продукции от задержки τ также являются убывающими функциям (см. рис. 1.6).

Таким образом, с ускорением вывоза отгружаемой продукции уменьшается его количество и необходимо увеличить ее производство. При уменьшении параметров a и b, а также задержки τ объем отгружаемой продукции увеличиваются, что соответствует накоплению объема продукции. В этой ситуации кривые на рисунках 3.1-3.4 будут возрастающими.

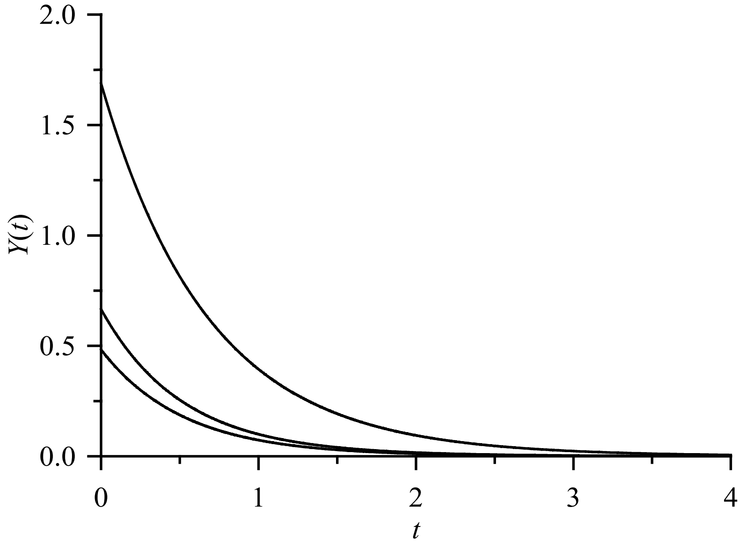

Рис. 1.3. Зависимости объема отгружаемой продукции от времени при различных значениях параметров a и b при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

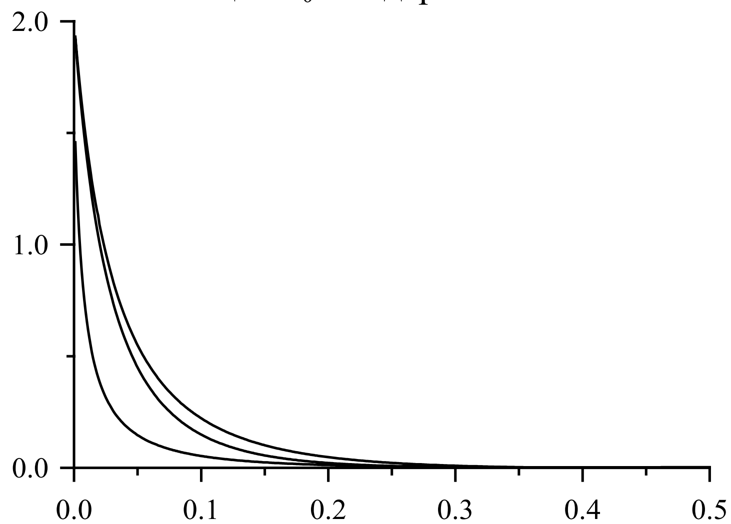

Рис. 1.4. Зависимости объема отгружаемой продукции от величины параметра a при различных значениях параметра b, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

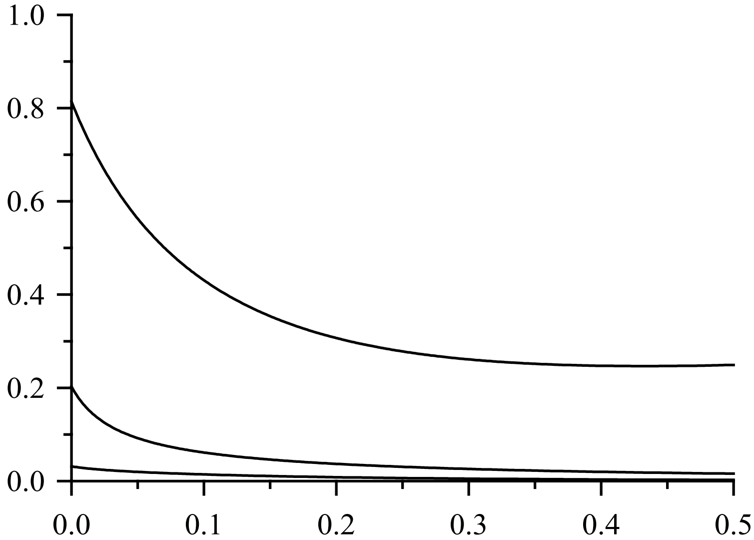

Рис. 1.5. Зависимости объема отгружаемой продукции от величины параметра b при различных значениях параметра a, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

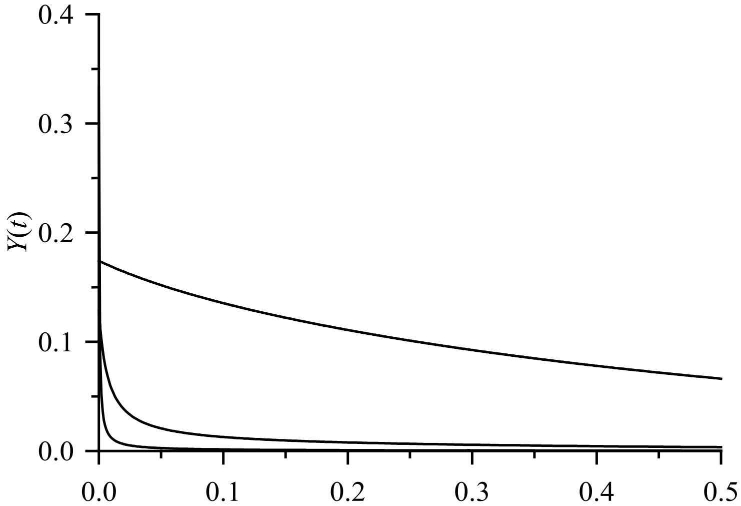

Рис. 1.6. Зависимости объема отгружаемой продукции от величины задержки τ при различных значениях параметров a и b, в различные моменты времени t и при постоянном приращении объема продукции c_0

1.6.4. Модель экономического роста с учетом влияния окружающей среды

Экологические проблемы являются одними из наиболее значимых для развития экономик: деградация окружающей среды тесно связана с интенсивностью промышленного производства и достигнутым уровнем жизни. В экономике природопользования известна связь воздействия человеческой деятельности на окружающую среду и достигнутого уровня жизни. Значительный интерес представляют математические модели экономического роста, позволяющие учесть экологические факторы. В данном разделе предлагается одна из таких моделей. Динамику накопления капитала опишем следующим уравнением

$$\frac{dK(t)}{dt} = Y(t) - D(t) - a \cdot K(t)$$

с начальным условием

$$K(0)=K_0,$$

где $K(t)$ - запас капитала; $Y(t)$ - национальный ВВП; $D(t)$ - уровень потребления; a - коэффициент выведения капитала. Уровень потребления и накопление капитала связаны с национальным ВВП следующими соотношениями: $D(t)=d(t)Y(t)$ и $Y(t)=b\,K(t)$, где $d(t)$ - доля ВВП, направляемая на потребление; b - характеристика производительности капитала. С учетом последних соотношений уравнение (1) принимает следующий вид

$$\frac{dK(t)}{dt} = \{b\,[1 - d(t)] - a\}\,K(t).$$

Решение данного уравнения в рамках стандартной процедуры с учетом рассмотренного начального условия приводит к следующему результату

$$K(t) = K_0 e^{\int_0^t \{b[1-d(t)]-a\}dt}.$$

Данное решение также может быть представлено в следующей форме

$$K(t) = \left\{\int_0^t [Y(\tau) - D(\tau)] e^{a\tau} d\tau + K_0\right\} e^{-at}.$$

В процессе промышленного производства происходит изменение окружающей среды за счет добычи ресурсов и выбросов промышленных отходов. В качестве характеристики состояния окружающей среды используем функцию $E(t)$ под названием “качество окружающей среды”. Данная функция пропорционально объему производства с эластичностью γ

$$E(t) = E_0 Y^{-\gamma}(t).$$

В тоже время изменение качества окружающей среды определяется частью добычи ресурса, которая используется для борьбы против загрязнения $F(t)$, и интенсивностью добычи ресурса для экономического роста $G(t)$. Соответствующее уравнение представимо в следующей форме

$$\frac{dE(t)}{dt} = -F(t) - G(t).$$

Решение данного уравнения в рамках стандартной процедуры приводит к следующему результату

$$E(t) = E_0 - \int_0^t F(\tau)d\tau - \int_0^t G(\tau)d\tau.$$

С другой стороны

$$Y(t)=\left[1-\frac{1}{E_0}\int_0^t F(\tau)d\tau-\frac{1}{E_0}\int_0^t G(\tau)d\tau\right]^{-\gamma}.$$

В таком случае накопление капитала описывается следующим соотношением

$$K(t)=\left\{\int_0^t\left[\frac{1}{\left[1-\frac{1}{E_0}\int_0^t F(\tau)d\tau-\frac{1}{E_0}\int_0^t G(\tau)d\tau\right]^{\gamma}}-D(\tau)\right]e^{a\tau}d\tau+K_0\right\}e^{-at}.$$

В качестве примера при постоянных значениях функций в правой части последнего соотношения $F(t)=F_0$, $G(t)=G_0$, $D(t)=D_0$ и $\gamma=1$ получаем следующую зависимость накопления капитала от времени

$$K(t)=E_0e^{-at}\left[\frac{E_0}{F_0+G_0}\ln\left|1-\left(\frac{F_0+G_0}{E_0}\right)t\right|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_0^n t^n}{n!\left(F_0+G_0\right)^n}\right]+\frac{D_0}{a^2}+K_0e^{-at}. \quad (4)$$

На рис. 1.7 приведены типичные зависимости величины капитала, описываемого соотношением, от времени.

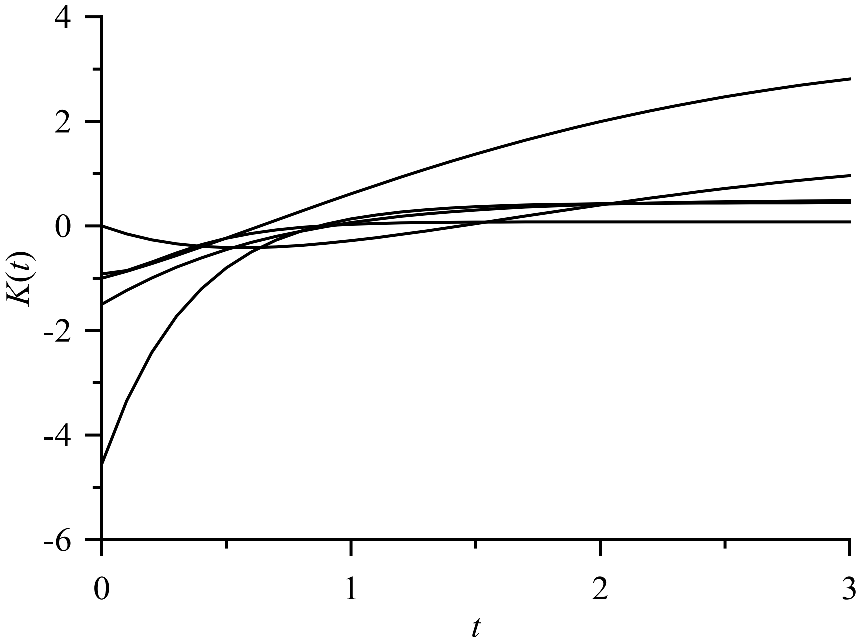

Рис. 1.7. Типичные зависимости величины капитала, описываемого соотношением (4), от времени

1.6.5. Об аналитической методике прогноза конкурентоспособности промышленных предприятий

В современной экономической теории научно-технологический прогресс рассматривается как один из актуальных факторов долговременного экономического роста. Влияние научно-технологического прогресса на отдельную отрасль экономики проявляется в создании новой продукции, которая имеет важные конкурентные преимущества перед уже существующей, или же в модификации (модернизации) уже производимой продукции. Часто новая продукция основана и на новых (инновационных) технологиях. Однако технологическое первенство требует своевременной модернизации производства и обучения персонала, то есть существенных финансовых и организационных вложений. В то же время отказ от перехода к инновационным технологиям может привести к ощутимым потерям рыночных позиций или даже к полному прекращению деятельности организации. В настоящее время одним из важных примеров рынков, для которых характерно вытеснение одних продуктов другими, более привлекательными с технологической точки зрения, является рынок информационно-телекоммуникационных технологий (рынок услуг передачи данных). Перед большинством руководителей предприятий, являющихся поставщиками товаров, и инвесторами актуальным является вопрос о конкурентоспособности предприятий перспективах их развития и его прогнозе. Конкурентоспособность предприятия определяется, в первую очередь, количеством произведенных и реализованных товаров, а также получаемой прибылью. Снижение издержек и расходов приводит к росту конкурентоспособности. На прибыль и издержки влияют множество факторов, изменяющихся во времени. В этой ситуации представляет интерес формирование методики прогноза конкурентоспособности предприятий. Целью данного раздела и является формирование такой методики, позволяющей учитывать максимально возможное количество факторов одновременно. Рассмотрим модель конкурентноспособности J промышленных предприятий, выпускающих по одному товару в количестве N_i, где i - номер предприятия. Опишем изменение во времени t количеств товаров и прибылей предприятий $Q_i(t)$ с помощью следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = r_1 N_1(t) - \frac{1}{K_1} N_1(t) - \sum_{j=2}^{J} \gamma_j N_j(t)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = r_2 N_2(t) - \frac{1}{K_2} N_2(t) - \gamma_1 N_1(t) - \sum_{j=3}^{J} \gamma_j N_j(t)$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{dN_J(t)}{dt} = r_J N_J(t) - \frac{1}{K_J} N_J(t) - \sum_{j=1}^{J-1} \gamma_j N_j(t) \qquad (5)$$

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = N_1(t) - a_1(t) - b_1(t) - c_1(t) - d_1(t) - e_1(t) - f_1(t) - g_1(t)$$

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = N_2(t) - a_2(t) - b_2(t) - c_2(t) - d_2(t) - e_2(t) - f_2(t) - g_2(t)$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{dQ_J(t)}{dt} = N_J(t) - a_J(t) - b_J(t) - c_J(t) - d_J(t) - e_J(t) - f_J(t) - g_J(t)$$

В рассмотренной системе уравнений введены следующие обозначения: K_j - емкость рынка для товара $N_j(t)$; r_j - параметр роста количества товаров; γ_j - параметр конкуренции товаров; $a_j(t)$ - транспортные расходы; $b_j(t)$ - энергетические расходы на производство; $c_j(t)$ - расходы на персонал (зарплата, расходы на обучение и лечение, но при этом $\sum_{j=1}^{J} c_j(t) = c$, т.е. количество сотрудников ограничено и они могут переходить из одной фирмы в другую); $d_j(t)$ - сырье ($\sum_{j=1}^{J} d_j(t) = d$, т.е. количество сырья ограничено); $e_j(t)$ - расходы на исследования (исследования рынка; исследования для развития технологии, в том числе учитывающие амортизацию); $f_j(t)$ - расходы на налоги; $g_j(t)$ - расходы на утилизацию отходов. Начальные условия для функций $N_j(t)$, $Q_j(t)$ представимы в следующей форме

$$N_j(0) = \hat{N}_j,\ Q_j(0) = 0,\ j = \overline{1, n}\ .$$

Решим систему уравнений (5) методом осреднения функциональных поправок. При этом в качестве примера анализа конкурентоспособности будем рассматривать простейший случай конкуренции двух предприятий (j=2). В этом случае анализ будет наиболее наглядным. При этом он в рамках изложенной далее процедуры обобщаем на случай большего количества конкурирующих фирм. На первом этапе решения системы уравнений (5) преобразуем их от дифференциальной форме к интегральной

$$N_1(t) = r_1 \int_0^t N_1(\tau) d\tau - \frac{1}{K_1} \int_0^t N_1(\tau) d\tau - \gamma_2 \int_0^t N_2(\tau) d\tau + \hat{N}_1 t$$

$$N_2(t) = r_2 \int_0^t N_2(\tau) d\tau - \frac{1}{K_2} \int_0^t N_2(\tau) d\tau - \gamma_1 \int_0^t N_1(\tau) d\tau + \hat{N}_2 t$$

$$Q_1(t) = \int_0^t N_1(\tau) d\tau - \int_0^t a_1(\tau) d\tau - \int_0^t b_1(\tau) d\tau - \int_0^t c_1(\tau) d\tau - \int_0^t d_1(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t e_1(\tau) d\tau - \int_0^t f_1(\tau) d\tau - \int_0^t g_1(\tau) d\tau \quad (5a)$$

$$Q_2(t) = \int_0^t N_2(\tau) d\tau - \int_0^t a_2(\tau) d\tau - \int_0^t b_2(\tau) d\tau - \int_0^t c_2(\tau) d\tau - \int_0^t d_2(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t e_2(\tau) d\tau - \int_0^t f_2(\tau) d\tau - \int_0^t g_2(\tau) d\tau$$

В рамках используемого метода заменим в правых частях рассматриваемых уравнений искомые функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ на их неизвестные пока средние значения α_{11} и α_{21}. Подстановка данных значений в рассматриваемые уравнения позволяет получить первые приближения изменений во времени количеств товаров $N_{11}(t)$ и $N_{21}(t)$

$$N_{11}(t)=r_1\alpha_{11}t-\frac{1}{K_1}\alpha_{11}t-\gamma_2\alpha_{12}t+\hat{N}_1t\,,\ N_{12}(t)=r_2\alpha_{12}t-\frac{1}{K_2}\alpha_{12}t-\gamma_1\alpha_{11}t+\hat{N}_2t\,. \quad (6)$$

Неизвестные средние значения α_{i1} определим с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_{i1}=\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}N_{i1}(t)dt\,,\ i=1,2, \quad (7)$$

где Θ - длительность наблюдения за производством товаров. Подстановка соотношений (6) в соотношение (7) позволяет получить следующую систему уравнений для определения искомых средних значений

$$\alpha_{11}=r_1\alpha_{11}\frac{\Theta}{2}-\frac{\alpha_{11}\Theta}{2K_1}-\gamma_2\alpha_{12}\frac{\Theta}{2}+\hat{N}_1\frac{\Theta}{2},\ \alpha_{12}=r_2\alpha_{12}\frac{\Theta}{2}-\frac{\alpha_{12}\Theta}{2K_2}-\gamma_1\alpha_{11}\frac{\Theta}{2}+\hat{N}_2\frac{\Theta}{2}. \quad (8)$$

Система уравнений (8) имеет следующее решение

$$\alpha_{11}=\frac{\hat{N}_2-\dfrac{\hat{N}_1}{\gamma_2}\left(\dfrac{2}{\Theta}-r_2+\dfrac{1}{K_2}\right)}{\gamma_1-\dfrac{1}{\gamma_2}\left(\dfrac{2}{\Theta}-r_1+\dfrac{1}{K_1}\right)\left(\dfrac{2}{\Theta}+\dfrac{1}{K_2}-r_2\right)},$$

$$\alpha_{12}=\frac{\hat{N}_1}{\gamma_2}-\frac{\left(\dfrac{2}{\Theta}+\dfrac{1}{K_1}-r_1\right)\left[\hat{N}_2-\dfrac{\hat{N}_1}{\gamma_2}\left(\dfrac{2}{\Theta}+\dfrac{1}{K_2}-r_2\right)\right]}{\gamma_1\gamma_2-\left(\dfrac{2}{\Theta}-r_1+\dfrac{1}{K_1}\right)\left(\dfrac{2}{\Theta}+\dfrac{1}{K_2}-r_2\right)}.$$

Приближения второго и более высоких порядков искомых функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$ определяются с помощью их стандартной замены $N_{i1}(t)\to\alpha_{i1}+N_{i-11}(t)$ и $N_{i2}(t)\to\alpha_{i2}+N_{i-12}(t)$ в правой части первых двух уравнений системы (5*a*). Вторые приближения количеств определяются следующими соотношениями

$$N_{21}(t)=\alpha_{21}t\left(r_1-\frac{1}{K_1}\right)+\alpha_{22}t\left(r_1r_2\frac{t}{2}-\gamma_2\right)+\alpha_{11}\frac{t^2}{2}\left(\gamma_2\gamma_1-2\frac{r_1}{K_1}-\frac{1}{K_1^2}\right)+$$

$$+\alpha_{12}\gamma_2\frac{t^2}{2}\left(\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}-r_1-r_2\right)+r_1\hat{N}_1\frac{t^2}{2}-\frac{\hat{N}_1t^2}{2K_1}-\gamma_2\hat{N}_2\frac{t^2}{2}+\hat{N}_1t \quad (9)$$

$$N_{22}(t)=-\alpha_{21}\gamma_1t+\alpha_{22}t\left(r_2-\frac{1}{K_2}\right)+\alpha_{11}\frac{t^2}{2}\left(\gamma_1\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}-r_2\gamma_1-r_1\gamma_1\right)+$$

$$+\alpha_{12}\frac{t^2}{2}\left(r_2^2-2\frac{r_2}{K_2}+\frac{1}{K_2^2}+\gamma_1\gamma_2\right)+r_2\hat{N}_2\frac{t^2}{2}-\frac{\hat{N}_2t^2}{2K_2}-\gamma_1\hat{N}_1\frac{t^2}{2}+\hat{N}_2t\,.$$

Неизвестные средние значения α_{ij} (порядок приближения $i\geq2$) определим с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\left[N_{ij}(t) - N_{ij-1}(t)\right]dt;\ i \geq 2;\ j = 1{,}2. \qquad (10)$$

Подстановка соотношений (9) в соотношение (10) позволяет получить систему уравнений для определения искомых средних значений

$$\alpha_{21} = \alpha_{21}\frac{\Theta}{2}\left(r_1 - \frac{1}{K_1}\right) + \alpha_{22}\frac{\Theta}{2}\left(r_1 r_2\frac{\Theta}{3} - \gamma_2\right) + \alpha_{11}\frac{\Theta}{2}\left(\gamma_2\gamma_1\frac{\Theta}{3} - 2\frac{r_1\Theta}{3K_1} - \frac{\Theta}{3K_1^2} - r_1 + \frac{1}{K_1}\right) +$$

$$+\alpha_{12}\gamma_2\frac{\Theta}{2}\left(\frac{\Theta}{3}\frac{K_1 + K_2}{K_1K_2} - r_1\frac{\Theta}{3} - r_2\frac{\Theta}{3} + 1\right) +$$

$$+\hat{N}_1\frac{\Theta}{2} + r_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6} - \frac{\hat{N}_1\Theta^2}{6K_1} - \gamma_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6} - \hat{N}_1\frac{\Theta}{2} \qquad (11)$$

$$\alpha_{22} = -\alpha_{21}\gamma_1\frac{\Theta}{2} + \alpha_{22}\frac{\Theta}{2}\left(r_2 - \frac{1}{K_2}\right) + \alpha_{11}\gamma_1\frac{\Theta}{2}\left(\frac{K_1 + K_2}{K_1K_2}\frac{\Theta}{3} - r_2\frac{\Theta}{3} - r_1\frac{\Theta}{3} + 1\right) + r_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6} +$$

$$+\alpha_{12}\frac{\Theta}{2}\left(r_2^2\frac{\Theta}{3} - 2\frac{r_2\Theta}{3K_2} + \frac{\Theta}{3K_2^2} + \gamma_1\gamma_2\frac{\Theta}{3} - r_2 + \frac{1}{K_2}\right) -$$

$$-\frac{\hat{N}_2\Theta^2}{6K_2} + \hat{N}_2\frac{\Theta}{2} + \gamma_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6} - \hat{N}_2\frac{\Theta}{2}.$$

Система уравнений (11) имеет следующее решение

$$\alpha_{21} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ \alpha_{22} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

где $a_{11} = 1 + \frac{\Theta}{2K_1} - r_1\frac{\Theta}{2}$, $a_{11} = \frac{\Theta}{2}\left(\gamma_2 - r_1r_2\frac{\Theta}{3}\right)$, $a_{21} = \gamma_1\frac{\Theta}{2}$, $a_{22} = 1 + \frac{\Theta}{2K_2} - r_2\frac{\Theta}{2}$,

$$b_1 = \alpha_{11}\frac{\Theta}{2}\left(\gamma_2\gamma_1\frac{\Theta}{3} - 2\frac{r_1\Theta}{3K_1} - \frac{\Theta}{3K_1^2} - r_1 + \frac{1}{K_1}\right) + \alpha_{12}\gamma_2\frac{\Theta}{2}\left(\frac{\Theta}{3}\frac{K_1 + K_2}{K_1K_2} - r_1\frac{\Theta}{3} - r_2\frac{\Theta}{3} + 1\right) +$$

$$+r_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6} - \frac{\hat{N}_1\Theta^2}{6K_1} - \hat{N}_1\frac{\Theta}{2} - \gamma_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6} - \hat{N}_1\frac{\Theta}{2},\ b_2 = \alpha_{11}\left(\frac{K_1 + K_2}{K_1K_2}\frac{\Theta}{3} - r_2\frac{\Theta}{3} - r_1\frac{\Theta}{3} + 1\right) \times$$

$$\times\gamma_1\frac{\Theta}{2} + \alpha_{12}\frac{\Theta}{2}\left(r_2^2\frac{\Theta}{3} - 2\frac{r_2\Theta}{3K_2} + \frac{\Theta}{3K_2^2} + \gamma_1\gamma_2\frac{\Theta}{3} - r_2 + \frac{1}{K_2}\right) + r_2\hat{N}_2\frac{\Theta^2}{6} - \frac{\hat{N}_2\Theta^2}{6\,K_2} + \hat{N}_2\frac{\Theta}{2} +$$

$$+\gamma_1\hat{N}_1\frac{\Theta^2}{6} - \hat{N}_2\frac{\Theta}{2}.$$

В рамках данной работы искомые количества товаров определены во втором приближении по методу осреднения функциональных поправок. Данного приближения обычно достаточно для получения качественных выводов и получения некоторых количественных результатов. Решение второй пары уравнений системы (5*а*) определяется интегрированием левых и правых частей. В результате данного интегрирования получаем

$$\begin{cases} Q_1(t)=\int\limits_0^t N_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t a_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t b_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t c_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t d_1(\tau)d\tau- \\ \qquad -\int\limits_0^t e_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t g_1(\tau)d\tau \\ Q_2(t)=\int\limits_0^t N_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t b_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t c_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t d_2(\tau)d\tau- \\ \qquad -\int\limits_0^t e_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t f_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t g_2(\tau)d\tau \end{cases}$$

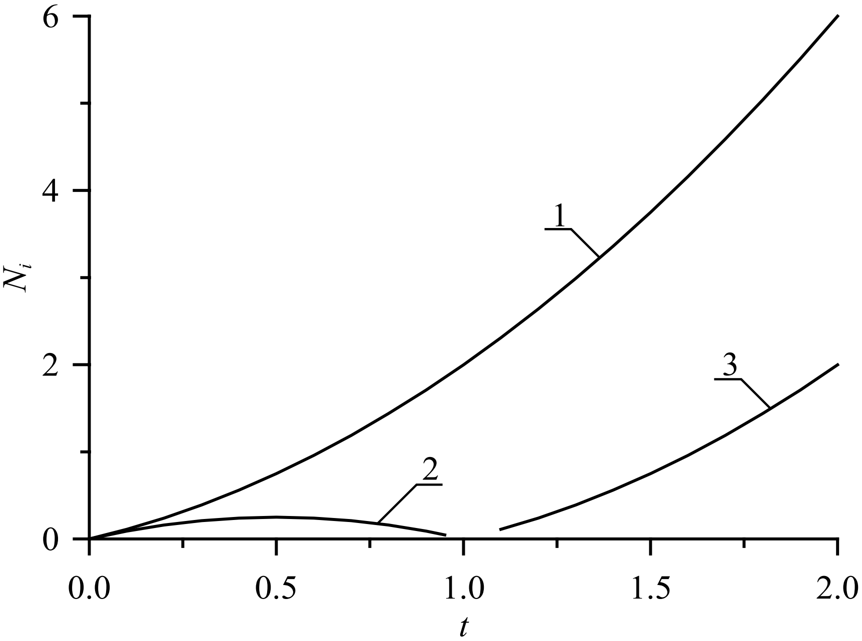

Рис. 1.8. Типичные зависимости количества произведенного товара от времени

Далее проведем анализ влияния различных параметров на изменение во времени количества производимых товаров и получаемых от их продажи прибыли. На рис. 1.8-1.10 приведены типичные качественные зависимости количества произведенного товара от различных параметров (от времени, емкости рынка, параметра роста количества товаров). Зависимости количества произведенного товара от параметра конкуренции двух товаров аналогичны его зависимостям параметра роста количества товаров. Прибыль со временем будет изменяться быстрее, чем количество произведенного товара. Ее зависимости от емкости рынка, параметра роста количества товаров и параметра конкуренции двух товаров являются аналогичными зависимостям, приведённым на рис. 1.8-1.10. В то же время возможны и качественно другие зависимости прибыли от параметров (см. рис. 1.11-1.13). При этом в рамках предлагаемой модели прибыль может принимать и отрицательные значения. В таком случае приходится обсуждать убытки предприятия, а не его прибыль. Увеличение транспортных, энергетических и прочих расходов приводит к линейному уменьшению прибыли в зависимости от данных параметров. Убывания прибыли во времени зависит от аналогичного изменения рассмотренных расходов. Анализ зависимости прибыли от параметров показывает, что существуют комбинации параметров, при которых (*i*) прибыль предприятия всегда существует и возрастает; (*ii*) прибыль предприятия уменьшается и производство товара постепенно теряет рентабельность; (*iii*) производство бывает временно убыточным и постепенно становится прибыльным с развитием предприятия. При производстве товаров также выполняются естественные с экономической точки зрения частные случаи: (*i*) при удачно выбранной стратегии будет стабильный рост производства товаров; при менее удачно выбранной стратегии (*ii*) производство товаров прекратиться из-за насыщения рынка или из-за слишком высокой себестоимости товара, (*iii*) возможна также задержка в производстве товара из-за необходимости подготовки технологического процесса.

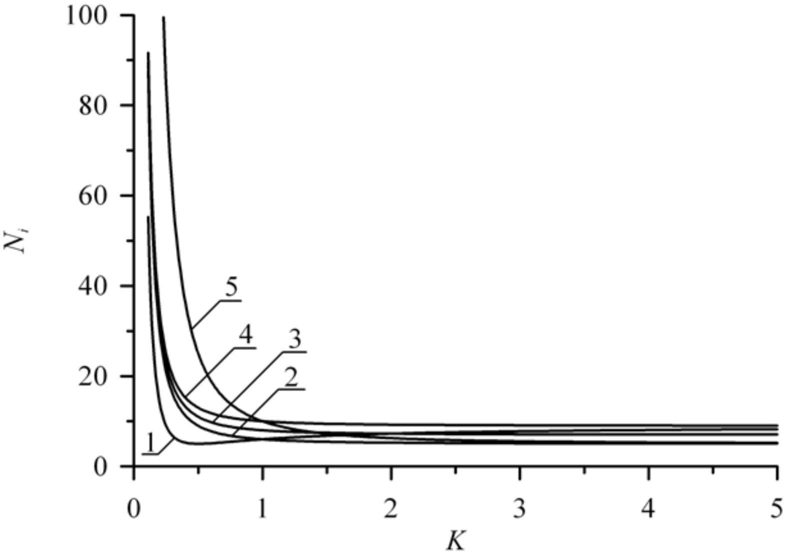

Рис. 1.9. Типичные зависимости количества произведенного товара от емкости рынка

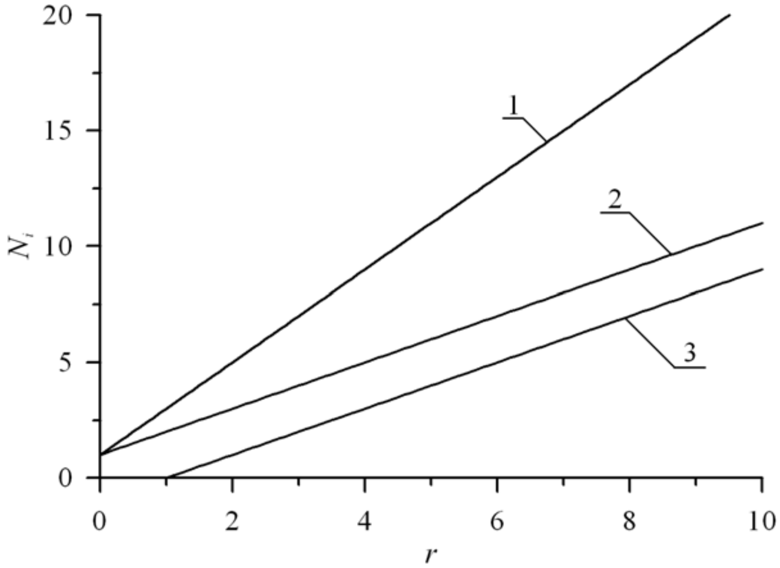

Рис. 1.10. Типичные зависимости количества произведенного товара от параметра роста количества товаров

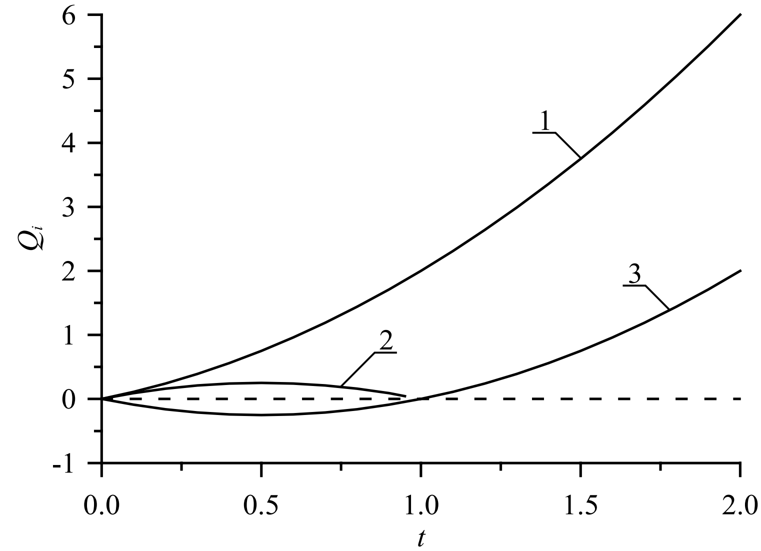

Рис. 1.11. Типичные зависимости прибыли от времени

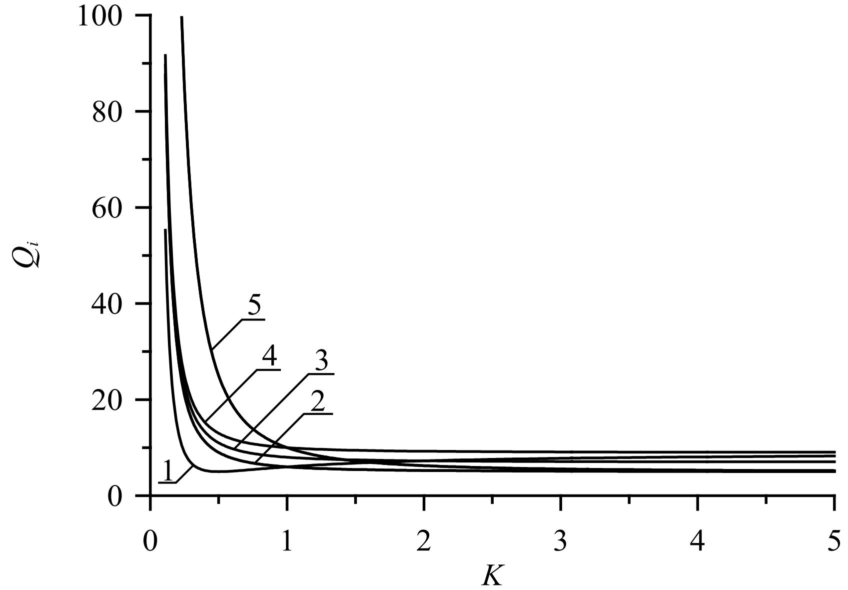

Рис. 1.12. Типичные зависимости прибыли от емкости рынка

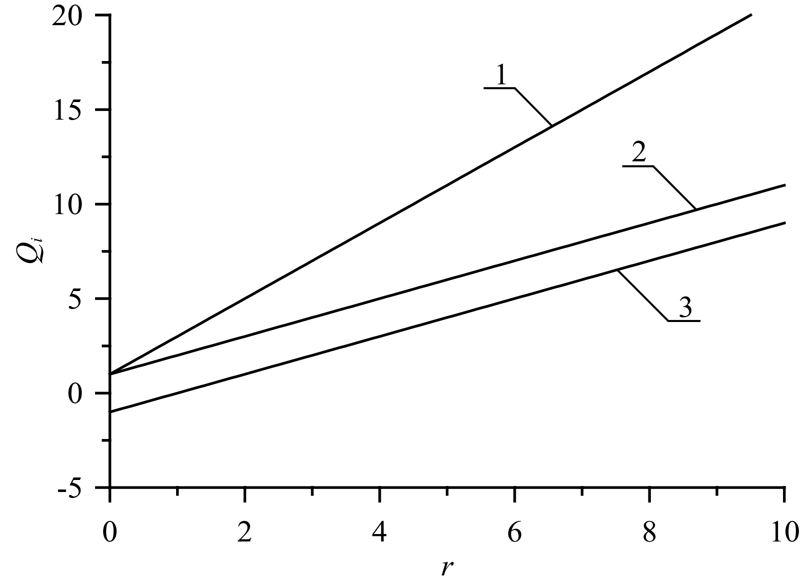

Рис. 1.13. Типичные зависимости прибыли от параметра роста количества товаров

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

2.1. Классификация дифференциальных и интегральных уравнений

2.1.1. *Классификация дифференциальных уравнений*

Начнем рассмотрение методов решения дифференциальных уравнений с частными производными с введения нескольких основных понятий.

Определение 1

Уравнение, связывающее независимые переменные x_1, x_2, …, x_m, искомую функцию независимых переменных $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданной в некоторой области G, и частные производные функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ до n-го порядка включительно называется дифференциальным уравнением в частных производных n-го порядка.

Определение 2

Порядком уравнения называется порядок старшей из входящих в уравнение производной.

Определение 3

Функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, обращающая уравнение в частных производных в тождество, называется решением или интегралом данного уравнения.

Определение 4

Дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и всех её производных. В противном случае уравнение называется нелинейным.

Пример 1

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в общем случае имеет следующий вид:

$$A_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_2}+\ldots+ \qquad (1)$$

$$+A_m(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_m}=B_0(x_1,x_2,\ldots,x_m)+B_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,u(x_1,x_2,\ldots,x_m).$$

Пример 2

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в общем случае имеет следующий вид

$$A_{11}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_1^2}+A_{12}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_1\,\partial x_2}+$$

$$+A_{22}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{12}^2}+\ldots+A_{m-1m-1}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{m-1}^2}+$$

$$+A_{m-1m}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{m-1}\,\partial x_m}+A_{mm}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{mm}^2}= \qquad (2)$$

$$=B_0(x_1,x_2,\ldots,x_m)+B_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)u(x_1,x_2,\ldots,x_m)+B_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)\times$$

$$\times \frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_1} + ... + B_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_m)\frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_m}.$$

Определение 5

Если коэффициенты $B_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ равны нулю, уравнения (1), (2) и аналогичные им уравнения более высокого порядка называются однородными. В противном случае данные уравнения называются неоднородным.

Для описания физических процессов наиболее часто используются уравнения в частных второго порядка. Данные уравнения, также как и уравнения первого порядка, могут быть классифицированы как "линейные" и "нелинейные", "однородные" и "неоднородные". Существует также ещё одна классификация уравнений второго порядка. Наиболее просто она может быть проиллюстрирована с помощью линейного относительно старших производных уравнения для функций двух переменных $u(x,t)$. Такое уравнение может быть представлено в следующем общем виде

$$A_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2A_{xt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + A_{tt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$= B\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \qquad (3)$$

Определение 6

Уравнение (3) называется:

(*i*) гиперболическим, если $A_{xx}A_{tt}\text{-}A_{xt}^2<0$ (данное уравнение наиболее часто используется для описания волновых процессов);

(*ii*) параболическим, если $A_{xx}A_{tt}\text{-}A_{xt}^2=0$ (данное уравнение наиболее часто используется для описания теплопереноса и диффузии вещества);

(*iii*) эллиптическим, если $A_{xx}A_{tt}\text{-}A_{xt}^2>0$ (используется для описания стационарных процессов).

С помощью замены переменных данные уравнения можно преобразовать к следующим каноническим формам

канонические формы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = U\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \qquad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = U\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \qquad (3б)$$

каноническая форма параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = U\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \qquad (3в)$$

каноническая форма эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \qquad (3г)$$

2.1.2. *Классификация краевых условий для уравнений второго порядка*

Рассмотрим функцию двух переменных $u(x,t)$ в некоторой области $(x,t)\in G$: $0\le x \le L$, $0\le t\le \Theta$.

Определение 7

Совокупность начального и граничного условий называется краевыми условиями. Начальное условие называется временным краевым условием, а граничное условие называется пространственным краевым условием.

Начальное условие

Начальное условие определяется заданием распределения искомой функции $u(x,t)$ и ее производной до m-1 порядка (m - порядок уравнения, решением которого является искомая функция $u(x,t)$) внутри области G в начальный момент времени, т.е.

$$u(x,0)=\chi_0(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_1(t),\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{m-1} u(x,t)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=\chi_{m-1}(t). \qquad (4)$$

Существуют несколько видов граничных условий для искомой функции.

Граничное условие первого рода (задача Дирихле)

Граничное условие первого рода (задача Дирихле) состоит в задании на границах области G искомой функции $u(x,t)$ в любой момент времени, т.е.

$$u(0,t)=\varphi_1(0,t),\ u(L,t)=\varphi_2(L,t). \qquad (4a)$$

Такие граничные условия могут быть реализованы при искусственном поддержании постоянной концентрации легирующей примеси или температуры, а также особыми условиями массо- или теплообмена между границей области G и окружающим пространством.

Граничное условие второго рода (задача Неймана)

Граничное условие второго рода (задача Неймана) состоит в задании на границе области G плотности потока тепла, частиц, … При этом поток пропорционален нормальной производной искомой функции $u(x,t)$

$$-\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=0}=\psi_1(t),\ -\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=L}=\psi_2(t). \qquad (4б)$$

В данном соотношении нормальная производная $\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}$ искомой функции $u(x,t)$, имеющая смысл концентрации вещества или температуры, после умножения на коэффициент λ, имеющий смысл соответственно коэффициентов диффузии или теплопроводности, является потоком соответственно вещества или тепла через поверхность G. Такие граничные условия используются при теплообмене во время нагревания тела в высокотемпературных печах, где передача тепла происходит при помощи излучения по закону Стефана-Больцмана, когда температура тела значительно меньше температуры излучающих поверхностей. Второй пример реализации граничных условий второго рода - протекание частиц через границу области G с заданным потоком.

Граничное условие третьего рода (задача Ньютона)

Обычно граничные условия третьего рода характеризуют конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой в процессе нагревания и охлаждения тела. Данный закон достаточно сложен, но в упрощенном виде может быть принят в виде закона Ньютона. В рамках данного закона поток тепла через поверхность тела пропорционален разности температур данного тела и окружающей среды, т.е.

$$-\lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x=0} = \alpha\left[u(0,t) - T_L(t)\right],\ -\lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x=L} = \alpha\left[u(L,t) - T_R(t)\right]. \qquad (4c)$$

В данном соотношении параметр α имеет смысл коэффициента теплообмена. Частным случаем третьей краевой задачи является закон Стефана-Больцмана. В рамках данного закона тепловой поток через границу от температуры пропорционален разности четвёртых степеней температур тела и окружающей среды.

Граничное условие четвертого рода

Граничное условие четвёртого рода соответствует массо- и теплообмену поверхности тела с окружающей средой (например, с другим телом). При этом обычно считается, что концентрация вещества или температура (в зависимости от рассматриваемой с физической точки зрения ситуации), а также поток вещества или тепла сохраняются с точностью до известного множителя при переходе через границу раздела, т.е.

$$k(t)\, u_1(x,t)\big|_{S_1} = u_2(x,t)\big|_{S_2},\ -D_1 \frac{\partial\, u_1(x,t)}{\partial n}\bigg|_{S_1} = -D_2 \frac{\partial\, u_2(x,t)}{\partial n}\bigg|_{S_2}. \qquad (4г)$$

2.1.3. Переход от дифференциальной формы уравнений к интегральной

Дифференциальное уравнение может быть преобразовано к интегральному. Рассмотрим два способа такого преобразования. В качестве примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_2(x)\frac{d^2 y(x)}{d\,x^2} + a_1(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x} + a_0(x)y(x) = b(x), \qquad (5)$$

где $y(x)$ - искомая функция, $a_i(x)$ и $b(x)$ - известные функции независимой переменной x. В рамках первого метода перехода от дифференциального уравнения к интегральному сделаем в уравнении (5) следующую замену переменных: $z(x) = \dfrac{d^2 y(x)}{d\,x^2}$. Тогда производная $\dfrac{d\,y(x)}{d\,x}$ является интегралом от новой функции $z(x)$, т.е. $\dfrac{d\,y(x)}{d\,x} = \int\limits_0^x z(v)\,d\,v + C_1$, где C_1 - постоянная интегрирования. Искомая функция $y(x)$ является двухкратным интегралом от функции $z(x)$, т.е. $y(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^v z(u)\,du\,dv + C_1x + C_2$, где C_2 - вторая постоянная интегрирования. С помощью интегрирования по частям [16] последнее соотношение можно свести к однократному интегралу: $y(x)=\int\limits_0^x (x-v)z(v)\,dv + C_1x + C_2$. После проведения такой замены переменных уравнение (5) преобразуется к следующему виду

$$a_2(x)z(x)+a_1(x)\left[\int\limits_0^x z(v)\,dv + C_1\right]+a_0(x)\left[\int\limits_0^x (x-v)z(v)\,dv + C_1x + C_2\right]=b(x). \quad (5a)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются с помощью наложенных на решение условий. Уравнение (5*а*) является интегральным уравнением относительно старшей производной искомой функции. После определения функции $z(x)$ ее необходимо проинтегрировать необходимое число раз (в данном случае - два раза) для определения исходной искомой функции $y(x)$.

В рамках второго метода перехода от дифференциальной формы уравнения к интегральной проинтегрируем правую и левую части уравнения (5) по независимой переменной x. Тогда уравнение (5) преобразуется к следующей форме

$$\int\limits_0^x a_2(v)\frac{d^2y(v)}{dv^2}dv + \int\limits_0^x a_1(v)\frac{dy(v)}{dv}dv + \int\limits_0^x a_0(v)y(v)\,dv = \int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Первые два слагаемых уравнения (5*б*) могут быть преобразованы к более простому виду использованием интегрирования по частям, т.е.

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx} - \int\limits_0^x \frac{da_2(v)}{dv}\frac{dy(v)}{dv}dv + a_1(x)y(x) - \int\limits_0^x y(v)\frac{da_1(v)}{dv}dv +$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)\,dv = \int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Повторное применение интегрирования по частям во втором слагаемом позволяет преобразовать интегро-дифференциальное уравнение в интегральное

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx} - \frac{da_2(x)}{dx}y(x) + \int\limits_0^x \frac{d^2a_2(v)}{dv^2}y(v)\,dv + a_1(x)y(x) - \int\limits_0^x y(v)\frac{da_1(v)}{dv}dv +$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)\,dv = \int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Или, после приведения подобных членов

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx} + \left[a_1(x) - \frac{da_2(x)}{dx}\right]y(x) + \int\limits_0^x\left[\frac{d^2a_2(v)}{dv^2} - \frac{da_1(v)}{dv} + a_0(v)\right]y(v)\,dv =$$

$$=\int\limits_0^x b(v)\,dv + C_1.$$

Повторное интегрирование последнего соотношения является предпоследним шагом в преобразовании его из интегро-дифференциальной формы к интегральной, т.е.

$$\int_0^x a_2(v)\frac{d\,y(v)}{d\,v}d\,v+\int_0^x\left[a_1(v)-\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}\right]y(v)d\,v+\int_0^x\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\times$$

$$\times(x-v)y(v)d\,v=\int_0^x(x-v)\,b(v)\,d\,v+C_1x+C_2.$$

Применение интегрирования по частям к первому слагаемому и приведение подобных членов в последнем уравнении позволяет получить второй интегральный аналог уравнения (5)

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\left\{a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\right\}y(v)d\,v=$$

$$=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2. \qquad (5б)$$

Введение обозначений

$$\widetilde{a}_1(v)=a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right],$$

$$b(x)=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2$$

позволяет преобразовать второй интегральный аналог уравнения (5) к окончательному виду

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\widetilde{a}_1(v)y(v)d\,v=\widetilde{b}(x). \qquad (5в)$$

2.1.4. *Классификация интегральных уравнений*

Существуют две основных группы интегральных уравнений: уравнения Вальтера и уравнения Фредгольма. В рамках каждой группы выделяются два рода уравнений: первый и второй. Общий вид перечисленных уравнений приведен ниже. Уравнения Вальтера соответственно первого и второго рода выглядят следующим образом:

$$\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t=f(x), \qquad (6a)$$

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t, \qquad (6б)$$

где $y(x)$ - искомая функция, $f(x,t)$ и $K(x,t)$ - известные функции, вторая из которых называется ядром интегрального уравнения.

Уравнения Фредгольма соответственно первого и второго рода имеют вид

$$\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x), \qquad (7a)$$

$$y(x) - \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x). \qquad (7б)$$

Если $f(x)=0$, уравнения (6) и (7) называются однородными. В противном случае - неоднородными.

2.2. Решение дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

Из дифференциальных уравнений в частных производных наиболее просто решаются уравнения первого порядка. Рассмотрим методы их решения.

2.2.1. *Однородные уравнения*

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, т.е.

$$A_1(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1} + A_2(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_2} + ... +$$

$$+ A_m(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_m} = 0. \qquad (1a)$$

Составим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,x_2,...,x_m)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1,x_2,...,x_m)} = ... = \frac{dx_m}{A_m(x_1,x_2,...,x_m)}. \qquad (8)$$

Общий интеграл данной системы $u_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)=C_1$, $u_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)=C_2$, …, $u_{m-1}(x_1,x_2,\ldots,x_m)=C_{m-1}$ даёт общее решение уравнения ($1a$) в следующем виде:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_m)=U(u(x_1,x_2,\ldots,x_m),u(x_1,x_2,\ldots,x_m),\ldots,u(x_1,x_2,\ldots,x_m)).$$

Приведенный выше общий интеграл определяет семейство кривых, называемых характеристиками.

Пример 3

Рассмотрим уравнение

$$x\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + y\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + z\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = 0. \qquad (9)$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Данная система имеет два независимых интеграла

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{y}{x} = C_1,\ \varphi_2(x,y,z) = \frac{z}{x} = C_2,$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Таким образом, общим решением уравнения (3) является произвольная функция следующих аргументов

$$u(x,y,z)=F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right). \tag{10}$$

Подставим полученное решение (10) в уравнение (9). В результате такой подстановки получаем

$$x\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot$$

$$\cdot\,y\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial z}+z\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial z}=0.$$

Вычисление в последнем соотношении частных производных, являющихся вторыми множителями в каждом из слагаемых, позволяет получить

$$-x\cdot\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}-x\cdot\frac{z}{x^2}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}+y\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}+0+0+$$

$$+z\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}=0.$$

Приведение подобных членов в данном соотношении показывает, что функция (10) является решением уравнения (9).

<u>Пример 4</u>

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{11}$$

Соответствующее уравнению (11) обыкновенное дифференциальное уравнение в симметрической форме имеет вид

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}.$$

Его общим интегралом является следующая функция

$$\varphi(x,y)=x+y=c,$$

где c - постоянная интегрирования. Таким образом, общим решением уравнения (5) является произвольная функция следующих аргументов

$$u(x,y)=F(x+y).$$

Подстановка полученного решения в исходное дифференциальное уравнение и приведение подобных членов подтверждает правильность его нахождения.

2.2.2. *Неоднородные уравнения*

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, т.е. уравнение (1). В данном случае будем искать решение в неявном виде: $U(x_1,x_2,\ldots,x_m,u(x_1,x_2,\ldots,x_m))=0$. Решение уравнения (1) может быть определено из следующего уравнения

$$A_1(x_1,...,x_m)\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial x_1}+\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial x_2}\times$$

$$\times A_2(x_1,...,x_m)+...+A_m(x_1,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,...,x_m)}{\partial x_m}+\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial u}\times$$

$$\times\left[B_1(x_1,...,x_m)+B_2(x_1,...,x_m)\,u(x_1,...,x_m)\right]=0. \tag{12}$$

Методика решения данного уравнения совпадает с методикой решения однородного уравнения. Добавляется лишь одно обыкновенное дифференциальное уравнение. Составим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,x_2,...,x_m)}=\frac{dx_2}{A_2(x_1,x_2,...,x_m)}=...=\frac{dx_m}{A_m(x_1,x_2,...,x_m)}=$$

$$=\frac{du}{B_1(x_1,...,x_m)+B_2(x_1,...,x_m)\,u(x_1,...,x_m)}. \tag{13}$$

Далее найдём характеристики данной системы уравнений и определим решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.

<u>Пример 5</u>

Рассмотрим уравнение

$$4x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+3y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=2u(x,y). \tag{14}$$

Преобразуем его к виду

$$4x\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial x}+3y\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial y}+2\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial u}=0.$$

Далее запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{4x}=\frac{dy}{3y}=\frac{du}{2u}.$$

Данная система имеет следующие интегралы

$$C_1 = \frac{u(x,y)}{\sqrt{x}},\ C_2 = \frac{u(x,y)}{\sqrt[3]{y}}.$$

Таким образом, решение уравнения (8) в неявной форме имеет следующий вид

$$U\left(\frac{u(x,y)}{\sqrt{x}}, \frac{u(x,y)}{\sqrt[3]{y}}\right) = 0.$$

2.2.3. *Нелинейные уравнения*

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных первого порядка в случае двух независимых переменных

$$U\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0,$$

$$U\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0, \tag{15}$$

где $u(x,y)$ - искомая функция от x и y, U - заданная непрерывно- дифференцируемая функция своих аргументов, нелинейно зависящая от искомой функции $u(x,y)$ и ее производных $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$. Часто задача интегрирования одного уравнения является более трудной, чем интегрирование системы двух совместных уравнений

$$\begin{cases} U_1\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0 \\ U_2\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0. \end{cases} \tag{15a}$$

Пусть систему (15*а*) можно разрешить относительно производных $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = A(x, y, u(x,y)) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = B(x, y, u(x,y)), \end{cases} \tag{15б}$$

где $A(x,y,u(x,y))$ и $B(x,y,u(x,y))$ - непрерывно дифференцируемые функции. Следует заметить, что дифференцирование первого уравнения системы (15*б*) по y, а второго по x позволяет сформулировать условие совместности в следующей форме

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Данное условие позволяет получить

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} = \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} + \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial u} B \\ \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} = \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} + \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial z} A. \end{cases}$$

Два последних соотношения позволяют получить необходимое условие совместности системы (15*б*) в окончательной форме

$$\frac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial u} B(x,y,u(x,y)) =$$

$$= \frac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial z} A(x,y,u(x,y)). \quad (16)$$

Решение данного типа уравнений проиллюстрируем на следующем примере.

<u>Пример 6</u>

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x^2 + 2xu(x,y) + 2xy^2 - 1 \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2y. \end{cases} \quad (17)$$

Проверка условия совместности позволяет получить:

$$4xy+2x(-2y)=0+0\cdot[2x^2+2xu(x,y)+2xy^2-1].$$

Данное уравнение выполняется тождественно. По этой причине система (17) интегрируема. Первое уравнение системы (17) проинтегрируем по x, фиксируя y. Тогда получаем

$$u(x,y) = e^{x^2} \left\lfloor C(y) + \int (2x^2 + 2xy^2 - 1) e^{-x^2} dx \right\rfloor,$$

где $C(y)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция переменной y. Интеграл в последнем соотношении разбиением на сумму трёх интегралов, применением методов интегрирования по частям и усложнения дифференциала можно привести к следующему виду

$$\int (2x^2 + 2xy^2 - 1) e^{-x^2} dx = 2\int x^2 e^{-x^2} dx - 2y^2 e^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx =$$

$$= -xe^{-x^2} + \int e^{-x^2} dx - 2y^2 e^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx = -(y^2 + x) e^{-x^2}.$$

Таким образом, можно получить

$$u(x,y) = C(y) e^{x^2} - y^2 - x.$$

Выберем функцию $C(y)$ таким образом, чтобы удовлетворялось бы второе уравнение. Дифференцируя полученное из первого уравнения системы (17) решение, получаем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{d\,C(y)}{d\,y}e^{x^2}-2\,y\,.$$

Сравнение последнее уравнение со вторым уравнением системы (17) приводит к следующему результату

$$\frac{d\,C(y)}{d\,y}e^{x^2}-2\,y=-2y\,.$$

Тогда

$$\frac{d\,C(y)}{d\,y}=0\,,$$

т.е. $C(y)=const$. Решение системы (11) в окончательной форме имеет вид

$$u(x,y)=const\cdot e^{x^2}-y^2-x\,.$$

2.3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

2.3.1. *Метод разделения переменных*

2.3.1.1. Линейное однородное параболическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное параболическое уравнение

$$c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]. \qquad (18)$$

Физические трактовки решения данного уравнения - концентрация диффундирующего вещества или температура, а уравнение (18) в зависимости от физической трактовки решения называется уравнением диффузии или теплопроводности. Коэффициент c имеет смысл соответственно коэффициента пористости (отношение объёма пор в материале к общему объёму материала) или теплоёмкости, а коэффициент λ имеет смысл соответственно коэффициента диффузии или коэффициента теплопроводности. Отношение коэффициента теплопроводности и теплоёмкости λ/c называется коэффициентом температуропроводности. Если коэффициенты λ и c постоянны (а именно такой случай мы и будем пока рассматривать), тогда уравнение (18) примет следующий вид

$$\frac{\partial\,u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,. \qquad (18a)$$

В данном уравнении введено обозначение $D=\lambda/c$. Дополним уравнение (18a) следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Будем искать решение уравнения (18*a*) в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от пространственной переменной x, другой - только от времени t, т.е. $u(x,t)=A(x)B(t)$. Подставим предлагаемую форму решения в уравнение (18*a*)

$$A(x)\frac{\partial B(t)}{\partial t} = D\,B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Далее перенесём в одну часть уравнения все множители, зависящие от одной переменной, в другую часть уравнения - все множители, зависящие от другой переменной, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t} = \frac{D}{A(x)}\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2}.$$

Последнее равенство может выполняться только в том случае, когда его правая и левая части равны неопределённой пока постоянной величине

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t} = \frac{D}{A(x)}\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2} = \gamma.$$

Тогда получаем систему уравнений для функций $A(x)$ и $B(t)$

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t} = \gamma,\ \frac{D}{A(x)}\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2} = \gamma. \qquad (19)$$

Решим первое уравнение системы (19) методом разделения переменных. Для использования данного метода умножим левую и правую часть данного уравнения на dt, что приводит данное соотношение к следующему виду

$$\frac{d\,B(t)}{B(t)} = \gamma\,d\,t.$$

Интегрирование левой и правой части данного уравнения с использованием таблицы интегралов позволяет получить следующее решение первого уравнения системы (19)

$$ln[B(t)]=\gamma t+C_1.$$

Потенцирование данного соотношения дает функцию $B(t)$ в явном виде

$$B(t)=C_1 e^{\gamma t}.$$

Постоянная γ из условия физической реализуемости решения должна быть выбрана отрицательной, т.е. $\gamma=-|\gamma|$. В противном случае решение уравнения (18*a*) будет неограниченно возрастать во времени. Второе уравнение системы (19) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2} = \frac{\gamma}{D} A(x),$$

что эквивалентно следующему уравнению

$$\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2} + \frac{|\gamma|}{D} A(x) = 0\,.$$

Далее в рамках метода Эйлера подстановка $A(x) = C e^{\lambda x}$ позволяет получить следующее уравнение для параметра λ

$$\lambda^2 + |\gamma|/D = 0.$$

Тогда

$$\lambda = \pm i\,x\sqrt{|\gamma|/D}\,,$$

где $i = \sqrt{-1}$. С учётом последних соотношений функция $A(x)$ может быть представлена в двух эквивалентных формах

$$A(x) = C_2 \exp\left(i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right) + C_3 \exp\left(-i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right) \text{ и } A(x) = C_4 \cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right) + C_5 \sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right).$$

Вторая форма является более предпочтительной, т.к. с её помощью определение постоянных интегрирования является более удобной. Решение уравнения (18*a*) в окончательной форме имеет следующий вид

$$u(x,t) = \left[C_6 \cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right) + C_7 \sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right] e^{-|\gamma|\,t}, \qquad (20)$$

где $C_6 = C_1 C_4$, $C_7 = C_1 C_5$. Далее определим неизвестные пока постоянные величины C_6, C_7 и γ. Для этого найдём частную производную по переменной x от функции (20)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \left[-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right) + C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right] e^{-|\gamma|\,t}.$$

Подстановка граничных значений переменной x приводит к следующим результатам

при $x=0$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right) e^{-|\gamma|\,t}$$

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = \left[-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right) + C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \cos\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right] e^{-|\gamma|\,t}.$$

Равенство нулю производной $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ на границах рассматриваемой области позволяет получить из первого уравнения данной системы, что оно может удовлетворяться только при равенстве нулю постоянной интегрирования C_7. Остальные множители производной или не равны нулю, или равны нулю только в некоторых точках. Равенство нулю постоянной C_7 приводит второе уравнение последней системы к следующему виду

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = -C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)e^{-|\gamma|\,t}.$$

Данное соотношение может быть равно нулю или при $\sin\left(L\sqrt{|\gamma|/D}\right)=0$, или при $C_7=0$. Однако второе равенство приводит к нулевому решению уравнения (18a), что интереса не представляет. Решение уравнения $\sin\left(L\sqrt{|\gamma|/D}\right)=0$ позволяет получить: $|\gamma|= D\,\pi^2 n^2/L^2$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Таким образом, уравнение (18a) имеет бесконечное число решений. Числа $\pi n/L$ называются <u>собственными числами.</u> Соответствующие им ненулевые (нетривиальные) решения называются <u>собственными функциями</u>. Задача на нахождение собственных чисел и собственных решений называется задачей Штурма-Лиувиля. Формально составим ряд из этих решений

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_{n6}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}. \qquad (21)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{6n} воспользуемся начальным распределением. Представим начальное распределение $\chi\ (x)$ в виде ряда Фурье по <u>собственным функциям</u> рассматриваемой краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi nx/L)$, т.е.

$$\chi(x)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx. \qquad (22)$$

Далее в соотношении (21) выберем нулевое значение переменной t и приравняем полученный ряд ряду (22)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n6}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Путём сравнения членов ряда при одинаковых значениях n получаем

$$C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx;\ C_{n6}=\frac{2}{L}\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx,\ n\geq 1.$$

В окончательной форме решение уравнения (18a) имеет следующий вид

$$u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Описанный метод называется метод разделения переменных Фурье.

2.3.1.2. Линейное неоднородное параболическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t). \qquad (18б)$$

Функция $g(x,t)$ в данном уравнении описывает источник поступающих в область G вещества или теплоты. Дополним уравнение (18*б*) следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Будем искать решение уравнения (18*б*) в виде ряда, по собственным функциям однородной краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi n x/L)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad (23)$$

где $h_n(t)$ - неизвестная пока функция переменной t. Представим функцию $g(x,t)$, а также начальное распределение $\chi(x)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям однородной краевой задачи

$$g(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx, \qquad (24)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx. \qquad (25)$$

Подстановка ряда (24) в уравнение (18*б*) позволяет получить уравнение для неизвестной функции $h_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial h_n(t)}{\partial t}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = -D\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 h_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) +$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Далее в полученном уравнении группируем слагаемые при одинаковых значениях n и приравниваем их. Тогда

$$\frac{\partial h_0(t)}{\partial t} = \frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx,\ \frac{\partial h_n(t)}{\partial t} = -D\frac{\pi^2 n^2}{L^2}h_n(t) + \frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Решениями данных уравнений являются следующие функции

$$h_0(t) = \frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau + C_{0б},\ h_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau + C_{nб},$$

где C_{06} и C_{n6} - постоянные интегрирования. Подстановка полученных соотношений в предлагаемую форму решения (23) уравнения (18*б*) приводит к следующему результату

$$u(x,t)=C_{06}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d x\, d\tau+C_{n6}\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau\,. \tag{26}$$

Постоянные интегрирования C_{06} и C_{n6} определим с помощью начального условия. Для этого в соотношение (26) подставим нулевое значение переменной t и приравняем полученный результат разложению начального условия $\chi(x)$ (25), т.е.

$$\frac{1}{L}\int_0^0\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^0 e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d x\, d\tau+C_{n6}\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d x\,.$$

Тогда

$$C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d x\,,\ C_{n6}=\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d x\,.$$

В окончательной форме решение уравнения (18*б*) имеет следующий вид

$$u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d x\, d\tau+\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d x\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

2.3.1.3. Линейное однородное гиперболическое уравнение

Найдём решение линейного однородного гиперболического уравнения с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{27}$$

в области G: $0\le x\le L$, $0\le t<\infty$ с условиями

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0,\ u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_2(t).$$

С физической точки зрения уравнение (27), имеющее название классического волнового уравнения, можно проинтерпретировать следующим образом. Пусть имеется струна, совершающая малые колебания. В данном случае функция $u(x,t)$ является компонентой вектора смещения, перпендикулярной к оси абсцисс. Коэффициент E является отношением величин натяжения струны к её плотности и имеет смысл квадрата скорости распространения колебания. Будем искать решение уравнения (27) в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от переменной x, другой - только от переменной t, т.е. $u(x,t) = A(x)\cdot B(t)$. Подставим предлагаемую форму решения в уравнение (27)

$$A(x)\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2} = E\,B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Далее функции, зависящие только от переменной x, перенесём в одну часть данного уравнения, а функции, зависящие только от переменной t, перенесём в одну часть уравнения, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2} = \frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Такое равенство может быть выполнено только в том случае, когда и правая, и левая часть данного уравнения равны некоторой неопределённой пока постоянной величине γ.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2} = \frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = \gamma .$$

Для определения функций $A(x)$ и $B(t)$ необходимо решить уравнения

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2} = \gamma , \quad \frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = \gamma .$$

Общими решениями данных уравнений являются следующие функции

$$A(x) = C_1 \cos\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right), \; B(t) = C_3 \cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования. Общим решением уравнения (27) является произведение данных функций $A(x)$ и $B(t)$

$$u(x,t) = \left[C_1 \cos\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)\right]\left[C_3 \cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right]. \qquad (28)$$

Далее определим постоянные интегрирования. Для этого на первом этапе приравняем нулю переменную x. Тогда

$$u(0,t) = C_1\left[C_3 \cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right].$$

На границе $x = 0$ искомая функция равна нулю. Это условие выполняется в тех случаях, когда C_1=0 или $C_3 \cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right) = 0$. Однако второе равенство интереса не представляет, т.к. оно соответствует равенству нулю искомой функции $u(x,t)$.

Воспользуемся вторым граничным условием. Для этого подставим в соотношение (28) значение переменной $x=L$, т.е.

$$u(L,t)=C_2\sin\left(L\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right]=0\,.$$

Это условие выполняется в тех случаях, когда или $C_2=0$, или $C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+$ $+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)=0$, или $\sin\left(L\sqrt{\gamma/E}\right)=0$. Однако, первые два равенства интереса не представляют, т.к. они соответствуют равенству нулю искомой функции u (x,t). Из последнего равенства следует, что $\gamma=\pi^2n^2E/L^2$, $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$ Таким образом, рассмотренным граничным условиям удовлетворяет бесконечное число решений. Составим формально ряд из таких решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n2}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\left[C_{n3}\cos\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right)+C_{n4}\sin\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\right].\qquad(29)$$

В данном ряде достаточно найти не три семейства постоянных интегрирования C_{n2}, C_{n3} и C_{n4}, а произведения постоянных интегрирования $C_{n5}=C_{n2}C_{n3}$ и $C_{n6}=C_{n2}C_{n4}$. Для их определения воспользуемся начальными условиями. На первом этапе подставим в соотношение (29) нулевое значение переменной t и представим функцию $\chi_1(t)$ в виде ряда Фурье, т.е.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n5}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right),\ \ \chi_1(x)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x\,.\qquad(30)$$

Левые части последних соотношений равны друг другу. Значит, равны и правые. Тогда из этого условия получаем

$$C_{n5}=\frac{2}{L}\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x\,.$$

Подставляя полученные значения постоянных интегрирования в соотношение (29), получаем

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}C_{n6}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right).\qquad(29a)$$

Далее воспользуемся вторым начальным условием. Для этого вычислим производную от искомой функции, определяемой соотношением (29*а*), по переменной t. Искомая производная имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-2\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x+$$
$$+\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}n\,C_{n6}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right).\qquad(29б)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{n6} подставим в соотношение (29*б*) нулевое значение переменной t и представим функцию $\chi_2(t)$ в виде ряда Фурье, т.е.

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_{n6}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

$$\chi_2(x) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx. \qquad (31)$$

Левые части последних соотношений равны друг другу. Следовательно, равны и правые. Из этого условия определяем оставшиеся постоянные интегрирования. В окончательной форме решение уравнения (27) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L \chi_1(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx +$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{E}}\int_0^L \chi_2(x)\,dx + \frac{1}{\pi\sqrt{E}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Движения струны такого типа называется стоячей волной. Точки $x=mL/n$ ($m=1, 2, \ldots, n$-1), в которых $sin(\pi n\,x/L)=0$, в течении всего процесса остаются неподвижными и называются узлами стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки $x=(2m+1)/2n$ ($m=0, 1, \ldots, n$-1), в которых $sin(\pi n\,x/L)=\pm 1$, совершают с максимальной амплитудой, называются пучностями стоячей волны.

2.3.1.4. Линейное неоднородное гиперболическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (27a)$$

в области G: $0\le x\le L$, $0\le t\le \Theta$ с условиями

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0,\ u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \chi_2(t).$$

Будем искать решение уравнения (27*а*) в виде ряда, по собственным функциям краевой задачи с однородным волновым уравнением $f_n(x)=sin(\pi n x/L)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad (32)$$

где $h_n(x)$ - неизвестная пока функция. Представим функцию $g(x,t)$, а также начальные условия в виде рядов Фурье по собственным функциям краевой задачи с однородным волновым уравнением

$$g(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx, \qquad (33)$$

Подстановка рядов (32) и (33) в уравнение (27*a*) позволяет получить уравнение для неизвестной функции $h_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 h_n(t)}{\partial t^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)=-E\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty}n^2 h_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Далее в полученном уравнении группируем слагаемые при одинаковых значениях *n* и приравниваем их. Тогда

$$\frac{\partial^2 h_n(t)}{\partial t^2}=-n^2 E\frac{\pi^2}{L^2}h_n(t)+\frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Решениями данных уравнений являются следующие функции

$$h_n(t)=\left[C_{n1}-\frac{2}{\pi n L}\int_0^t\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)+$$

$$+\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n L}\int_0^t\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right).$$

Подстановка последних соотношений в ряд (32) позволяет получить

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n1}-\frac{2}{\pi n L}\int_0^t\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n L}\int_0^t\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \tag{34}$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями. На первом этапе выберем в соотношении (34) нулевое значение переменной *t*. После такой подстановки получаем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n1}-\frac{2}{\pi n L}\int_0^0\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n L}\int_0^0\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,0\right).$$

Учитывая нулевое значение ряда слагаемых в данном соотношении, запишем его в более простом виде

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n1}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

С другой стороны полученный ряд совпадает с рядом (30), являющимся разложением в ряд Фурье первого начального условия, т.е. функции $\chi_1(x)$. После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях номера n получаем

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[\frac{1}{L}\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\int_0^t\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\pi n L}\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)d\tau\right]\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (34a)$$

Для использования второго начального условия необходимо определить производную по переменной t от функции (34). Данная производная имеет следующий вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\frac{2}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)-2\sqrt{E}\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[\frac{1}{L}\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi n L}\int_0^t\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]+\frac{2}{\pi\sqrt{E}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^t\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sqrt{E}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^t\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]. \qquad (35)$$

Приравнивая переменную t к нулю, получаем

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_0=\sqrt{E}\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}n\,C_{n2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Для определения последних постоянных интегрирования воспользуемся рядом (31). После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях номера n получаем

$$C_{n2}=\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^L\chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,.$$

Тогда

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\times$$

$$\times\frac{2}{\pi L n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^t\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x\,d\,\tau+\frac{2}{\pi\sqrt{E}}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\frac{1}{n}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)d\,\tau\,.$$

2.3.1.5. Линейное однородное эллиптическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное эллиптическое уравнение внутри круга радиуса R

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (36)$$

с граничным условием

$$u(r{=}R,\varphi)=U(\varphi),$$

где (r,φ) - полярные координаты с началом в центре круга. Полярные координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями

$$\begin{cases}x=r\cdot\cos(\varphi)\\ y=r\cdot\sin(\varphi)\end{cases};\quad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ tg(\varphi)=y/x\end{cases}.$$

Будем искать решение уравнения (36) в виде произведения двух функций

$$u(r\,\varphi)=A(r)B(\varphi).$$

Подстановка предлагаемой формы решения в уравнение (36) позволяет получить

$$\frac{B(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right]+\frac{A(r)}{r^2}\frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0\,.$$

Далее разделяем переменные

$$\frac{r}{A(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right]=-\frac{1}{B(\varphi)}\frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial\varphi^2}$$

и приравниваем правую и левую часть уравнения неопределённому пока параметру γ. Решением полученных уравнений

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right]-\gamma\,A(r)=0\,,\ \frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\gamma\,B(\varphi)=0\,. \qquad (37)$$

являются следующие функции

$$A(r) = C_1 J_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right) + C_2 N_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right),\ B(\varphi) = C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right) + C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (37) имеет вид

$$u(r,\varphi) = \left[C_1 J_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right) + C_2 N_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right)\right]\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right) + C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right)\right], \qquad (38)$$

где $J_0(\gamma r)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $N_0(\gamma r)$ - функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Обе функции являются решением первого из пары уравнений (37), называющегося уравнением Бесселя. Рассмотрим функции Бесселя более подробно. В общем виде уравнение Бесселя имеет вид

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] + \left(r^2 - s^2\right)A(r) = 0\,. \qquad (39)$$

В данном уравнении (частном случае уравнения Бесселя) s - действительное число. Решениями уравнения (39) являются следующие функции

1) функции Бесселя первого рода (функции Бесселя) m-го порядка

$$J_m(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}.$$

$k! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$. Соотношение для гамма-функции представимо с помощью интеграла или предела

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{r-1}d\tau = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{r-1}}{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}.$$

При целых положительных значениях r выполняется свойство: $\Gamma(r) = (r\text{-}1)!$ Графики функций Бесселя первого рода первых трех порядков приведены на рис. 2.1.

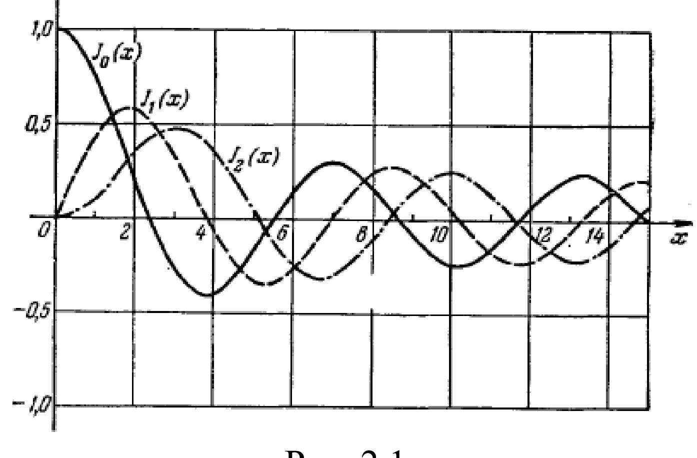

Рис. 2.1.

2) функции Бесселя второго рода (функции Неймана, функции Вебера) m-го порядка

$$N_m(r) = \lim_{m\to n}\frac{J_m(r)\cos(m\pi) - J_{-m}(r)}{\sin(m\pi)}.$$

Графики функций Бесселя второго рода первых двух порядков приведены на рис. 2.2.

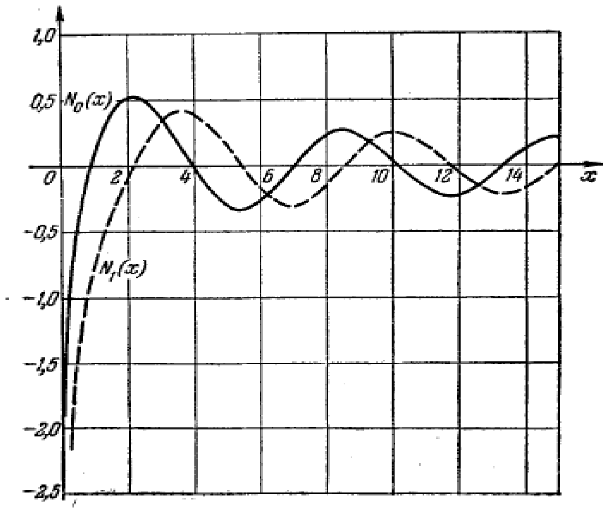

Рис. 2.2.

3) функции Ханкеля (Ганкеля) первого и второго рода m-го порядка

$$H_m^{(1)}(r) = J_m(r) + i\,N_m(r),\; H_m^{(2)}(r) = J_m(r) - i\,N_m(r),\; i = \sqrt{-1}\,.$$

Из рис. 2.2 следует, что при малых значениях переменной r решение (38) является физически нереализуемым. По этой причине выберем нулевое значение постоянной интегрирования C_2. Поскольку искомая функция $u(r,\varphi)$ определяется в круге, выполняется условие периодичности $u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi)$. Данное условие позволяет получить: $\gamma = n^2$. Тогда можно записать

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_0\left(n\frac{r}{R}\right)\left[C_{3n}\cos(n\varphi) + C_{4n}\sin(n\varphi)\right]. \tag{40}$$

Далее представим функцию $U(\varphi)$ в виде ряда Фурье

$$U(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\varphi)\int_0^{2\pi} U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\varphi)\int_0^{2\pi} U(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi\,. \tag{41}$$

При условии $r = R$ ряды (40) и (41) должны совпасть, что приводит к равенству соответствующих членов ряда. В окончательной форме решение уравнения (36) имеет вид

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(nr/R)}{J_0(n)}\cos(n\varphi)\int_0^{2\pi} U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(nr/R)}{J_0(n)}\sin(n\varphi)\int_0^{2\pi} U(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi\,.$$

2.3.1.6. Линейное неоднородное эллиптическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное эллиптическое уравнение внутри круга радиуса R

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2}=g(r,\varphi) \tag{42}$$

с граничным условием

$$u(r{=}R,\varphi)=U(\varphi),$$

где $g(r,\varphi)$ - известная функция. Будем искать решение уравнения (42) в виде ряда по собственным функциям однородной задачи, т.е.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(\varphi)\,J_0\left(\frac{n\,r}{K}\right), \tag{43}$$

где $h_n(\varphi)$ - неизвестная пока функция. Представим функцию $g(r,\varphi)$, а также граничное условие в виде рядов Фурье по собственным функциям краевой задачи с однородным эллиптическим уравнением

$$g(r,\varphi)=\frac{1}{R}\int_0^R r\,g(r,\varphi)d\,r+\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}J_0\left(n\frac{r}{R}\right)\int_0^R r\,g(r,\varphi)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,. \tag{44}$$

Для того, что бы определить функции $h_n(\varphi)$, подставим ряды (43) и (44) в уравнение (42). Тогда после решения соответствующих уравнений получаем искомые функции

$$h_0(\varphi)=\int_0^{\varphi}(\varphi-v)\int_0^R r\,g(r,v)\,d\,r\,d\,v+C_1\varphi+C_2,$$

$$h_n(\varphi)=\left[C_1-\frac{1}{\pi\,n}\int_0^{\varphi}\sin(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\cos(n\varphi)+$$

$$+\left[C_2+\frac{1}{\pi\,n}\int_0^{\varphi}\cos(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\sin(n\varphi),\ n\geq 1.$$

При нахождении данных функций использованы следующие свойства функции Бесселя первого рода

$$J_{m+1}(x)=\frac{m}{x}J_m(x)-\frac{d}{d\,x}J_m(x),\ J_{m+1}(x)=\frac{2\,m}{x}J_m(x)-J_{m-1}(x).$$

Далее для определения постоянных интегрирования воспользуемся разложением граничного условия в ряд Фурье (41). После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях n получаем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\,\varphi-\frac{1}{\pi\,n}\int_0^{\varphi}\sin(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\times$$

$$\times\cos(n\varphi)\frac{J_0(n\,r/R)}{J_0(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\varphi)\frac{J_0(n\,r/R)}{J_0(n)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\,\varphi+\frac{1}{\pi\,n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\varphi}\cos(n\,v)\int_0^R r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\,\varphi+\int_0^{\varphi}(\varphi-v)\int_0^R g(r,v)\times$$

$$\times r\,d\,r\,d\,v + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\,\varphi .$$

2.3.2. Метод распространяющихся волн

Рассмотрим однородное гиперболическое уравнение с постоянным коэффициентом (27) в неограниченной области -∞≤x≤∞ с начальными условиями

$$u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \chi_2(t).$$

Введём новые переменные $\xi = x + \sqrt{E}\,t$ и $\eta = x - \sqrt{E}\,t$. Подставим данные переменные в (27). Тогда после однократного дифференцирования по исходным переменным x и t получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{E}\,\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \sqrt{E}\,\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right] = E\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

Повторное дифференцирование левой и правой частей данного соотношения по переменным x и t приводит уравнение (27) к следующему виду

$$E\,\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} - E\,\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\,\partial \xi} - E\,\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} + E\,\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} =$$

$$= E\left[\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\,\partial \xi} + \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

Приведение подобных в данном уравнении позволяет получить уравнение (27) в новых переменных в следующем виде

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0 . \qquad (27б)$$

Далее проинтегрируем уравнение (27*б*) по переменной ξ, что приводит к следующему результату

$$\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} = f(\eta).$$

Интегрируя данное соотношение по переменной η при фиксированном значении переменной ξ, получаем

$$u(\xi,\eta) = \int_0^{\eta} f(v)\,d\,v + f_1(\xi).$$

Введём обозначение $f_2(\eta) = \int_0^{\eta} f(v)\,d\,v$. Тогда

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Данная функция является общим интегралом уравнения (27*б*). Тогда и функция

$$u(x,t)=f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right) \tag{45}$$

также является интегралом соответствующего гиперболического уравнения в исходных переменных. Для определения функций $f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)$ и $f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)$ воспользуемся начальными условиями. Найдём производную по переменной t от решения (45)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sqrt{E}\,\frac{d\,f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}-\sqrt{E}\,\frac{d\,f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}.$$

Далее и в решении (39), и в его производной выберем нулевое значение переменной t, т.е.

$$\begin{cases} f_2(x)+f_2(x)=\chi_1(x) \\ \sqrt{E}\,\dfrac{d\,f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}\Bigg|_{t=0}-\sqrt{E}\,\dfrac{d\,f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}\Bigg|_{t=0}=\chi_2(x). \end{cases} \tag{46}$$

Интегрирование второго уравнения системы (46) приводит к следующему результату

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{E}}\int_{x_0}^{x}\chi_2(v)\,d\,v+C,$$

где x_0 и C - постоянные величины. Из последнего уравнения, а также первого уравнения системы (46) можно получить

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\chi_1(x)+\frac{1}{2\sqrt{E}}\int_{x_0}^{x}\chi_2(v)\,d\,v+\frac{C}{2},\ f_2(x)=\frac{1}{2}\chi_1(x)-\frac{1}{2\sqrt{E}}\int_{x_0}^{x}\chi_2(v)\,d\,v-\frac{C}{2}.$$

С учётом полученных соотношений искомая функция $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+\chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{E}}\left[\int_{x_0}^{x+\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)\,d\,v-\int_{x_0}^{x-\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)\,d\,v\right].$$

Пользуясь свойством определённых интегралов, окончательно получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+\chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{E}}\int_{x-\sqrt{E}\,t}^{x+\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)\,d\,v. \tag{47}$$

Соотношение (47) называется формулой Даламбера.

2.3.3. Метод интегральных преобразований

Пусть необходимо определить решение некоторого дифференциального уравнения с заданными начальными и граничными условиями. Решение данной краевой задачи может быть существенно упрощено, если вместо непосредственного определения искомой функции искать её интегральное преобразование, определяемое формулой

$$\overline{u}(\xi,y)=\int_{a}^{b}u(x,y)K(x,\xi)\,d\,x,$$

где $c \le \xi \le d$, $K(x,\xi)$ - зависящая от вида интегрального преобразования функция, определённая в области $a \le \xi \le b$, $c \le \xi \le d$, называемая ядром интегрального преобразования. Функция $u(x,y)$ обычно называется оригиналом, функция $\overline{u}(\xi, y)$ - образом или изображением. Следует заметить, что интегральные преобразования представляют наибольший интерес в том случае, когда коэффициенты решаемого уравнения не зависят от той переменной, по которой берётся преобразование. В противном случае применение интегральных преобразований как правило приводит к математическим трудностям.

Пример 7

В качестве первого примера применения интегрального преобразования рассмотрим применение преобразования Лапласа к параболическому уравнению (18a) со следующими граничными и начальным условиями

$$u(0,t)=U,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x=0,0)=U,\ u(x>0,0)=0.$$

Далее применим преобразование Лапласа к правой и левой частям уравнения (18a)

$$\int_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-st} dt = D\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-st} dt.$$

Вычисление по частям интеграла в левой части данного уравнения, а также изменение порядка дифференцирования по переменной x и интегрирования по переменной t в правой части данного уравнения приводит к следующему результату

$$s\overline{u}(x,s) - u(x,0) = D\frac{\partial^2 \overline{u}(x,s)}{\partial x^2},$$

где $\overline{u}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt$. Функция $u(x,0)$ равна нулю во всех точках интервала $0 < x \le L$. Значение функции $u(0,0)$ может быть учтено в граничном условии. Таким образом, уравнение в частных производных (18a) преобразуется к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \overline{u}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{D}\overline{u}(x,s) = 0.$$

Лаплас-образ граничных условий для данного уравнения имеет вид

$$\overline{u}(0,s) = \frac{U}{s},\ \left.\frac{\partial \overline{u}(x,s)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

Метод Эйлера позволяет получить решение последнего уравнения в виде линейной комбинации экспоненциальных функций с одинаковыми по модулю, но разными по знаку показателями степени:

$$\bar{u}(x,s)=C_1\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)+C_2\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \tag{48}$$

Для определения постоянных интегрирования найдём производную от решения (48) переменной x. В данном случае имеем

$$\frac{d\,\bar{u}(x,s)}{d\,x}=C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \tag{49}$$

Далее как в решении (48), так и в его производной (49) выберем соответствующие граничные значения переменной x, т.е.

$$\bar{u}(0,s)=C_1+C_2,\ \left.\frac{d\,\bar{u}(x,s)}{d\,x}\right|_{x=L}=C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В результате получим следующую систему уравнений для определения искомых постоянных интегрирования

$$C_1+C_2=\frac{U}{s},\ C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)=0.$$

В результате решения данной системы получаем

$$C_1=2\frac{U}{s}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Big/ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right),\ C_2=2\frac{U}{s}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Big/ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В данном соотношении функция $y(x)=ch(x)$ называется гиперболическим косинусом. Эту функцию можно выразить через экспоненциальную $y_1(x)=exp(x)$ следующим образом

$$ch(x)=[exp(x)-exp(-x)]/2.$$

С учётом определённых постоянных интегрирования получаем окончательную форму решения (48)

$$\bar{u}(x,s)=\frac{2U}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)+$$

$$+\frac{2U}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

После приведения в последнем соотношении (48) подобных получаем

$$\bar{u}(x,s)=\frac{2U}{s}\left\{\exp\left[(x-L)\sqrt{\frac{s}{D}}\right]+\exp\left[(L-x)\sqrt{\frac{s}{D}}\right]\right\}\Big/ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В окончательном виде Лаплас-образ решения данной краевой задачи имеет вид

$$\bar{u}(x,s)=\frac{U}{s}\frac{ch\left[(L-x)\sqrt{s/D}\right]}{ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}. \tag{48a}$$

Далее с помощью обратного преобразования Лапласа можно найти оригинал функции (48*a*). Для этого необходимо вычислить интеграл

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{u}(x,s)e^{st}d\,s\,,$$

где $i=\sqrt{-1}$. Интегрирование происходит в комплексной плоскости $s=\xi+i\eta$ вдоль прямой $\sigma=const$, параллельной мнимой оси. Действительные числа ξ выбираются так, чтобы все особые точки подынтегрального выражения в обратном Лаплас-преобразовании лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости. Оригинал для функции (48*a*) можно также определить, пользуясь соответствующими таблицами интегральных преобразований. Воспользовавшись таблицами данных преобразований, можно получить

$$u(x,t)=U,\ u(x>0,t)=U\left\{1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+0{,}5}\exp\left[\frac{\pi^2(n+0{,}5)^2Dt}{L^2}\right]\sin\left[\frac{\pi(n+0{,}5)x}{L}\right]\right\}.$$

<u>Пример 8</u>

В качестве второго примера применения интегрального преобразования рассмотрим применение преобразования Ханкеля к следующему параболическому уравнению

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}=D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right]+g(r,t). \tag{50}$$

с граничными и начальным условиями

$$u(r,0)=\chi(r),\ \left.\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}=0\,.$$

Далее применим конечное преобразование Ханкеля к правой и левой частям уравнения (50)

$$\int\limits_0^R r\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}J_0(pr)dr=D\int\limits_0^R r\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right]\right\}J_0(pr)dr+\int\limits_0^R r\,g(r,t)J_0(pr)dr\,.$$

Изменим порядок дифференцирования по переменной *t* и интегрирования по переменной *r*, а также преобразуем первое слагаемое в правой части последнего уравнения

$$\frac{\partial\,\overline{u}(p,t)}{\partial t}+D\,p^2\overline{u}(p,t)=\int\limits_0^R r\,g(r,t)J_0(pr)dr\,, \tag{51}$$

где $\overline{u}(p,t)=\int\limits_0^R r\,u(r,t)J_0(pr)dr$ - прямое конечное преобразование Ханкеля. Обратное конечное преобразование Ханкеля определяется соотношением: $u(r,t)=$

$= \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}(p_n,t)\frac{J_0(p_n r)}{J_0(p_n R)} + \frac{2}{K}\bar{u}(0,t)$. Решение уравнения в обыкновенных производных (51) имеет вид

$$\bar{u}(p,t) = \left[C(p) + \int_0^t e^{D\tau p^2}\int_0^R r\,g(r,t)J_0(p\,r)\,d\,r\,d\,\tau\right]e^{-Dt\,p^2}.$$

Для определения неизвестной пока функции $C(p)$ воспользуемся начальным условием. В данном случае можно записать $\bar{u}(p,0) = C(p)$. По определению образа имеем

$$\bar{u}(p,0) = \int_0^R r\,u(r,0)J_0(p\,r)\,d\,r,$$

т.е.

$$\bar{u}(p,0) = \int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)\,d\,r.$$

Тогда

$$C(p) = \int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)\,d\,r.$$

В окончательной форме решение уравнения (51) имеет вид

$$\bar{u}(p,t) = \left[\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)\,d\,r + \int_0^t e^{D\tau p^2}\int_0^R r\,g(r,\tau)J_0(p\,r)\,d\,r\,d\,\tau\right]e^{-Dt\,p^2}.$$

Вычисление оригинала позволяет получить

$$u(r,t) = \frac{2}{R^2}\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)\,d\,r + \frac{2}{R^2}\int_0^t \exp\left(D\tau\,p^2\right)\int_0^R r\,g(r,t)\,d\,r\,d\,\tau + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-Dt\,p_n^2}\times$$
$$\times\frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p_n r)\,d\,r + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-Dt\,p_n^2}\frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}\int_0^t e^{D\tau\,p_n^2}\int_0^R r\,g(r,\tau)J_0(p\,r)\,d\,r\,d\,\tau,$$

где p - корень уравнения $\frac{d\,J_0(p\,r)}{d\,r} = 0$.

2.3.4. Решение уравнений с частными производными с переменными коэффициентами

В данном разделе рассмотрим несколько методов решения уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, применимых для всех типов уравнений. В качестве примера выберем параболическое уравнение с коэффициентом D, зависящим в общем случае как от переменной x, так и от переменной t, а также от решения уравнения $u(x,t)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(x,t,u(x,t))\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] \tag{52}$$

со следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Уравнение (52) в столь общем случае точного решения не имеет. На следующих примерах проиллюстрируем несколько приближённых методов решения.

Пример 9

В качестве первого примера рассмотрим систему из двух бесконечных цилиндров с коэффициентом $D(r,t)$, принимающим два значения: D_1 при $0\le r\le R_1$ и D_2 при $R_1\le r\le R_2$ для любого значения переменной t (см. рис. 2.3). Обозначим температуру в каждом цилиндре аналогично $u_1(r,t)$ и $u_2(r,t)$ для $0\le r\le R_1$ и $R_1\le r\le R_2$. Рассмотрим теплообмен данной системы с окружающей средой при условии, что в начальный момент времени ($t=0$) температура в каждом цилиндре постоянна и равна $u_1(r,0)=u_2(r,0)=U_0$. Далее данную систему цилиндров помещают в среду с постоянной температурой U_c. При этом $U_c<U_0$. В данном случае изменение температуры в системе цилиндров описывается следующей системой уравнений

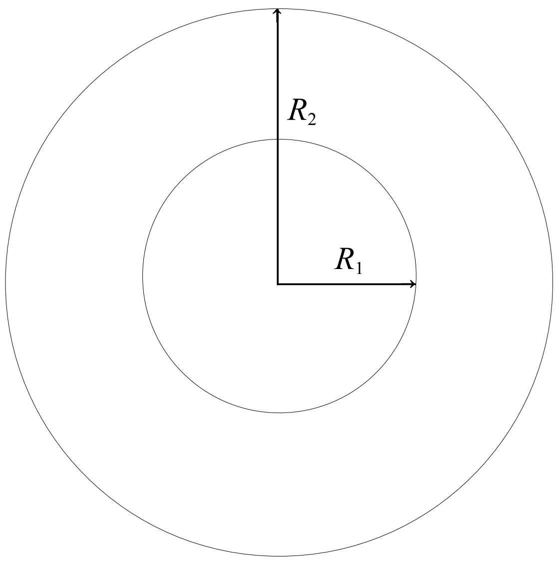

Рис. 2.3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial t} = \dfrac{D_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\right], & 0\le r\le R_1 \\ \dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial t} = \dfrac{D_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial r}\right], & R_1\le r\le R_2. \end{cases} \qquad (53)$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$u_1(r,0)=u_2(r,0)=T_0,\ u_1(R_1,t)=u_2(R_2,t),\ -D_1\left.\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_1},$$

$$u_1(0,t)<\infty,\ -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_2} + \alpha\left[U_1 - u_2(R_2,t)\right] = 0.$$

Для нахождения решения системы (53) воспользуемся преобразованием Лапласа. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{D_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_1(r,s)}{\partial r}\right] - sY_1(r,s) = -T_0, & 0 \le r \le R_1 \\ \dfrac{D_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_2(r,s)}{\partial r}\right] - sY_2(r,s) = -T_0, & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{53a}$$

$$u_1(0,s)<\infty,\ -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_2} + \alpha\left[\frac{U_1}{s} - u_2(R_2,s)\right] = 0,\ u_1(R_1,s)=u_2(R_2,s),$$

$$-D_1\left.\frac{\partial u_1(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1}.$$

Подробно рассматривать решение уравнения (53a) и переход от Лаплас-образа к оригиналу не будем из-за большого объёма соотношений. Приведём лишь конечное решение уравнения (53). Оно может быть представлено в следующей форме

$$\begin{cases} u_1(r,t) = U_0 - (U_c - U_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \dfrac{r}{R_1}\right)\exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 D_1 t}{R_1^2}\right) \\ u_2(r,t) = U_0 - (U_c - U_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 D_2 t}{R_2^2}\right)\left\{J_0(\mu_n)\cos\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right) - 1\right] - \right. \\ \left. - J_1(\mu_n)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\sin\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right) - 1\right]\right\}, \end{cases}$$

где λ_i и D_i - коэффициенты теплопроводности и температуропроводности цилиндров, μ_n - корни уравнения

$$J_0(\mu)\left\{\frac{D_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\right] - \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\right]\right\} - \tag{54}$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}J_1(\mu)\left\{\frac{D_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\right] + \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\right]\right\} = 0,$$

$$A_n = 2\frac{\lambda_1 D_j R_j}{\lambda_2 \lambda_j}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left\{\mu_n\sqrt{D_1/D_2}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{D_j R_j}{\lambda_j}tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left(\left[\mu_n^2\frac{\lambda_1^2 D_2}{\lambda_2^2 D_1}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^2 + \frac{D_j^2 R_j^2}{\lambda_j^2}\right]ctg\left[\mu_n\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\right] - 2\left[\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^2\frac{D_1}{D_2} + \right.\right.$$

$$+\frac{D_j^2R_j^2}{\lambda_j^2}\Bigg]\lambda_1\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\left\{\lambda_2\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[2\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right]\Bigg\}^{-1}+tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\times$$

$$\times\left[\mu_n^2\frac{D_1}{D_2}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2+2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{\lambda_1 D_i R_i}{\lambda_2\lambda_i}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}+D_1D_2\frac{R_i^2}{\lambda_2^2}\right]+2\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-$$

$$\left.-2\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{D_jR_j}{\lambda_j}-2\mu_nR_j\frac{D_j\lambda_1^2}{\lambda_j\lambda_2^2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)-\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\frac{\lambda_1D_j^2R_j^2}{\lambda_2\lambda_j^2\mu_n}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left\{\mu_n\sin\left[\mu_n\sqrt{D_1/D_2}\left(1-R_2/R_1\right)\right]\right\}^{-1},\ j{=}1{,}2.$$

Недостатком данного метода решения является громоздкость преобразований при нахождении решения краевой задачи, необходимость решения трансцендентных уравнений типа уравнений (54) для определения постоянных интегрирования и необходимость не всегда приемлемой идеализации резкой границы между слоями.

Пример 10

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{D_L(x,t)\left[1+\mu\frac{u^\gamma(x,t)}{P^\gamma(x,t)}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} \tag{55}$$

с граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

В уравнении (55) $D_L(x,t)$, $P(x,t)$ и γ - соответственно известные функции и параметр. Рассмотрим пока простейший случай равенства единице параметра γ. Далее представим функцию $D_L(x,t)$ в виде суммы её среднего значения D_0 и поправочной функции, учитывающей отличие функции $D_L(x,t)$ от её среднего значения, т.е.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\varepsilon\, g(x,t)\right]\left[1+\mu\frac{u^\gamma(x,t)}{P^\gamma(x,t)}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\}, \tag{55a}$$

где $0\le\varepsilon<1$, $|g(x,t)|\le1$. Ограниченность по модулю произведения $|\varepsilon\cdot g(x,t)|<1$ является следствием физической реализуемости функции $D_L(x,t)$ (например, положительность коэффициента диффузии или температуропроводности). Далее будем искать решение уравнения (55*a*) в виде степенного ряда

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j u_{ij}(x,t). \tag{56}$$

Подстановка предлагаемой формы решения в уравнение (55a) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях параметров ε и μ позволяет получить систему уравнений для функций $u_{ij}(x,t)$

$$\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{00}(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{01}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right], \tag{57}$$

$$\frac{\partial u_{11}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial x}\right]+$$

$$+D_0\frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{10}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{20}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{20}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{02}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{01}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right].$$

Подстановка ряда (56) в граничные и начальное условия для уравнения (55a) позволяет получить граничные и начальные условия для системы уравнений (57) в следующем виде

$$\left.\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ i\geq 0,\ j\geq 0;\ u_{00}(x,0)=\chi(x),\ u_{ij}(x,0)=0,\ i\geq 1,\ j\geq 1.$$

Таким образом, вместо исходного нелинейного уравнения (55) с зависящим от независимых переменных x и t коэффициентом D получена система линейных неоднородных (за исключением уравнения для функции $u_{00}(x,t)$) уравнений с постоянным коэффициентом D. Решая уравнения системы (57) методом разделения переменных, получаем

$$u_{00}(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L\chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)dv,$$

$$u_{10}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\int_0^t\exp\left(\frac{\pi^2 m^2 D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L g(v,\tau)\frac{\partial u_{00}(v,\tau)}{\partial v}\sin\left(\frac{\pi m v}{L}\right)dv\,d\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

$$u_{01}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\int_0^t\exp\left(\frac{\pi^2m^2D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L\frac{u_{00}(v,\tau)}{P(v,\tau)}\frac{\partial u_{00}(v,\tau)}{\partial v}\sin\left(\frac{\pi m v}{L}\right)d\,v\,d\,\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2m^2D_0t}{L^2}\right),$$

… … …

Подстановка нулевого приближения в поправочные функции $u_{10}(x,t)$ и $u_{01}(x,t)$ позволяет получить соотношения для них в явном виде

$$u_{10}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\int_0^t\exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2D_0\tau}{L^2}\right]\int_0^L\cos\left(\frac{\pi n w}{L}\right)\times$$

$$\times\chi(w)d\,w\int_0^L g(v,\tau)\left\{\cos\left[\pi v\frac{m+n}{L}\right]-\cos\left[\pi v\frac{m-n}{L}\right]\right\}d\,v\,d\,\tau\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2m^2D_0t}{L^2}\right),$$

$$u_{01}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2m^2D_0t}{L^2}\right)\int_0^t\exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2D_0\tau}{L^2}\right]\times$$

$$\times\int_0^L\frac{1}{P(v,\tau)}\left\{\cos\left[\pi v\frac{m+n}{L}\right]-\cos\left[\pi v\frac{m-n}{L}\right]\right\}\int_0^L\chi(w)\cos\left(\frac{\pi n w}{L}\right)d\,w\left[\int_0^L\chi(w)d\,w+\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=1}^{\infty}exp\left(-\frac{\pi^2k^2D_0\tau}{L^2}\right)cos\left(\frac{\pi k v}{L}\right)\int_0^L\chi(w)cos\left(\frac{\pi k w}{L}\right)d\,w\right]d\,v\,d\,\tau\,.$$

Решение следующих уравнений системы (57) позволяет увеличить точность аппроксимации решения уравнения (55). Следует заметить, что положительность коэффициента D в уравнении (55) за счёт физических ограничений, а также способ введения параметра ε и функции $g(x,t)$ приводят к сходимости ряда (56) по параметру ε.

Следует заметить, что методы решения уравнений в частных производных второго порядка могут быть использованы и для решения уравнений в частных производных более высоких порядков.

2.3.5. Решение нелинейных уравнений с частными производными

Пример 11

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)+\nu\Delta\vec{v}\,. \tag{58}$$

В данном уравнении введены следующие обозначения: $\vec{v}$ - скорость потока газа или жидкости, P - давление газа или жидкости, ρ - плотность, ν - кинематическая вязкость газа или жидкости, ∇ - вектор Набла, Δ - оператор Лапласа. Рассмотрим уравнение (58) в цилиндрической системе координат. Тогда уравнения для проекций вектора скорости на соответствующие координатные оси имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r\partial z}-\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}= \\ \qquad =\nu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r\partial \varphi}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi\partial z}+\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right)-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{P}{\rho}\right), \end{cases} \tag{59}$$

где $r\in[0,R]$ - радиальная координата (R - радиус рассматриваемой области), $\varphi\in[0,2\pi]$ - угловая координата, $z\in[-L,L]$ - осевая координата. Будем считать, что при $z=0$ имеется тонкий диск, вращающийся с частотой ω. Уравнения (59) дополним следующими граничными и начальными условиями

$$v_r(r,\varphi,-L,t)=0,\ v_r(r,\varphi,0,t)=0,\ v_r(r,\varphi,L,t)=0,\ v_r(r,0,z,t)=v_r(r,2\pi,z,t),\ v_r(0,\varphi,z,t)\neq\infty,$$

$$\left.\frac{\partial v_r(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial v_r(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right|_{r=R},\ \left.\frac{\partial v_\varphi(r,\varphi,z,t)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial v_\varphi(r,\varphi,z,t)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi},\ v_r(r,\varphi,z,0)=0,$$

$$v_\varphi(r,\varphi,0,t)=\omega r,\ v_\varphi(r,\varphi,-L,t)=0,\ v_\varphi(r,\varphi,L,t)=0,\ v_\varphi(r,0,z,t)=v_\varphi(r,2\pi,z,t),\ v_\varphi(0,\varphi,z,t)\neq\infty,$$

$$v_z(r,\varphi,-L,0)=V_0,\ v_z(r,\varphi,-L,t)=V_0,\ v_z(r,\varphi,0,t)=0,\ v_z(r,\varphi,L,t)=0,\ v_z(r,0,z,t)=v_z(r,2\pi,z,t),$$

$$v_z(0,\varphi,z,t)\neq\infty,\ v_\varphi(r,\varphi,z,0)=0. \tag{60}$$

Найдем решение данной системы уравнений с помощью метода осреднения функциональных поправок. Следует заметить, что данный метод решения может быть использован как для решения дифференциальных уравнений, так и для решения интегральных уравнений. Решение интегральных уравнений методом осреднения функциональных поправок изложено в следующей главе. В рамках данного метода для определения первого приближения проекций скорости потока газовой смеси заменим их на пока неизвестные средние значения $v_r\to\alpha_{1r}$, $v_\varphi\to\alpha_{1\varphi}$, $v_z\to\alpha_{1z}$ в правой части уравнений системы (59). После такой подстановки получаем уравнения для первых приближений искомых компонент в следующей форме

$$\frac{\partial v_{1r}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right),\ \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right),\ \frac{\partial v_{1z}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{\rho}\right). \tag{61}$$

Решения данных уравнений имеют следующий вид

$$v_{1r}=-\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^t\frac{P}{\rho}d\tau,\ v_{1\varphi}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\int\limits_0^t\frac{P}{\rho}d\tau,\ v_{1z}=-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_0^t\frac{P}{\rho}d\tau. \tag{62}$$

Второе приближение проекций скорости может быть получено заменой искомых проекций в правой части уравнений системы (59) на суммы $v_r\to\alpha_{2r}+v_{1r}$, $v_\varphi\to\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}$, $v_z\to\alpha_{2z}+v_{1z}$. Уравнения для данных проекций имеют вид

$$\frac{\partial v_{2r}}{\partial t} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right) -$$

$$-\left(\alpha_{2r} + v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial r} - \frac{\left(\alpha_{2\varphi} + v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi} - \left(\alpha_{2z} + v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \quad (63a)$$

$$\frac{\partial v_{2r}}{\partial t} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right) -$$

$$-\left(\alpha_{2r} + v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial r} - \frac{\left(\alpha_{2\varphi} + v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi} - \left(\alpha_{2z} + v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \quad (63б)$$

$$\frac{\partial v_{2\varphi}}{\partial t} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right) -$$

$$-\left(\alpha_{2r} + v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{\left(\alpha_{2\varphi} + v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial \varphi} - \left(\alpha_{2z} + v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z} \quad (63в)$$

Интегрирование данных уравнений приводит к следующему результату

$$v_{2r} = \nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]d\tau - \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right) -$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r} + v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}d\tau - \int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi} + v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}d\tau - \int_0^t\left(\alpha_{2z} + v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial z}d\tau, \quad (63г)$$

$$v_{2\varphi} = \nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]d\tau - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right) -$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r} + v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}d\tau - \int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi} + v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial \varphi}d\tau - \int_0^t\left(\alpha_{2z} + v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z}d\tau, \quad (63д)$$

$$v_{2z} = V_0 + \nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2}\right]d\tau - \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right) -$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r} + v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}d\tau - \int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi} + v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1z}}{\partial \varphi}d\tau - \int_0^t\left(\alpha_{2z} + v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}d\tau. \quad (63е)$$

Средние значения α_{2r}, $\alpha_{2\varphi}$, α_{2z} определим с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_{2r} = \frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^\Theta\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2r} - v_{1r}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt,$$

$$\alpha_{2\varphi}=\frac{1}{\pi\Theta R^2L}\int_0^{\Theta}\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2\varphi}-v_{1\varphi}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt,$$

$$\alpha_{2z}=\frac{1}{\pi\Theta R^2L}\int_0^{\Theta}\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2z}-v_{1z}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt, \tag{64}$$

где Θ - длительность наблюдения за потоком газа или жидкости. Подстановка первых двух приближений проекций скорости в соотношения (64) позволяет получить систему уравнений для искомых средних значений

$$\begin{cases} A_1\alpha_{2r}+B_1\alpha_{2\varphi}+C_1\alpha_{2z}=D_1\\ A_2\alpha_{2r}+B_2\alpha_{2\varphi}+C_2\alpha_{2z}=D_2\\ A_3\alpha_{2r}+B_3\alpha_{2\varphi}+C_3\alpha_{2z}=D_3 \end{cases} \tag{65}$$

где $A_1=1+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $B_1=\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $C_1=$ $=C_2=\frac{\pi}{2}\Theta^2R^2V_0$, $D_1=\nu\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt-$ $-\frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}dz\,d\varphi\,dr\,dt-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}dz\,d\varphi\,dr\,dt$,

$A_2=\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $B_2=1+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $D_2=\nu\int_0^{\Theta}(\Theta-$ $-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt-\frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\times$ $\times v_{1r}dz\,d\varphi\,r\,dr\,dt-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $A_3=\int_0^{\Theta}\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}dz\,d\varphi\,dr\times$ $\times(\Theta-t)dt$, $B_3=\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1z}}{\partial\varphi}dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $C_3=1+\frac{\pi}{2}\Theta^2R^2V_0$, $D_3=\nu\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\times$ $\times\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1r}\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}dz\,d\varphi\,dr\,dt-$ $-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{R}r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1z}}{\partial\varphi}dz\,d\varphi\,dr\,dt-\frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2$.

Решение данной системы определяются стандартными методами и представимо в следующей форме

$$\alpha_{2r}=\Delta_r/\Delta,\ \alpha_{2\varphi}=\Delta_\varphi/\Delta,\ \alpha_{2z}=\Delta_z/\Delta, \tag{11}$$

где $\Delta=A_1(B_2C_3-B_3C_2)-B_1(A_2C_3-A_3C_2)+C_1(A_2B_3-A_3B_2)$, $\Delta_r=D_1(B_2C_3-B_3C_2)-B_1(D_2C_3-D_3C_2)+C_1(D_2B_3-D_3B_2)$, $\Delta_\varphi=A_1(D_2C_3-D_3C_2)-D_1(A_2C_3-A_3C_2)+C_1(A_2D_3-A_3D_2)$, $\Delta_z=A_1(B_2D_3-B_3D_2)-B_1(A_2D_3-A_3D_2)+D_1(A_2B_3-A_3B_2)$.

2.4. Решение интегральных уравнений

2.4.1. *Метод Бубнова-Галеркина*

Первым рассмотрим метод Бубнова-Галеркина на примере решения уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt, \tag{6б}$$

Выберем систему функций $\{z_n(x)\}$, полную на $[a,b]$ и такую, что при любом n функции $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_n(x)$ линейно независимы, и ищем приближенное решение $y_n(x)$ в виде следующего ряда

$$y_n(x)=\sum_{i=1}^n a_i z_i(x). \tag{58}$$

Коэффициенты a_i (i=1, 2, …, n) определяется путем решения следующей системы уравнений

$$\int_a^b y_n(x)z_i(x)dx=\int_a^b f(x)z_i(x)dx+\lambda\int_a^b z_i(x)\int_a^b K(x,t)y_n(t)dtdx,$$

где i=1, 2, …, n, вместо $y_n(x)$ необходимо подставить $\sum_{i=1}^n a_i z_i(x)$.

Пример 11

Решим методом Бубнова-Галеркина следующее уравнение

$$y(x)=x+\int_{-1}^1 xt\,y(t)dt. \tag{6в}$$

В качестве полной системы функций на [-1,1] выберем систему полиномов Лежандра $P_i(x)$ (i=0, 1, 2, …, n). Приближенное решение $y_n(x)$ уравнения (6*в*) будем искать в виде

$$y_n(x)=a_1\cdot 1+a_2\cdot x+a_3\cdot(3x^2-1)/2.$$

Подставляя $y_3(x)$ вместо $y(x)$ в уравнение (6*в*), получаем

$$a_1+a_2x+a_3\frac{3x^2-1}{2}=x+\int_{-1}^1 xt\left(a_1+a_2t+a_3\frac{3t^2-1}{2}\right)dt.$$

Вычисление интеграла в правой части данного уравнения позволяет преобразовать его к следующей форме

$$a_1+a_2x+a_3\frac{3x^2-1}{2}=x+a_2x\frac{2}{3}.$$

Умножая обе части данного уравнения последовательно на 1, x и $(3x^2-1)/2$ и интегрируя в пределах от -1 до 1, получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_1, a_2 и a_3

$$a_1-a_3/2=0,\ a_2/3=1,\ 3a_3/2=0.$$

Отсюда получаем, что $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=0$. Тогда $y_3(x)=3x$. Подстановка полученного решения в исходное уравнение (6*в*) показывает, что получено точное решение данного уравнения.

2.4.2. *Метод осреднения функциональных поправок*

Рассмотрим следующее линейное однородное параболическое уравнение с переменным коэффициентом $D(x,t)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] \qquad (55б)$$

и следующими граничными и начальным условиями

$$u(x,0)=\chi(x),\ u(0,t)=0,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0.$$

Искомая функция $u(x,t)$ определяется в области G: $0\le x\le L$, $0\le t<\infty$.

Поставим в соответствие дифференциальному уравнению (55*б*) эквивалентное ему интегральное. Для этого проинтегрируем левую и правую часть уравнения (55*б*) по переменной t с учётом начального условия

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^t D(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right]+\chi(x).$$

Далее дважды интегрируем полученное уравнение по переменной x. После каждого интегрирования с учётом граничных условий соответственно получаем

$$\int_L^x u(v,t)dv=\int_0^t D(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau+\int_L^x \chi(v)dv$$

и

$$\int_0^x\int_L^w u(v,t)dv\,dw=\int_0^t\int_0^x D(v,\tau)\frac{\partial u(v,\tau)}{\partial v}dv\,d\tau+\int_0^x\int_L^w \chi(v)dv\,dw.$$

Интегрирование по частям упрощает последнее уравнение

$$\int_0^x(x-v)u(v,t)dv-x\int_0^L u(v,t)dv-\int_0^t D(x,\tau)u(x,\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^x(x-v)\chi(v)dv-x\int_0^L\chi(v)dv. \qquad (59)$$

Данное уравнение является уравнением смешанного типа. Оно имеет слагаемые, соответствующие и уравнению Вальтера, и уравнению Фредгольма первого рода. Далее преобразуем уравнение (59) к следующей форме

$$u(x,t)=u(x,t)+\frac{1}{L^2}\left[\int_0^x(x-v)\chi(v)dv-x\int_0^L\chi(v)dv-\int_0^x(x-v)u(v,t)dv+\right.$$

$$\left.+x\int_0^L u(v,t)dv+\int_0^t D(x,\tau)u(x,\tau)\,d\tau\right]. \qquad (59а)$$

Для нахождения решения данного уравнения заменим искомую функцию $u(x,t)$ на ее пока неизвестное среднее значение α_1. Таким образом, мы получили первое приближение искомой функции $u_1(x,t)$

$$u_1(x,t) = \alpha_1 +$$
$$+\frac{1}{L^2}\left[\int_0^x (x-v)\chi(v)\,dv - x\int_0^L \chi(v)\,dv - \alpha_1\frac{x^2}{2} + \alpha_1 x L + \alpha_1\int_0^t D(x,\tau)\,d\tau\right]. \qquad (60)$$

Среднее значение первого приближения искомой функции $u_1(x,t)$ определяется с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Theta L}\int_0^\Theta\int_0^L u_1(x,t)\,dx\,dt, \qquad (61)$$

где Θ - длительность наблюдения за изменением функции $u_1(x,t)$ во времени. Подстановка функции $u_1(x,t)$ в соотношение (61) позволяет получить уравнение для нахождения среднего значения α_1

$$\int_0^\Theta\int_0^L\int_0^x (x-v)\chi(v)\,dv\,dx\,dt - \int_0^\Theta\int_0^L x\int_0^L \chi(v)\,dv\,dx\,dt - \frac{\alpha_1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L x^2\,dx\,dt + \alpha_1 L\int_0^\Theta\int_0^L x\,dx\,dt +$$
$$+\alpha_1\int_0^\Theta\int_0^L\int_0^t D(x,\tau)\,d\tau\,dx\,dt = 0.$$

Интегрирование по частям, а также табличное интегрирование позволяет упростить данное уравнение

$$\frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)\,dx\,dt - L^2\frac{\Theta}{2}\int_0^L \chi(v)\,dv - \alpha_1 L^3\frac{\Theta}{4} + \alpha_1 L^3\frac{\Theta}{2} +$$
$$+\alpha_1\int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^L D(x,t)\,dx\,dt = 0.$$

Решение данного уравнения представимо в следующей форме

$$\alpha_1 = \left[L^2\frac{\Theta}{2}\int_0^L \chi(v)\,dv - \frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)\,dx\,dt\right]\Bigg/\left[L^3\frac{\Theta}{4} + \int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^L D(x,t)\,dx\,dt\right].$$

Второе приближение искомой функции определим в рамках стандартной процедуры метода осреднения функциональных поправок, т.е. путем замены искомой функции $u(x,t)$ в правой части уравнения (59*a*) на сумму $\alpha_2 + u_1(x,t)$, т.е.

$$u_2(x,t) = \alpha_2 + u_1(x,t) + \frac{1}{L^2}\left\{\int_0^x (x-v)\chi(v)\,dv - x\int_0^L \chi(v)\,dv - \int_0^x\left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]\times\right.$$
$$\left.\times(x-v)\,dv + x\int_0^L\left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]dv + \int_0^t D(x,\tau)\left[\alpha_2 + u_1(v,\tau)\right]d\tau\right\}. \qquad (62)$$

Для определения среднего значения α_2 второго приближения искомой функции $u_2(x,t)$ используем стандартное для метода осреднения соотношение

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Theta L} \int_0^{\Theta} \int_0^{L} \left[u_2(x,t) - u_1(x,t)\right] d\,x\,d\,t\,. \tag{63}$$

Подстановка соотношений (60) и (62) в соотношение (63) позволяет получить уравнение для нахождения среднего значения α_2

$$\int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{x}(x-v)\chi(v)d\,v\,d\,x\,d\,t - \int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{x}(x-v)\left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]d\,v\,d\,x\,d\,t - \int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{L}\chi(v)d\,v\times$$
$$\times\,x\,d\,x\,d\,t + \int_0^{\Theta}\int_0^{L}x\int_0^{L}\left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]d\,v\,d\,x\,d\,t + \int_0^{\Theta}\int_0^{L}\int_0^{t}D(x,\tau)\left[\alpha_2 + u_1(x,\tau)\right]d\,\tau\,d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Интегрирование по частям и табличное интегрирование позволяют упростить полученное соотношение

$$\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2\chi(x)\,d\,x\,d\,t - \frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t - \Theta\frac{L^2}{2}\int_0^{L}\chi(x)d\,x +$$
$$+\frac{L^2}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t + \int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{L}D(x,t)\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Решая данное уравнение, получаем среднее значение α_2 второго приближения $u_2(x,t)$ искомой функции $u(x,t)$

$$\alpha_2 = \left[\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2 u_1(x,t)d\,x\,d\,t + \Theta\frac{L^2}{2}\int_0^{L}\chi(x)d\,x - \frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}(L+x)^2\chi(x)\,d\,x\,d\,t -\right.$$
$$\left.-\frac{L^2}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L}u_1(x,t)d\,x\,d\,t - \int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{L}D(x,t)u_1(x,t)d\,x\,d\,t\right]\left[\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{L}D(x,t)d\,x\,d\,t -\right.$$
$$\left.-\,2L^3\Theta/3\right]^{-1}.$$

Приближения $u_n(x,t)$ искомой функции $u(x,t)$ более высокого порядка ($n=3$, 4, …) могут быть получены аналогично второму приближению функции $u(x,t)$, т.е. ее заменой за сумму $\alpha_n + u_{n-1}(x,t)$.

Количество итерационных шагов метода осреднения может быть уменьшено при сохранении точности решения уравнения. Для этого выберем более точное исходное приближение. В качестве более точного приближения выберем решение исходной краевой задачи при усредненном коэффициенте $D(x,t)$. Его среднее значение обозначим как D_0. Соответствующее ситуации $D(x,t)=D_0$ решение имеет вид

$$u_0(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^{L}\chi(x)d\,x +$$
$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^{L}\chi(v)\cos\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v\,. \tag{64}$$

Подстановка данного приближения в уравнение (59*a*) позволяет получить первое приближение данного уравнения в следующей форме

$$u_1(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2n^2D_0t}{L^2}\right)\int_0^L\chi(v)\cos\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v+$$

$$+\frac{1}{L^2}\left\{x\int_0^L\chi(x)d\,x+2\frac{x\,L}{\pi\,L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2n^2D_0t}{L^2}\right)\int_0^L\chi(v)\cos\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v-\right.$$

$$-\frac{x^2}{2L}\int_0^L\chi(x)d\,x-\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2n^2D_0t}{L^2}\right)\int_0^L\chi(v)\cos\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d\,x\int_0^t D(x,\tau)d\,\tau+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\int_0^t D(x,\tau)\exp\left(-\frac{\pi^2n^2D_0\tau}{L^2}\right)d\,\tau\times$$

$$\left.\times\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x+\int_0^x(x-v)\chi(v)d\,v-x\int_0^L\chi(v)d\,v\right]. \qquad (65)$$

Приближения более высоких порядков могут быть получены в рамках стандартной итерационной процедуры.

2.5. *Применение дифференциальных уравнений с частными производными к анализу экономических процессов*

Экономические системы подвержены влиянию большого числа неуправляемых внешних факторов (погодные условия, внешняя политика, социальные факторы, преднамеренное искажение и сокрытие информации с целью экономической диверсии и т. д.). В этой ситуации параметры в соотношениях разделов 2 и 3 могут принимать случайные значения. Для описания случайных процессов используются различные методы. Среди них описание случайных процессов с помощью моментов, кумулянтов, плотности вероятности, ...

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$. Зафиксируем моменты времени t_1, t_2, ..., t_n. Вероятность того, что значение $\xi(t_n)$ находится в интервале $\xi(t_n)\in[x_n,x_n+d\,x_n]$, если в момент времени t_1 случайный процесс имеет значение x_1, в момент времени t_2 случайный процесс имеет значение x_2, ..., в момент времени t_{n-1} случайный процесс имеет значение x_{n-1}, равна произведению условной плотности вероятности на длину интервала: $P=W(x_1,t_1;\ x_2,t_2;\ ...;\ x_{n-1},t_{n-1}|\ x_n,t_n)\,d\,x_n$. В общем случае рассматриваемая вероятность зависит от всех значений x_n,t_n. С одной стороны имеется более точная модель случайного процесса, но ее тяжелее исследовать. В этой ситуации представляют компромиссные модели, позволяющие упростить описание процессов и максимально сохранить его адекватность. В качестве одной из наиболее простых моделей рассматривается марковский процесс: при анализе марковских процессов учитывается только одно его предыдущее значение x_{n-1}. Его плотность вероятности описывается с помощью уравнения Фокера-Планка

$$\frac{\partial\,W(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2\left[D(x,t)\,W(x,t)\right]}{\partial\,x^2}-\frac{\partial\left[K(x,t)\,W(x,t)\right]}{\partial\,x}, \qquad (66)$$

где $D(x,t)$ - коэффициент диффузии, $K(x,t)$ - коэффициент сноса. При постоянных значениях коэффициентов диффузии D_0 и сноса K_0 уравнение (66) упрощается

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - K_0 \frac{\partial W(x,t)}{\partial x}. \tag{66a}$$

Существуют различные методы решения дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим метод разделения переменных Фурье. Предварительно необходимо дополнить уравнение (66) граничными и начальным условием. В качестве примера используем следующие условия: $W(0,t)=0$; $W(L,t)=0$; $W(x,0)=f(x)$. Далее будем искать решение уравнения (66*a*) в виде произведения: $W(x,t)=A(x)B(t)$. Подстановка данного произведения в уравнение (66*a*) позволяет получить

$$A(x)\frac{\partial B(t)}{\partial t} = D_0 B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - K_0 B(t)\frac{\partial A(x)}{\partial x}. \tag{67}$$

Далее разделим обе части уравнения (67) на произведение функций $A(x)B(t)$. В результате этого деления получаем следующее уравнение

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial B(t)}{\partial t} = \frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial A(x)}{\partial x}. \tag{68}$$

Теперь переменные разделены: левая часть уравнения зависит только от переменной t, а правая - только от переменной x. Это возможно только тогда, когда обе части уравнений имеют постоянное значение. Пусть постоянное значение будет обозначено как γ, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial B(t)}{\partial t} = \frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial A(x)}{\partial x} = \gamma.$$

Полученное соотношение представляет собой два уравнения: одно - для функции $A(x)$, другое - для функции $B(t)$, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial B(t)}{\partial t} = \gamma; \quad \frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial A(x)}{\partial x} = \gamma.$$

Решения этих уравнений представимы в следующей форме

$$B(t) = C_B e^{\gamma t},$$

$$A(x) = C_{A1}\exp\left[t\frac{K_0}{D_0}\left(1+\sqrt{1+4\gamma\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right] + C_{A2}\exp\left[t\frac{K_0}{D_0}\left(1-\sqrt{1+4\gamma\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right],$$

где C_B, C_{A1} и C_{A2} - постоянные интегрирования. Следует заметить, что неограниченный рост величин невозможен. По этой причине будем считать, что постоянная разделения может принимать только γ отрицательные значения, т.е. $\gamma = -|\beta|$. Далее знак модуля будем опускать подразумевая параметр β положительным. Такое же ограничение имеется на функциональную зависимость решения от переменной x. Тогда

$$B(t)=C_B e^{-\beta t},$$

$$A(x)=C_{A1}\exp\left[x\frac{K_0}{D_0}\left(1+\sqrt{1-4\beta\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right]+C_{A2}\exp\left[x\frac{K_0}{D_0}\left(1-\sqrt{1-4\beta\frac{D_0}{K_0^2}}\right)\right].$$

Далее определим постоянные интегрирования. Для этого функцию $A(x)$ представим с использованием гармонических функций, т.е.

$$A(x)=C_{A1}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\cos\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)+C_{A2}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right).$$

В окончательной форме плотность вероятности $W(x,t)$ представима в следующей форме

$$W(x,t)=C_B e^{-\beta t}\left[C_{A1}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\cos\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)+\right.$$

$$\left.+C_{A2}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)\right].$$

Далее постоянные интегрирования определим с помощью граничных условий. На первом этапа воспользуемся условием в точке x=0. Тогда

$$W(0,t)=C_B e^{-\beta t}\left[C_{A1}+0\right]=0.$$

В этом случае произведение постоянных интегрирования C_B и C_{A1} равно нулю. Тогда выражение для плотности вероятности упрощается

$$W(x,t)=C_B C_{A2} e^{-\beta t}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{x}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right).$$

Далее воспользуемся вторым граничным условием в точке $x=L$. Его использование приводит к следующему соотношению

$$W(L,t)=C_B C_{A2} e^{-\beta t}\exp\left(L\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{L}{D_0}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)=0.$$

Из данного соотношения определяется модуль постоянной разделения β из соотношения $\sin\left(LD_0^{-1}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}\right)=0$, что эквивалентно соотношению $LD_0^{-1}\sqrt{4\beta D_0-K_0^2}=\pi n$, где n=1, 2, 3, ...

$$\beta_n=\frac{\pi^2 n^2 D_0^2 L^{-2}+K_0^2}{4D_0}.$$

Получили бесконечный набор дискретных значений модуля постоянной разделения β. В этом случае плотность вероятности $W(x,t)$ представляется в виде ряда, учитывающего все значения β_n, т.е.

$$W(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_{Bn} C_{A2n} e^{-t\frac{\pi^2 n^2 D_0^2+K_0^2 L^2}{4D_0 L^2}} \exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Неизвестным пока остается произведение постоянных интегрирования C_{Bn} и C_{A2n}. Для определения этого произведения используется начальное условие. Предварительно представим начальное распределение плотности вероятности в виде ряда Фурье

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Тогда из равенства $W(x,0)=f(x)$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{Bn} C_{A2n}\exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Приравнивая члены ряда при одинаковых значениях их номера n получаем

$$C_{Bn} C_{A2n}=\exp\left(-x\frac{K_0}{D_0}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

В окончательной форме получаем плотность вероятности в следующей форме

$$W(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\frac{\pi^2 n^2 D_0^2+K_0^2 L^2}{4D_0 L^2}}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

При переменных значениях коэффициентов диффузии и сноса уравнение (66) точное решение удается получить редко. Рассмотрим приближенные методы решения данного уравнения. Для этого предварительно представим коэффициенты $D(x,t)$ и $K(x,t)$ в виде следующих сумм:

$$D(x,t)=D_0[1+\varepsilon\cdot g(x,t)],\ K(x,t)=K_0[1+\xi\cdot h(x,t)],\tag{69}$$

где $|g(x,t)|\le 1$, $|h(x,t)|\le 1$, $0\le\varepsilon<1$, $0\le\xi<1$, D_0 и K_0 - средние значения рассматриваемых коэффициентов. Далее будем искать решение уравнения (66) в виде следующего ряда

$$W(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{\infty}\xi^l W_{kl}(x,t).\tag{70}$$

Подстановка данного ряда и соотношений (70) в уравнение (65) позволяет получить следующий результат

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{\infty}\xi^l\frac{\partial W_{kl}(x,t)}{\partial t}=D_0\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{\infty}\xi^l\frac{\partial^2\{[1+\varepsilon\cdot g(x,t)]W_{kl}(x,t)\}}{\partial x^2}-$$

$$-K_0\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{\infty}\xi^l\frac{\partial\{[1+\xi\cdot h(x,t)]W_{kl}(x,t)\}}{\partial x}.\tag{71}$$

Группировка коэффициентов при одинаковых степенях параметров ε и ξ позволяет получить уравнения для функций $W_{kl}(x,t)$

$$\frac{\partial W_{kl}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 W_{kl}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial^2\left[g(x,t)\cdot W_{k-1l}(x,t)\right]}{\partial x^2}-$$

$$-K_0\frac{\partial W_{kl}(x,t)}{\partial x}-K_0\frac{\partial\left[h(x,t)\cdot W_{kl-1}(x,t)\right]}{\partial x},\ k\geq 0,\ l\geq 0. \quad (72)$$

Граничные и начальные условия для функций, описываемых полученными уравнениями, имеют следующий вид

$$W_{kl}(0,t)=0,\ W_{kl}(L,\mathrm{t})=0,\ k\geq 0,\ l\geq 0;\ W_{00}(x,0)=f(x),\ W_{kl}(x,\mathrm{t})=0,\ k\geq 1,\ l\geq 1. \quad (73)$$

Уравнения для функций $W_{kl}(x,t)$ могут быть решены методом разделения переменных Фурье, а также другими методами.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Найти общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений и решить для них задачу Коши при $y(1)=1$; $y'(1)=1$; $y''(1)=1$; …; $y^{(n)}(1)=1$. Если существуют особые решения, указать их

01. $3y-x\,y'=0$, $y''+4\,y'=0$;

02. $y'''-9\,y'=0$, $y'=y-x$;

03. $y=x\,y'+4x^2e^x$, $y=(x+1)y'+y^2$;

04. $x\,y^2+2x\,y'=y$, $y'+y\cdot tg(x)=0$;

05. $y^2+(x-a)y'=0$, $2x^2y\,y'=1+x^2$;

06. $y''+2y(y')^3=0$, $y'=(2y+1)\,ctg\,(x)$;

07. $x^2\cdot y'''-x^2\cdot y'=1$, $x^2y'+y=0$;

08. $y'+y\cdot tg(x)=0$, $x^3y'=2y$;

09. $x\,y'-2\,y=x^3\ln(x)$, $y'+y\cos(x)=\sin(2x)$;

10. $(1+x^2)y'+1+y^2=0$, $-y=x\,y'-a\sqrt{1+x^2}$;

11. $y'=y^2x^{-2}-y/x$, $3y^2y'+y^3=x+1$;

12. $x\,y'+2\sqrt{x}=y$, $y'\left(x^2-4\right)=2x\,y$;

13. $(y')^2=4\,y$, $y'+y^2=2$;

14. $y\,y'+x=0$, $y\,y''=(y')^2$;

15. $x^2y'+y\,x=y^2$, $x^2y'=y^2+x\,y$;

16. $x\,y'+y=\ln(x)+1$, $x^2y'+y^2=0$;

17. $y'\cdot\sin\left(y\,x^{-1}\right)=\cos\left(y\,x^{-1}\right)$,

18. $y+\sqrt{x^2+y^2}=x\,y'$,

$(2x+1)y'+y=x$; $x\,y'=y\left[1+\ln\left(y\,x^{-1}\right)\right]$;

19. $a\,y''+b\,y'=c\cdot x$, $a=const$, $b=const$, $c=const$, $x^2\,y'=2\,x\,y-3$;

20. $x^2+y^2=x(2\,x+y)\,y'$, $\left(a^2+x^2\right)y'+x\,y=1$;

21. $y'+x\,y=x\,y^3$, $y'-y\cdot tg\,(x)=ctg\,(x)$;

22. $x(x+1)y'=2y+1$, $y'\sqrt{a^2+x^2}=y$;

23. $y'''+3a\,y''+3a^2\,y'+a^3\,y=0$, $\left(1+x^2\right)y'+y\sqrt{1+x^2}=x\,y$;

24. $y'\cos\,(x)-y\sin(x)=\sin(2\,x)$, $y'+2\dfrac{y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x^2}$;

25. $x^2+y(y-x\,y')=0$; $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$;

26. $y\,(y')^2+y'=0$, $(y+x)\,y'=y$;

27. $y'=y$, $x+x\,y+y'\,y(1+x)=0$;

28. $x\,y'+y=-x\,y^2$, $y'-x\,y=-y^3e^{-x^2/2}$;

29. $2y'\sqrt{x}=y$, $y'''-5\,y''+8y'-4y=0$;

30. $4y^{(4)}-3y''+2y=0$, $y'=2\sqrt{y}\ln\,(x)$.

II) Найти общие решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

01. $\begin{cases}\dfrac{d\,x}{d\,t}=y+z\\[2mm] \dfrac{d\,y}{d\,t}=x+z\\[2mm] \dfrac{d\,z}{d\,t}=x+y\end{cases}$;

02. $\begin{cases}\dfrac{d\,x}{d\,t}=x-y+z\\[2mm] \dfrac{d\,y}{d\,t}=x+y-z\\[2mm] \dfrac{d\,z}{d\,t}=2x-y\end{cases}$;

03. $\begin{cases}5\dfrac{d\,x}{d\,t}+4x-y=e^{-t}\\[2mm] \dfrac{d\,x}{d\,t}+8x-3y=5e^{-t}\end{cases}$;

04. $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{d\,t^2}-4\dfrac{d\,x}{d\,t}+4x-y=0\\[2mm] \dfrac{d^2y}{d\,t^2}+4\dfrac{d\,y}{d\,t}+4y=16\,e^t\end{cases}$;

05. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$;

06. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 2sh(t) \end{cases}$;

07. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \end{cases}$;

08. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$;

09. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$;

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - y = e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = e^t \end{cases}$;

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$;

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$;

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$;

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$;

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$;

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$;

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$;

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + y = t \\ \dfrac{dy}{dt} - x = t^{2} \end{cases}$;

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \sin(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \cos(t) \end{cases}$;

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x \\ \dfrac{dy}{dt} + t^{2} - x = 0 \end{cases}$;

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 6e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 2t\,e^{t^{2}} \end{cases}$;

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y - 11x \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 9y - t \end{cases}$;

23. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin(t) \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos(t) \end{cases}$;

24. $\begin{cases} \dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} = x \\ \dfrac{d^{2}y}{dt^{2}} = y \end{cases}$;

25. $\begin{cases} \dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} + \dfrac{dy}{dt} + x = 0 \\ \dfrac{d^{2}y}{dt^{2}} + \dfrac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$;

26. $\begin{cases} 2\dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} + 3\dfrac{dy}{dt} + 6x = 0 \\ 5\dfrac{d^{2}y}{dt^{2}} + 4\dfrac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = t + x \end{cases}$;

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$;

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = 4x \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + y = t\,e^{-t^{2}} \end{cases}$;

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos(t) \\ \dfrac{dy}{dt} + ax = e^{mt} \end{cases}$.

III) Построить зависимости объема отгружаемой продукции от времени при различных значениях параметров a и b при постоянном приращении объема продукции c_0 и задержке τ

01. a=1, b=3, c_0=2, τ=5.	02. a=2, b=4, c_0=1, τ=2.	03. a=7, b=1, c_0=3, τ=3.
04. a=3, b=2, c_0=5, τ=1.	05. a=2, b=5, c_0=4, τ=4.	06. a=4, b=8, c_0=3, τ=7.
07. a=5, b=1, c_0=2, τ=3.	08. a=3, b=2, c_0=8, τ=1.	09. a=2, b=3, c_0=4, τ=5.
10. a=5, b=1, c_0=7, τ=2.	11. a=2, b=1, c_0=4, τ=7.	12. a=3, b=7, c_0=9, τ=3.
13. a=0, b=2, c_0=5, τ=1.	14. a=5, b=3, c_0=3, τ=2.	15. a=4, b=8, c_0=7, τ=5.
16. a=2, b=1, c_0=2, τ=3.	17. a=1, b=3, c_0=1, τ=4.	18. a=6, b=9, c_0=3, τ=8.
19. a=9, b=4, c_0=5, τ=3.	20. a=7, b=2, c_0=9, τ=1.	21. a=1, b=1, c_0=1, τ=3.
22. a=3, b=2, c_0=2, τ=8.	23. a=1, b=7, c_0=7, τ=6.	24. a=5, b=4, c_0=1, τ=3.
25. a=7, b=3, c_0=2, τ=2.	26. a=1, b=5, c_0=5, τ=5.	27. a=3, b=2, c_0=1, τ=7.
28. a=8, b=3, c_0=0, τ=0.	29. a=4, b=4, c_0=2, τ=1.	30. a=1, b=2, c_0=1, τ=3.

IV) Построить зависимости величины капитала от времени при различных значениях параметров K_0, F_0, G_0, D_0, E_0 и γ

01. K_0=2, F_0=1, G_0=3, D_0 =2, E_0=5, a=1, γ=2.	02. K_0=4, F_0=2, G_0=4, D_0=1, E_0=2, a=1.5, γ=3.	03. K_0=1, F_0=7, G_0=1, D_0=3, E_0=3, a=4, γ=1.
04. K_0=6, F_0=3, G_0=2, D_0=5, E_0=1, a=2, γ=3.	05. K_0=3, F_0=2, G_0=5, D_0=4, E_0=4, a=4, γ=1.	06. K_0=7, F_0=4, G_0=8, D_0=3, E_0=7, a=5, γ=3.
07. K_0=2, F_0=5, G_0=1, D_0=2, E_0=3, a=3, γ=1.5.	08. K_0=3, F_0=3, G_0=2, D_0=8, E_0=1, a=2, γ=1.	09. K_0=6, F_0=7, G_0=5, D_0=1, E_0=5, a=3, γ=1.
10. K_0=2, F_0=2, G_0=4, D_0=3, E_0=4, a=6, γ=0.5.	11. K_0=4, F_0=5, G_0=1, D_0 =4, E_0=3, a=4, γ=2.	12. K_0=4, F_0=1, G_0=6, D_0=2, E_0=4, a=1, γ=3.
13. K_0=2, F_0=3, G_0=0, D_0=5, E_0=1, a=2, γ=5.	14. K_0=1, F_0=7, G_0=3, D_0=1, E_0=5, a=6, γ=3.	15. K_0=5, F_0=0, G_0=4, D_0=3, E_0=8, a=0, γ=1.
16. K_0=2, F_0=5, G_0=1, D_0=4, E_0=3, a=2, γ=0.	17. K_0=1, F_0=2, G_0=5, D_0=1, E_0=6, a=5, γ=7.	18. K_0=3, F_0=6, G_0=4, D_0=7, E_0=3, a=2, γ=4.
19. K_0=8, F_0=3, G_0=3, D_0=0, E_0=2, a=1, γ=4.	20. K_0=1, F_0=5, G_0=2, D_0=9, E_0=5, a=1, γ=2.	21. K_0=5, F_0=2, G_0=1, D_0 =5, E_0=1, a=5, γ=2.
22. K_0=5, F_0=3, G_0=3, D_0=3, E_0=7, a=4, γ=3.	23. K_0=4, F_0=5, G_0=9, D_0=7, E_0=3, a=3, γ=1.	24. K_0=3, F_0=8, G_0=1, D_0=9, E_0=9, a=3, γ=6.
25. K_0=1, F_0=4, G_0=4, D_0=8, E_0=6, a=3, γ=8.	26. K_0=1, F_0=3, G_0=0, D_0=2, E_0=3, a=5, γ=1.	27. K_0=2, F_0=1, G_0=5, D_0=0, E_0=5, a=5, γ=1.
28. K_0=1, F_0=5, G_0=7, D_0=1, E_0=2, a=4, γ=0.5.	29. K_0=9, F_0=2, G_0=1, D_0=4, E_0=3, a=1, γ=5.	30. K_0=2, F_0=4, G_0=3, D_0=9, E_0=5, a=2, γ=7.

V) Построить зависимости количества произведенного товара от времени при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

01. r_1=2, r_2=1, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.	02. r_1=2, r_2=3, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.	03. r_1=5, r_2=3, K_1=6, K_2=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2,

e_0=1, f_0=6, g_0=5.

04. r_1=2, r_2=5, K_1=1, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

05. r_1=5, r_2=3, K_1=1, K_2=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

06. r_1=2, r_2=3, K_1=1, K_2=7, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

07. r_1=2, r_2=3, K_1=6, K_2=9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

08. r_1=2, r_2=3, K_1=8, K_2=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

09. r_1=2, r_2=6, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

10. r_1=2, r_2=7, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

11. r_1=2, r_2=7, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

12. r_1=6, r_2=5, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

13. r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

14. r_1=5, r_2=4, K_1=9, K_2=8, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

15. r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

16. r_1=3, r_2=1, K_1=7, K_2=9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

17. r_1=2, r_2=5, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

18. r_1=2, r_2=4, K_1=3, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

19. r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

20. r_1=3, r_2=7, K_1=2, K_2=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

21. r_1=5, r_2=3, K_1=2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

22. r_1=6, r_2=9, K_1=2, K_2=1, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

23. r_1=4, r_2=6, K_1=9, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.

24. r_1=2, r_2=1, K_1=7, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.

25. r_1=8, r_2=2, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.

26. r_1=2, r_2=5, K_1=3, K_2=6, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 5$, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.

27. r_1=3, r_2=4, K_1=5, K_2=2, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.

28. r_1=4, r_2=1, K_1=8, K_2=3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.

29. r_1=3, r_2=2, K_1=6, K_2=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.

30. r_1=7, r_2=1, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

VI) Построить зависимости количества произведенного товара от емкости рынка при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

01. $r_1=2, r_2=1, t=3, \hat{N}_1=1, \hat{N}_2=4, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.$

02. $r_1=2, r_2=3, t=5, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=6, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.$

03. $r_1=5, r_2=3, t=6, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=3, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.$

04. $r_1=2, r_2=5, t=3, \hat{N}_1=2, \hat{N}_2=1, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.$

05. $r_1=5, r_2=3, t=1, \hat{N}_1=2, \hat{N}_2=3, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.$

06. $r_1=2, r_2=3, t=1, \hat{N}_1=9, \hat{N}_2=4, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.$

07. $r_1=2, r_2=3, t=6, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=7, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.$

08. $r_1=2, r_2=3, t=2, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=7, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.$

09: $r_1=2, r_2=6, t=4, \hat{N}_1=3, \hat{N}_2=1, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.$

10. $r_1=2, r_2=7, t=5, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=2, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.$

11. $r_1=2, r_2=7, t=4, \hat{N}_1=3, \hat{N}_2=1, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.$

12. $r_1=6, r_2=5, t=3, \hat{N}_1=5, \hat{N}_2=1, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.$

13. $r_1=6, r_2=1, t=5, \hat{N}_1=2, \hat{N}_2=1, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.$

14. $r_1=5, r_2=4, t=9, \hat{N}_1=7, \hat{N}_2=2, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.$

15. $r_1=2, r_2=7, t=3, \hat{N}_1=2, \hat{N}_2=4, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.$

16. $r_1=3, r_2=1, t=7, \hat{N}_1=3, \hat{N}_2=7, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.$

17. $r_1=2, r_2=5, t=3, \hat{N}_1=6, \hat{N}_2=4, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.$

18. $r_1=2, r_2=4, t=3, \hat{N}_1=5, \hat{N}_2=1, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.$

19. $r_1=2, r_2=7, t=3, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=2, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.$

20. $r_1=3, r_2=7, t=2, \hat{N}_1=1, \hat{N}_2=8, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.$

21. $r_1=5, r_2=3, t=2, \hat{N}_1=1, \hat{N}_2=4, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.$

22. $r_1=6, r_2=9, t=2, \hat{N}_1=3, \hat{N}_2=9, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.$

23. $r_1=4, r_2=6, t=9, \hat{N}_1=5, \hat{N}_2=1, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.$

24. $r_1=2, r_2=1, t=7, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=2, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.$

25 $r_1=8, r_2=2, t=5, \hat{N}_1=1, \hat{N}_2=4, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.$

26. $r_1=2, r_2=5, t=3, \hat{N}_1=2, \hat{N}_2=5, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.$

27. $r_1=3, r_2=4, t=5, \hat{N}_1=7, \hat{N}_2=1, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.$

28. $r_1=4, r_2=1, t=8, \hat{N}_1=5, \hat{N}_2=1, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.$

29. $r_1=3, r_2=2, t=6, \hat{N}_1=4, \hat{N}_2=3, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.$

30. $r_1=7, r_2=1, t=3, \hat{N}_1=6, \hat{N}_2=4, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.$

VII) Построить зависимости количества произведенного товара от параметра роста количества товаров при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

01. t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

02. t=3, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

03. t=1, K_1=6, K_2=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

04. t=4, K_1=1, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

05. t=5, K_1=1, K_2=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

06. t=2, K_1=1, K_2=7, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

07. t=2, K_1=6, K_2=9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

08. t=2, K_1=8, K_2=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

09. t=2, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

10. t=7, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

11. t=7, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

12. t=6, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

13. r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

14. r_1=5, r_2=4, K_1=9, K_2=8, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

15. t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

16. t=3, K_1=7, K_2=9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

17. t=5, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

18. t=4, K_1=3, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

19. t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

20. t=7, K_1=2, K_2=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

21. t=3, K_1=2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

22. t=9, K_1=2, K_2=1, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

23. t=6, K_1=9, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.

24. t=2, K_1=7, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.

25. t=8, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.

26. t=5, K_1=3, K_2=6, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 5$, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.

27. t=3, K_1=5, K_2=2, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.

28. t=4, K_1=8, K_2=3,

29. t=2, K_1=6, K_2=5,

30. t=7, K_1=3, K_2=2,

$\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.

$\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.

$\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

VIII) Построить зависимости прибыли от времени при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

01. r_1=2, r_2=1, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

02. r_1=2, r_2=3, K_1=5, K_2 =7, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

03. r_1=2, r_2=1, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

04. r_1=5, r_2=3, K_1=6, K_2 =2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

05. r_1=2, r_2=5, K_1=1, K_2 =3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

06. r_1=5, r_2=3, K_1=6, K_2 =2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

07. r_1=5, r_2=3, K_1=1, K_2 =4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

08. r_1=2, r_2=3, K_1=1, K_2 =7, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

09. r_1=5, r_2=3, K_1=1, K_2 =4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

10. r_1=2, r_2=3, K_1=6, K_2 =9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

11. r_1=2, r_2=3, K_1=8, K_2 =6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

12. r_1=2, r_2=3, K_1=6, K_2 =9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

13. r_1=2, r_2=6, K_1=4, K_2 =5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

14. r_1=2, r_2=7, K_1=5, K_2 =3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

15. r_1=2, r_2=6, K_1=4, K_2 =5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

16. r_1=2, r_2=7, K_1=4, K_2 =5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

17. r_1=6, r_2=5, K_1=3, K_2 =2, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

18. r_1=2, r_2=7, K_1=4, K_2 =5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

19. r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2 =3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

20. r_1=5, r_2=4, K_1=9, K_2 =8, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

21. r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2 =3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

22. r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

23. r_1=3, r_2=1, K_1=7, K_2 =9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

24. r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

25. r_1=2, r_2=5, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5,

26. r_1=2, r_2=4, K_1=3, K_2 =7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5,

27. r_1=2, r_2=5, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5,

b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

28. r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

29. r_1=3, r_2=7, K_1=2, K_2 =5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

30. r_1=2, r_2=7, K_1=3, K_2 =1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

IX) Построить зависимости прибыли от емкости рынка при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

01. r_1=2, r_2=1, t=3, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3, γ_1=0.3, γ_2=0.2.

02. r_1=2, r_2=3, t=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5, γ_1=0.2, γ_2=0.5.

03. t=7, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

04. r_1=5, r_2=3, t=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5, γ_1=0.4, γ_2=0.1.

05. r_1=2, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4, γ_1=0.1, γ_2=0.7.

06. r_1=5, r_2=3, t=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5, γ_1=0.4, γ_2=0.5.

07. r_1=5, r_2=3, t=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2, γ_1=0.3, γ_2=0.4.

08. r_1=2, r_2=3, t=1, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3, γ_1=0.6, γ_2=0.4.

09. r_1=5, r_2=3, t=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2, γ_1=0.7, γ_2=0.2.

10. r_1=2, r_2=3, t=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4, γ_1=0.1, γ_2=0.7.

11. r_1=2, r_2=3, t=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4, γ_1=0.9, γ_2=0.7.

12. r_1=2, r_2=3, t=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4, γ_1=0.2, γ_2=0.1.

13. r_1=2, r_2=6, t=4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0, γ_1=0.2, γ_2=0.5.

14. r_1=2, r_2=7, t=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1, γ_1=0.5, γ_2=0.3.

15. r_1=2, r_2=6, t=4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0, γ_1=0.3, γ_2=0.7.

16. r_1=2, r_2=7, t=4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1, γ_1=0.4, γ_2=0.7.

17. r_1=6, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2, γ_1=0.4, γ_2=0.5.

18. r_1=2, r_2=7, t=4, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1, γ_1=0.5, γ_2=0.7.

19. r_1=6, r_2=1, t=5, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0, γ_1=0.5, γ_2=0.9.

20. r_1=5, r_2=4, t=9, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3, γ_1=0.8, γ_2=0.6.

21. r_1=6, r_2=1, t=5, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0, γ_1=0.5, γ_2=0.1.

22. r_1=2, r_2=7, t=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1,

23. r_1=3, r_2=1, t=7, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5,

24. r_1=2, r_2=7, t=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1,

f_0=5, g_0=1, γ_1=0.2, γ_2=0.1.

f_0=3, g_0=1, γ_1=0.4, γ_2=0.2.

f_0=5, g_0=1, γ_1=0.3, γ_2=0.9.

25. r_1=2, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9, γ_1=0.2, γ_2=0.7.

26. r_1=2, r_2=4, t=3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1, γ_1=0.3, γ_2=0.7.

27. r_1=2, r_2=5, t=3, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9, γ_1=0.2, γ_2=0.9.

28. r_1=2, r_2=7, t=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6, γ_1=0.4, γ_2=0.9.

29. r_1=3, r_2=7, t=2, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2, γ_1=0.5, γ_2=0.4.

30. r_1=2, r_2=7, t=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6, γ_1=0.8, γ_2=0.3.

X) Построить зависимости прибыли от параметра роста количества товаров при постоянных значениях рассматриваемых расходов a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0

01. t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=2, c_0=3, d_0=5, e_0=4, f_0=1, g_0=3.

02. t=3, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 6$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=8, e_0=3, f_0=6, g_0=5.

03. t=1, K_1=6, K_2=2, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=2, e_0=1, f_0=6, g_0=5.

04. t=4, K_1=1, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=3, c_0=4, d_0=7, e_0=5, f_0=1, g_0=4.

05. t=5, K_1=1, K_2=4, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=7, b_0=2, c_0=5, d_0=3, e_0=4, f_0=7, g_0=2.

06. t=2, K_1=1, K_2=7, $\hat{N}_1 = 9$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=5, e_0=4, f_0=2, g_0=3.

07. t=2, K_1=6, K_2=9, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=3, c_0=5, d_0=2, e_0=6, f_0=1, g_0=4.

08. t=2, K_1=8, K_2=6, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=1, b_0=5, c_0=3, d_0=2, e_0=6, f_0=9, g_0=4.

09. t=2, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=4, d_0=7, e_0=1, f_0=5, g_0=0.

10. t=7, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=2, e_0=0, f_0=3, g_0=1.

11. t=7, K_1=4, K_2=5, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=5, c_0=1, d_0=4, e_0=3, f_0=5, g_0=1.

12. t=6, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=8, d_0=3, e_0=2, f_0=7, g_0=2.

13. r_1=6, r_2=1, K_1=5, K_2=3, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=9, c_0=2, d_0=5, e_0=3, f_0=1, g_0=0.

14. r_1=5, r_2=4, K_1=9, K_2=8, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=2, c_0=0, d_0=4, e_0=7, f_0=1, g_0=3.

15. t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=6, c_0=7, d_0=2, e_0=1, f_0=5, g_0=1.

16. t=3, K_1=7, K_2=9, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 7$, a_0=2, b_0=3, c_0=1, d_0=4, e_0=5, f_0=3, g_0=1.

17. t=5, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=5, b_0=1, c_0=0, d_0=2, e_0=5, f_0=4, g_0=9.

18. t=4, K_1=3, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=5, b_0=7, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=2, g_0=1.

19. t=2, K_1=3, K_2=1, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=6, b_0=9, c_0=1, d_0=3, e_0=0, f_0=2, g_0=6.

20. t=7, K_1=2, K_2=5, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 8$, a_0=2, b_0=4, c_0=3, d_0=7, e_0=1, f_0=3, g_0=2.

21. t=3, K_1=2, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=9, b_0=8, c_0=3, d_0=1, e_0=5, f_0=9, g_0=3.

22. t=9, K_1=2, K_2=1, $\hat{N}_1 = 3$, $\hat{N}_2 = 9$, a_0=2, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=1, f_0=3, g_0=4.

23. t=6, K_1=9, K_2=7, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=3, c_0=7, d_0=1, e_0=0, f_0=6, g_0=0.

24. t=2, K_1=7, K_2=3, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 2$, a_0=1, b_0=7, c_0=3, d_0=6, e_0=9, f_0=8, g_0=3.

25. t=8, K_1=5, K_2=7, $\hat{N}_1 = 1$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=1, b_0=3, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=3, g_0=5.

26. t=5, K_1=3, K_2=6, $\hat{N}_1 = 2$, $\hat{N}_2 = 5$, a_0=3, b_0=2, c_0=4, d_0=2, e_0=7, f_0=8, g_0=1.

27. t=3, K_1=5, K_2=2, $\hat{N}_1 = 7$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=4, b_0=5, c_0=1, d_0=3, e_0=6, f_0=9, g_0=1.

28. t=4, K_1=8, K_2=3, $\hat{N}_1 = 5$, $\hat{N}_2 = 1$, a_0=2, b_0=1, c_0=6, d_0=9, e_0=4, f_0=8, g_0=5.

29. t=2, K_1=6, K_2=5, $\hat{N}_1 = 4$, $\hat{N}_2 = 3$, a_0=1, b_0=0, c_0=3, d_0=5, e_0=1, f_0=4, g_0=3.

30. t=7, K_1=3, K_2=2, $\hat{N}_1 = 6$, $\hat{N}_2 = 4$, a_0=3, b_0=1, c_0=7, d_0=5, e_0=3, f_0=0, g_0=1.

XI) Найти плотность вероятности $W(x,t)$ при постоянных коэффициентах диффузии и сноса следующих значениях параметров

01: D_0=2, K_0=-1, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;

02. D_0=3, K_0=-5, $L=\pi/3$, $f(x)=2\sin(3x)$;

03. D_0=2, K_0=-4, L=2, $f(x)$=8-2x^2;

04: D_0=1, K_0=-3, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;

05. D_0=3, K_0=1, $L=2\pi$, $f(x)=4\sin(x/2)$;

06. D_0=2, K_0=-7, $L=5\pi$, $f(x)=4\sin(x/5)$;

07: D_0=2, K_0=-0.1, $L=\pi/5$, $f(x)=4\sin(5x)$;

08. D_0=0.3, K_0=-5, L=5, $f(x)$=125-5$(x$-5$)^2$;

09. D_0=0.3, K_0=-5, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;

10: D_0=1, K_0=-3, L=5, $f(x)$=125-5$(x$-5$)^2$;

11. D_0=2, K_0=-2, $L=5\pi$, $f(x)=4\sin(x/5)$;

12. D_0=4, K_0=1, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;

13: D_0=2, K_0=-1, $L=\pi/5$, $f(x)=4\sin(5x)$;

14. D_0=2, K_0=-5, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;

15. D_0=3, K_0=-1, L=2, $f(x)$=8-2x^2;

16: D_0=4, K_0=-3, L=2, $f(x)$=8-2x^2;

17. D_0=1, K_0=4, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;

18. D_0=3, K_0=-5, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;

19: D_0=2, K_0=-3, $f(x)=2\cos(3x+1)$;

20. D_0=1, K_0=3, $L=\pi/5$, $f(x)=4\sin(5x)$;

21. D_0=1, K_0=2, $L=\pi/3$, $f(x)=2\sin(3x)$;

23: D_0=5, K_0=-2, $L=\pi/3$, $f(x)=2\sin(3x)$;

24. D_0=4, K_0=-5, L=1, $f(x)$=1-$(x$-1$)^2$;

25. D_0=3, K_0=-3, L=3, $f(x)$=27-3$(x$-3$)^2$;

25: D_0=1, K_0=-2, L=2, $f(x)$=8-2x^2;

26. D_0=5, K_0=-4, $L=\pi/5$, $f(x)=4\sin(5x)$;

27. D_0=3, K_0=1, L=2, $f(x)$=8-2x^2;

28: D_0=1, K_0=-3, $L=2\pi$, $f(x)=4\sin(x/2)$;

29. D_0=2, K_0=-5, $L=\pi/3$, $f(x)=2\sin(3x)$;

30. D_0=3, K_0=-2, L=2, $f(x)$=8-2x^2;

XII) Найти плотность вероятности $W(x,t)$ при переменных коэффициентах диффузии и сноса для параметров, приведённых в задании XVIII и $g(x,t)$ =(1-x/L)(1-D_0t/L^2), $h(x,t)$=(1-x/L)(1-K_0t/L).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шилов, Г.Е. Математический анализ / Г.Е. Шилов. - М.: Издательство “Лань”, 2015.

2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа (в двух томах) / Г. М. Фихтенгольц. - М.: Издательство “Лань”, 2015.

3. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - М.: Юнити, 2008.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004.

5. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2005.

6. Богачев В.И., Крылов Н., Рёкнер М., Шапошников С. Уравнение Фоккера - Планка - Колмогорова / В.И. Богачев, Н. Крылов, М. Рёкнер, С. Шапошников. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2013.

7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Наука, 1976.

8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, 1974.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. - М.: Наука, 1971.

10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1972.

11. Бейтмен Г., Эрдейи А., Магнус В., Оберхеттингер Ф., Трикоми Ф. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи, В. Магнус, Ф. Оберхеттингер, Ф. Трикоми. - М.: Наука, 1969.

12. Лучка А.Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок / А.Ю. Лучка. Киев: Издательство АН УССР. 1963.

Евгений Леонидович **Панкратов**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

<u>Учебное пособие</u>

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд.л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01