МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

Е.Л. Панкратов

ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и
предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся
по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2022

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 Панкратов Е.Л.: Операции над функциями многих переменных. Учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. - 112 с.

Рецензент: к.т.н., доцент **В.С. Громницкий**
к.ф.-м.н. доцент **М.Е. Елисеев**

Учебное пособие «Операции над функциями многих переменных» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», с соответствующим разделом курса «Математика». Оно содержит основные понятия о функциях многих переменных; их пределах и частных производных; экстремумах функций многих переменных; элементах теории поля; кратных, криволинейных и поверхностных интегралах; ряд применений функций многих переменных для прогноза экономических процессов. Для закрепления теоретических знаний по функциям многих переменных в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **С.Д. Макарова**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется большое количество экономических процессов, для описания которых необходимо использовать функция нескольких переменных. В данном пособии изложены основные понятия о функциях многих переменных; их пределах и частных производных; экстремумах функций многих переменных; элементах теории поля; кратных, криволинейных и поверхностных интегралах; ряд применений функций многих переменных для прогноза экономических процессов. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОК-15 и ОК-16 образовательного стандарта специальности 38.05. 01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела математики «Операции над функциями многих переменных» курса «Математика» студенты должны уметь вычислять пределы функций многих переменных; их частные производные; находить экстремумы функций многих переменных; интегрировать функции многих переменных; уметь прогнозировать экономический процессы на основе анализа функций многих переменных.

1. Основные определения

Определение 1

Пусть имеются два элемента x и y из некоторого множества D (в данном случае они находятся на плоскости). Пусть данной паре чисел поставлено по некоторому закону в соответствие одно число f. Тогда считается, что задана функция двух переменных $f(x,y)$. В символической области функция двух переменных может быть записана следующим образом:

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D.$$

Множество D называется областью определения функции z. Например, в случае прямоугольной области S с размерами x и y область определения имеет следующий вид:

$$S=x\cdot y,\ (x,y)\in D=\{x>0,\ y>0\}.$$

Пример 1

Пусть имеется эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

В данном случае z является функцией двух переменных x и y следующего вида:

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Далее (для простоты) чаще будем рассматривать функции двух переменных. Для функций большего числа переменных рассуждения аналогичны.

Часто (особенно в картографии) функции нескольких переменных изображают с помощью линий или поверхностей уровня.

Определение 2

Линия уровня - это множество точек, соответствующих некоторому постоянному значению функции двух переменных, т.е.

$$f(x,y)=const.$$

Определение 3

Поверхность уровня - это множество точек, соответствующих некоторому постоянному значению функции трёх переменных, т.е.

$$f(x,y,z)=const.$$

По картине линий уровня можно получить представление о поверхности. Например, если линии уровня замкнуты в окрестности некоторой точки, то в этом месте поверхность имеет либо вершину, либо впадину. Поэтому линии уровня могут снабжаться пометками высот. Частота линий уровня позволяет судить о крутизне склонов поверхности.

2. Предел и непрерывность функции многих переменных

На первом этапе рассмотрения данного раздела необходимо ввести понятие определение ε-окрестности точки $M(x_0,y_0)$ как совокупность точек $M(x,y)$, удовлетворяющих неравенству:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\varepsilon^2.$$

Будем говорить, что последовательность точек

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \ldots,\ (x_n,y_n),\ \ldots$$

стремится или сходится к точке $M_0(x_0,y_0)$, если расстояние между n-м членом этой последовательности и точкой M_0

$$\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$. В дальнейшем мы будем применять одну их эквивалентных записей:

$$\begin{cases} x\to x_0 \\ y\to y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0 \end{cases} \Leftrightarrow M\to M_0.$$

Определение предела функции двух переменных по форме совпадает с определением предела функции одной переменной: число A называется пределом функции $z=f(x,y)$ если для любой последовательности точек (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n), ... сходящейся к точке (x_0,y_0), соответствующая последовательность значений функции $z_n=f(x_n,y_n)$ сходится к A. Существование у функции предела A в точке (x_0,y_0) обозначается следующим образом:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Рассмотрим несколько примеров.

<u>Пример 2</u>

Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Данный предел не существует.

<u>Пример 3</u>

Найдём предел функции $f(x,y)=sin[2(x+y)]/(x+y)$ при $x\to0$ и $y\to0$. Перед вычислением предела предварительно преобразуем данную функцию путём умножения и числителя, и знаменателя на 2, т.е. $f(x,y)=2sin[2(x+y)]/2(x+y)$. Введём обозначение: $z=x+y$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin[2(x+y)]}{x+y}=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin(2z)}{2z}=2.$$

<u>Пример 4</u>

Найдём предел функции $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^4-y^4)$ при $x\to 2$ и $y\to 3$. Перед вычислением предела предварительно упростим данную функцию путём деления полинома в числителе на полином в знаменателе. В результате такого деления получаем: $f(x,y)=x^2+y^2$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\left(\frac{x^2-y^2}{x^4-y^4}\right)=\frac{1}{2^2+3^2}=\frac{1}{4+9}=\frac{1}{13}.$$

Пример 5

Найдём предел функции $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ при $x\to 0$ и $y\to 0$. Перед вычислением предела умножим и числитель, и знаменатель функции на величину $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}+1$. Тогда получаем:

$$f(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}.$$

Раскрывая скобки в знаменателе, получаем:

$$f(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2}.$$

Сокращение первого множителя в числителе данной функции и знаменателя приводит к следующему результату:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}+1.$$

Таким образом, значение предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ совпадает со значением предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)$. Вычисление второго предела позволяет получить:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=2.$$

Понятие предела даёт возможность определить непрерывность функции в данной точке. Функция $z=f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0) при выполнении следующего условия:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0). \qquad (1)$$

Соотношение (1) показывает, что под непрерывностью функции $f(x,y)$ понимается:
1) функция определена в данной точке и её окрестности;
2) существует предел функции в этой точке;
3) предел функции равен значению функции в этой точке.

При нарушении хотя бы одного из этих условий функция имеет разрыв в данной точке. Свойство непрерывности через приращения представимо в следующем виде:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = 0 .$$

Данное соотношение показывает, что “малым” изменениям аргументов соответствуют “малые” изменения функции. Рассмотренные понятия обобщаемы на функции большего числа переменных. Если функция непрерывна в любой точке некоторой области, то она непрерывна в этой области.

3. Дифференцирование функций многих переменных

Для функции одной переменной производная в данной точке равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее приращение стремится к нулю. В случае функции двух переменных приращения аргументов $(\Delta x, \Delta y)$ из данной точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M_0(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ могут быть сделаны в любом направлении на плоскости. По этой причине можно определить предел отношения приращения функции к приращению аргументов в зависимости от выбранного направления приращений аргументов. Это приводит к понятию производной функции двух переменных по данному направлению, которая характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Определение 4

Рассмотрим случай, когда приращения происходят в направлении оси абсцисс, т.е. когда $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$. Соответствующий данному случаю предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0).$$

называется частной производной функции $f(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$. Аналогично можно определить частную производную по y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0).$$

Геометрический смысл частных производных

Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ задана функция $z=f(x,y)$, у которой в этой точке существуют частные производные. Выясним их геометрический смысл. Зафиксируем одну из переменных, например, переменную x. Тогда в плоскости $y=y_0$ (см. рис. 1) мы получаем функцию одной переменной $z(x)=f(x, y_0)$. Ранее уже рассматривался геометрический смысл производной от функции одной переменной, и было показано, что производная от функции одной переменной равна тангенсу угла наклона касательной (в точке, в которой взята производная) по отношению к оси абсцисс. Аналогичный смысл у частной производной функции $z(x)=f(x,y_0)$ по x

$$\left.\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=tg(\alpha),$$

где α - угол между касательной к функции $f\,(x,y_0)$ в точке x_0 и осью абсцисс. Полностью аналогичным является геометрический смысл производной $f(x,y)$ по переменной y:

$$\left.\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}\right|_{y=y_0}=tg(\beta),$$

где β - угол между касательной к функции $f(x,y_0)$ в точке y_0 и осью ординат.

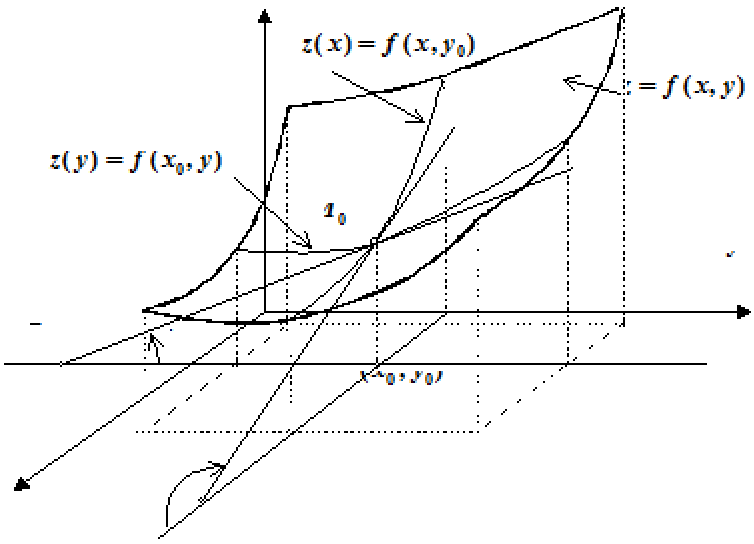


Рис. 1

В отличие от функции одной переменной, для которой из существования производной в данной точке следует её непрерывность в этой точке, для функции двух переменных $z=f(x,y)$ из существования частных производных ещё не следует непрерывность функции в данной точке. Рассмотрим следующий пример:

<u>Пример 6</u>

$$f=\begin{cases}\dfrac{2x\,y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}.$$

Частные производные данной функции в начале координат равны нулю, но в этой точке функция имеет разрыв.

Производная по направлению

<u>Определение 5</u>

Пусть имеется функция $f=f(x,y)$, определённая в области D. В некоторой внутренней точке $M_0(x_0,y_0)$ вектором $\vec{l}$ задано направление (см. рис.2). Рассмотрим поведение функции при движении точки $M(x,y)$ в данном направлении $\vec{l}$. Пусть t расстояние между точками M_0 и M, а $\vec{e}=\vec{i}\cos(\alpha)+\vec{j}\sin(\alpha)$ - единичный вектор заданного направления $\vec{l}$. В данном случае координаты точки $M(x,y)$ определяются следующим соотношением: $x = x_0 + t\,cos(\alpha)$, $y = y_0 + t\,sin\,(\alpha)$. Если точка M стремится к точке M_0 в заданном направлении, то $t \to 0$.

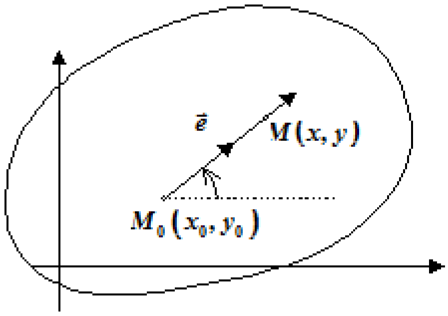


Рис. 2

Производной функции $f = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ в заданном направлении $\vec{l}$ называется следующий предел:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\sin(\alpha)\right) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{d\,f(x_0, y_0)}{d\,\vec{l}} =$$

$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\sin(\alpha). \quad (2)$$

Частными случаями данного предела являются частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$. Данные производные являются производными по направлению координатных осей Ox и Oy соответственно. Производная по направлению выражается через частные производные в этой точке. Чтобы это доказать, необходимо вычисление частных производных функций нескольких переменных.

Дифференцирование сложных функций

Предположим, что функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в области D, а функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные в промежутке $\alpha \le t \le \beta$. Тогда функция $f = f(x(t),y(t))$ - сложная функция одной переменной t. Для производной dz/dt данной функции справедлива следующая формула:

$$\frac{d\,f}{d\,t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\,x}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\,y}{d\,t}. \quad (3)$$

Для доказательства рассмотрим приращение:

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0, y_0) = f(x,y) - f(x_0, y) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

В первой из разностей изменяется только x, а во второй - только y, т.е. каждая из этих разностей - это функция одной переменной. Применим к ним формулу Лагранжа (формулу конечных приращений):

$$\Delta f = f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x, \eta)(y - y_0),$$

где ξ лежит в интервале между x и x_0, а η - между y и y_0. К разностям x-x_0 и y-y_0 опять применим формулу Лагранжа:

$$x - x_0 = x(t) - x(t_0) = x'(t_1)(t - t_0) = x'(t_1)\Delta t,$$

$$y-y_0=y(t)-y(t_0)=y'(t_2)(t-t_0)=y'(t_2)\Delta t,$$

где t_1, t_2 расположены между t и t_0. Таким образом,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=f'_x(\xi,y_0)x'(t_1)+f'_y(x_0,\eta)y'(t_1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу и замечая, что при $\Delta t\to 0$ имеем:

$$t\to t_0\Rightarrow t_1,t_2\to t_0\Rightarrow x\to x_0,\ y\to y_0\Rightarrow \xi\to x_0,\ \eta\to y_0,$$

с учётом непрерывности всех, входящих в это равенство функций, получаем:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t_0}=f'_x(x_0,y_0)x'(t_0)+f'_y(x_0,y_0)y'(t_0).$$

В силу произвольности значения t_0 приходим к формуле (3). Последнее соотношение является обобщением формулы производной сложной функции одной переменной. В случае большего числа переменных, например, трёх, т.е. $z=f(u(t), v(t),w(t))$, можно получить:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}.$$

Далее получим соотношение для вычисления производной по направлению. Согласно соотношению (2) производная по направлению совпадает с производной от сложной функцией $f=f(x,y)$, где $x(t)=x_0+t\cos(\alpha)$, $y(t)=y_0+t\sin(\alpha)$. С учётом соотношения (3), получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\alpha)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\alpha). \qquad (4)$$

Следует заметить, что в определении производной по направлению мы приближаемся к данной точке с одной стороны, т.е. имеем односторонний предел. Например, частная производная по отрицательному направлению оси абсцисс отличается знаком от частной производной по переменной x.

Аналогичноо вводится понятие производной по направлению для функции трёх переменных $u=F(x,y,z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos(\alpha)+\frac{\partial F}{\partial y}\cos(\beta)+\frac{\partial F}{\partial z}\cos(\gamma),$$

где $\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ - единичный вектор заданного направления $\vec{l}$, а α, β, γ - углы между осями координат и этим вектором. Приведём без доказательства формулы для производной сложной функции $z=\ f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Фактически функция $f=f(u(x,y),v(x,y))=\Phi(x,y)$ является функцией двух переменных и ее частные производные находятся по формулам

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Дифференцирование неявных функций

Полученные нами правила дифференцирования сложных функций позволяют более просто, чем ранее, находить производные функций, заданных неявно. Пусть уравнение

$$F(x,y)=0$$

определяет $y=\varphi(x)$ как некоторую дифференцируемую функцию. Тогда имеем тождество

$$F(x,\varphi(x))=0.$$

Дифференцируем его по переменной x, рассматривая левую часть как сложную функцию одной переменной, где $x=x$ и $y=\varphi(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial y}. \qquad (5)$$

Пусть теперь уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет $z=(x,y)$ как некоторую функцию двух переменных, у которой существуют частные производные. Для их нахождения продифференцируем тождество $F(x,y,z(x,y))=0$ по переменной x, рассматривая его левую часть как сложную функцию $F(u,v,w)$, где «промежуточные» функции имеют вид: $u=x$, $v=y$, $z=z(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0.$$

Поскольку x и y независимые переменные, то $dy/dx=0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Аналогично, из равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dy}=0.$$

получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Дифференцируемость функции двух переменных. Дифференциал

Из теории функций одной переменной $y=f(x)$ известно, что её дифференцируемость в данной точке означает существование производной функции в этой точке. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Более подробная запись этой формулы

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

показывает геометрическую интерпретацию свойства дифференцируемости: в окрестности точки x_0 кривая $y=f(x)$ отличается от своей касательной в этой точке $Y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx (см. рис. 3). Данное свойство может быть перенесено на функции двух переменных, т.е. функцию $z=f(x,y)$, имеющую в точке (x_0,y_0) непрерывные частные производные, представить приближённо в виде линейной функции двух переменных, т.е. чтобы её приращение в точке (x_0,y_0) имело вид:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta \rho . \qquad (6)$$

где $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, а величина $\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, т.е. при $\Delta\rho \to 0$. Это означает, что в окрестности точки (x_0,y_0) поверхность $f=f(x,y)$ можно “приблизить” плоскостью

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) - (f - f_0) = 0 .$$

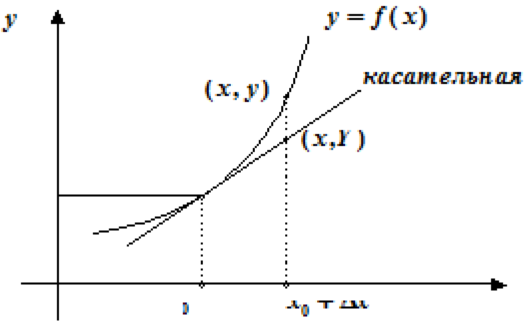


Рис. 3

Чтобы это показать представим приращение функции Δz в виде двух слагаемых

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \qquad (7)$$

Каждое из них представляет собой функцию одной переменной, к которой применима формула Лагранжа. Например, функция $F(x)=f(x,y+\Delta y)$ дифференцируема в соответствующем промежутке, т.к. её производная совпадает с частной производной $f'_x(x, y_0 + \Delta y)$, которая, по условию, существует в окрестности точки (x_0,y_0). Применив к каждой из разностей в (7) формулу конечных приращений, будем иметь: $\Delta f = f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) + f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y)$, где $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$. Поскольку частные производные непрерывны в данной точке, то их приращения - бесконечно малые при $\Delta\rho\to 0$, т.е.

$$f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_y(x_0, y_0) = \alpha_1(\Delta x, \Delta y),$$

$$f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y) - f'_y(x_0, y_0) = \alpha_2(\Delta x, \Delta y),$$

где $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 0$. Таким образом,

$$\Delta f = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y .$$

Преобразуем бесконечно малую $\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$ следующим образом:

$$\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=\left(\alpha_1\frac{\Delta x}{\Delta\rho}+\alpha_2\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)\Delta\rho=\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right).$$

Оценим величину

$$\left|\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\right|\le\left|\alpha_1\right|\frac{\left|\Delta x\right|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\left|\alpha_2\right|\frac{\left|\Delta y\right|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\alpha_1+\alpha_2.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)=0$. Итак, приращение функции представлено в виде (6).

Дадим теперь определение дифференцируемости функции двух переменных. Функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), если её приращение в этой точке может быть представлено в виде (6). Переход в (6) к пределу $\Delta\rho\to 0$ приводит к следующему результату: $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\Delta f=0$.

Очевидно, что из дифференцируемости следует непрерывность. Действительно, перейдя в равенстве (6) к пределу, получим $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\Delta f=0$, что и означает свойство непрерывности.

Следует заметить, что существование частных производных в данной точке не влечёт за собой дифференцируемости функции в этой точке. Если в точке (x_0,y_0) существуют частные производные $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_0$, то формально уравнение плоскости можно написать, но назвать её касательной плоскостью в указанном выше смысле нельзя. Например, непрерывная функция:

$$f=\sqrt{|x|\cdot|y|}$$

имеет в начале координат частные производные равные нулю.

$$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0,\ f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0.$$

Приращение этой функции в начале координат равно $f=\sqrt{|x|\cdot|y|}$. Но эта величина не является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Действительно, если $\Delta x=\Delta y$, то отношение:

$$\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

не стремится к нулю при $\Delta\rho\to 0$. Поэтому плоскость $f=0$ нельзя считать касательной плоскостью к этой поверхности в точке (0,0).

Дифференциалом функции $f=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называют главную, линейную относительно приращений аргументов Δx и Δy часть приращения функции Δz в этой точке:

$$(d\,f)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y.$$

Поскольку точка произвольная, то запишем формулу для дифференциала, опуская нижний индекс. Учтём также, что дифференциалы независимых переменных равны их приращениям. Итак,

$$d\,f = \frac{\partial f}{\partial x} d\,x + \frac{\partial f}{\partial y} d\,y.$$

Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных может быть сформулирован следующим образом. Дифференциал данной функции равен приращению аппликаты касательной плоскости.

Отметим также, что дифференциал функции двух переменных применяется, как и дифференциал функции одной переменной, для приближенных вычислений по формуле

$$\Delta f \approx (d\,f)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 6

Для функции двух переменных производные и дифференциалы высших порядков определяются аналогично соответствующим понятиям для функции одной переменной. Рассмотрим, например, вторую частную производную от функции $z=f(x,y)$ по переменной x. Она определяется как частная производная по x от частной производной по x, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

В общем случае (пусть $n > m$) можно записать:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{\partial^{n-m} f}{\partial y^{n-m}}\right),$$

причём последовательность, в которой вычисляются смешанные производные, если они существуют, не имеет значения. Например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Дифференциал второго порядка определяется как дифференциал от дифференциала, т.е.

$$d^2 f = d(d\,f) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}d\,x + \frac{\partial f}{\partial y}d\,y\right).$$

Отсюда следует, что

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d\,x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}d\,x\,d\,y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}d\,y^2 .$$

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков.

4. Градиент

Определение 7

При исследовании поведения функции двух переменных $f(x,y)$ в данной точке одним из вопросов является направление наибольшего изменения функции, т.е. интерес представляет направление, в котором у поверхности в данной точке самый крутой склон. Для ответа на этот вопрос введём следующий вектор:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} ,$$

называемый градиентом. Предполагаем, что этот вектор не нулевой. Тогда согласно (4) производная по направлению в данной точке равна скалярному произведению градиента в этой точке на единичный вектор заданного направления

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\alpha) = \left(\overrightarrow{grad}(f), \vec{e}\right).$$

Из равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\overrightarrow{grad}(f), \vec{e}\right) = \left|\overrightarrow{grad}(f)\right| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos(\varphi),$$

где φ - угол между векторами, видно, что направление наибольшего возрастания функции должно совпадать с направлением градиента функции в данной точке, т.к. наибольшее значение правой части этого равенства достигается при φ=0. Теперь можно сформулировать геометрический смысл градиента.

Градиент - это вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции в данной точке. Термин и обозначение $\overrightarrow{grad}\,f$ ввёл Максвелл, позаимствовав его из метеорологии. При первом появлении (1873г.) он намеревался дать название «скат» или «склон» скалярной функции f, используя слово “slope”, чтобы указать направление наиболее быстрого убывания функции f. Это свойство градиента применяется для численного поиска экстремумов функции многих переменных.

В трёхмерном случае градиент определяется как вектор, координаты которого есть частные производные скалярной функции $u=F(x,y,z)$

$$\overrightarrow{grad}(F) = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} .$$

Рассмотрим геометрический смысл модуля градиента функции двух переменных. Пусть $\vec{e}$ - единичный вектор направления наибольшего возрастания функции в данной точке. Тогда производная по этому направлению равна

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \left(\overrightarrow{grad}(f), \vec{e} \right) = \left| \overrightarrow{grad}(f) \right| = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}\ .$$

Данное соотношение показывает, что модуль градиента - это "скорость" изменения функции в направлении наибольшего возрастания функции в данной точке. Рассмотрим, как характеризует величина этой "скорости" поверхность $f(x,y)$ в окрестности данной точки. Возьмём сечение поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через точку $M(x_0,y_0)$ и вектор $\vec{e}$ (см. рис. 4).

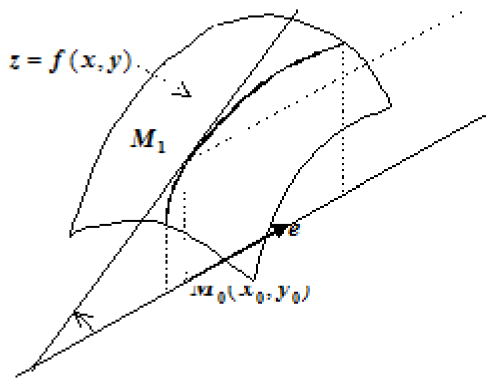


Рис. 4.

Касательная BM_1 к сечению поверхности в точке $M_1(x_0,y_0,z_0)$ составляет с вектором $\vec{e}$, а значит и с плоскостью xOy, угол α, тангенс которого равен

$$tg(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \left| \overrightarrow{grad}(f) \right| = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}\ .$$

Эту величину называют крутизной подъёма поверхности в данной точке.

Проверим, что в каждой точке градиент направлен по нормали к линии уровня $f(x,y)=C$, проходящей через данную точку. Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, а её линия уровня, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет касательную в этой точке. Обозначим направление этой касательной единичным вектором $\vec{e}$. Тогда производная по этому направлению в точке M_0 из интуитивных соображений должна быть равна нулю. Убедимся в этом. Угловой коэффициент k_1 касательной к линии уровня $f(x,y)=C$ с учётом формулы дифференцирования неявно заданной функции определяется следующим соотношением:

$$k_1 = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

С другой стороны, соотношение для углового коэффициента k_2 прямой «в направлении градиента» имеет вид:

$$k_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Так как k_1k_2=-1, то эти прямые взаимно перпендикулярны (см. рис. 5), т.е. производная в направлении касательной к линии уровня равна нулю

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \left(\overrightarrow{grad}(f), \vec{e}\right) = \left|\overrightarrow{grad}(f)\right| = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2} = 0 .$$

Рассмотрим несколько примеров.

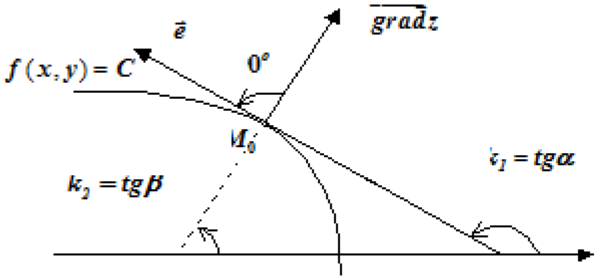


Рис. 5

Пример 6

Найдём направление наибольшего возрастания следующей функции:

$$f=4-x^2-0.25y^2,$$

а также крутизну подъёма её графика в точке $M_0(1,2)$. Искомое направление будет указывать градиент этой функции в данной точке, который определяется следующим соотношением:

$$\overrightarrow{grad}(f) = -2x \cdot \vec{i} - 0.5 \cdot y\,\vec{j}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = -2\vec{i} - \vec{j} .$$

Соотношение для крутизны подъёма поверхности в данной точке имеет вид

$$tg(\varphi) = \left|-2\vec{i} - \vec{j}\right| = \sqrt{5} \Rightarrow \varphi \approx 66^\circ .$$

Пример 7

Найдём направление наибольшего возрастания следующей функции:

$$f=x^3+2y^2,$$

а также крутизну подъёма её графика в точке $M_0(3,3)$. Искомое направление будет указывать градиент этой функции в данной точке, который определяется следующим соотношением:

$$\overrightarrow{grad}(f) = 3x^2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot y\,\vec{j}\Big|_{\substack{x=3\\y=3}} = 27\vec{i} + 12\vec{j} .$$

Соотношение для крутизны подъёма поверхности в данной точке имеет вид

$$tg(\varphi) = \left|27\vec{i} + 12\vec{j}\right| = \sqrt{873} \approx 29.547 \Rightarrow \varphi \approx 88.06^\circ .$$

5. *Дивергенция векторного поля*

Определение 8

Дивергенцией векторной функции $\vec{W}(x,y,z) = W_x(x,y,z)\vec{i} + W_y(x,y,z)\vec{j} + W_z(x,y,z)\vec{z}$ называется определённый в каждой точке скаляр, определяемый следующим соотношением:

$$div\left(\vec{W}(x,y,z)\right) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\oint_S \vec{W}\cdot d\vec{S},$$

где $\oint\!\!\oint_S \vec{W} d\vec{S}$ - поток вектора $\vec{W}$ через поверхность *S*, ограничивающую объём *V*, $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$, $\vec{n}$ - нормаль к поверхности *S*. Дивергенция в декартовых координатах может быть вычислена с помощью следующего соотношения

$$div\left(\vec{W}(x,y,z)\right) = \frac{\partial W_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial W_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial W_z(x,y,z)}{\partial z},$$

в цилиндрических координатах

$$div\left(\vec{W}(r,\varphi,z)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left[rW_r(r,\varphi,z)\right]}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_\varphi(r,\varphi,z)}{\partial\varphi} + \frac{\partial W_z(r,\varphi,z)}{\partial z},$$

в сферических координатах

$$div\left(\vec{W}(r,\varphi,\theta)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 W_r(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial W_\varphi(r,\varphi,\theta)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial W_\theta(r,\varphi,\theta)}{\partial\theta}.$$

Пример 8

Найти дивергенцию вектора $\vec{W}(x,y) = (x^2 - 2xy + 3y - 1)\vec{i} + (5x^2y - 3xy^3 + y^4)\vec{j}$.

Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$div\left((x^2 - 2xy + 3y - 1)\vec{i} + (5x^2y - 3xy^3 + y^4)\vec{j}\right) = \frac{\partial(x^2 - 2xy + 3y - 1)}{\partial x} +$$

$$+\frac{\partial(5x^2y - 3xy^3 + y^4)}{\partial y} = 2(x-y) + (5x^2 - 9xy^2 + 4y^3).$$

Пример 9

Найти дивергенцию вектора $\vec{W}(x,y) = (x^2 - y^2)\vec{i} + \sqrt{4 + x^2 + y^2}\,\vec{j}$. Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$div\left((x^2 - y^2)\vec{i} + \sqrt{4 + x^2 + y^2}\,\vec{j}\right) = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} + \frac{\partial\sqrt{4 + x^2 + y^2}}{\partial y} = 2x + \frac{2x}{2\sqrt{4 + x^2 + y^2}} =$$

$$= 2x + x\Big/\sqrt{4 + x^2 + y^2}.$$

6. *Ротор векторного поля*

Определение 9

Ротором векторной функции $\vec{W}(x,y,z)=W_x(x,y,z)\vec{i}+W_y(x,y,z)\vec{j}+W_z(x,y,z)\vec{z}$ называется определённый в каждой точке вектор, который определяется с помощью следующего соотношения

$$rot\left(\vec{W}(x,y,z)\right)=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\oint_S \vec{W}\times d\,\vec{S}\,.$$

Ротор в декартовых координатах может быть вычислен с помощью следующего соотношения

$$rot\left(\vec{V}(x,y,z)\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ V_x(x,y,z) & V_y(x,y,z) & V_z(x,y,z)\end{vmatrix}=\vec{i}\left[\frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial y}-\frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial z}\right]-$$

$$-\vec{j}\left[\frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial x}-\frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial z}\right]+\vec{k}\left[\frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial x}-\frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial y}\right],$$

в цилиндрических координатах

$$rot\left(\vec{V}(r,\varphi,z)\right)=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V_z(r,\varphi,z)}{\partial\varphi}-\frac{\partial V_\varphi(r,\varphi,z)}{\partial z}\right]\vec{r}+\left[\frac{\partial V_r(r,\varphi,z)}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial V_z(r,\varphi,z)}{\partial\varphi}\right]\vec{\varphi}+$$

$$+\left\{\frac{\partial\left[rV_\varphi(r,\varphi,z)\right]}{\partial r}-\frac{\partial V_r(r,\varphi,z)}{\partial\varphi}\right\}\frac{\vec{z}}{r},$$

в сферических координатах

$$rot\left(\vec{V}(r,\varphi,\theta)\right)=\frac{\vec{r}}{r\sin(\theta)}\left\{\frac{\partial V_\theta(r,\varphi,\theta)}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left[\sin(\theta)V_\theta(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial\theta}\right\}+$$

$$+\frac{\vec{\varphi}}{r}\left\{\frac{\partial V_r(r,\varphi,\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial\left[rV_\theta(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial r}\right\}+\frac{\vec{\theta}}{r}\left\{\frac{\partial\left[rV_\varphi(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial V_r(r,\varphi,\theta)}{\partial\varphi}\right\}.$$

Пример 10

Найти ротор вектора $\vec{V}(x,y,z)=\left(x^2-2xy+3y-1+xz^3+\dfrac{y^2}{z}\right)\vec{i}+\ln\left(x+\dfrac{1}{yz}\right)\vec{k}+$ $+\left[5x^2y-3xy^3+\cos(z)\right]\vec{j}$. Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$rot\left(\vec{V}(x,y,z)\right)=\vec{k}\left(10xy-3y^3+2x-3+2\frac{y}{z}\right)-\vec{i}\,\frac{1+y(xyz+1)\sin(z)}{y(xyz+1)}-$$

$$-\vec{j}\left(\frac{yz}{xyz+1}-3xz^2+\frac{y^2}{z^2}\right).$$

Пример 11

Найти ротор вектора $\vec{V}(x,y,z)=\left[x^2-y^2+tg(z)\right]\vec{i}+\sqrt{x^2-y^2-3z}\,\vec{j}-\vec{k}\ln\left[y-x\cdot\right.$ $\left.\cdot\sin\left(z^2\right)\right]$. Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$rot\left(\vec{V}(x,y,z)\right)=\vec{i}\left[\frac{2z\cos\left(z^2\right)}{y-x\sin\left(z^2\right)}+\frac{3}{2\sqrt{x^2-y^2-3z}}\right]-\vec{j}\left[\frac{\sin\left(z^2\right)}{y-x\sin\left(z^2\right)}-\frac{1}{\cos^2(z)}\right]+$$

$$+\vec{k}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2-3z}}+2y\right].$$

Для градиента:

$$grad\,(f)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\ \text{(в декартовых координатах).}$$

$$grad\,(f)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{\varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}\ \text{(в цилиндрических координатах).}$$

$$grad\,(f)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{r}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{\theta}\ \text{(в сферических координатах).}$$

Свойства градиента

$$grad\,(c)=0,\ c=const;\quad grad\,(c\,f)=c\,grad\,(f);\ grad\,(f_1+f_2)=grad\,(f_1)+grad\,(f_2)$$

$$grad\,(f_1f_2)=f_2\,grad\,(f_1)+f_1\,grad\,(f_2);\ grad\,(\varphi(f))=\frac{\partial\varphi}{\partial f}grad\,(f)$$

$$grad\left(\left(\vec{V}_1\vec{V}_2\right)\right)=\left(\vec{V}_2\,grad\right)\vec{V}_1+\left(\vec{V}_1\,grad\right)\vec{V}_2+\left[\vec{V}_1\,rot\left(\vec{V}_2\right)\right]+\left[\vec{V}_2\,rot\left(\vec{V}_1\right)\right].$$

Свойства дивергенции векторного поля

$$div\,(c)=0,\ c=const;\quad div\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=div\left(\vec{V}_1\right)+div\left(\vec{V}_2\right);\ div\left(f\,\vec{V}\right)=f\,div\left(\vec{V}\right)+\vec{V}\,grad\,(f);$$

$$div\left(\left[\vec{V}_1\vec{V}_2\right]\right)=\vec{V}_2\,rot\left(\vec{V}_1\right)-\vec{V}_1\,rot\left(\vec{V}_2\right);\ div\left(c\vec{V}\right)=c\,div\left(\vec{V}\right).$$

Свойства ротора векторного поля

$$rot\,(c)=0,\ c=const;\quad rot\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=rot\left(\vec{V}_1\right)+rot\left(\vec{V}_2\right);\ rot\left(f\,\vec{V}\right)=f\,rot\left(\vec{V}\right)+\left[\vec{V}grad\,(f)\right];$$

$$rot\left(\left[\vec{V}_1\vec{V}_2\right]\right)=\left(\vec{V}_2\,grad\right)\vec{V}_1-\left(\vec{V}_1\,grad\right)\vec{V}_2+\vec{V}_1\,div\left(\vec{V}_2\right)-\vec{V}_2div\left(\vec{V}_1\right).$$

7. Оператор Гамильтона

Определение 10

Рассмотрим дифференциальный оператор, имеющий в декартовой системе координат следующий вид:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial k}.$$

Такой оператор называется оператором Гамильтона (вектором, символом “набла”). С помощью такого оператора градиент, дивергенция и ротор могут быть записаны в следующем виде

$$grad\left(f\left(x,y,z\right)\right) = \nabla f\left(x,y,z\right);\ div\left(\vec{f}\left(x,y,z\right)\right) = \left(\nabla, \vec{f}\left(x,y,z\right)\right);$$

$$rot\left(\vec{f}\left(x,y,z\right)\right) = \left[\nabla\, \vec{f}\left(x,y,z\right)\right].$$

Таким образом, градиент функции может быть рассмотрен как произведение вектора “набла” на скалярную функцию. Дивергенция функции может быть рассмотрена как скалярное произведение вектора “набла” на векторную функцию. Ротор функции может быть рассмотрена как векторное произведение вектора “набла” на векторную функцию. При этом вектор всегда стоит слева от функции.

Пример 12

С помощью вектора “набла” найдём градиент от произведения двух функций $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x, y,z)$. Такая операция имеет следующий вид:

$$grad\left(f_1 f_2\right) = \nabla\left(f_1 f_2\right) = f_2 \nabla f_1 + f_1 \nabla f_2.$$

Пример 13

С помощью вектора “набла” найдём диверегенцию от произведения двух функций $f_1(x,y,z)$ и $\vec{f}_2\left(x,y,z\right)$. Такая операция имеет следующий вид:

$$div\left(f_1 \vec{f}_2\right) = \nabla\left(f_1 \vec{f}_2\right) = \left(\vec{f}_2, \nabla f_1\right) + f_1\left(\nabla, \vec{f}_2\right).$$

Пример 14

С помощью вектора “набла” найдём диверегенцию от произведения двух функций $f_1(x,y,z)$ и $\vec{f}_2\left(x,y,z\right)$. Такая операция имеет следующий вид:

$$rot\left(f_1 \vec{f}_2\right) = \left[\nabla \times \left(f_1 \vec{f}_2\right)\right] = \left[\vec{f}_2 \times \nabla f_1\right] + f_1\left[\nabla \times \vec{f}_2\right].$$

8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$. Будем предполагать, что в точке поверхности $M(x_0,y_0,z_0)$ частные производные $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}$ существуют, непрерывны и хотя бы одна из них отлична от нуля. Рассмотрим на поверхности некоторую кривую L, проходящую через точку M_0. Пусть она задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)).$$

Будем предполагать, что функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы при значении параметра $t=t_0$, соответствующем точке M_0. Из-за того, что кривая L принадлежит поверхности, имеем соотношение $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$, левая часть которого дифференцируема в точке $t=t_0$ как сложная функция. Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\equiv 0. \qquad (8)$$

Рассмотрим два вектора

$$\overrightarrow{grad}\left(F(x_0,y_0,z_0)\right)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}\vec{i}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}\vec{j}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}\vec{k}$$

и

$$\vec{l}=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}.$$

Вектор $\vec{l}$ это касательный вектор к кривой L в точке M_0. Соотношение (8) показывает, что эти два вектора перпендикулярны друг другу, т.к. их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, что соотношение (8) будет выполняться для любой кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M_0. Итак, касательный вектор к любой кривой на поверхности, проходящей через точку M_0, перпендикулярен к фиксированному вектору $\overrightarrow{grad}\left(F(x_0,y_0,z_0)\right)$. Поэтому все эти векторы лежат в одной плоскости. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке (см. рис. 6). Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, имеет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z-z_0)=0.$$

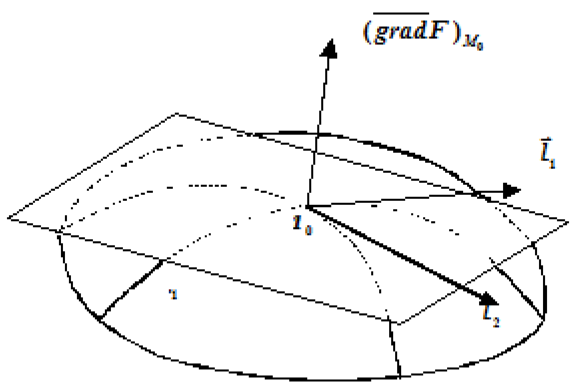


Рис. 6

Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости к поверхности и проходящая через точку касания, называется нормалью к поверхности. Заметим, что вектор $\overrightarrow{grad}\left(F(x_0,y_0,z_0)\right)$ можно рассматривать в качестве направляющего вектора нормали. Напишем её канонические уравнения:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}.$$

В случае, если поверхность задана в виде $z=f(x,y)$, уравнения касательной плоскости и нормали приобретают вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

9. Экстремумы функции многих переменных

Рассмотренное ранее определение экстремума функции одной переменной, а также необходимое и достаточное условия его существования обобщаемы на случай функции нескольких переменных. Рассмотрим сначала функцию двух независимых переменных $z=f(x,y)$, определённую в области D, и изобразим её наглядно поверхностью в декартовой системе координат x, y, z. Мы будем говорить, что функция имеет максимум в некоторой внутренней точке $(x_0,y_0)\in D$, если значения функции во всех точках некоторой ε-окрестности точки (x_0,y_0) меньше, чем значение функции в этой точке, т.е.

$$f(x,y)<f(x_0,y_0).$$

Геометрически такому максимуму соответствует вершина на поверхности (см. рис. 7). Аналогично минимум определяется неравенством

$$f(x,y)>f(x_0,y_0)$$

в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и соответствует «ямке» на поверхности (см. рис. 7).

Для функции большего числа переменных понятия максимума и минимума определяется аналогично, только уже нельзя дать геометрической иллюстрации. Функция $u=f(x,y,\ldots)$ имеет в точке $(x_0,y_0,\ldots)$ максимум (минимум), если она в некоторой окрестности этой точки принимает всюду значения меньшие (большие), чем в самой точке $(x_0,y_0,\ldots)$.

Как и в случае функции одной переменной, наряду со словами максимум и минимум будем пользоваться термином экстремум, объединяющим эти два понятия. Сформулируем теперь необходимые условия существования экстремума, т.е. такие условия, которые непременно должны быть выполнены в точке $M_0(x_0, y_0,\ldots)$ если функция имеет в этой точке экстремум.

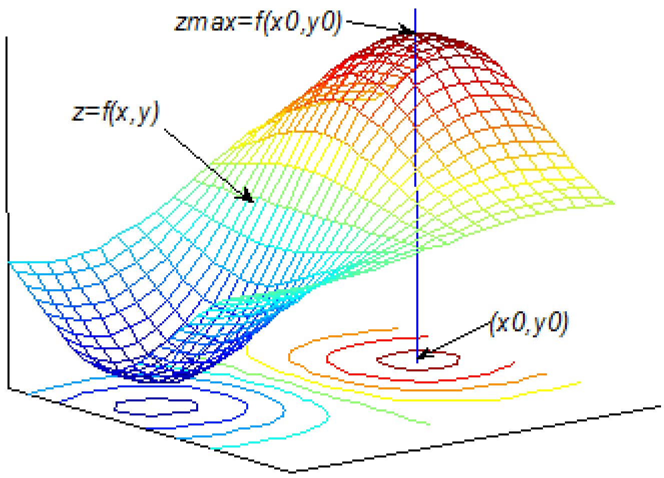


Рис. 7

Для того, чтобы дифференцируемая функция $u=f(x,y,\ldots)$ имела экстремум в точке $M_0(x_0,y_0, \ldots)$ необходимо, чтобы все ее частные производные обращались в этой точке в ноль, т.е. чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0 \\ f'_z(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}. \tag{9}$$

Эти условия легко получаются из известного необходимого условия экстремума дифференцируемой функции одной переменной. В самом деле, зафиксируем, например, переменные $y=y_0$, $z=z_0$, … и будем рассматривать функцию в окрестности точки M_0 как функцию $f(x,y_0, z_0,\ldots)$ зависящую только от x. Тогда она имеет экстремум при $x=x_0$, а необходимым условием такого экстремума является равенство:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0.$$

В случае дифференцируемой функции двух переменных $f(x,y)$ это необходимое условие имеет простой геометрический смысл: функция может иметь в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремум лишь в том случае, если поверхность $f(x,y)$ имеет в этой точке касательную плоскость, параллельную плоскости xOy. Рассмотрим, например, функцию $f=xy$. Необходимые условия показывают, что начало координат - точка, подозрительная на экстремум. Однако в окрестности этой точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значении, смотря по тому, в какой четверти берётся точка. Тогда в точке (0,0) функция экстремума не имеет. Изображающий эту функцию гиперболический параболоид имеет в начале координат так называемую точку перевала или седловину**.**

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума (9), называют, как и в случае функции одной переменной, стационарными. Другие точки, в которых могут быть экстремумы, - это точки, в которых частные производные или не существуют, или обращаются в бесконечность. В совокупности со стационарными эти точки называют критическими. Например, рассмотрим функции

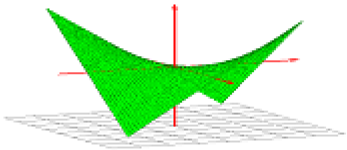


Рис. 8.

$$f=\sqrt{x^2+y^2},\ f=\sqrt[3]{x^2+y^2},$$

графики которых получаются при вращении вокруг оси Oz кривых $f=\sqrt[3]{y^2}$ и $f=|y|$, соответственно (см. рис. 9). Очевидно, что обе эти функции имеют минимум в начале координат. Вместе с тем, частные производные в начале координат не существуют у первой функции и обращаются в бесконечность у второй функции. Таким образом, экстремумы могут находиться и в таких точках.

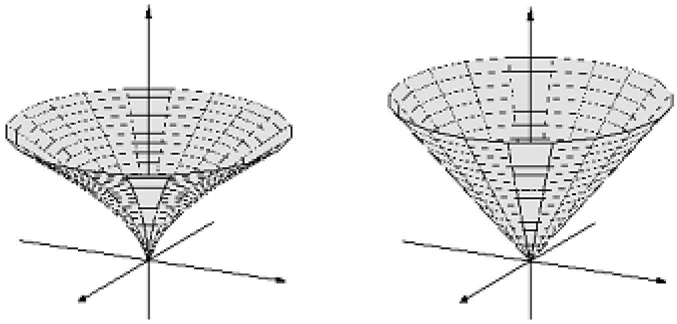


Рис. 9

Пример 8

Дана система n материальных точек $M_k(x_k,y_k,z_k)$ с массами m_k. Из физических соображений ясно, что момент инерции этой системы имеет минимум относительно некоторой точки. Требуется найти эту точку. Задача сводится к нахождению минимума функции трёх переменных:

$$I(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}m_k\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2\right].$$

Необходимое условие экстремума даёт возможность найти координаты этой точки. Для этого нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} I'_x=2\sum\limits_{k=1}^{n}m_k(x-x_k)=0 \\ I'_y=2\sum\limits_{k=1}^{n}m_k(y-y_k)=0. \\ I'_z=2\sum\limits_{k=1}^{n}m_k(z-z_k)=0 \end{cases}$$

Проверяем, что искомая точка является центром масс (центром тяжести) данной совокупности материальных точек

$$x=\frac{\sum m_kx_k}{\sum m_k},\ y=\frac{\sum m_ky_k}{\sum m_k},\ z=\frac{\sum m_kz_k}{\sum m_k}.$$

Следует заметить, что суммирование в этих формулах производится по всем точкам. Во многих случаях специальный характер решаемой задачи позволяет судить о том, будет ли в стационарной точке экстремум и какой конкретно. Например, в предыдущей задаче из физических соображений было ясно, что есть точка пространства, где момент инерции системы материальных точек принимает наименьшее значение. Желательно было бы иметь, как и в случае функции одной переменной достаточные условия экстремума, позволяющие различать среди стационарных точек те, где есть экстремум, и определять, каков он: максимум или минимум.

Рассмотрим стационарную точку (x_0,y_0) функции $f(x,y)$, т.е. точку в которой обращаются в нуль обе частные производные f'_x и f'_y. Вычислим вторые производные в этой точке и введём, для краткости, следующие обозначения:

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = A\,,\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = B\,,\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = C\,.$$

Примем без доказательства следующие правила:

1) если в стационарной точке выполняется неравенство $AC\text{-}B^2>0$, то в этой точке функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум; при этом, если $A<0$, то $f(x_0,y_0)$ - максимум, если $A>0$, то $f(x_0,y_0)$ - минимум;

2) если в стационарной точке $AC\text{-}B^2<0$, то функция не имеет экстремума в этой точке;

3) случай $AC\text{-}B^2=0$ требует дополнительного исследования.

<u>Пример 15</u>

Исследовать на экстремум функцию:

$$f=5-2x+6y-2xy-x^2.$$

Находим стационарные точки, решая систему

$$\begin{cases} f'_x = -2-2y-2x = 0 \\ f'_y = 6-2x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M_0(3,-4).$$

В данном случае получаем единственную стационарную точку M_0 с координатами $M_0\,(3;-4)$. Вычисляем вторые производные в этой точке: $A=-2$, $B=-2$, $C=0$. $AC\text{-}B^2<0$, т.е. экстремума нет.

<u>Пример 16</u>

Исследовать на экстремум функцию:

$$f=(x-1)^2+(y-1)^2.$$

Находим стационарные точки, решая систему

$$\begin{cases} f'_x = 2(x-1) = 0 \\ f'_y = 2(y-1) = 0 \end{cases}.$$

Вычисляем вторые производные в этой точке: $A=C=2$, $B=0$, поэтому экстремум есть.

Условный экстремум

Часто возникает задача не просто найти экстремум функции n переменных:

$$u = f(x, y, \ldots),$$

а найти её экстремум при дополнительных условиях, связывающих переменные посредством m уравнений связей ($m<n$)

$$g_k(x, y, \ldots) = 0,\ k = 1, \ldots, m.$$

Такие экстремумы называют условными. Например, пусть требуется найти минимум функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ при дополнительном условии $x + y = 1$. Следующий рисунок делает решение задачи очевидным. С учётом уравнения связи мы на самом деле имеем функцию одной переменной $f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1$ и её экстремум легко находится. Следовательно, функция $f(x,y) = x^2 + y^2$ имеет условный минимум $f_{min} = 0.5$ в точке (0.5,0.5).

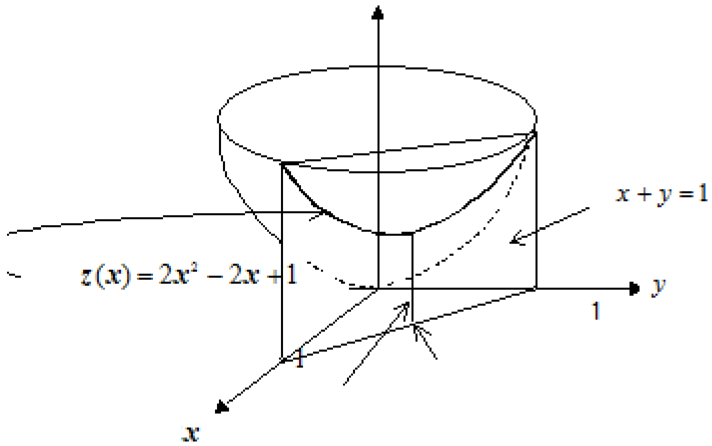


Рис. 10

Таким образом, задача нахождения условных экстремумов не является принципиально новой. Разрешая уравнения связи относительно m неизвестных и подставляя их в исходную функцию, мы получаем задачу отыскания безусловного экстремума функции меньшего (n-m) числа переменных. Если задача разрешения уравнений связи не вызывает трудностей, то так и следует поступать. Но весьма часто это либо трудоёмкая задача, либо принципиально неразрешимая (вспомним, что не всегда можно перейти от неявного задания функции к её явному заданию). Представляется важным сформулировать необходимые условия существования условного экстремума. Такая формулировка была предложена Ж.Л. Лагранжем (1736 - 1813 гг.). Пусть требуется найти экстремумы функции

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причём её n аргументов подчинены m уравнениям связей ($m<n$):

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ k = 1, \ldots, m.$$

Введём m так называемых неопределённых множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и образуем функцию Лагранжа

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m.$$

Эта функция зависит от $n+m$ переменных: $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Запишем для нее необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial x_n}=0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_m}=0. \tag{10}$$

Заметим, что последние m уравнений в (10) совпадают с уравнениями связей. Следует заметить, что необходимые условия экстремума функции Лагранжа являются одновременно необходимыми условиями условного экстремума исходной функции.

Далее проведём обоснование метода множителей Лагранжа на примере функции двух переменных с одним уравнением связи. Допустим, что уравнение связи $g(x,y)=0$ изображается гладкой кривой, т.е. кривой, в каждой точке которой существует касательная. Мы должны найти экстремум функции $z=f(x,y)$, когда точки (x,y) лежат на этой кривой. Двигаясь вдоль кривой $g(x,y)=0$, например, слева направо, мы последовательно пересекаем линии уровня $f(x,y)=C$. В точке (x_0,y_0), где кривая $g(x,y)=0$ касается одной из линий уровня $f(x,y)=C$, следует ожидать максимума, т.к. при переходе через эту точку возрастание C сменяется убыванием. Тогда нормальные векторы в этой точке к кривой $g(x,y)=0$ и к соответствующей линии уровня $f(x,y)=C$ коллинеарны. Эти векторы являются градиентами функций f и g в точке касания:

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x};\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)=\left(f'_x;f'_y\right);\ \left(\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x};\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\right)=\left(g'_x;g'_y\right).$$

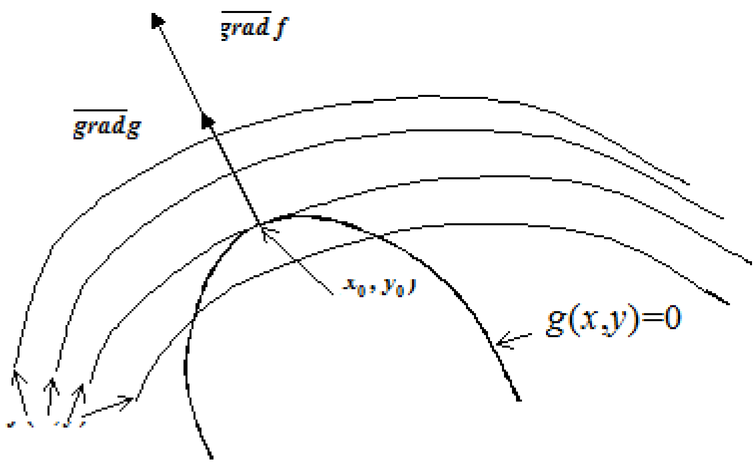


Рис. 11

Из условия коллинеарности этих векторов

$$\frac{f'_x}{g'_x}=\frac{f'_y}{g'_y}=-\lambda$$

следуют равенства

$$\begin{cases} f'_x+\lambda g'_x=0 \\ f'_y+\lambda g'_y=0 \end{cases}. \tag{11}$$

Таким образом, условия (11) выражают необходимые условия условного экстремума. Образовав функцию Лагранжа $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$, получаем, что условия (11) совпадают с необходимыми условиями экстремума этой функции.

Пример 17

Найти экстремумы функции $f(x,y)=x^2+y^2$ при условии, что её аргументы связаны соотношением: $5x^2$-$6xy$+$5y^2$-32=0. Образуем функцию Лагранжа: $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(5x^2-6xy+5y^2-32)$. Приравнивая к нулю её частные производные, получаем следующую систему для нахождения координат стационарных точек:

$$x+\lambda(5x-3y)=0;\ y+\lambda(-3x+5y)=0;\ 5x^2-6xy+5y^2-32=0.$$

Исключая из первых двух уравнений параметр λ, получаем:

$$\begin{cases} y+x\dfrac{3x-5y}{5x-3y}=0 \Leftrightarrow y(5x-3y)+x(3x-5y)=0 \Leftrightarrow y^2=x^2 \\ 5x^2-6xy+5y^2-32=0 \end{cases}$$

В случае $y_0=x_0$ находим точки $\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2};-0.5\right)$, $\left(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2};-0.5\right)$. А если $y_0=-x_0$, то получаем точки $\left(2\sqrt{2};-2\sqrt{2};-1/8\right)$, $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2};-1/8\right)$.

Пример 18

Найти экстремумы функции $f(x,y)=x^3+y^2$ при условии, что её аргументы связаны соотношением: $xy-4=0$. Образуем функцию Лагранжа: $F(x,y,\lambda)=x^3+y^2+\lambda(xy-4)$. Приравнивая к нулю её частные производные, получаем следующую систему для нахождения координат стационарных точек:

$$\begin{cases} 4x^3+\lambda y=0 \\ 2y+\lambda x=0 \\ xy-4=0 \end{cases}$$

Исключая из первых двух уравнений параметр λ, получаем:

$$\begin{cases} y^2=2x^4 \\ xy=4 \end{cases}$$

В случае $y_0=\sqrt{2}x_0^2$ находим точки $\left(\sqrt{2};2\sqrt{2};8+2\sqrt{2}\right)$. А если $y_0=-\sqrt{2}x_0^2$, то получаем точки $\left(-\sqrt{2};2\sqrt{2};8-2\sqrt{2}\right)$.

10. Двойной интеграл

Определение 11

Пусть S - ограниченная область плоскости (x,y) с кусочно-гладкой границей; пусть $f(x,y)$ - определена и ограничена на S. С помощью сетки кусочно-гладких кривых область S разбивают на конечное количество элементарных областей S_i (i=1,2,…,n) с площадями ΔS_i (разбиение Z). Пусть Δ(Z) - наибольший размер элементарных областей S_i, получающийся при разбиении Z. В каждой из элементарных областей выбирается произвольная точка $M_i(x_i,y_i)$. Число:

$$\sigma(Z)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i\ .$$

ставится в соответствие каждому разбиению Z и называется интегральной суммой разбиения Z. Функция $f(x,y)$ называется интегрируемой в области S в смыс-

смысле Римана, если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для каждого разбиения Z области S, для которого $\Delta(\mathrm{Z})<\varepsilon$ и независимо от того, какие точки M_i выбираются в элементарных областях, выполняется неравенство: $|\sigma\ (\mathrm{Z})\text{-}I|<\varepsilon$. Число I называется двойным интегралом Римана от $f(x,y)$ по области S и обозначается следующим образом:

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS\,;\ I=\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Эквивалентным этому определению является следующее: $f(x,y)$ интегрируема по области S, если для каждой последовательности Z_n разбиений с $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Z}_\mathrm{n}=0$ последовательность соответствующих интегральных сумм $\sigma(\mathrm{Z}_n)$ всегда сходится независимо от выбора промежуточных точек к одному и тому же значению, которое и есть двойной интеграл. Свойства двойных интегралов:

1) аддитивность относительно подъинтегральных соотношений:

$$I=\iint\limits_{(S)}\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]dx\,dy=\iint\limits_{(S)} f_1(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{(S)} f_2(x,y)\,dx\,dy\,;$$

2) аддитивность относительно областей (S_1 и S_2 - области без общих внутренних точек):

$$I=\iint\limits_{(S_1+S_2)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S_1)} f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{(S_2)} f(x,y)\,dx\,dy\,;$$

3) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$I=\iint\limits_{(S)} A\,f(x,y)\,dx\,dy=A\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy\,;$$

4) если для каждой точки $(x,y)\in S$ выполняется неравенство $f_1(x,y)\le f_2(x,y)$, то:

$$\iint\limits_{(S)} f_1(x,y)\,dx\,dy\le\iint\limits_{(S)} f_2(x,y)\,dx\,dy\,;$$

5) если $f(x,y)$ интегрируема по S, то $|f(x,y)|$ также интегрируема по S и:

$$\left|\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy\right|\le\iint\limits_{(S)}\left|f(x,y)\right|dx\,dy\,.$$

Двойные интегралы обладают ещё несколькими свойствами, но в ближайшее время они не понадобятся. Может быть показано, что

1) двойные интегралы могут рассматриваться как повторные;

2) порядок интегрирования может быть изменён.

<u>Пример 19</u>

Пусть S - область, описываемая функцией $f(x,y)=x\,y$ и ограниченная кривыми $y(x)=\sqrt{x}$ и $y(x)=x^2$, $x\in[0,1]$. Найдём площадь данной области.

$$I=\iint\limits_{S} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,y^2\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x-x^4\right)dx=\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^6}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Аналогично для $x(y)=\sqrt{y}$ и $x(y)=y^2$, $y\in[0,1]$ можно получить:

$$I=\iint_S f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} x\,y\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\,x\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\left(y-y^4\right)dy=\frac{1}{6}\left(y^3-\frac{y^6}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}$$

Замена переменных в двойных интегралах

Пусть функции $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$ взаимно однозначно отображают области G (в переменных (u,v)) и S (в переменных (x,y)). Пусть функции $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$ непрерывны со своими первыми частными производными на области G. Внутри G якобиан отличен от нуля:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна на S, то справедливо соотношение:

$$\iint_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{(G)} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J|\,du\,dv.$$

Пример 20

Рассмотрим переход от декартовых координат к полярным, т.е. $x=r\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\varphi)$. Тогда $J=r$ и

$$\iint_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{(G)} f\big(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi)\big)r\,dr\,d\varphi.$$

Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1) Пусть $f(x,y)\geq 0$ на S. Двойной интеграл $\iint_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy$ может быть интерпретирован как объём цилиндрического тела, основанием которого является область S плоскости (x,y) и которое ограничено поверхностью $z=f(x,y)$. Объём данного цилиндра численно равен площади ΔS области S, т.е.

$$\Delta S=\iint_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Пример 21

Найти объём цилиндрического тела, в основании которого находится круг $x^2+y^2\leq ay$, $z=0$, и которое ограничено сверху частью поверхности сферы $x^2+y^2+z^2\leq a^2$. Из-за симметрии можно записать, что

$$V=2\iint_{(S)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где S - полукруг $x^2+y^2 \le a\,y$, $x \ge 0$. В полярных координатах $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ область S описывается неравенствами: $0 \le r \le a\sin(\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. После всех замен получаем:

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\sin(\varphi)} r\sqrt{a^2-r^2}\,d\,r\,d\,\varphi.$$

Подстановки во внутренний интеграл $t = \sqrt{a^2-r^2}$ позволяет получить:

$$V = -2\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos(\varphi)} \sqrt{a^2-r^2}\,d\,r\,d\,\varphi = -2\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left[\cos^3(\varphi)-1\right]d\,\varphi.$$

В окончательном форме последнее соотношение может быть представлено в следующем виде:

$$V = \frac{a^3}{9}(3-4\pi).$$

Пример 22

Найти площадь области, ограниченную астроидой: $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$ ($0 \le t \le 2\pi$). Введение криволинейных координат $x = u\cos^3(v)$, $y = u\sin^3(v)$ позволяет получить:

$$V = 2\iint_{(S)} d\,x\,d\,y = 3\int_0^a u\int_0^{2\pi}\sin^2(v)\cos^2(v)\,d\,v\,d\,u = \frac{3}{4}\int_0^a u\,d\,u\int_0^{2\pi}\sin^2(2v)\,d\,v =$$

$$= 3\frac{a^2}{16}\int_0^{2\pi}\left[1-\cos(4v)\right]d\,v = \frac{3}{8}\pi\,a^2.$$

Пример 23 (центр тяжести и масса)

Координаты центра тяжести x_0 и y_0 области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, определяются соотношениями:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_{(S)} x\,\rho(x,y)\,d\,S;\quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_{(S)} y\,\rho(x,y)\,d\,S,$$

где $M = \iint_{(S)} \rho(x,y)\,d\,S$ - масса области S.

Пример 24 (момент инерции)

Момент инерции I_x плоской области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, относительно оси x определяется соотношением:

$$I_x = \iint_{(S)} y^2\,\rho(x,y)\,d\,S.$$

Момент инерции I_y плоской области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, относительно оси y определяется соотношением:

$$I_y = \iint_{(S)} x^2\,\rho(x,y)\,d\,S.$$

Полярный момент инерции I_O плоской области S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, относительно начала координат определяется соотношением:

$$I_O = \iint\limits_{(S)} \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)\,d\,S\,.$$

11. Тройные интегралы

Определение 12

Пусть задана ограниченная пространственная область V, граница которой является кусочно-гладкой поверхностью. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и ограничена в области V. Путём выбора сети кусочно-гладких поверхностей строится некоторое разбиение Z области V на конечное число элементарных областей V_i (i=1,2,…,n) с объёмами ΔV_i. Пусть Δ(Z) - наибольший размер элементарной области V_i. Число

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i\,.$$

называется интегральной суммой, соответствующей разбиению Z. Функция $f(x, y,z)$ называется интегрируемой в области V в смысле Римана, если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для каждого разбиения Z области V, для которого $\Delta(Z)<\varepsilon$ и независимо от того, какие точки M_i выбираются в элементарных областях, выполняется неравенство $|\sigma(Z) - I| < \varepsilon$. Число I называется тройным интегралом Римана от $f(x,y,z)$ по области V и обозначается следующим образом:

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,d\,V\,;\ I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,.$$

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Вычисление тройных интегралов

Пусть V является телом, проекция которого на плоскость x,y является областью S. Пусть тело V также ограничено поверхностями $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$, а также $x=a$ и $x=b$. Тогда

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z = \iint\limits_{(S)} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,d\,z\right] d\,y\,d\,x =$$

$$= \int\limits_a^b \left\{\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,d\,z\right] d\,y\right\} d\,x\,.$$

Замена переменных в тройных интегралах

Пусть функции $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$ и $z=z(u,v,w)$ взаимно однозначно отображают области G (в переменных (u,v,w)) и S (в переменных (x,y,z)). Пусть функции $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$ и $z=z(u,v,w)$ непрерывны со своими первыми частными производными на области G. Внутри G якобиан отличен от нуля:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0 .$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на V, то справедливо соотношение:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V)} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|J|\,du\,dv\,dw .$$

<u>Пример 25</u>

Рассмотрим переход от декартовых координат к полярным, т.е. $x=r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z=r\cos(\theta)$. Тогда $J=r^2 sin(\theta)$ и

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{(G)} r^2\sin(\theta)f\big(r\sin(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\theta)\sin(\varphi),r\cos(\theta)\big)\,dr\,d\theta\,d\varphi .$$

Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1) Объём пространственной области, ограниченной функцией $f(x,y,z)$. Тройной интеграл по V является объёмом ΔV области V, т.е.

$$\Delta V=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

<u>Пример 26</u>

Пусть имеется эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Найдём его объём с помощью последнего соотношения. Преобразуем данное соотношение с учётом уравнения для эллипса к следующему виду:

$$\Delta V=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\,dy\,dx=cR\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix}x=a\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ y=b\sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}=abc\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(\theta)\sqrt{1-\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)-\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)}\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\pi abc\int\limits_{0}^{\pi}\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta=-\pi abc\left.\frac{\cos(2\theta)}{2}\right|_{0}^{\pi}=\pi abc .$$

<u>Пример 27 (масса тела)</u>

Если пространственная область V заполнена массой с плотностью $\rho(x,y,z)$, то полная масса V определяется следующим соотношением:

$$M = \iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Пример 28 (центр тяжести)

Координаты центра тяжести x_0, y_0 и z_0 области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, определяются соотношениями:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_{(V)} x\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;\quad y_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_{(V)} y\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_{(V)} z\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Пример 29 (момент инерции)

Момент инерции I_x объёмной области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, относительно оси x определяется соотношением:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Момент инерции I_y объёмной области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, относительно оси y определяется соотношением:

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Момент инерции I_z объёмной области V с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y,z)$, относительно оси y определяется соотношением:

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

12. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл первого рода

Определение 13

Пусть L - отрезок кусочно-гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B и $f(x,y)$ - ограниченная функция, заданная в некоторой области, содержащей кривую L. На L выбираются произвольные точки $A=A_0$, A_1, …, A_{n-1}, $A_n=B$. Таким образом, криволинейный отрезок AB разбивается на элементарные отрезки. Пусть длина отрезка $A_{i-1}A_i$ ($i=1,\ldots,n$) равна Δs_i. Пусть $M(x_i,y_i)$ - произвольная точка на элементарном отрезке $A_{i-1}A_i$. Выражение

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$$

называется интегральной суммой относительно разбиения Z. Предел данной интегральной суммы при стремлении к нулю максимальной длины отрезка Δs_i называется криволинейным интегралом первого рода. Рассматриваемый интеграл обозначается следующим образом:

$$I = \int\limits_{(L)} f(x,y)\,ds \Leftrightarrow \int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода от функции трёх переменных $f(x,y,z)$. Следует заметить, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления движения по кривой L, т.е.

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds = \int\limits_{(BA)} f(x,y)\,ds.$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Возможны следующие представления криволинейных интегралов первого рода:

1) если L - отрезок кусочно-гладкой кривой заданной параметрически ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$), то с учётом соотношения $ds = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ интеграл может быть вычислен с помощью следующего соотношения:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Аналогично для кривой в пространстве ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$) получаем:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

2) если плоская кривая $y=f(x)$ ($a \le x \le b$) задана в явном виде, то

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,y)\,dx.$$

Пример 30

Пусть L - верхняя полуокружность радиуса r, описанная вокруг начала координат. Параметрическое представление кривой имеет следующий вид: $x=r\cdot cos(t)$, $y=r\cdot sin(t)$, $0 \le t \le \pi$. Тогда $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)} = r$ и

$$\int\limits_{(L)} y\,ds = \int\limits_{0}^{\pi} r\sin(t)(r\,dt) = -r^2\cos(t)\Big|_0^{\pi} = 2r^2.$$

Свойства криволинейных интегралов первого рода

1) Линейность. Пусть для функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ существуют криволинейные интегралы по кривой AB и α и β - некоторые постоянные. Тогда для функции $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ также существует криволинейный интеграл по кривой AB и

$$\int\limits_{(AB)} [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,ds = \alpha \int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds + \beta \int\limits_{(AB)} g(x,y)\,ds.$$

2) Аддитивность. Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB, не имеющих общих внутренних точек и если для функции $f(x,y)$ существует криволинейный интеграл по AB, то для $f(x,y)$ существует криволинейный интеграл по каждой из этих дуг AC и CB, причём

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds = \int\limits_{(AC)} f(x,y)\,ds + \int\limits_{(CB)} f(x,y)\,ds.$$

3) Оценка модуля интеграла. Если существует криволинейный интеграл по кривой АВ от функции $f(x,y)$, то существует криволинейный интеграл по кривой АВ от функции $|f(x,y)|$, причём:

$$\left| \int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds \right| \le \int\limits_{(AB)} |f(x,y)|\,ds.$$

4) Формула среднего значения. Если функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой АВ, то на этой кривой найдётся такая точка M, что

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds = l\,f(M),$$

где l - длина кривой АВ.

Следует заметить, что в полной аналогии с изложенной теорией криволинейного интеграла на плоскости, строится теория криволинейного интеграла в пространстве.

Теорема (формула) Грина (Остроградского-Грина)

Пусть G - замкнутая плоская область и её граница L является кусочно-гладким контуром. Пусть область G может быть разбита на конечное число элементарных областей G_i с кусочно-гладкими границами L_i, $i=1, 2, \ldots, k$. Пусть в G заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные на G вместе со своими частными производными $\partial P(x,y)/\partial y$ и $\partial Q(x,y)/\partial x$. Тогда справедливо соотношение:

$$\iint\limits_{(G)} \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dx\,dy = \int\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Подробное доказательство изложено в “Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т. 2. М. Высшая школа, 1981. С.199”.

Геометрические приложения криволинейных интегралов

Длина дуги

Криволинейный интеграл первого рода может быть использован для вычисления длины дуги кривой.

Пример 31

Найти длину пространственной кривой L, определяемой параметрическими уравнениями: $x(t)=e^{-t}cos(t)$, $y(t)=e^{-t}sin(t)$, $z(t)=e^{-t}$ при $0 \le t \le 2\pi$. Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла первого рода $\int\limits_{(L)} 1\,ds$. С помощью соотношения

$$\int\limits_{(L)} ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\;dt.$$

получаем:

$$\int\limits_{(L)} d\,s = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\left[e^{-t}\cos(t)\right]'^2 + \left[e^{-t}\sin(t)\right]'^2 + \left(e^{-t}\right)'^2}\; d\,t = \int\limits_0^{2\pi} \left\{\left[-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t)\right]^2 + e^{-2t} + \right.$$

$$\left. + \left[-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t)\right]^2\right\}^{1/2} d\,t = \int\limits_0^{2\pi} e^{-t}\left\{\cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \right.$$

$$\left. + \sin^2(t) - 2\cos(t)\sin(t) + 1\right\} d\,t = \sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} e^{-t}\, d\,t = \sqrt{3}\left(1 - e^{-2\pi}\right).$$

Вычисление площади

Пусть в формуле Грина $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=x$, получаем:

$$\iint\limits_{(G)} d\,x\,d\,y = \int\limits_L x\,d\,y\,.$$

Тогда площадь области G определяется соотношением:

$$S = \int\limits_L x\,d\,y\,.$$

Аналогично при $P(x,y)=-y$ и $Q(x,y)=0$ в формуле Грина имеем:

$$S = \iint\limits_{(G)} d\,x\,d\,y = -\int\limits_L y\,d\,x\,.$$

Складывая полученные соотношения, получаем:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L x\,d\,y + y\,d\,x\,.$$

Пример 32

Найдём с помощью полученного соотношения площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Для этого воспользуемся параметрическим представлением уравнения эллипса $x(t) = a\cdot cos(t)$, $y(t) = b\cdot sin(t)$. Подставляя это представление в последнее соотношение для площади, получаем:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L x\,d\,y + y\,d\,x = \frac{1}{2}a\,b\int\limits_0^{2\pi}\left[\cos^2(t) + \sin^2(t)\right]d\,t = \pi\,a\,b\,.$$

Криволинейный интеграл второго рода

Определение 14

Пусть L - отрезок кусочно-гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B и $f(x,y)$ - ограниченная функция, заданная вдоль кривой L. На L выбираются произвольные точки $A=A_0$, A_1, …, A_{n-1}, $A_n=B$. Таким образом, криволинейный отрезок AB разбивается на элементарные отрезки. Пусть $M(x_i,y_i)$ - произвольная точка на элементарном отрезке $A_{i-1}A_i$. Выражение

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой относительно выбранного разбиения. Следует заметить, что в данном случае рассматривается не длина элементарного отрезка Δs_i, а её проекция $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Предел данной интегральной суммы при стремлении к нулю длины максимального отрезка Δx_i называется криволинейным интегралом второго рода. Рассматриваемый интеграл обозначается следующим образом:

$$I = \int\limits_{(L)} f(x,y)\,dx \Leftrightarrow \int\limits_{(AB)} f(x,y)\,dx.$$

Если начальная и конечная точки совпадают, то интеграл по замкнутой кривой обозначается следующим образом:

$$I = \oint f(x,y)\,dx.$$

Аналогично, умножая значение функции $f(x,y)$ в точке $M(x_i,y_i)$ на проекцию $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, получаем криволинейный интеграл от $f(M)\,dy$:

$$I = \int\limits_{(L)} f(x,y)\,dy \Leftrightarrow \int\limits_{(AB)} f(x,y)\,dy.$$

Если вдоль кривой L: AB определены две функции $P(M)=P(x,y)$ и $Q(M)=Q(x,y)$, и существуют интегралы

$$\int\limits_{(L)} P(M)\,dx \Leftrightarrow \int\limits_{(L)} P(x,y)\,dx;\quad \int\limits_{(L)} Q(M)\,dy \Leftrightarrow \int\limits_{(L)} Q(x,y)\,dy,$$

то их сумму называют криволинейным интегралом (“общего вида”) и полагают

$$\int\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + \int\limits_{(L)} Q(x,y)\,dy.$$

Свойства криволинейных интегралов второго рода совпадают со свойствами криволинейных интегралом первого рода, но следует заметить, что криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Возможны следующие представления криволинейных интегралов второго рода:

1) если L - отрезок кусочно-гладкой заданной параметрически ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$), то интеграл может быть вычислен с помощью следующего соотношения:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt$$

или

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt.$$

Аналогично для кривой в пространстве ($x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$) получаем:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Данное выражение может быть также представлено в следующих формах

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\,dt.$$

2) если плоская кривая $y=f(x)$ ($a\le x\le b$) задана в явном виде, то

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x,y)\,dx.$$

Условие независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования

Пусть в области G заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные на G вместе со своими частными производными $\partial P(x,y)/\partial y$ и $\partial Q(x,y)/\partial x$. Тогда криволинейный интеграл не зависит от выбора кривой L, целиком лежащей в G и соединяющей точки A и B, если существует однозначная функция $U(x,y)$ (потенциал силового поля), производные которой удовлетворяют условию: $\partial U(x,y)/\partial x=P(x,y)$ и $\partial U(x,y)/\partial y=Q(x,y)$.

Связь криволинейных интегралов второго рода с криволинейными интегралами первого рода

Криволинейный интеграл второго рода может быть вычислен по аналогии с криволинейным интегралом первого рода с помощью следующего соотношения:
в двухмерном случае:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{(L)} f(x,y)\cos(\alpha)\,ds,\quad \int\limits_{(L)} f(x,y)\,dy = \int\limits_{(L)} f(x,y)\sin(\alpha)\,ds.$$

в трёхмерном случае:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dx = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\alpha)\,ds,\quad \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dy = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\beta)\,ds,$$

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{(L)} f(x,y,z)\cos(\gamma)\,ds,$$

где α, β и γ - углы между элементом дуги и осями координат.

Механические приложения криволинейных интегралов

<u>Масса и центр тяжести кривой L</u>

Если масса гладкой кривой L распределена с плотностью $\rho(x,y,z)$, то масса кривой определяется соотношением:

$$M = \int\limits_{(L)} \rho(x,y,z)\,ds.$$

Координаты центра тяжести равны:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} x\,\rho(x,y,z)\,ds,\quad y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} y\,\rho(x,y,z)\,ds,\quad z_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} z\,\rho(x,y,z)\,ds.$$

<u>Пример 33</u>

Вычислить массу и координаты центра тяжести циклоиды: $x=r[t-\sin(t)]$, $y=r[1-\cos(t)]$, $0\le t\le 2\pi$ с равномерно распределённой массой $\rho=1$.

Искомые масса и координаты определяются с помощью стандартных соотношений:

$$M = \int\limits_{(L)} \rho(x,y,z)\,d\,s = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,d\,t = r\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{[1-\cos(t)]^2+\sin^2(t)}\,d\,t =$$

$$= r\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)}\,d\,t = -2\sqrt{2}r\sqrt{1-\cos(t)}\,ctg(t)\Big|_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\,r,$$

$$\xi = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} x\,d\,s = \sqrt{2}\frac{r^2}{8r}\int\limits_0^{2\pi}[t-\sin(t)]\sqrt{1-\cos(t)}\,d\,t =$$

$$= \sqrt{2}\frac{r}{4}[\sin(t)-t]\sqrt{1-\cos(t)}\left[t\,ctg\left(\frac{t}{2}\right)-2\right],$$

$$\eta = \frac{1}{M}\int\limits_{(L)} y\,d\,s = \sqrt{2}\frac{r^2}{8r}\int\limits_0^{2\pi}[1-\cos(t)]\sqrt{1-\cos(t)}\,d\,t =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1-\cos(t)}\frac{r}{24}\left[\cos\left(3\frac{t}{2}\right)-9\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]ctg\left(\frac{t}{2}\right).$$

Работа силы вдоль кривой L

Если $\vec{F} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$ - сила, которая вдоль кривой L меняется по величине и направлению, а $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - ортонормированный базис, то при движении материальной точки единичной массы под влиянием этой силы совершается работа:

$$A = \int\limits_{(L)} P\,d\,x + Q\,d\,y + R\,d\,z\,.$$

Работа только тогда не зависит от пути интегрирования L, соединяющего две точки, когда подъинтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции. Тогда работа вычисляется как разность потенциалов в данной точке.

Пример 34

Если компоненты силы равны $P=x/r^3$, $Q=y/r^3$ и $R=z/r^3$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то существует потенциал $U(x,y,z)$ и сила совершает вдоль некоторой кривой L, соединяющей точки (x_0,y_0,z_0) и (x_1,y_1,z_1) и не проходящей через начало координат, работу:

$$A=U(x_1,y_1,z_1)-U(x_0,y_0,z_0).$$

13. Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл первого рода

Определение 15

Пусть некоторая функция $f(x,y,z)$ определена и ограничена на гладкой поверхности S. Пусть Z - некоторое разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i (i=1,2,…,n) с площадями ΔS_i. Δ(Z) - наибольший из размеров элементарных поверхностей S_i. $M_i(x_i,y_i,z_i)$ - произвольная точка на соответствующей элементарной поверхности S_i. Число

$$\sigma(Z)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

называется интегральной суммой, соответствующей разбиению Z. Рассмотрим в интегральной сумме предел $\Delta(Z)\to 0$. Тогда, если предел существует, то называется поверхностным интегралом первого рода. Такой интеграл обозначается следующим образом:

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS\,.$$

Если функция $f(x,y,z)$ равна единице, то рассматриваемый интеграл равен поверхности S.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода (сведение к двойному интегралу)

Если поверхность задана параметрически, т.е. $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ и $z=z(u,v)$, причём u и v принимают значения в области $\mathrm{H}(u,v)$ (считается, что существует взаимно однозначное соответствие между областями $S(x,y,z)$ и $\mathrm{H}(u,v)$), то поверхностный интеграл первого рода можно вычислить следующим образом:

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{(S)} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)F(u,v)\,dS=$$

$$=\iint\limits_{(S)} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\left\{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]-\!-\!\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} dS\,.$$

Если поверхность задана в явном виде, т.е. $z=z(x,y)$, тогда

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{(S)} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+\left[\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right]^2}\,dx\,dy\,.$$

Для случая, когда поверхность S задана уравнениями $x=x(y,z)$ или $y=y(y,z)$, можно получить аналогичные соотношения.

<u>Пример 35</u>

Пусть поверхность S является сферой радиуса r с параметрическим представлением $x=r\cdot sin(\theta)\,cos(\varphi)$, $y=r\cdot sin(\theta) sin(\varphi)$ и $z=r\cdot cos(\theta)$. Тогда H является прямоугольником $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $F=r^2 sin(\theta)$ и

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{(S)} f\big(r\sin(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\theta)\sin(\varphi),r\cos(\theta)\big)r^2\sin(\theta)\,d\theta\,d\varphi=$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f\left(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\right)\sin(\theta)\, d\,\theta\, d\,\varphi .$$

Пример 36

Пусть S - цилиндрическая поверхность $x^2+y^2=a^z$, $0 \le a \le h$. Её параметрическое представление $x=a\cdot cos(\varphi)$, $y=a\cdot sin(\varphi)$ и $z=z$. Тогда Н является прямоугольником $0\le z\le h$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $F=a$ и

$$I = \iint_{(S)} f(x,y,z)\, d\,S = \iint_{(S)} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z\right) a\, d\,\varphi\, d\,z =$$

$$= a\int_0^{h}\int_0^{2\pi} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z\right) d\,\varphi\, d\,z .$$

Поверхностный интеграл второго рода

Определение 16

Пусть в точках поверхности S, однозначно проектирующейся на поверхность Оxy, определена ограниченная функция $f(x,y,z)$. Пусть Z - некоторое разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i (i=1,2,…,n) с площадями ΔS_i. Δ(Z) - наибольший из размеров элементарных поверхностей S_i. $M_i(x_i,y_i,z_i)$ - произвольная точка на соответствующей элементарной поверхности S_i. Пусть выбрана определённая сторона поверхности (т.е. поверхность S ориентирована). Тогда установленной направление обхода границы каждой элементарной поверхности S_i определяет направление обхода в плоскости Оxy границы проекции S_i’. Площадь ΔS_i’ этой проекции берётся со знаком “+”, если граница проекции S_i’ проходится в положительном направлении. В противном случае площадь ΔS_i’ этой проекции берётся со знаком “-”. Число

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta S_i'$$

называется интегральной суммой, соответствующей разбиению Z. Следует заметить, что в интегральную сумму поверхностных интегралов входит не площадь ΔS_i элементарной поверхности S_i, а ориентированная площадь ΔS_i’ проекции S_i’ поверхности S_i на плоскость Оxy. Рассмотрим в интегральной сумме предел $\Delta(\mathrm{Z})\to 0$. Тогда, если предел существует, то называется поверхностным интегралом второго рода. Такой интеграл обозначается следующим образом:

$$I = \iint_{(S')} f(x,y,z)\, d\,x\, d\,y .$$

Если S проектируется на плоскость Оxy неоднозначно, но её можно разбить на конечное число поверхностей, для каждой из которых однозначная проекция существует, то поверхностный интеграл по S представляется как сумма интегралов по каждой из однозначных проекций. Если S имеет однозначную проекцию на плоскости Оxz или Оyz, то аналогично можно определить два других поверхностных интеграла:

$$I = \iint_{(S')} f(x,y,z)\, d\,x\, d\,z \text{ и } I = \iint_{(S')} f(x,y,z)\, d\,y\, d\,z .$$

Определение 17

Выбирается определённая сторона поверхности S. Каждая замкнутая кривая на S сохраняет направление нормали при движении по ней в том смысле, что оно вместе с нормалью выбранной стороны образует правый винт.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода (сведение к двойному интегралу)

Пусть поверхность S имеет явное представление $z=z(x,y)$, причём (x,y) изменяется в области S'. Тогда поверхностный интеграл по той стороне поверхности S, для которой угол между нормалью и осью z является острым, вычисляется с помощью следующего соотношения:

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S')} f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy\,.$$

Если выбирается другая сторона поверхности, то

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy=-\iint\limits_{(S')} f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy\,.$$

Аналогично получаем:

1) $$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dy\,dz=\iint\limits_{(S')} f(x(y,z),y,z)\,dy\,dz\,,$$

где поверхность S задана уравнением $x=x(y,z)$, S' - проекция поверхности S на плоскость Оyz, а поверхностный интеграл берётся по той стороне, нормаль с которой образует с осью x острый угол;

2) $$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dz=\iint\limits_{(S')} f(x,y(x,z),z)\,dx\,dz\,,$$

где поверхность S задана уравнением $y=y(x,z)$, S' - проекция поверхности S на плоскость Оxz, а поверхностный интеграл берётся по той стороне, нормаль с которой образует с осью y острый угол.

Если поверхность задана параметрически, т.е. $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ и $z=z(u,v)$, причём u и v принимают значения в области Н(u,v) (считается, что существует взаимно однозначное соответствие между областями $S(x,y,z)$ и Н(u,v)), то поверхностный интеграл второго рода можно вычислить следующим образом:

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy=\pm\iint\limits_{(S')} f(x(u,v),y(u,v),z(x(u,v),y(u,v)))\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv\,,$$

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dz=\pm\iint\limits_{(S')} f\big(x(u,v),y(x(u,v),y(u,v)),z(u,v)\big)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv,$$

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dy\,dz=\pm\iint\limits_{(S')} f\big(x(y(u,v),z(u,v)),y(u,v),z(u,v)\big)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv.$$

Положительный знак в правых частях выбирается тогда, когда ориентация *S*' соответствует ориентации *S*.

Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода

Пусть α, β и γ - углы нормали к выбранной стороне поверхности с осями *x*, *y* и *z*, то

$$I=\iint\limits_{(S')} U_x(x,y,z)\,dy\,dz+U_y(x,y,z)\,dz\,dx+U_z(x,y,z)\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\big[U_x(x,y,z)\cos(\alpha)+U_y(x,y,z)\cos(\beta)+U_z(x,y,z)\cos(\gamma)\big]dS.$$

Пример 37

Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$I=\iint\limits_{(S)} z(x,y)\,dx\,dy.$$

где *S* - внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Выразим *z* в явном виде: $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$. Тогда

$$I=\iint\limits_{(S)} z(x,y)\,dx\,dy=c\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx.$$

Вычисление такого интеграла позволяет получить

$$I=c\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx=abc\pi\frac{2}{3}.$$

14. Интегральные теоремы

Теорема (формула) Гаусса (Остроградского-Гаусса)

Данная теорема связывает поток векторного поля $\vec{U}(x,y,z)$ через замкнутую поверхность S и интеграл от дивергенции векторного поля $\vec{U}(x,y,z)$ по объёму области V, ограниченному рассматриваемой поверхностью S, ориентированной в направлении её внешней нормали $\vec{n}$. Формулировка этой теоремы имеет следующий вид:

$$\iiint\limits_{(V)} div\vec{U}(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{(S)} \left(\vec{n}\cdot\vec{U}(x,y,z)\right)dS .$$

В эквивалентной форме записи данная теорема имеет следующий вид:

$$\iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial U_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial U_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial U_z(x,y,z)}{\partial z}\right] dV = \iint\limits_{(S)} \left(\vec{n}\cdot\vec{U}(x,y,z)\right)dS .$$

Теорема (формула) Стокса

Данная теорема связывает поток векторного поля $rot\vec{U}(x,y,z)$ через ориентированную поверхность S и циркуляцию $\vec{U}(x,y,z)$ по контуру L этой поверхности, ориентированному соответственно ориентации S. Формулировка этой теоремы имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{(S)} \left(\vec{n}\cdot rot\vec{U}(x,y,z)\right)dS = \int\limits_{(L)} \vec{U}(x,y,z)\,d\vec{l} .$$

Приложения поверхностных интегралов

Объём тела

Объём тела ΔV, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью S, можно вычислить как поверхностный интеграл второго рода с помощью следующих соотношений:

$$\Delta V = \iint\limits_{(S)} z(x,y)\,dx\,dy ; \quad \Delta V = \iint\limits_{(S)} y(x,z)\,dz\,dx ; \quad \Delta V = \iint\limits_{(S)} x(y,z)\,dy\,dz ;$$

$$\Delta V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} z(x,y)\,dx\,dy + y(x,z)\,dz\,dx + x(y,z)\,dy\,dz .$$

Интегралы необходимо брать по внешней стороне поверхности S.

Пример 38

Пусть пространственная область V ограничена эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Параметрическое представление данной поверхности имеет следующий вид: $x=a\,sin(\theta)\,cos(\varphi)$, $y=b\,sin(\theta)\,sin(\varphi)$, $z=c\,cos(\theta)$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le2\pi$. Из-за того, что якобиан преобразования равен следующей величине

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \theta}\cos(\varphi) & a\sin(\theta)\frac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \varphi} \\ b\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \theta}\sin(\varphi) & b\sin(\theta)\frac{\partial \sin(\varphi)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= a\,b\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\varphi) + a\,b\sin(\theta)\cos(\theta)\sin^2(\varphi) = a\,b\sin(\theta)\cos(\theta),$$

получаем:

$$\Delta V = \iint_{(S)} z(x,y)\,d\,x\,d\,y = c\int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,d\,y\,d\,x = a\,b\,c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\theta)\cos(\theta)\times$$

$$\times\sqrt{1-\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)-\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)}\,d\,\theta\,d\,\varphi = 2\pi\,a\,b\,c\int_0^{\pi}\sin(\theta)\cos^2(\theta)d\,\theta = -2\pi\times$$

$$\times a\,b\,c\int_0^{\pi}\cos^2(\theta)d\cos(\theta) = -\frac{2}{3}\pi\,a\,b\,c\cos^3(\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi\,a\,b\,c\left[1-\cos^3(\pi)\right] = \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c\,.$$

<u>Центр тяжести и сила притяжения</u>

Если по поверхности S распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$, то полная масса поверхности равна

$$M = \iint_{(S)} \rho(x,y,z)\,d\,S\,.$$

Координаты центра тяжести определяются следующими соотношениями:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_{(S)} x\,\rho(x,y,z)\,d\,S;\; y_0 = \frac{1}{M}\iint_{(S)} y\,\rho(x,y,z)\,d\,S,\; z_0 = \frac{1}{M}\iint_{(S)} z\,\rho(x,y,z)\,d\,S\,.$$

Компоненты силы притяжения $\vec{F}$ рассмотренного распределения массы, дейст-вующую на материальную точку $M(x_0,y_0,z_0)$ единичной массы соответственно равны:

$$F_x = \omega\iint_{(S)}\frac{x-x_0}{r^3}\,d\,S;\; F_y = \omega\iint_{(S)}\frac{y-y_0}{r^3}\,d\,S,\; F_z = \omega\iint_{(S)}\frac{z-z_0}{r^3}\,d\,S,$$

где ω - гравитационная постоянная.

<u>Пример 39</u>

Пусть по поверхности конуса $R^2x^2=h^2(y^2+z^2)$ распределена масса с единичной плотностью. Найдём координаты центра тяжести. Из условия симметрии $x_0=y_0=0$, т.к. поверхность S задана уравнением:

$$x = \frac{h}{R}\sqrt{y^2+z^2}\,.$$

При этом переменные y и z принимают значения внутри круга $y^2+z^2=R^2$. Третья координата центра тяжести определяется с помощью соотношения:

$$x_0 = \iint\limits_{(S)} x\,d\,S = \frac{h}{R}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2/R^2}}^{\sqrt{1-x^2/R^2}} \sqrt{y^2+z^2}\,\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,d\,y\,d\,z =$$

$$= \frac{h}{R}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2/R^2}}^{\sqrt{1-x^2/R^2}} \sqrt{y^2+z^2}\,\sqrt{1+\frac{h^2 y}{R^2\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{h^2 z}{R^2\sqrt{y^2+z^2}}}\,d\,y\,d\,z\,.$$

Переход к полярным координатам $y=r\cos(\varphi)$ и $z=r\sin(\varphi)$ позволяет получить:

$$x_0 = \frac{h}{R}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} r^2\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}\cos(\varphi)+\frac{h^2}{R^2}\sin(\varphi)}\,d\,\varphi\,d\,r = 2\,h\,R\frac{\pi}{3}\sqrt{h^2+R^2}\,.$$

15. Графическое представление функций многих переменных

15.1. *Системы координат*

В данном разделе сравним несколько наиболее распространённых систем координат.

Системы координат на плоскости

Декартова система координат

Если в пространстве задана правая прямоугольная система координат, то единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей Ox, Oy соответственно образуют систему базисных векторов. Координаты a_x, a_y вектора

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

называются декартовыми (прямоугольными) координатами вектора $\vec{a}$. Следует заметить, что модуль вектора $\vec{a}$ может быть определён с помощью следующего соотношения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,.$$

Координаты a_x, a_y определяются следующим образом

$$a_x = |\,\vec{a}\,|\cos\varphi,\ a_y = |\,\vec{a}\,|\sin\varphi,$$

где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью абсцисс.

Полярная система координат

Полярными координатами являются координаты радиус r и угол φ, который составляет радиус с осью абсцисс. Соотношения, связывающие полярные и декартовые координаты, имеют следующий вид:

$$x=r\cos(\varphi);\ y=r\sin(\varphi).$$

Для перехода от полярной системы координат к декартовой используются следующие соотношения

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ tg(\varphi)=y/x,\ x\neq 0.$$

Системы координат в пространстве

Декартова система координат

Если в пространстве задана правая прямоугольная система координат, то единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ осей *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно образуют систему базисных векторов. Координаты a_x, a_y, a_z вектора

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

называются декартовыми (прямоугольными) координатами $\vec{a}$. Направление оси Oz перпендикулярно осям *Ox*, *Oy* и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от *Ox* к *Oy* на угол, меньший π. Следует заметить, что модуль вектора $\vec{a}$ может быть определён с помощью следующего соотношения:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ .$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ определяются следующими соотношениями:

$$\cos(\alpha)=a_x/|\vec{a}|,\ \cos(\beta)=a_y/|\vec{a}|,\ \cos(\gamma)=a_z/|\vec{a}|.$$

Причём направляющие косинусы удовлетворяют соотношению:

$$cos^2(\alpha)+cos^2(\beta)+cos^2(\gamma)=1.$$

Цилиндрическая система координат

Цилиндрическими координатами являются полярные координаты r и φ в плоскости, перпендикулярной оси z, и ось z. Соотношения, связывающие цилиндрические и декартовые координаты, имеют следующий вид:

$$x=r\ cos(\varphi);\ y=r\ sin(\varphi);\ z=z.$$

для перехода от цилиндрической системы координат к декартовой и

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ tg(\varphi)=y/x,\ x\neq 0;\ z=z$$

для перехода от декартовой системы координат к цилиндрической.

Сферическая система координат

В сферической системе координат присутствуют три координаты: длина радиус -вектора r, долгота φ (угол в плоскости *OXY* с положительным направлением от *OX* к *OY*) и полярное расстояние θ (угол в плоскости *OYZ* с положительным направлением от *OZ* к *OY*). Если сферические координаты изменяются в следующих пределах:

$$0 \le r < \infty;\ -\pi < \varphi \le \pi;\ 0 \le \theta \le \pi,$$

то получатся однозначно все точки пространства. Координатными поверхностями в данном случае являются сферы с центром в начале координат ($r = const$); полуплоскости, ограниченные осью z ($\varphi = const$); конусы, для которых ось z является осью ($\theta = const$). Связь между декартовыми и сферическими координатами осуществляется с помощью следующих соотношений:

$$x = r\,sin(\theta)cos(\varphi);\ y = r\,sin(\theta)sin(\varphi);\ z = r\,cos(\theta).$$

для перехода от сферической системы координат к декартовой и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\ tg(\varphi) = y/x,\ x \neq 0;\ tg(\theta) = \sqrt{x^2 + y^2}\Big/z.$$

для перехода от декартовой системы координат к сферической.

15.2. *Прямая на плоскости*

Определение 18

Функция $F(x,y) = 0$ является общим уравнением линии на плоскости.

Определение 19

Линия на плоскости называется алгебраической, если существует такая декартова система координат, в которой линия $F(x,y) = 0$ является многочленом. Любая неалгебраическая линия называется трансцендентной.

Пример 40

$x^1y^1-1=0$ - линия второго порядка (гипербола). Сумма степеней множителей называется порядком линии.

Пример 41

$y^2-e^x=0$ – неалгебраическая (трансцендетная) линия.

Замечание 1

Если линия в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением степени n, то эта линия и в любой другой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением той же степени n.

Способы задания прямой на плоскости

Уравнение $Ax+By+C=0$ является общим уравнением прямой. Его можно преобразовать к следующему виду: $y=-(Ax+C)/B$. Введём обозначения: $k=-A/B$, $b=-C/B$. Уравнение вида: $y=kx+b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k. Данный коэффициент равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс α (см. рис. 5). Рассмотрим две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_1(x_2,y_2)$ на прямой $y=kx+b$. Тангенс угла её наклона можно представить в следующем виде

$$k = tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (12)$$

С другой стороны

$$k = \frac{y - b}{x}.$$

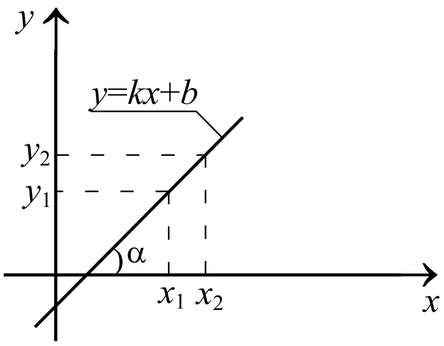


Рис. 12.

Тогда

$$\frac{y-b}{y_2-y_1}=\frac{x}{x_2-x_1}.$$

Параметр b может быть получен из условия $y_1=k\,x_1+b$. С учётом данного условия и соотношения (12) получаем уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_1(x_2,y_2)$, в следующей форме

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Если в данном уравнении ввести обозначения $l=x_2-x_1$ и $m=y_2-y_1$, т.е.

$$\frac{y-y_1}{l}=\frac{x-x_1}{m},$$

получаем каноническое уравнение прямой. Зная угловой коэффициент, можно получить уравнение линии, проходящей через заданную точку $M_1(x_1,y_1)$. В данном случае $b=y_1-k\,x_1$. Тогда уравнение прямой с угловым коэффициентом преобразуется к следующему виду: $y-y_1=k\,(x-x_1)$. Далее умножим общее уравнение прямой на нормирующий множитель $\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак данного множителя противоположен знаку параметра C. Тогда получаем соотношение

$$\frac{A\,x}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{B\,y}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

С учётом известной связи между длинами катетом и гипотенузы для прямоугольного треугольника для параметров A, B и C, получаем: $A^2+B^2=C^2$ преобразуем данное соотношение к следующему виду: $x\cdot cos(\alpha)+y\cdot sin(\alpha)=p$, α - угол между прямой и осью абсцисс, $p>0$. Данное уравнение прямой известно как нормальное. Далее разделим общее уравнение прямой на $-C$. Тогда: $-x(A/C)\,-y(B/C) = 1$. Далее введём следующие обозначения: $a=-A/C$ и $b=-B/C$, что приводит уравнение прямой к следующему виду: $(x/a)+y/b=1$. Данное уравнение называется уравнением прямой в отрезках. Данная прямая отсекает отрезки a и b (с учётом знака) от координатных осей.

Используется также параметрическое уравнение прямой $x=x_0+x_1t$, $y=y_0+y_1t$, (t - параметр), а в n-мерном пространстве - векторное уравнение прямой $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}\,t$.

<u>Определение 20</u>

Совокупность лежащих на заданной плоскости прямых, проходящих через некоторую точку M данной плоскости, называется пучком прямых с центром M.

Центр пучка полностью определяется заданием двух различных прямых этого пучка $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, пересечением которых и является точка M. Уравнение пучка прямых имеет вид: $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$.

В следующем примере рассмотрим некоторые задачи на прямую на плоскости.

<u>Пример 42</u>

Дан треугольник ABC, его вершины $A(3,2)$, $B(1,4)$ и $C(5,3)$. Определим:

1) уравнение прямых AC, BC, AB;
2) внутренние углы треугольника;
3) уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно стороне AC;
4) уравнение высоты, проведённой из точки B;
5) координаты точки B', симметричной точке B, относительно прямой AC (см. рис. 12);
6) расстояние от точки B до прямой AC.

1) Для нахождения сторон треугольника воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Подстановка соответствующих значений координат в данное уравнение позволяет получить

$$AC\colon\ \frac{x-3}{5-3}=\frac{y-2}{3-2};\ AB\colon\ \frac{x-3}{1-3}=\frac{y-2}{4-2};\ BC\colon\ \frac{x-1}{5-1}=\frac{y-4}{3-4}.$$

Приведение левых и правых частей данных уравнений к общему знаменателю позволяет записать их как уравнения с угловым коэффициентом, т.е.

$$AC\colon y=(x+1)/2;\ AB\colon y=-x+5;\ BC\colon y=-(x-11)/4.$$

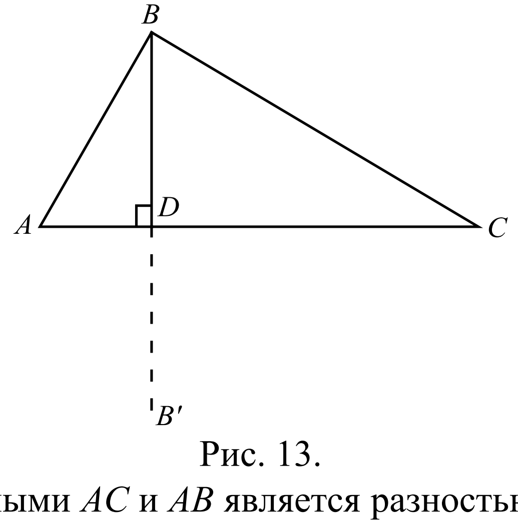


Рис. 13.

2) Угол $\angle A$ между прямыми AC и AB является разностью углов между данными прямыми и осью абсцисс, т.е. $\angle A=\alpha_{AC}-\alpha_{AB}$. Тогда $tg(\angle A)=tg(\alpha_{AC}-\alpha_{AB})$. Следующие тригонометрические преобразования позволяют получить связь между $tg(\angle A)$ и угловыми коэффициентами прямых AC и AB

$$tg\left(\angle A\right)=\frac{\sin\left(\alpha_{AC}-\alpha_{AB}\right)}{\cos\left(\alpha_{AC}-\alpha_{AB}\right)}=\frac{\sin\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)-\cos\left(\alpha_{AC}\right)\sin\left(\alpha_{AB}\right)}{\cos\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)+\sin\left(\alpha_{AB}\right)\sin\left(\alpha_{AC}\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)}{\cos\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)}-\dfrac{\cos\left(\alpha_{AC}\right)\sin\left(\alpha_{AB}\right)}{\cos\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)}}{\dfrac{\cos\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)}{\cos\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)}+\dfrac{\sin\left(\alpha_{AB}\right)\sin\left(\alpha_{AC}\right)}{\cos\left(\alpha_{AC}\right)\cos\left(\alpha_{AB}\right)}}=\frac{tg\left(\alpha_{AC}\right)-tg\left(\alpha_{AB}\right)}{1+tg\left(\alpha_{AC}\right)tg\left(\alpha_{AB}\right)}=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}.$$

Аналогично можно получить связь между остальными углами треугольника *ABC* и соответствующими угловыми коэффициентами. Из полученного соотношения можно получить, что (*i*) две прямые $y_1=y_2$ параллельны друг другу, если их угловые коэффициенты равны $k_1=k_2$, (*ii*) две прямые $y_1=y_2$ перпендикулярны друг другу, если их угловые коэффициенты удовлетворяют условию $1+k_1k_2=0$. Вычисление искомых углов с помощью последнего соотношения приводит к следующему результату

$$tg\left(\angle A\right)=\frac{0{,}5+1}{1-0{,}5}=\frac{1{,}5}{0{,}5}=3;\ tg\left(\angle B\right)=\frac{-1+0{,}25}{1+0{,}25}=\frac{-0{,}75}{1{,}25}=-\frac{3}{5};$$

$$tg\left(\angle C\right)=\frac{1+0{,}25}{1+0{,}125}=\frac{1{,}25}{1{,}125}=\frac{10}{9}.$$

Тогда

$$\angle A\approx 71{,}57°;\ \angle B\approx -30{,}96°;\ \angle C\approx 48{,}1°.$$

3) Далее найдём уравнение прямой, проходящей через точку *B* параллельно стороне *AC*. В силу равенства угловых коэффициентов искомой прямой и прямой *AC* необходимое уравнение можно записать в следующем виде $y=b+x/2$. Параметр *b* может быть определён путём подстановки координат точки *B* в искомое уравнение прямой. Тогда в окончательном виде получаем: $y=(7+x)/2$.
4) Для нахождения высоты треугольника *ABC*, проведённой из точки *B*, воспользуемся условием перпендикулярности искомой прямой и прямой *AC*, т.е. $1+k_1k_2=0$. Тогда угловой коэффициент медианы равен $k=-2$. Параметр *b* также определим путём подстановки координат точки *B* в искомое уравнение прямой. Тогда в искомое уравнение может быть представлено в следующей форме: $y=2(3-2x)$.
5) Координаты точки B', симметричной точке *B*, относительно прямой *AC*. Условие симметричности точки B' точке *B* относительно прямой *AC* позволяет записать: $\left|BD\right|=\left|B'D\right|$. Тогда координаты точки *D* могут быть определены как средние арифметические координат точек *B* и B', т.е.

$$x_D=\frac{x_B+x_{B'}}{2},\ y_D=\frac{y_B+y_{B'}}{2}.$$

Определим координаты точки *D* как точки пересечения двух прямых *AC* и *BD*. Тогда

$$\begin{cases} y = (x+1)/2 \\ y = 2(3-2x) \end{cases}.$$

После незначительных преобразований в окончательном виде получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 4x + y = 6 \end{cases}.$$

Решением данной системы являются следующие значения координат x и y: x =11/9, y=10/9, т.е. точка D имеет координаты D(11/9,10/9). Подстановка значений координат точек B и D в соотношение, связывающее их координаты с координатами точки B', позволяет получить искомые координаты: B'(13/9,-16/9).

6) Определим расстояние от точки B до прямой AC. Данное расстояние между прямой $Ex+Fy+G$=0 и точкой $B(x_0,y_0)$ может быть определено с помощью соотношения

$$\delta = \left| \frac{E x_0 + F y_0 + G}{\sqrt{E^2 + F^2}} \right|.$$

Подстановка координат точки B и коэффициентов прямой AC позволяет получить следующее значение искомого расстояния: $\delta = 4\sqrt{2}$.

Замечание 2

Если параметр δ отрицателен, то это свидетельствует о том, что точка B и начало координат лежат по одну сторону от прямой AC.

15.3. *Плоскость и прямая в пространстве*

Определение 21

Рассмотрим уравнение $F(x,y,z)$=0. Геометрическое место точек данного уравнения называется поверхностью.

Определение 22

Если $F(x,y,z)$ - многочлен степени n, то геометрическое место точек - алгебраическая поверхность порядка n. Остальные поверхности называются трансцендентными.

Пример 43

$x^2y^3+z^2x^4+5=0$ - многочлен 6-ой степени (поверхность 6-го порядка).

Пример 44

Пусть есть линейное уравнение $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$. Данное уравнение задаёт плоскость в пространстве. Следует заметить, что уравнение плоскости задаётся с точностью до постоянного множителя.

Способы задания плоскости

Плоскости могут быть заданы с помощью различных типов уравнений, которые могут быть получены по аналогии с соответствующими уравнениями прямой на плоскости. К основным уравнениям плоскости относятся следующие:

1) $x\cdot cos(\alpha)+y\cdot cos(\beta)+z\cdot cos(\gamma)=p$ - нормальное уравнение плоскости. Величины $cos(\alpha)$, $cos(\beta)$, $cos(\gamma)$ - направляющие косинусы плоскости, удовлетворяющие

соотношению $cos^2(\alpha)+cos^2(\beta)+cos^2(\gamma)=1$;

2) $(x/a)+(y/b)+(z/b)=1$ - уравнение плоскости в отрезках. Оa, Оb и Оc - отрезки которые отсекает плоскости от координатных осей;

3) $x=x_0+x_1u+x_2v$, $y=y_0+y_1u+y_2v$, $z=z_0+z_1u+z_2v$ - параметрическое уравнение плоскости, где u и v - параметры;

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ или $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ - уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$;

5) $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ - уравнение плоскости, проходящей через $M_1(x_1,y_1,z_1)$;

6) $Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow (\vec{A},\vec{r})+D=0$ - общее уравнение плоскости.

Замечание 3

Нормальный вектор к плоскости может быть определён с помощью соотношения $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, *где* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *и* $\vec{k}$ *- единичные вектора (орты) по осям* Ox, Oy *и* Oz.

Замечание 4

Прямая в пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Способы задания прямой в пространстве

1) $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}\,t$ - векторное уравнение прямой.

2) $x=x_0+x_1t$, $y=y_0+y_1t$, $z=z_0+z_1t$ - параметрическое уравнение прямой в пространстве.

3) $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$ - каноническое уравнение прямой в пространстве.

Замечание 5

Направляющий вектор прямой может быть определён с помощью соотношения $\vec{P}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$.

4) $(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)=(z-z_1)/(z_2-z_1)$ - уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M(x_1,y_1,z_1)$ и $M(x_2,y_2,z_2)$.

5) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{A}_1\vec{r}+D_1=0 \\ \vec{A}_2\vec{r}+D_2=0 \end{cases}$ - общее уравнение прямой в пространстве соответственно в скалярной и векторной формах (как пересечение двух плоскостей).

Замечание 6

Вектор $\vec{a}=[\vec{A}_1,\vec{A}_2]=(B_1C_2-B_2C_1)\,\vec{i}+(C_1A_2-C_2A_1)\,\vec{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\,\vec{k}$ *является направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением.*

Некоторые задачи на прямую на прямую в пространстве и плоскость

1) Рассмотрим две прямые в пространстве, заданные своими общими уравнениями: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$. Найдём угол между данными прямыми. Такая задача сводится к определению угла φ между соответствующими направляющими векторами. Пользуясь определением

скалярного произведения можно получить следующее соотношение для φ

$$\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{(B_1C_2-B_2C_1)^2+(C_1A_2-C_2A_1)^2+(A_1B_2-A_2B_1)^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(B_3C_4-B_4C_3)^2+(C_3A_4-C_4A_3)^2+(A_3B_4-A_4B_3)^2}}\left[(B_1C_2-B_2C_1)\times\right.$$

$$\left.\times(B_3C_4-B_4C_3)+(C_1A_2-C_2A_1)(C_3A_4-C_4A_3)++(A_1B_2-A_2B_1)(A_3B_4-A_4B_3)\right]. \quad (13)$$

Если уравнения прямых преобразовать к каноническому виду $(x\text{-}x_1)/l_1=(y\text{-}y_1)/m_1=(z\text{-}z_1)/n_1$ и $(x\text{-}x_2)/l_2=(y\text{-}y_2)/m_2=(z\text{-}z_2)/n_2$, тогда уравнение (2) упрощается

$$\cos(\varphi)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \quad (13a)$$

Из соотношений (2) следует условие параллельности данных прямых, заключающееся в равенстве числителя данного соотношения его знаменателю, т.е.

$$\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{(B_1C_2-B_2C_1)^2+(C_1A_2-C_2A_1)^2+(A_1B_2-A_2B_1)^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(B_3C_4-B_4C_3)^2+(C_3A_4-C_4A_3)^2+(A_3B_4-A_4B_3)^2}}=\left[(B_1C_2-B_2C_1)(B_3C_4-B_4C_3)+\right.$$

$$\left.+(C_1A_2-C_2A_1)(C_3A_4-C_4A_3)+(A_1B_2-A_2B_1)(A_3B_4-A_4B_3)\right].$$

или

$$l_1/l_2=m_1/m_2=n_1/n_2.$$

Условие перпендикулярности данных прямых, заключающееся в равенстве нулю скалярного произведения, имеет вид

$$cos(\varphi)=[(B_1C_2\text{-}B_2C_1)(B_3C_4\text{-}B_4C_3)+(C_1A_2\text{-}C_2A_1)(C_3A_4\text{-}C_4A_3)+(A_1B_2\text{-}A_2B_1)(A_3B_4\text{-}A_4B_3)],$$

что эквивалентно следующему соотношению

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

<u>Пример 45</u>

Пусть две прямые заданы уравнениями $(x\text{-}1)/2=(y+4)/3=(z\text{-}7)/5$ и $x=(y\text{-}3)/4=(z+1)/3$. Угол между данными прямыми равен

$$\cos(\varphi)=\frac{2+12+15}{\sqrt{4+9+25}\sqrt{1+16+9}}=\frac{29}{\sqrt{38}\sqrt{26}}\approx\frac{29}{31{,}43}\approx 0{,}92.$$

Тогда $\varphi\approx 22{,}69^\circ$.

2) Найдём угол между плоскостью, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, и прямой, заданной уравнением $(x\text{-}x_0)/l=(y\text{-}y_0)/m=(z\text{-}z_0)/n$. Такая задача сводится к определению угла φ между соответствующими направляющим и нормальным векторами. Поскольку угол φ является дополнительным к углу между направляющим вектором прямой и нормальным вектором рассмотренной

плоскости, искомый угол можно определить с помощью следующего соотношения

$$\sin(\varphi)=\frac{A\,l+B\,m+C\,n}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Из данного соотношения следуют следующие условия соответственно параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

$$Al+Bm+Cn=0,\ A/l=B/m=C/n.$$

Пример 46

Рассмотрим плоскость $x+2y+3z+4=0$ и прямую $(x-1)/2=(y+4)/3=(z-7)/5$. Угол между данными прямой и плоскостью определяется с помощью следующего соотношения

$$\sin(\varphi)=\frac{2+2\cdot3+3\cdot5}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+3^2+5^2}}=\frac{23}{\sqrt{14}\sqrt{38}}\approx 0{,}997.$$

Тогда $\varphi\approx 85{,}69^{\circ}$.

3) Рассмотрим точку $M(x_0,y_0,z_0)$. Расстояние от данной точки до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ может быть определено с помощью следующего соотношения

$$\delta=\left|\frac{A\,x_0+B\,y_0+C\,z_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{(\vec{A},\vec{r}_0)+D}{|\vec{A}|}\right|,$$

где $\vec{r}_0$ - радиус-вектор точки M. Аналогично может быть найдено расстояние от точки $M(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ на плоскости. Но в этом случае в соотношение для искомого расстояния $D=0$ и $z_0=1$.

Замечание 7

Иногда δ называют отклонением точки от прямой или плоскости. Отклонение положительно, если начало координат и точка $M(x_0,y_0)$ лежат по разные стороны от прямой (плоскости). Отклонение отрицательно, если начало координат и точка $M(x_0,y_0)$ лежат по одну сторону от прямой (плоскости).

Пример 47

Найдём расстояние от точки $M(3,2,1)$ до плоскости $x+2y+3z+4=0$. Для нахождения данного расстояния воспользуемся соответствующим соотношением. Подстановка соответствующих параметров позволяет получить

$$\delta=\frac{1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1+4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}\approx 3{,}74.$$

4) Определим условия, при которых заданная плоскость пересекает заданный отрезок M_1M_2. Запишем уравнение плоскости в общем виде: $Ax+By+Cz+D=0$ и находим отклонения точек $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ от рассматриваемой плоскости. Подстановка координат точек в соответствующее соотношение для искомого расстояния позволяет получить

$$\delta_1=\frac{A\,x_1+B\,y_1+C\,z_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \delta_2=\frac{A\,x_2+B\,y_2+C\,z_2+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Для того, чтобы рассматриваемая плоскость пересекала отрезок M_1M_2, необходимо и достаточно, чтобы точки M_1 и M_2 лежали по разные стороны от плоскости, т.е. необходимо и достаточно, чтобы отклонения δ_1 и δ_2 имели разные знаки.

Пример 48

Рассмотрим точки $M_1(3,2,1)$, $M_2(-4,5,-6)$ и $M_3(4,5,6)$ и плоскость $x+2y+3z+4=0$. Далее с помощью стандартного соотношения найдём расстояния от данных точек до прямой. Искомые расстояния соответственно равны $\delta_1\approx 3{,}74$; $\delta_2\approx -2{,}14$; $\delta_3\approx 9{,}35$. Таким образом, плоскость $x+2y+3z+4=0$ пересекает отрезок M_1M_2 и не пересекает отрезок M_1M_3.

5) Пусть прямая задана каноническим уравнением $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$, а точка M, не лежащая на данной прямой, имеет координаты x_1, y_1, z_1. Найдём уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую и заданную точку. Будем искать уравнение плоскости в следующей форме: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. Используя условие принадлежности данной прямой к искомой плоскости получаем следующую систему соотношений

$$\begin{cases} A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$$

Точка $M(x_1,y_1,z_1)$ по условию не лежит на данной прямой. Это означает, что нарушается хотя бы одна из пропорций $(x_0-x_1)/l=(y_0-y_1)/m=(z_0-z_1)/n$. По этой причине из последней системы два из коэффициентов A, B и C можно определить через третий (т.к. имеем систему из двух уравнений с тремя неизвестными). Выбрав произвольным, например, третий коэффициент, можно получить уравнение искомой плоскости.

Пример 49

Рассмотрим точку M с координатами $x_1=4$, $y_1=5$, $z_1=6$ и прямую $(x-1)/2=(y+4)/3=(z-7)/5$. Используя условие принадлежности данной прямой к искомой плоскости получаем следующую систему соотношений

$$\begin{cases} A(1-4)+B(-4-5)+C(7-6)=0 \\ 2A+3B+5C=0 \end{cases}$$

Приведение подобных в первом уравнении позволяет записать его в более простом виде

$$\begin{cases} 3A+9B-C=0 \\ 2A+3B+5C=0 \end{cases}.$$

Далее два из коэффициентов A, B и C определим через третий. Выберем произвольным коэффициент C. Тогда получаем соотношения для остальных коэффициентов в следующем виде

$$\begin{cases} A=-16C/3 \\ B=-17C/9 \end{cases}.$$

Далее подставим значения данных коэффициентов в искомое уравнение плоскости. Тогда

$$A(x\text{-}4)+B(y\text{-}5)+C(z\text{-}6)=0 \Leftrightarrow -16C(x\text{-}4)/3-17C(y\text{-}5)/3+C(z\text{-}6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x\text{-}4)+17(y\text{-}5)\text{-}3(z\text{-}6)=0.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости может быть записано в следующей форме $16(x\text{-}4)+17(y\text{-}5)\text{-}3(z\text{-}6)=0$.

6. Найдём уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую и параллельную другой заданной прямой, не параллельной первой. Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ - уравнение искомой плоскости, а уравнения $(x\text{-}x_1)/l_1=(y\text{-}y_1)/m_1=(z\text{-}z_1)/n_1$ и $(x\text{-}x_2)/l_2=(y\text{-}y_2)/m_1=(z\text{-}z_2)/n_2$ описывают указанные прямые. Используя условия принадлежности первой прямой к искомой плоскости и дополнив их условием параллельности искомой плоскости и второй из рассмотренных прямых, получаем систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} A\,x_1 + B\,y_1 + C\,z_1 + D = 0 \\ A\,l_1 + B\,m_1 + C\,n_1 = 0 \\ A\,l_2 + B\,m_2 + C\,n_2 = 0 \end{cases}$$

для четырёх неизвестных коэффициентов A, B, C и D. Из-за того, что две данные прямые не параллельны и нарушается хотя бы одна из пропорций $l_1/l_2=m_1/m_2=n_1/n_2$ три из неизвестных коэффициентов могут быть выражены через четвёртый.

Пример 50

Рассмотрим прямые $(x\text{-}1)/2=(y+4)/3=(z\text{-}7)/5$ и $x=(y\text{-}3)/4=(z+1)/3$. Далее запишем систему из трёх уравнений для четырёх неизвестных коэффициентов A, B, C и D

$$\begin{cases} A-4B+7C+D=0 \\ 2A+3B+5C=0 \\ A+4B+3C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-4B+7C=-D \\ 2A+3B+5C=0 \\ A+4B+3C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-4B+7C=-D \\ 2A+3B+5C=0 \\ A+4B+3C=0 \end{cases}$$

Решение такой системы имеет вид $A=0$, $B=D/47$и $C=\text{-}5D/47$. Подстановка полученных значений коэффициентов A, B и C в общее уравнение плоскости позволяет получить: $y\text{-}5z+47=0$.

15.4. *Кривые второго порядка*

Определение 21

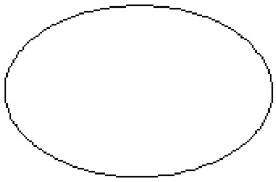
Рассмотрим следующее уравнение

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

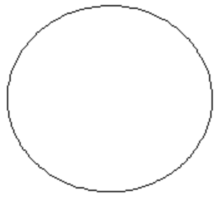
Линия, описываемая данным уравнением, называется кривой второго порядка. В качестве основных кривых второго порядка можно выделить следующие

Название кривой	Каноническое уравнение	Вид кривой

эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

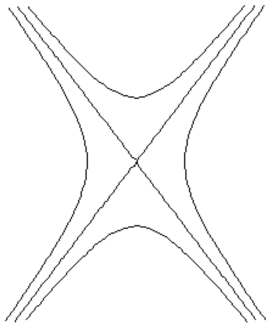


для $a/b=\sqrt{2}$

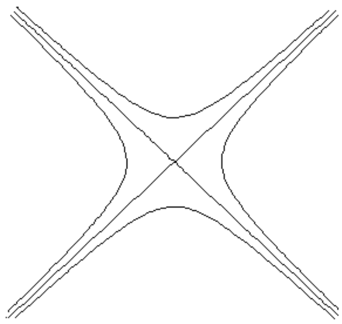


$a/b=1$

гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

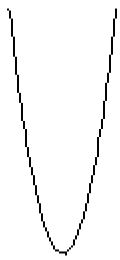


Неравнобедренная (неравносторонняя) гипербола ($a/b=\sqrt{2}$)

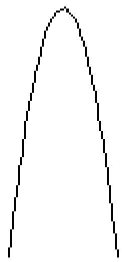


Равнобедренная (равносторонняя) гипербола ($a/b=1$)

парабола $y^2=2px$



Восходящая парабола



Нисходящая парабола

При анализе данных кривых часто представляет интерес приведение уравнений кривых второго порядка общего вида к канонической форме или его восстановление по его известным параметрам. Далее рассмотрим несколько таких примеров.

<u>Пример 51</u>

Найдём каноническое уравнение эллипса, если

1) расстояние между фокусами $2c$ равно 8, а длина его малой полуоси b равна 3 (здесь и далее будем считать, что большая полуось совпадает с осью абсцисс, малая полуось совпадает с осью ординат, фокусы расположены на оси абсцисс);
2) длина большой полуоси a равна 6, а эксцентриситет ε равен 0,5;
3) эллипс проходит через точки $M_1\left(2;\sqrt{3}\right)$ и $M_2(0;2)$.

Для нахождения длины большой полуоси a в первой части задачи воспользуемся соотношением $c=\sqrt{a^2-b^2}$, связывающим расстояние от начала координат до одного из фокусов эллипса с длинами его полуосей. Из данного соотношения следует, что $a=\sqrt{c^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$. Тогда каноническое уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Длина большой полуоси во второй части данного примера может быть вычислена с использованием определения эксцентриситета $\varepsilon=c/a$. Тогда $c=a\cdot\varepsilon=3$. Соотношение $c=\sqrt{a^2-b^2}$ позволяет получить: $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{27}\approx 5{,}20$. В окончательной форме каноническое уравнение эллипса представимо в следующей форме

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Каноническое уравнение эллипса, проходящее через две заданные точки, может быть определено путём подстановки координат данных точек в каноническое уравнение кривой, что приводит к следующей системе уравнений для длин полуосей

$$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\\ \dfrac{4}{b^2}=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}a^2=\dfrac{4b^2}{\left(b^2-3\right)}.\\ b^2=4\end{cases}$$

Тогда $b=2$, $a=4$ и

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Пример 52

Найдём каноническое уравнение гиперболы при следующих условиях:

1) расстояние между фокусами $2c=10$, а между вершинами $2a=8$;
2) длина действительной полуоси a равна $2\sqrt{5}$, а эксцентриситет гиперболы ε равен $\sqrt{1{,}2}$;
3) гипербола проходит через точку $M\left(6;-2\sqrt{2}\right)$, а длина мнимой полуоси равна $b=2$.

Найдём также углы между асимптотами гиперболы для каждого из рассмотренных случаев. Для этого сначала определим расстояние между фокусами, вещественная a и мнимая b полуоси связаны соотношением $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда $b^2=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3$, что приводит к каноническому уравнению гиперболы в следующей форме

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}=1.$$

Уравнения асимптот данной гиперболы могут быть определены с помощью следующего соотношения, т.е. $y=\pm bx/a$. Угол между асимптотами для первой части данного примера также определяется с помощью стандартного соотношения для

угла между прямыми: $tg(\alpha)=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{2b/a}{1-b^2/a^2}\approx 1{,}066$, где k_i - угловые коэффициенты асимптот. Такому значению тангенса соответствует угол в $46{,}83^{\circ}$.
Далее найдем каноническое уравнение гиперболы. Для этого во второй части данного примера воспользуемся определением эксцентриситета гиперболы, т.е. $\varepsilon = c/a$. Тогда $c=a\cdot\varepsilon=2\sqrt{6}$. Из соотношения $c=\sqrt{a^2+b^2}$ можно получить $b^2=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{24-20}=4$. Таким образом, каноническое уравнение гиперболы для второй части данного примера имеет вид

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Уравнения асимптот такой гиперболы определяются соотношением: $y=\pm\sqrt{5}x$.
Тангенс угла между асимптотами для первой части данного примера равен $tg(\alpha)=\sqrt{5}/2\approx 1{,}12$, что примерно соответствует углу в $48{,}19^{\circ}$. В третьей части данного примера в каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Подставим значения координат точки M и длины мнимой полуоси b, что приводит к следующему результату

$$\frac{36}{a^2}-\frac{8}{4}=1.$$

Тогда a^2=12. В окончательной форме уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Асимптоты данной гиперболы описываются следующим уравнением: $y=\pm x/\sqrt{3}$.
Тангенс угла между этими прямыми и угол соответственно равны $tg(\alpha)=\sqrt{3}\approx 1{,}73$ и 60°.

Пример 53

Найдём каноническое уравнение параболы при следующих условиях:
1) линия проходит через точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,-3)$ и симметрична относительно оси Ox или Oy;
2) точки, расположенные на гиперболе, одинаково удалены от её фокуса $F(0,2)$ и прямой y=4.

Для нахождения канонического уравнения параболы, симметричной относительно оси Ox, в первой части данного примера подставим в искомое уравнение $y^2=2p_1x$ с неизвестным пока фокальным параметром p_1 координаты точки M_2, что приводит к следующему результату

$$(-3)^2=2p_1\Rightarrow p_1=4{,}5.$$

Аналогично находим значение фокального параметра и для параболы, симметричной относительно оси *Oy*. В данном случае каноническое уравнение параболы имеет вид: $x^2=2p_2y$. Тогда

$$1^2=(-3)p_2\Rightarrow p_2=-1/3.$$

С учётом вычисленных значений фокальных параметров искомые канонические уравнения парабол, симметричных относительно осей *Ox* и *Oy*, могут быть представлены соответственно в следующих формах

$$y^2=9x \text{ и } x^2=-y/3.$$

Во второй части данного примера фокус имеет координаты $F(0,2)$, а уравнение директрисы $y=4$. С другой стороны вершина параболы находится на одинаковом расстоянии от фокуса и директрисы. По этой причине вершина параболы расположена на расстоянии $y_0=(4+2)/2=3$ от начала координат. Тогда каноническое уравнение параболы представимо в форме $y=a\,x^2+3$. Фокальный параметр a найдём из определения гиперболы. Согласно определению параболы расстояние от любой точки кривой до фокуса и директрисы должно быть одинаковым. Знак параметра a пока неизвестен, т.е. он может быть или положительным, или отрицательным. На первом этапе рассмотрим случай $a<0$. Для упрощения расчёта параметра a выберем пару точек на оси абсцисс $M_1(x_0,0)$ и $M_2(-x_0,0)$, симметричную относительно начала координат, и будем рассматривать эти точки как точки пересечения ветвей параболы с осью ординат. Далее рассмотрим два расстояния: от точки $M_1(x_0,0)$ до фокуса $F(0,2)$ и от точки $M_1(x_0,0)$ до директрисы $y=4$ (т.е. до точки $(x_0,4)$). Данные расстояния могут быть определены с помощью соотношения $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, где (x_1,y_1) и (x_2,y_2) - координаты точек, между которыми определяется расстояние. Подстановка координат точек $(x_0,0)$, $F(0,2)$ и $(x_0,4)$ в данное соотношение с учётом равенства расстояний между соответствующими парами точек позволяет получить: $\sqrt{(x_0-0)^2+(2-0)^2}=$ $=\sqrt{(x_0-x_0)^2+(4-0)^2}$. Тогда $x_0=\sqrt{12}$. С учётом значений координат точки M_1 из уравнения параболы получаем уравнение для искомого фокального параметра: $0=12a+3$. Из данного уравнения следует, что $a=-1/4$. В окончательной форме каноническое уравнение параболы принимает вид

$$y^2=3-x^2/4.$$

Преобразование уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

Целью преобразования уравнений кривых второго порядка к каноническому виду является переход к такой системе координат, в которой уравнение кривой второго порядка $A\,x^2+Bx\,y+Cy^2+D\,x+E\,y+F=0$ максимально бы упростилось. Используются два вида преобразования

1) параллельный перенос системы координат. В данном случае вместо старых координат x, y и z используются новые x', y' и z'. Прямое преобразование параллельного переноса декартовых координат определяется следующими соотношениями:

$$x = x' + a;\; y = y' + b,$$

где a и b - координаты нового начала в старых координатах. Обратное преобразование имеет вид

$$x' = x - a;\; y' = y - b,$$

2) поворот осей системы координат на угол φ. Прямое и обратное преобразования координат в таком случае могут быть представлены в следующей форме

$$x = x'\cos(\varphi) - y'\sin(\varphi),\; y = x'\sin(\varphi) - y'\cos(\varphi);$$

$$x' = x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi),\; y' = -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi).$$

Далее рассмотрим пример преобразования уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Пример 54

Приведём к каноническому виду уравнение

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0.$$

На первом этапе сделаем преобразование параллельного переноса. Перенесём начало координат в точку $S(a,b)$, координаты которой будем пока считать произвольной. Тогда получаем следующее преобразование координат

$$x = x' + a;\; y = y' + b.$$

Подстановка такого преобразования в левую часть анализируемого уравнения линии второго порядка и незначительные арифметические преобразования позволяют получить

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0 \Leftrightarrow 17(x'+a)^2 + 12(x'+a)(y'+b) + 8(y'+b)^2 -$$

$$-46(x'+a) - 28(y'+b) + 17 = 0 \Leftrightarrow 17\left(x'^2 + 2x'a + a^2\right) + 12(x'y' + ay' + bx' + ab) + 17 +$$

$$+8\left(y'^2 + 2y'b + b^2\right) - 46(x'+a) - 28(y'+b) = 0 \Leftrightarrow 17x'^2 + 12x'y' + 8y'^2 + x'(34a +$$

$$+12b - 46) + y'(12a + 16b - 28) + 17a^2 + 12ab + 8b^2 - 46a - 28b + 17 = 0.$$

Координаты a и b подбираем таким образом, чтобы обратились в нуль линейные по x и y члены. Тогда должны выполняться условия

$$34a + 12b - 46 = 0,\; 12a + 16b - 28 = 0.$$

Решением такой системы уравнений являются следующие значения координат a и b: $a = b = 1$. Свободный член определяется после преобразования соотношением

$$F' = 17a^2 + 12ab + 8b - 46a - 28b + 17 = -20.$$

После такого параллельного переноса уравнение рассматриваемой кривой второго порядка имеет вид

$$17x'^2 + 12x'y' + 8y'^2 - 20 = 0.$$

Далее произведём поворот перенесённых осей на некоторый угол φ. Подстановка прямого преобразования поворота в модифицированное параллельным переносом уравнение рассматриваемой кривой и последовательные преобразования позволяют получить

$$17x'^2+12x'y'+8y'^2-20=0 \Leftrightarrow 17\left[x''\cos(\varphi)-y''\sin(\varphi)\right]^2+12\left[x''\cos(\varphi)-y''\sin(\varphi)\right]\times$$

$$\times\left[x''\sin(\varphi)-y''\cos(\varphi)\right]+8\left[x''\sin(\varphi)-y''\cos(\varphi)\right]^2-20=0 \Leftrightarrow 17\left[x''^2\cos^2(\varphi)-2x''y''\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\varphi)\cos(\varphi)+y''^2\sin^2(\varphi)\right]+12\left[x''^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)-x''y''+y''^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right]-20+$$

$$+8\left[x''^2\sin^2(\varphi)-2x''y''\sin(\varphi)\cos(\varphi)+y''^2\cos^2(\varphi)\right]=0 \Leftrightarrow x''^2\left[12\sin(\varphi)\cos(\varphi)+8+\right.$$

$$\left.+9\cos^2(\varphi)\right]-x''y''\left[50\sin(\varphi)\cos(\varphi)-12\right]+y''^2\left[9\sin^2(\varphi)+12\sin(\varphi)\cos(\varphi)+8\right]-20=0.$$

Далее выберем угол φ так, чтобы коэффициент при $x''y''$ обратился в нуль. Для определения такого значения угла решим следующее уравнение

$$50sin(\varphi)cos(\varphi)+12=0.$$

Данное уравнение преобразуем к следующему виду

$$sin(2\varphi)=-12/25.$$

Данное уравнение имеет следующее решение: $\varphi_0=-arcsin(12/25)+2\pi n\approx-28{,}69°+2\pi n$, где n - целое число. В окончательной форме (с учётом параллельного переноса системы координат в точку $S(1,1)$, поворота системы координат на угол $\varphi_0=-arcsin(12/25)$ и незначительных тригонометрических преобразований) получаем, что искомое каноническое уравнение (в данном случае - эллипса) имеет вид

$$\frac{x''^2}{1000}\left(769+\sqrt{481}\right)+\frac{y''^2}{1000}\left(769-\sqrt{481}\right)=1.$$

<u>Полярное уравнение эллипса, гипербола и параболы</u>

От рассмотренных ранее уравнений в декартовых координат x и y перейдём далее к полярным координатам $x=r\,cos(\varphi)$ и $y=r\,sin(\varphi)$. Может быть показано, что уравнение эллипса, параболы и одной из ветвей гиперболы может быть представлено в следующем виде:

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)},$$

где p - фокальный параметр (для эллипса и гиперболы $p=b^2/a$), ε - эксцентреситет.

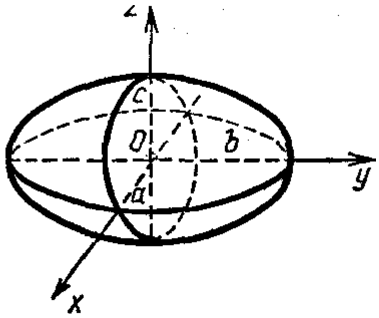
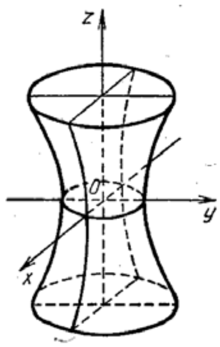
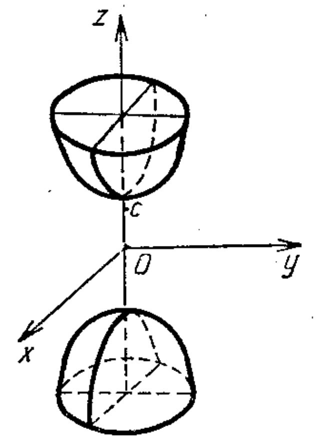
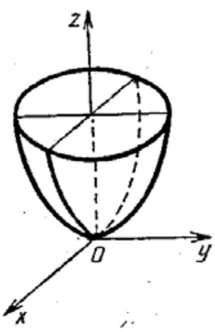
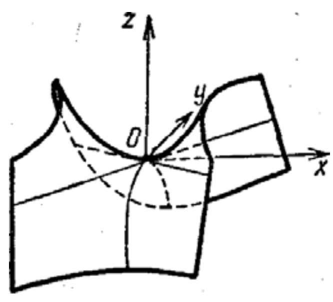
15.5. *Поверхности второго порядка*

<u>Определение 22</u>

Рассмотрим следующее уравнение

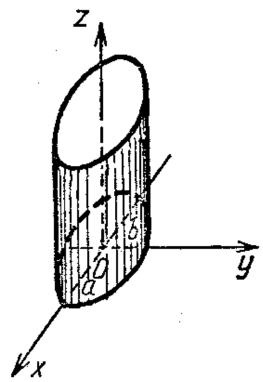
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Ez^2+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

Поверхность, описываемая таким уравнением, называется поверхностью второго порядка. В качестве основных поверхностей второго порядка можно выделить следующие

Каноническое уравнение поверхности	Название поверхности	Вид поверхности
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Эллипсоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однополостный гипербо-лоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двухполостный гипербо-лоид	
$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q},$	Эллиптический параболо-ид	
$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}$	Гиперболический парабо-лоид	

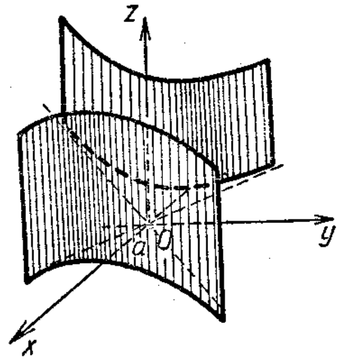
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Эллиптический цилиндр



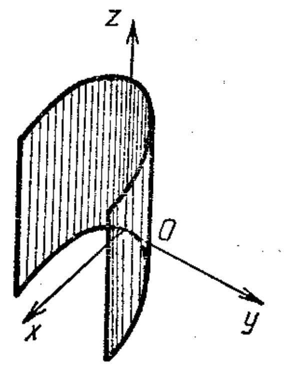
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Гиперболический цилиндр



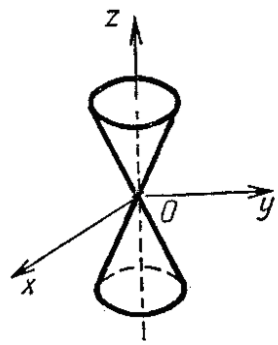
$$y^2=2px$$

Параболический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Конус



Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду и восстановление канонического уравнения по известным параметрам проводится аналогично, как и в случае кривых второго порядка. Однако построение поверхностей второго порядка является более трудоёмким, чем построение плоских кривых. Далее рассмотрим пример такого построения.

Пример 55

Рассмотрим эллиптический параболоид. Такая поверхность в декартовой системе координат определяется следующим уравнением (при положительных значениях p и q)

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}.$$

Построим данную поверхность методом сечений. На первом этапе рассмотрим сечения эллиптического параболоида плоскостью $y=h$. Такое сечение определяется уравнениями

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{h^2}{q} \\ y = h \end{cases}$$

Из данного соотношения следует, что сечение представляет собой восходящую параболу, расположенную симметрично относительно оси Oz с вершиной в точке $M_1(0,h^2/2q)$. Параметр этой параболы равен $1/2p$. Сечение плоскостью $x=h$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{h^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} \\ x = h \end{cases}$$

Таким образом, сечение представляет собой восходящую параболу, расположенную симметрично относительно оси Oz с вершиной в точке $M_1(0,h^2/2p)$. Параметр этой параболы равен $1/2q$. Сечение плоскостью $z=h$ определяется следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases}$$

Из данной системы следует, что

1) при $h>0$ рассматриваемая секущая плоскость эллиптического параболоида является эллипсом с полуосями $a^* = \sqrt{2hp}$ и $b^* = \sqrt{2hq}$, расположенным симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz;
2) величины a^* и b^* имеют наименьшие значения при $h=0$ (тогда $a^*=0$, $b^*=0$, эллипс вырождается в точку);
3) при бесконечном возрастании $|h|$ величины a^* и b^* бесконечно возрастают, а при отрицательном h сечение определяется мнимым эллипсом.

15.5. Векторы

Определение 23

Вектор - направленный отрезок, то есть отрезок, у которого указаны начало (точка приложения вектора) и конец. Обычно вектор обозначается как $\vec{a}$ или $\boldsymbol{a}$.

Линейные операции над векторами

Определение 24

Векторной суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, соответствующий геометрической сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 14). Данный способ сложения называется правилом параллелограмма.

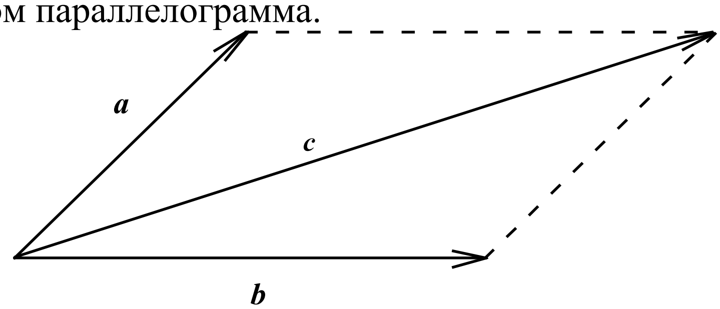


Рис. 14. Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Определение 25

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ является вектор, длина которого отличается от длины вектора $\vec{a}$ в $|\lambda|$ раз. В случае положительного λ новый вектор направлен в ту же сторону, что и исходный вектор. В случае отрицательного λ новый вектор направлен в противоположную по отношению к исходному вектору сторону (см. рис. 15).

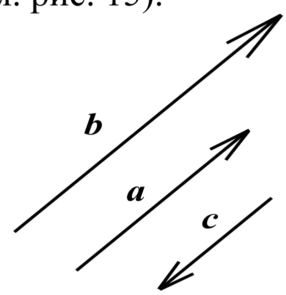


Рис. 15. Произведения вектора на число $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}$, $\alpha>1$ и $\vec{c} = \lambda_2\ \vec{a}$, $-1<\beta<0$.

Определение 26

m векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_m$ линейно независимы, если из равенства

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ... + \lambda_m\vec{e}_m = 0$$

следует равенство

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0.$$

В противном случае векторы линейно зависимы. Любой вектор $\vec{a}$ m-мерного пространства может быть разложен по m линейно независимым векторам, т.е. может быть представлен в виде их линейной комбинации

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + ... + a_m \vec{e}_m .$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называются координатами вектора $\vec{a}$ по отношению к базису, определённому векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_m$. Если базисная система задана, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, … представляются упорядоченными системами координат $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, … При этом $\vec{a} + \vec{b}$ и $\alpha \vec{a}$ представляются соответственно наборами координатами $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_m+b_m$ и $\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_m$.

Пример 56

На плоскости xOy даны точки $A(4;2)$, $B(2;3)$ и $C(0;5)$, где $O(0,0)$ - начало координат. Разложим вектор $\overset{\to}{OA}$ по векторам $\overset{\to}{OB}$ и $\overset{\to}{OC}$. Запишем данные вектора в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат с единичными векторами (ортами) $\vec{i}$ и $\vec{j}$ по осям соответственно $O\,x$ и $O\,y$: $\overset{\to}{OA} = (4-0)\vec{i} +$ $+(2-0)\vec{j}$, $\overset{\to}{OB} = (2-0)\vec{i} + (3-0)\vec{j}$, $\overset{\to}{OC} = (5-0)\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - единичные вектора (орты) вдоль осей абсцисс и ординат, единичный вектор вдоль оси аппликат обозначается $\vec{k}$. Поскольку вектор $\overset{\to}{OA}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overset{\to}{OB}$ и $\overset{\to}{OC}$, тогда $\overset{\to}{OA} = \lambda_1 \cdot \overset{\to}{OB} + \lambda_2 \cdot \overset{\to}{OC}$, где λ_1 и λ_2 - искомые коэффициенты разложения. В координатной форме последнее соотношение имеет вид

$$4\vec{i} + 2\vec{j} = \lambda_1 \cdot \left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right) + \lambda_2 \cdot 5\vec{j} .$$

Далее приравниваем друг другу коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях данного соотношения. Тогда

$$\begin{cases} 4 = 2\,\lambda_1 \\ 2 = 3\,\lambda_1 + 5\,\lambda_2 \end{cases}$$

Решением такой системы являются следующие значения коэффициентов α и β: λ_1=2 и λ_2=-0,8. Таким образом, можно записать

$$\overset{\to}{OA} = 2 \cdot \overset{\to}{OB} - 0{,}8 \cdot \overset{\to}{OC} .$$

Скалярное произведение векторов

Определение 27

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является следующий скаляр

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\varphi),$$

где $\varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из данного соотношения следует, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимноперпендикулярны тогда и только тогда, когда $(\vec{a},\vec{b})=0$. Скалярное произведение представимо также в следующем виде

$$(\vec{a},\vec{b}) = a\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = b\cdot np_{\vec{b}}\vec{a},$$

где $np_{\vec{a}}\vec{b} = b\cdot\cos(\gamma)$ проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = a\cdot\cos(\gamma)$ проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

<u>*Свойства скалярного произведения*</u>

Векторные соотношения

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a});\ (\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c});\ (\lambda\,\vec{a},\vec{b}) = \lambda\,(\vec{b},\vec{a});\ (\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \ge 0;$$

$$|(\vec{a},\vec{b})| \le |\vec{a}||\vec{b}|,$$

где $|\vec{a}|$ - длина (модуль) вектора $\vec{a}$, α - скаляр.

Выражения в прямоугольных декартовых координатах

$$(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1;\ (\vec{i},\vec{j}) = (\vec{j},\vec{k}) = (\vec{k},\vec{i}) = 0;\ a_x = (\vec{a},\vec{i});\ a_y = (\vec{a},\vec{j});$$

$$a_z = (\vec{a},\vec{k});\ (\vec{a},\vec{b}) = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

где a_x, a_y и a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy и Oz декартовой системы координат. Отношения данных проекций и модуля вектора $\vec{a}$

$$\cos(\alpha) = a_x/|\vec{a}|,\ \cos(\beta) = a_y/|\vec{a}|,\ \cos(\gamma) = a_z/|\vec{a}|$$

называют направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ (α, β и γ - углы между вектором $\vec{a}$ и осями Ox, Oy и Oz декартовой системы координат). В двухмерном случае используются следующие отношения проекций и модуля вектора $\vec{a}$

$$\cos(\alpha) = a_x/|\vec{a}|,\ \sin(\alpha) = a_y/|\vec{a}|,$$

где α - угол между вектором $\vec{a}$ и осью абсцисс.

<u>Пример 57</u>

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a} = 4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i}+6\vec{j}+11\vec{k}$. Вычислим искомое произведение с помощью определения скалярного произведения и второго из его перечисленных свойств позволяет получить

$$(\vec{a},\vec{b}) = (4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k})\cdot(2\vec{i}+6\vec{j}+11\vec{k}) = 8+42+33 = 83.$$

Пример 58

Даны точки $A(a;0;0)$ и $B(0;0;2a)$. Найдём расстояние между ними. Такая задача может быть сведена к задаче о нахождении длины вектора $\overrightarrow{AB} = -a \cdot \vec{i} + 2a \cdot \vec{k}$. Определим данную длину с помощью стандартного соотношения, т.е.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2} = \sqrt{a^2\left(\vec{i},\vec{i}\right) + 4a^2\left(\vec{k},\vec{k}\right)} = a\sqrt{5}\,.$$

Векторное произведение векторов

Определение 68

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a},\vec{b}\right],$$

модуль которого равен

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi),$$

а его направление перпендикулярно перемножаемым векторам и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ на угол, меньший π (см. рис. 3). Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется правой. Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $-\vec{c}$ называется левой. Два вектора параллельны друг другу (линейно зависимы) тогда, когда их векторное произведение равно нулю.

Свойства векторного произведения

Основные соотношения

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right];\ \left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right] + \left[\vec{a},\vec{c}\right];\ \left[(\alpha\,\vec{a}),\vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right];\ \left[\vec{a},\vec{a}\right] = 0\,.$$

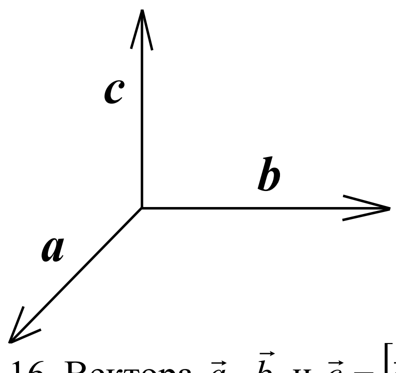


Рис. 16. Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Выражения в любом базисе векторов (*любой системе координат*) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a} = \alpha_1\,\vec{e}_1 + \alpha_2\,\vec{e}_2 + \alpha_3\,\vec{e}_3;\ \vec{b} = \beta_1\,\vec{e}_1 + \beta_2\,\vec{e}_2 + \beta_3\,\vec{e}_3;\ \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \left[\vec{e}_2\,\vec{e}_3\right] & \alpha_1 & \beta_1 \\ \left[\vec{e}_3\,\vec{e}_1\right] & \alpha_2 & \beta_2 \\ \left[\vec{e}_1\,\vec{e}_2\right] & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Выражения в прямоугольных декартовых координатах

$$\left[\vec a,\vec b\right]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\vec i\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-$$

$$-\vec j\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\vec k\left(a_xb_y-a_yb_x\right);\ \left[\vec i,\vec i\right]=\left[\vec j,\vec j\right]=\left[\vec k,\vec k\right]=0;\ \left[\vec i,\vec j\right]=\vec k\ ;\ \left[\vec k,\vec j\right]=\vec i\ ;\ \left[\vec k,\vec i\right]=\vec j\ .$$

Пример 59

Определим вектор $\vec c=\vec a\times\vec b=\left[\vec a,\vec b\right]$, если: $\vec a=3\vec i$, $\vec b=2\vec k$. Один из способов нахождения вектора $\vec c$ заключается в применении стандартного определения, в рамках которого данный вектор перпендикулярен векторам $\vec a$ и $\vec b$ и составляет с ними правую тройку векторов. Тогда

$$\vec c=3\vec i\times 2\vec k=6\left[\vec i,\vec k\right]=-6\,\vec j\ .$$

Вычислим вектор $\vec c$ с помощью определителя. Тогда

$$\left[\vec a,\vec b\right]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0\cdot\vec i-6\cdot\vec j+0\cdot\vec k=-6\,\vec j\cdot$$

Смешанное (векторно-скалярное) произведение векторов

Определение 28

Смешанное произведение трёх векторов $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ является скаляром, определяемым с помощью следующего соотношения

$$d=\left(\vec a,\left[\vec b\,\vec c\right]\right).$$

Свойства смешанного произведения

Основные соотношения

$$\left(\vec a,\left[\vec b,\vec c\right]\right)\equiv\left(\vec b,\left[\vec c,\vec a\right]\right)\equiv\left(\vec c,\left[\vec a,\vec b\right]\right)\equiv-\left(\vec b,\left[\vec a,\vec c\right]\right)\equiv-\left(\vec c,\left[\vec b,\vec a\right]\right)\equiv-\left(\vec a,\left[\vec c,\vec b\right]\right),$$

$$\left(\vec a,\left[\vec b,\vec c\right]\right)^2\equiv\left(\vec a,\vec a\right)\cdot\left(\vec b,\vec b\right)\cdot\left(\vec c,\vec c\right)-\left(\vec a,\vec a\right)\cdot\left(\vec b,\vec c\right)\cdot\left(\vec b,\vec c\right)-\left(\vec b,\vec b\right)\cdot\left(\vec c,\vec a\right)\cdot\left(\vec c,\vec a\right)-$$

$$-\left(\vec c,\vec c\right)\cdot\left(\vec a,\vec b\right)\cdot\left(\vec a,\vec b\right)+2\left(\vec a,\vec b\right)\cdot\left(\vec b,\vec c\right)\cdot\left(\vec c,\vec a\right)=\begin{vmatrix}\left(\vec a,\vec a\right) & \left(\vec a,\vec b\right) & \left(\vec a,\vec c\right)\\ \left(\vec b,\vec a\right) & \left(\vec b,\vec b\right) & \left(\vec b,\vec c\right)\\ \left(\vec c,\vec a\right) & \left(\vec c,\vec b\right) & \left(\vec c,\vec c\right)\end{vmatrix}\cdot$$

Данный определитель называется определителем Грамма. Если $\vec{c}=\vec{a}$ или $\vec{c}=\vec{b}$, то перестановкой векторов в смешанном произведении можно получить, что d=0.

Выражения в любом базисе векторов (*любой системе координат*) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3;\ \vec{b}=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\beta_3\vec{e}_3;\ \vec{c}=\gamma_1\vec{e}_1+\gamma_2\vec{e}_2+\gamma_3\vec{e}_3,$$

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\left(\vec{e}_1,\left[\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]\right).$$

Выражение в прямоугольных декартовых координатах

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}.$$

Данный определитель положителен, если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - правая тройка, и отрицателен в противоположном случае. Равенство нулю определителя показывает компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (т.е. вектора лежат в одной плоскости).

Пример 60

Определим смешанное произведение d векторов $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$. Для этого вычислим определитель

$$d=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot(-15-2)-4\cdot0+0=-51.$$

Отрицательное значение определителя свидетельствует о том, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку.

Пример 61

Покажем, что векторы $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ и $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ компланарны и разложим вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для этого вычислим смешанное произведение данных векторов

$$d=\left(\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 12 & 6\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & 6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 12\end{vmatrix}$$

$$=-\left[(-3)\cdot6-(-4)\cdot12\right]-3\cdot\left[2\cdot6-(-4)\cdot(-3)\right]+2\cdot\left[2\cdot12-(-3)\cdot(-3)\right]=$$

$$=-(-18+48)-3\cdot(12-12)+2\cdot(24-9)=-30-0+30=0.$$

Полученное значение смешанного произведения подтверждает компланарность рассмотренных векторов. Далее разложим вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для решения второй части данной задачи представим вектор $\vec{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$$

и определим коэффициенты разложения λ_1 и λ_2. Подстановка векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в последнее соотношение позволяет получить

$$-3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} = \lambda_1 \cdot \left(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right) + \lambda_2 \cdot \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}\right).$$

Приравнивание коэффициентов при векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ в левой и правой частях данного уравнения приводит к следующей системе уравнений для коэффициентов λ_1 и λ_2

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = -3 \\ 3\alpha + 3\beta = 12 \\ 2\alpha - 4\beta = 6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - 2\beta = 3 \end{cases}.$$

Решение первых двух уравнений позволяет получить: λ_1=5, λ_2=1. При этом третье уравнение системы удовлетворяется. Таким образом, можно записать

$$\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}.$$

Геометрические приложения векторной алгебры

1) Длина вектора $\vec{a}$ может быть определена с помощью скалярного умножения данного вектора самого на себя и последующего извлечения квадратного корня из полученного соотношения, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}.$$

В декартовой системе координат, когда $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, данное соотношение имеет следующий вид

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

<u>Пример 62</u>

Найдём длину вектора $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Для решения данной задачи умножаем вектор скалярно на самого себя и извлекаем из полученного соотношения квадратный корень, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)} =$$

$$= \sqrt{(\vec{i},\vec{i}) - 6(\vec{i},\vec{j}) - 4(\vec{i},\vec{k}) + 9(\vec{j},\vec{j}) + 12(\vec{j},\vec{k}) + 4(\vec{k},\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{1 - 6\cdot 0 - 4\cdot 0 + 9 + 12\cdot 0 + 4} = \sqrt{14} \approx 3{,}74\,.$$

2) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть определён с помощью соотношения

$$\cos(\varphi) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})}},$$

которое следует из определения скалярного произведения 3.5. В декартовой системе координат такое выражение имеет вид

$$\cos(\varphi) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}.$$

Пример 63

Вернёмся к векторам, рассмотренным в Примере 2, т.е. $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k}$. Скалярное произведение данных векторов, согласно Примеру 2, равно 83. Найдём длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по аналогии с предыдущим примером. Тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{(4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}, 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{16(\vec{i},\vec{i}) + 56(\vec{i},\vec{j}) + 24(\vec{i},\vec{k}) + 49(\vec{j},\vec{j}) + 42(\vec{j},\vec{k}) + 9(\vec{k},\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{16 + 56\cdot 0 + 24\cdot 0 + 49 + 42\cdot 0 + 9} = \sqrt{74} \approx 8{,}60\,.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k}, 2\vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{4(\vec{i},\vec{i}) + 24(\vec{i},\vec{j}) + 44(\vec{i},\vec{k}) + 36(\vec{j},\vec{j}) + 132(\vec{j},\vec{k}) + 121(\vec{k},\vec{k})} =$$

$$= \sqrt{4 + 24\cdot 0 + 44\cdot 0 + 36 + 132\cdot 0 + 121} = \sqrt{161} \approx 12{,}69\,.$$

Далее подставим значения скалярного произведения и модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в соответствующее соотношение для косинуса угла между векторами, что приводит к следующему результату

$$\cos(\varphi) = \frac{83}{\sqrt{74\cdot 161}} \approx 0{,}76\,.$$

Данному значению косинуса соответствует угол

$$\varphi \approx 45{,}04^\circ = 45^\circ 2'24''.$$

Пример 64

Даны два вектора $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 60°. Найдём угол между данными векторами. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также их длины соответственно равны

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m} - 3\vec{n}\right) = 3\left(\vec{m},\vec{m}\right) + 4\left(\vec{n},\vec{m}\right) - 9\left(\vec{n},\vec{m}\right) - 12\left(\vec{n},\vec{n}\right) =$$

$$= 3|\vec{m}|^2 - 5|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right) - 12|\vec{n}|^2 = 3 - 2{,}5 - 12 = 12{,}5,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right)\cdot\left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right)} = \sqrt{9|\vec{m}|^2 + 24|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right) + 16|\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{9|\vec{m}|^2 + 24|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right) + 16|\vec{n}|^2} = \sqrt{9 + 12 + 16} = \sqrt{37} \approx 6{,}08,$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{m} - 3\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m} - 3\vec{n}\right)} = \sqrt{|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right) + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{1 - 3 + 9} = \sqrt{7} \approx 2{,}65.$$

Далее определим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с помощью стандартного соотношения

$$\cos(\varphi) = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{12{,}5}{\sqrt{259}} \approx 0{,}78$$

Тогда

$$\gamma \approx 38{,}74°.$$

3) Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 4). Площадь данного параллелограмма численно равна модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$S_p = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

В декартовой системе координат данное соотношение принимает вид

$$S_p = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине площади параллелограмма (см. рис. 4)

$$S_t = S_p/2.$$

Пример 65

Определим площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, а также длину высоты параллелограмма, опущенной на вектор $\vec{a}$. На первом этапе с помощью стандартных операций векторного умножения двух векторов и вычисления модуля вектора определим площадь параллелограмма, т.е.

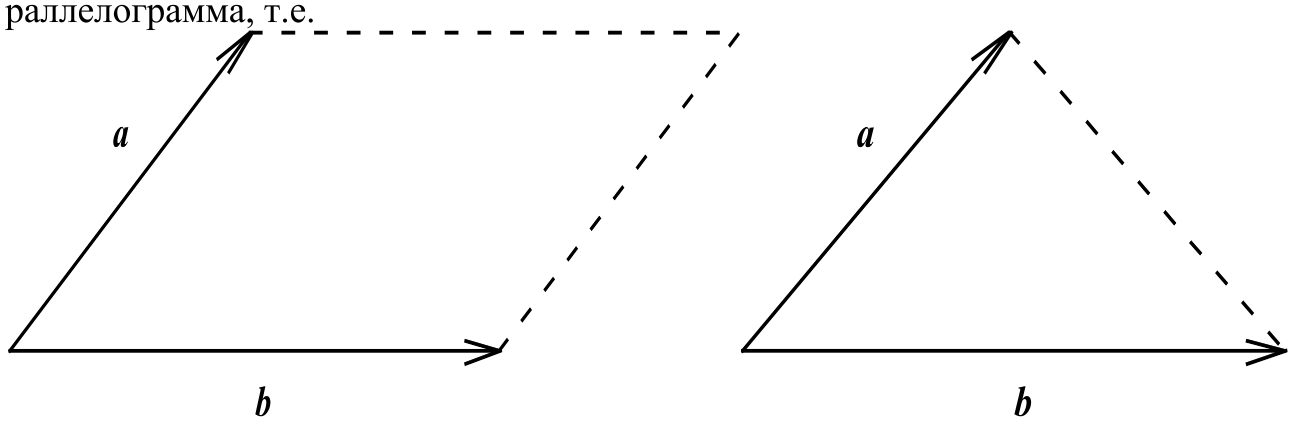


Рис. 17. Параллелограмм и треугольник, построенные на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{c}=\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left[\vec{i}+\vec{j},\vec{i}-\vec{j}\right]=\left[\vec{i},\vec{i}\right]+\left[\vec{j},\vec{i}\right]-\left[\vec{i},\vec{j}\right]-\left[\vec{j},\vec{j}\right]=0-2\left[\vec{i},\vec{j}\right]-0=-2\vec{k},$$

$$S_p=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\sqrt{0^2+0^2+2^2}=2.$$

Площадь треугольника также найдём с помощью соотношения S_t=S_p/2. В данном случае площадь треугольника равна S_t=1. Длина высоты параллелограмма может быть вычислена как отношение площади параллелограмма к длине стороны, на которую опускается высота, т.е. $h=S_p\big/\left|\vec{a}\right|$. Тогда

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{i}+\vec{j}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

что позволяет получить

$$h=2\big/\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

<u>Пример 66</u>

Вернёмся к векторам, рассмотренным в Примере 9, и определим площади параллелограмма и треугольника, построенных на данных векторах. На первом этапе с помощью стандартных операций векторного умножения двух векторов и вычисления модуля вектора определим площадь параллелограмма, т.е.

$$\vec{c}=\left(3\vec{m}+4\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-3\vec{n}\right)=3\left(\vec{m},\vec{m}\right)+4\left(\vec{n},\vec{m}\right)-9\left(\vec{m},\vec{n}\right)-12\left(\vec{n},\vec{n}\right)=$$

$$=3\left[\vec{m},\vec{m}\right]-13\left[\vec{m},\vec{n}\right]-12\left[\vec{n},\vec{n}\right]=3\cdot 0-13\cdot\left[\vec{m},\vec{n}\right]-2\cdot 0=-13\cdot\left[\vec{m},\vec{n}\right],$$

$$S_p=\left|-13\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=13\left|\left[\vec{m},\vec{n}\right]\right|=13\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\sin\left(\gamma\right)\approx 11{,}26.$$

Площадь треугольника также найдём с помощью соотношения S_t=S_p/2. В данном случае площадь треугольника равна S_t≈5,63. Длина высоты параллелограмма может быть вычислена как отношение площади параллелограмма к длине стороны, на которую опускается высота, т.е. $h = S_p / |\vec{a}|$. Тогда

$$|\vec{a}| = |(3\vec{m} + 4\vec{n})| = \sqrt{(3\vec{m} + 4\vec{n}) \cdot (3\vec{m} + 4\vec{n})} = \sqrt{9(\vec{m}, \vec{m}) + 24(\vec{m}, \vec{n})\cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + 16(\vec{n}, \vec{n})} =$$

$$= \sqrt{9 + 12 + 16} = \sqrt{37} \approx 6{,}08,$$

что позволяет получить

$$h \approx \frac{5{,}63}{6{,}08} \approx 0{,}93.$$

4) Объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, численно равен смешанному произведению данных векторов или его модулю для левой тройки векторов с коэффициентом 1/6, т.е.

$$V_{pyr} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]\right)\right|.$$

В декартовой системе координат данное соотношение принимает вид

$$V_{pyr} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Знак перед определителем выбирается в зависимости от того, правой или левой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

<u>Пример 67</u>

Даны вершины пирамиды A(2,-1,2), B(5,2,0), C(2,5,0) и D(1,2,4). Найдём объём пирамиды, площадь грани ABC и длину высоты, опущенной на эту грань.

Для вычисления площади грани ABC с помощью векторного произведения необходимо определить любые два из трёх векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{BC}$. Для вычисления объёма пирамиды необходимо определить любые три некомпланарных вектора, соединяющие вершины пирамиды. По этой причине на первом этапе найдём необходимые вектора. Для нашего случая вычисление проекций векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ приводит к следующему результату: т.е. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} +$ $+ 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 6\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Далее площадь треугольника ABC и объём пирамиды $ABCD$ определим с помощью стандартных соотношений, включающих в себя соответственно векторное и смешанное произведения векторов, т.е.

$$S_p = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{AB}\right)_y & \left(\overrightarrow{AB}\right)_z \\ \left(\overrightarrow{AC}\right)_y & \left(\overrightarrow{AC}\right)_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{AB}\right)_z & \left(\overrightarrow{AB}\right)_x \\ \left(\overrightarrow{AC}\right)_z & \left(\overrightarrow{AC}\right)_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{AB}\right)_x & \left(\overrightarrow{AB}\right)_y \\ \left(\overrightarrow{AC}\right)_x & \left(\overrightarrow{AC}\right)_y \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{324 + 36 + 324} = \sqrt{684} \approx 21{,}15.$$

$$V_{pyr} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left[3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right] = \frac{18+18+36}{6}.$$

5) Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, численно равен смешанному произведению данных векторов или его модулю, если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ являются левой тройкой, т.е.

$$V_{par} = \left|\left(\vec{c}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right)\right|.$$

В декартовой системе координат данное соотношение принимает вид

$$V_{par} = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Знак перед определителем выбирается в зависимости от того, правой или левой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Пример 68

Вычислим объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Правой или левой будет тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Для вычисления объёма найдём смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Искомое произведение может быть определено с помощью стандартного определителя

$$\left(\vec{c}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Подстановка проекций векторов в данное соотношение позволяет получить

$$\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot(-17)=-51.$$

Таким образом, объём параллелепипеда равен $V_p = 51$, а знак значения смешанного произведения свидетельствует о том, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ левая.

<u>Пример 69</u>

Вычислим объём параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, если известны координаты вершин $A_1(2,-1,-2)$, $B_1(1,2,1)$, $C_1(2,3,0)$, $D_2(5,0,-5)$. В данном параллелепипеде вершины A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной грани параллелепипеда, а вершина D_2 - к противоположной грани; рёбра B_1B_2 и D_1D_2 являются противоположными.

Для вычисления объёма параллелепипеда необходимо определить три его ребра в различных измерениях, например A_1B_1, A_1C_1 и D_1D_2. Далее искомый объём может быть определён как смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1D_2}$. Однако, вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ известны ($\overrightarrow{A_1B_1}=-\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=4\vec{j}+2\vec{k}$), а для определения вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$ необходимо найти координаты точки D_1. Обозначим искомые координаты как x, y и z. Для определения искомых координат воспользуемся параллельностью рёбер A_1B_1 и C_1D_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, что позволяет записать следующее соотношение

$$\left[\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{C_1D_1}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 3\\ x-2 & y-3 & z-0\end{vmatrix}=0.$$

Элементы третьей строки в данном определителе являются проекциями вектора $\overrightarrow{C_1D_1}$ соответственно на оси абсцисс, ординат и аппликат. Вычисление определителя позволяет получить

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 3\\ x-2 & y-3 & z-0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 3\\ y-3 & z-0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ x-2 & z-0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ x-2 & y-3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left[3z-3(y-3)\right]-\vec{j}\left[-z-3(x-2)\right]+\vec{k}\left[-(y-3)-3(x-2)\right].$$

Условие равенства нулю данного вектора приводит к необходимости решения следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \quad\quad -3y+3z+9=0 \\ -3x \quad\quad -z+6=0 \\ -3x-y \quad\quad +9=0 \end{cases}.$$

Сокращением в уравнениях данной системы множителей, общих для всех слагаемых, преобразуем ее к более простой форме

$$\begin{cases} \quad y-z=3 \\ 3x \quad +z=6 \\ 3x+y \quad =9 \end{cases}.$$

Найдём решение этой системы по правилу Крамера. Для этого вычислим определитель матрицы, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных в левых частях соответствующих уравнений, т.е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Значение данного определителя равно нулю. Таким образом, одно из уравнений исходной системы уравнений для искомых координат является линейно зависимым от остальных. По этой причине найдём решение только первых двух уравнений, что приводит к следующему результату

$$\begin{cases} x=2-z/3 \\ y=3+z \end{cases}.$$

Подстановка полученных соотношений в третье уравнение исходной системы приводит к тождественному равенству левой и правой частей данного уравнения, что свидетельствует о правильности полученного решения исходной системы уравнений. Далее для нахождения координаты z точки D_1 воспользуемся равенством рёбер A_1B_1 и C_1D_1, что эквивалентно равенству длин векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$. Равенство рёбер может быть записано в виде

$$\sqrt{(A_1B_1)_x^2+(A_1B_1)_y^2+(A_1B_1)_z^2}=\sqrt{(C_1D_1)_x^2+(C_1D_1)_y^2+(C_1D_1)_z^2}.$$

С учётом значений координат точек A_1, B_1, C_1 и D_1 данное соотношение представимо в следующей форме

$$\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+z^2}.$$

После подстановки полученных зависимостей между x и z, а также между y и z и приведения подобных получаем

$$\sqrt{19}=\sqrt{(2-z/3-2)^2+(3+z-3)^2+z^2}\,.$$

После приведения подобных в правой части равенства получаем

$$\sqrt{19}=z\sqrt{19/9}\,.$$

Тогда $z=3$. При таком значении координаты z остальные координаты точки D_1 принимают значения $x=1$ и $y=6$, т.е. $D_1(1,6,3)$. Теперь вектор $\overrightarrow{D_1D_2}$ определён и может быть представлен в следующем виде: $\overrightarrow{D_1D_2}=4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}$.

На следующем этапе решения задачи найдём искомый объём параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1D_2}$ определяется с помощью стандартного соотношения

$$\left(\overrightarrow{D_1D_2}\cdot\left[\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1C_1}\right]\right)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 4 & -6 & -8\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}4 & 2\\ -6 & -8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & -8\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0 & 4\\ 4 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-32+12)-3\cdot(-8)+3\cdot(-16)=20+24-48=-4.$$

Таким образом, объём параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ равен 4. Альтернативным методом нахождения объёма данного параллелепипеда является вычисление объёма пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{A_1D_2}$, $\overrightarrow{B_1D_2}$ и $\overrightarrow{C_1D_2}$. Далее вычисленный объём умножается на 6.

16. Примеры применения аппарата функций многих переменных к анализу экономических процессов

В данном разделе рассматриваются несколько примеров постановки и решения экстремальных задач.

<u>О методике оптимизации управления запасами промышленного предприятия</u>

Необходимость максимизации прибыли приводит к необходимости составлять оптимальный план выпуска продукции при имеющихся запасах ресурсов и сокращения издержек. Одной из форм издержек является стоимость хранения запасов. С их увеличением увеличивается и данная стоимость. В тоже время уменьшение запасов ресурсов может привести к остановке производства. В этой ситуации в данной работе предлагается модель управления запасами предприятия. На базе данной модели получено компромиссное значение параметров, позволяющее минимизировать издержки, связанные с наличием запасов. Рассмотрим соотношение для определения издержек в следующей форме

$$I=\frac{ab}{x}+bc+dx, \tag{14}$$

где x - размер партии товара, a - организационные издержки, b - интенсивность спроса, c - стоимость товара, d - издержки содержания товара. Первое слагаемое функции (12) описывает общие организационные издержки, второе слагаемое функции (12) описывает стоимость товара, третье слагаемое функции (12) описывает общие издержки содержания запасов. Параметры a, b, c и d считается постоянными и известными параметрами. Величину партии товаров, соответствующую минимуму определим в рамках стандартной процедуры поиска экстремума функции, т.е. из условия равенства нулю производной функции издержек I по размеру партии товара x. Данное условие представимо в следующей форме

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{ab}{x^2} + d = 0. \tag{15}$$

Решением данного уравнения является следующая величина: $x = \sqrt{ab/d}$. Данный размер партии товаров соответствует минимуму издержек предприятия. Типичная зависимость функции издержек от размера партии товара приведена на рис. 18.

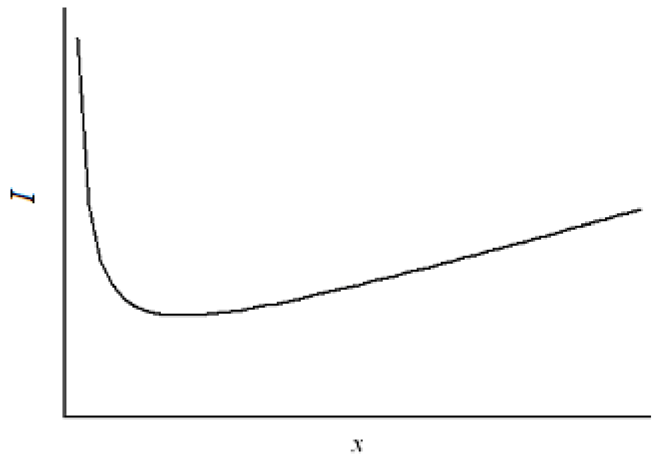


Рис. 18. Зависимость функции издержек от размера партии товара

О методике оптимизации производительности оборудования с учетом себестоимости продукции предприятия

Одним из основных факторов, оптимизирующих функционирование промышленных предприятий, является увеличение прибыли, а также уменьшение себестоимости производства. По этой причине необходима разработка эффективных методов инновационного развития, приводящего к уменьшению накладных расходов при производстве продукции. В данном разделе предложена модель прогнозирования выручки предприятий с учетом изменения объема производимой продукции. Также предложена аналитическая методика прогнозирования производительности оборудования с учетом себестоимости продукции предприятия и проведен ее анализ с целью уменьшения себестоимости. Себестоимость единицы выпускаемой продукции определим с помощью следующего соотношения

$$S = S_1 + S_2 V + S_3 / V, \tag{15}$$

где V - производительность, считаемая постоянной в течение рабочего периода; коэффициенты S_1, S_2 и S_3 учитывают различные производственные факторы. Например, коэффициент S_1 определяется массой исходного сырья и массой готовой продукции, стоимостью единицы сырья, стоимостью потребляемой энергии; коэффициент S_2 определяется стоимостью используемого сырья; коэффициент S_3 определяется стоимостью потребляемой энергии и зарплатой персонала. Выбор оптимальной производительности определяется с помощью стандартной процедуры, т.е. из условия равенства нулю производной функции (15) по производительности предприятия V

$$\frac{\partial S}{\partial V} = S_2 - \frac{S_3}{V^2}. \tag{16}$$

Из условия равенства нулю производной (16) получаем оптимальное значение производительности

$$V = \sqrt{S_3 S_2^{-1}}. \tag{17}$$

В данном разделе проведем анализ производительности продукции в рамках рассматриваемой модели. На рис. 19 приведены типичные зависимости себестоимости единицы S выпускаемой продукции от производительности предприятия V при различных значениях коэффициентов S_i. Из данного рисунка следует, что рассматриваемая зависимость может иметь минимум. Координата минимума зависит от значений параметров S_2 и S_3. Данные зависимости являются монотонно возрастающей и монотонно убывающей, соответственно.

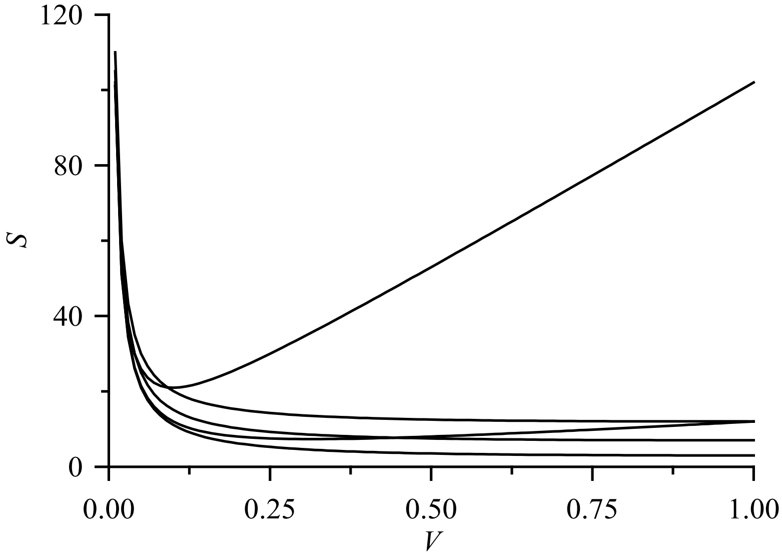


Рис. 19. Зависимости себестоимости единицы S выпускаемой продукции от производительности предприятия V при различных значениях коэффициентов S_i

Максимизация прибыли в условиях изменяющихся цен с учетом ее нелинейности

Необходимость максимизации прибыли приводит к необходимости составлять оптимальный план выпуска продукции при имеющихся запасах ресурсов. Изменение рыночной ситуации приводит к изменению цен в зависимости от объема товара на рынке. Из-за этого при решении задачи максимизации прибыли должна учитываться реакция рынка на выпуск новой партии изделий в виде изменения цен на данный товар (т.е. должна учитываться обратная связь). Данную обратную связь можно учесть как зависимость цен от количества выпущенной продукции в функции прибыли. В данной работе рассматривается максимизация прибыли предприятия, выпускающего несколько видов продукции. Данная максимизация проводится на примере выпуска трех видов продукции. Максимизация прибыли проводится с учетом возможности изменения цен на примере цен зависящих от количества продукции на рынке. В качестве примера рассматривается простейшая зависимость цен от количества продукции на рынке - линейная. Проведем анализ прибыли предприятия на основе изучения функции прибыли

$$L=p_1(x_1)\,x_1+p_2(x_2)\,x_2+p_3(x_3)\,x_3, \qquad (18)$$

где x_i - количество выпускаемого i-го товара, $p_i(x_i)$ - цена на i-ый товар как функция его количества на рынке. В рамках данного раздела в качестве примера рассмотрим простейшую зависимость цены товара от его количества $p_i(x_i) =a_i-b_ix_i$. Данная зависимость позволяет учесть зависимость цены товара от его количества и одновременно уменьшить объем расчетов. В рамках данной работы рассмотрим ряд ограничений (данное соотношение показывает, что максимальный объем товаров на момент начала продажи фиксирован: например, объем склада ограничен)

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=d_1 \qquad (19)$$

и (данное соотношение показывает, что достигнут минимальный объем товаров, с которого начинаются собственное производство или поставки товаров извне)

$$c_4x_1+c_5x_2+c_6x_3=d_2. \qquad (20)$$

Далее рассмотрим максимизацию прибыли в рамках математически стандартной процедуры. На первом этапе запишем функцию Лагранжа

$$l=p_1(x_1)x_1+p_2(x_2)x_2+p_3(x_3)x_3+\lambda_1(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3-d_1)+\lambda_2(c_4x_1+c_5x_2+c_6x_3-d_2), \quad (21)$$

где λ_i - множители Лагранжа, являющиеся вспомогательным параметром. Далее максимальное значение прибыли определяем в рамках стандартной процедуры поиска условного экстремума, т.е. экстремума (в данном случае - максимума) функции прибыли (17) при условиях (20). В результате проведенных вычислений получаем координаты искомых максимумов

$$x_1=\big\lfloor a_1(c_2c_6-c_3c_5)^2+a_2(c_1c_6-c_3c_4)(c_2c_6-c_3c_5)+a_3(c_1c_5-c_2c_4)(c_2c_6-c_3c_5)+2b_2\times$$
$$\times(c_1c_6-c_3c_4)(d_1c_6-d_2c_3)+2b_3(c_1c_5-c_2c_4)(d_1c_5-d_2c_2)\big]\big\lfloor 2b_1(c_2c_6-c_3c_5)^2+2b_2\times$$
$$\times(c_1c_6-c_3c_4)^2+2b_3c_1c_5(c_1c_5-c_2c_4)^2\big]^{-1},$$

$$x_2=\{2b_1(c_6-c_3)d_1(c_2c_6-c_3c_5)+(c_3c_4-c_1c_6)\,[\,a_1(c_2c_6-c_3c_5)-(c_1c_6-c_3c_4)\times$$

$$\times a_2 + a_3(c_1c_5 - c_2c_4)\big] + 2b_3(c_1d_2 - c_4d_1)(c_1c_5 - c_2c_4)\big\}\big[2b_1(c_2c_6 - c_3c_5)^2 + 2b_3c_1c_5 \times$$

$$\times (c_1c_5 - c_2c_4)^2 + 2b_2(c_1c_6 - c_3c_4)^2\big]^{-1},$$

$$x_3 = \big\{(c_1c_5 - c_2c_4)\big[a_1(c_2c_6 - c_3c_5) - a_2(c_1c_6 - c_3c_4) + a_3(c_1c_5 - c_2c_4)\big] + 2\,(c_2c_6 - c_3c_5) \times$$

$$\times b_2d_1(c_2 - c_5) + 2b_2(c_1d_2 - c_4d_1)(c_1c_6 - c_3c_4)\big\}\big[\,2b_1(c_2c_6 - c_3c_5)^2 + 2b_2(c_1c_6 - c_3c_4)^2 +$$

$$+ 2b_3(c_1c_5 - c_2c_4)^2\big]^{-1}.$$

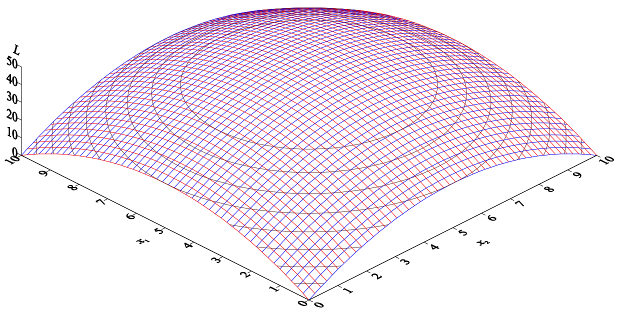


Рис. 20. Пример зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_1 и x_2

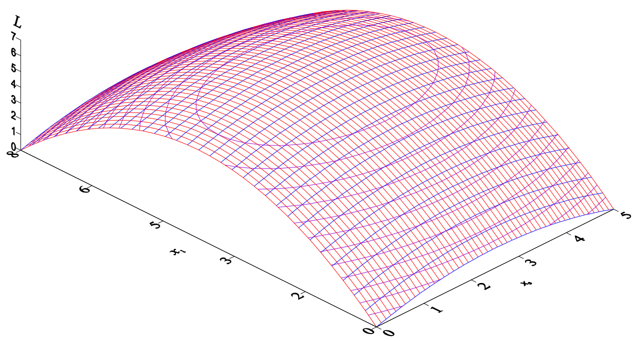


Рис. 21. Пример зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_1 и x_3

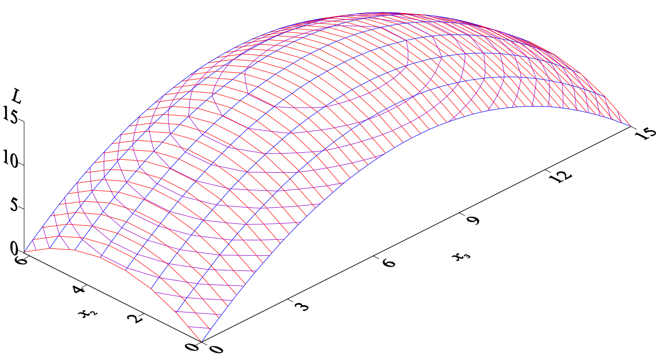


Рис. 22. Пример зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_2 и x_3

Данные координаты являются объемами продукции, соответствующими максимуму прибыли предприятия. Несколько типичных зависимостей функции прибыли (18) от объемов выпускаемых продукций x_i приведены на рисунках 20 -21 при различных значениях параметров.

О модели прогноза выручки промышленных предприятий

Одним из основных факторов, оптимизирующих функционирование промышленных предприятий, является увеличение прибыли, а также уменьшение накладных расходов. По этой причине необходима разработка эффективных методов инновационного развития и изменения рыночной ситуации, приводящей к изменению цен в зависимости от объема товара на рынке. В данной работе предложена модель прогнозирования выручки предприятий с учетом изменения объема производимой продукции. Также предложена аналитическая методика анализа зависимости величины выручки от различных параметров. В данной работе в качестве модели выручки выберем следующее выражение

$$Q=V\cdot P\text{-}V\cdot R\text{-}V\cdot T\text{-}V\cdot S, \tag{22}$$

где V - объем выпускаемой продукции; P - цена единицы продукции; R - цена сырья, расходуемого на единицу продукции; T - транспортные расходы на единицу продукции; S - зарплата сотрудникам, выплачиваемая за производство единицы продукции. Цена продукции может изменяться в зависимости от ее количества. В рамках данной статьи рассмотрим простейшую (линейную) модель такой зависимости $P(V)=A\text{-}B\cdot V$, где A и B - параметры аппроксимирующей функции, учитывающие фактическое изменение цены. С учетом данной аппроксимации соотношение (21) принимает следующий вид

$$Q=V\cdot(A\text{-}B\cdot V)\text{-}V\cdot R\text{-}V\cdot T\text{-}V\cdot S. \tag{23}$$

Выручка Q зависит от параметров R, T, S, A, B монотонно. Зависимость выручки Q от объема выпускаемой продукции V может быть немонотонной. Экстремальное значение выручки может быть определено стандартно, т.е. из условия равенства нулю соответствующей частной производной: $\partial Q/\partial V = 0$. С учетом соотношения (23) последнее соотношение имеет вид

$$\partial Q/\partial V=A\text{-}2B\cdot V\text{-}R\text{-}T\text{-}S=0. \tag{24}$$

Из соотношения (24) можно получить экстремальное значение объема выпускаемой продукции V_{extr}

$$V_{extr}=(A\text{-}R\text{-}T\text{-}S)/2B. \tag{25}$$

Зависимости объема выручки предприятия, а также экстремального значения объема выпускаемой продукции приведены ниже на рисунках. На рис. 23-25 приведены типичные зависимости объема выручки Q от объема выпускаемой продукции V при различных значениях параметров A и B. Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра A и B. Зависимости объема выручки от объема выпускаемой продукции при различных значениях параметров R, T, S аналогичны зависимостям, представленным на рис. 23. Из данных рисунков следует, что зависимости объема выручки от объема выпускаемой продукции при различных значениях параметров может быть как монотонной, так и немонотонной с явно выраженным экстремальным (в данном случае максимальным) значением, определяемым соотношением (25). На рис. 25 и 26 приведены зависимости объема выручки от параметров *R*, *T*, *S*, *A* и *B*. Все зависимости являются прямыми с разными угловыми коэффициентами. В зависимости от значений параметров прогнозируемая прибыль может быть как положительной, так и отрицательной, что соответствует убытку предприятия.

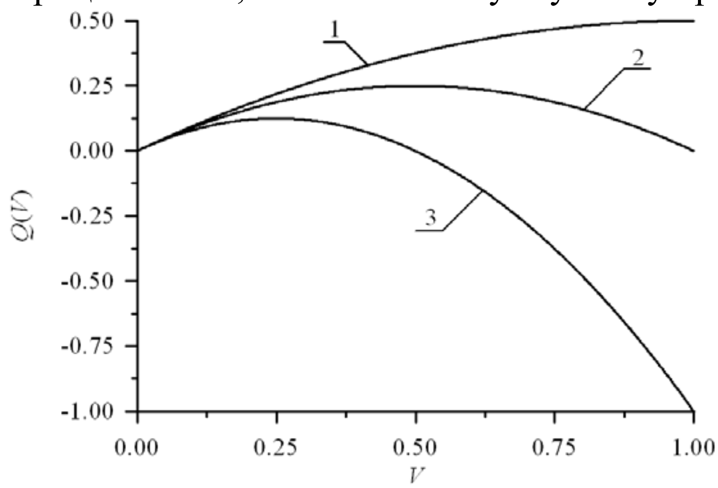


Рис. 23. Зависимость выручки *Q* от объема выпускаемой продукции *V* при различных значениях параметров *R*, *T*, *S*, *A* (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра *B*

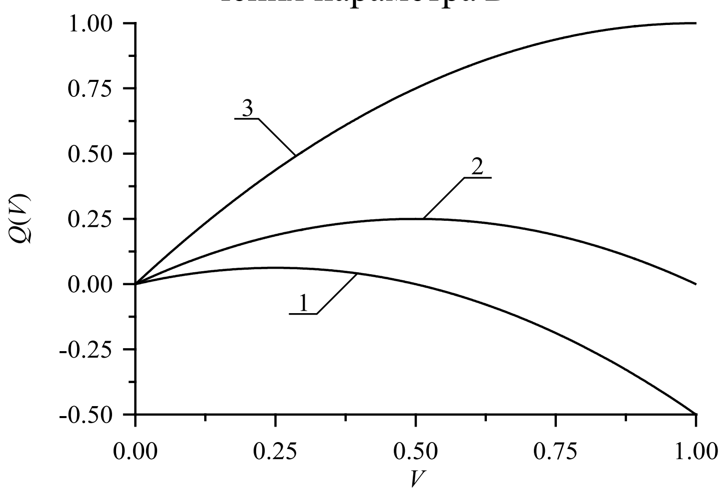


Рис. 24. Зависимость выручки *Q* от объема выпускаемой продукции *V* при различных значениях параметров *R*, *T*, *S*, *B* (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра *A*

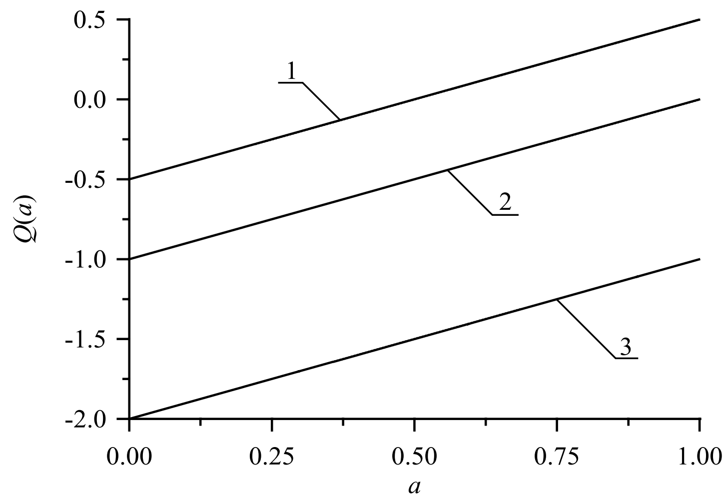


Рис. 25. Зависимость выручки Q от величины параметра A при различных значениях параметров R, T, S, B (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра V

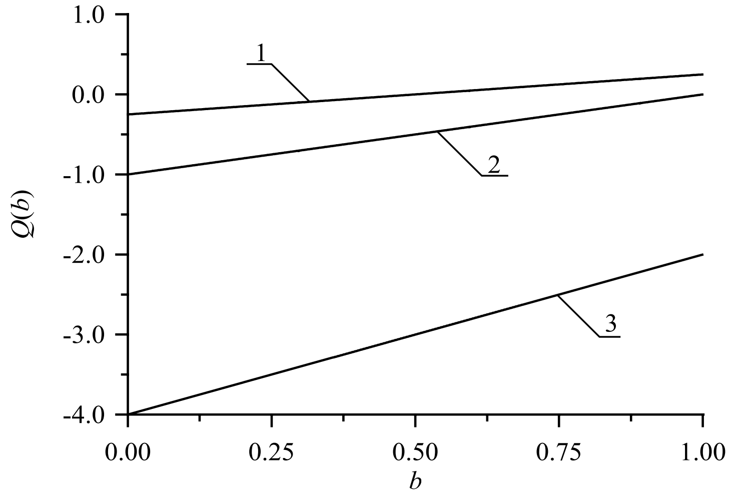


Рис. 26. Зависимость выручки Q от величины параметра B при различных значениях параметров R, T, S, A (все зависимости качественно аналогичны друг другу). Увеличение номера кривых соответствует увеличению значения параметра V

Прогнозирование случайных экономических систем

Экономические системы подвержены влиянию большого числа неуправляемых внешних факторов (погодные условия, внешняя политика, социальные факторы, преднамеренное искажение и сокрытие информации с целью экономической диверсии и т. д.). В этой ситуации параметры экономических систем принимать случайные значения. Для описания случайных процессов используются различные методы: с помощью моментов, кумулянтов, плотности вероятности. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$. Зафиксируем моменты времени t_1, t_2, ..., t_n. Вероятность того, что значение $\xi(t_n)$ находится в интервале $\xi(t_n)\in[x_n,x_n+d\ x_n]$, если в момент времени t_1 случайный процесс имеет значение x_1, в момент времени t_2 случайный процесс имеет значение x_2, ..., в момент времени t_{n-1} случайный процесс имеет значение x_{n-1}, равна произведению условной плотности вероятности на длину интервала: $P=W(x_1,t_1;\ x_2,t_2;\ ...;\ x_{n-1},t_{n-1}|\ x_n,t_n)\,d\ x_n$. В общем случае рассматриваемая вероятность зависит от всех значений x_n, t_n. С одной стороны имеется более точная модель случайного процесса, но ее тяжелее исследовать. В этой ситуации представляют компромиссные модели, позволяющие упростить описание процессов и максимально сохранить его адекватность. В качестве одной из наиболее простых моделей рассматривается марковский процесс: при анализе марковских процессов учитывается только одно его предыдущее значение x_{n-1}. Его плотность вероятности описывается с помощью уравнения Фокера-Планка

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \left[D(x,t) W(x,t) \right]}{\partial x^2} - \frac{\partial \left[K(x,t) W(x,t) \right]}{\partial x}, \qquad (26)$$

где $D(x,t)$ - коэффициент диффузии, $K(x,t)$ - коэффициент сноса. При постоянных значениях коэффициентов диффузии D_0 и сноса K_0 уравнение (26) упрощается

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - K_0 \frac{\partial W(x,t)}{\partial x}. \qquad (26a)$$

Существуют различные методы решения дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим метод разделения переменных Фурье. Предварительно необходимо дополнить уравнение (26) граничными и начальным условием. В качестве примера используем следующие условия: $W(0,t)=0$; $W(L,t)=0$; $W(x,0)=f(x)$. Далее будем искать решение уравнения (26a) в виде произведения: $W(x,t)=A(x)B(t)$. Подстановка данного произведения в уравнение (25a) позволяет получить

$$A(x)\frac{\partial B(t)}{\partial t} = D_0 B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - K_0 B(t)\frac{\partial A(x)}{\partial x}. \qquad (27)$$

Далее разделим обе части уравнения (27) на произведение функций $A(x)B(t)$. В результате этого деления получаем следующее уравнение

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial B(t)}{\partial t} = \frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial A(x)}{\partial x}. \qquad (28)$$

Теперь переменные разделены: левая часть уравнения зависит только от переменной t, а правая - только от переменной x. Это возможно только тогда, когда обе части уравнений имеют постоянное значение. Пусть постоянное значение будет обозначено как γ, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial B(t)}{\partial t} = \frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial A(x)}{\partial x} = \gamma .$$

Полученное соотношение представляет собой два уравнения: одно - для функции $A(x)$, другое - для функции $B(t)$, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial B(t)}{\partial t} = \gamma ; \quad \frac{D_0}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{K_0}{A(x)}\frac{\partial A(x)}{\partial x} = \gamma .$$

Решения этих уравнений представимы в следующей форме

$$B(t) = C_B e^{\gamma t},$$

$$A(x) = C_{A1} \exp\left[t \frac{K_0}{D_0} \left(1 + \sqrt{1 + 4\gamma \frac{D_0}{K_0^2}} \right) \right] + C_{A2} \exp\left[t \frac{K_0}{D_0} \left(1 - \sqrt{1 + 4\gamma \frac{D_0}{K_0^2}} \right) \right],$$

где C_B, C_{A1} и C_{A2} - постоянные интегрирования. Следует заметить, что неограниченный рост величин невозможен. По этой причине будем считать, что постоянная разделения может принимать только γ отрицательные значения, т.е. $\gamma = -|\beta|$. Далее знак модуля будем опускать подразумевая параметр β положительным. Такое же ограничение имеется на функциональную зависимость решения от переменной x. Тогда

$$B(t) = C_B e^{-\beta t},$$

$$A(x) = C_{A1} \exp\left[x \frac{K_0}{D_0} \left(1 + \sqrt{1 - 4\beta \frac{D_0}{K_0^2}} \right) \right] + C_{A2} \exp\left[x \frac{K_0}{D_0} \left(1 - \sqrt{1 - 4\beta \frac{D_0}{K_0^2}} \right) \right].$$

Далее определим постоянные интегрирования. Для этого функцию $A(x)$ представим с использованием гармонических функций, т.е.

$$A(x) = C_{A1} \exp\left(x \frac{K_0}{D_0} \right) \cos\left(\frac{x}{D_0} \sqrt{4\beta D_0 - K_0^2} \right) + C_{A2} \exp\left(x \frac{K_0}{D_0} \right) \sin\left(\frac{x}{D_0} \sqrt{4\beta D_0 - K_0^2} \right).$$

В окончательной форме плотность вероятности $W(x,t)$ представима в следующей форме

$$W(x,t) = C_B e^{-\beta t} \left[C_{A1} \exp\left(x \frac{K_0}{D_0} \right) \cos\left(\frac{x}{D_0} \sqrt{4\beta D_0 - K_0^2} \right) + \right.$$

$$\left. + C_{A2} \exp\left(x \frac{K_0}{D_0} \right) \sin\left(\frac{x}{D_0} \sqrt{4\beta D_0 - K_0^2} \right) \right].$$

Далее постоянные интегрирования определим с помощью граничных условий. На первом этапа воспользуемся условием в точке $x=0$. Тогда

$$W(0,t) = C_B e^{-\beta t} \left[C_{A1} + 0 \right] = 0.$$

В этом случае произведение постоянных интегрирования C_B и C_{A1} равно нулю. Тогда выражение для плотности вероятности упрощается

$$W(x,t) = C_B C_{A2} e^{-\beta t} \exp\left(x \frac{K_0}{D_0} \right) \sin\left(\frac{x}{D_0} \sqrt{4\beta D_0 - K_0^2} \right).$$

Далее воспользуемся вторым граничным условием в точке $x = L$. Его использование приводит к следующему соотношению

$$W(L,t) = C_B C_{A2} e^{-\beta t} \exp\left(L \frac{K_0}{D_0} \right) \sin\left(\frac{L}{D_0} \sqrt{4\beta D_0 - K_0^2} \right) = 0.$$

Равенство нулю множителей C_B и C_{A2} не представляет интереса, т.к. в этом случае будет равна нулю плотность вероятности $W(x,t)$. Тогда модуль постоянной разделения β определяется как решение уравнения $\sin\left(LD_0^{-1}\sqrt{4\beta D_0 - K_0^2}\right) = 0$, что эквивалентно соотношению $LD_0^{-1}\sqrt{4\beta D_0 - K_0^2} = \pi n$, где n=1, 2, 3, ...

$$\beta_n = \frac{\pi^2 n^2 D_0^2 L^{-2} + K_0^2}{4D_0}.$$

Получили бесконечный набор дискретных значений модуля постоянной разделения β. В этом случае плотность вероятности $W(x,t)$ представляется в виде ряда, учитывающего все значения β_n, т.е.

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{Bn} C_{A2n} e^{-t\frac{\pi^2 n^2 D_0^2 + K_0^2 L^2}{4D_0 L^2}} \exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Неизвестным пока остается произведение постоянных интегрирования C_{Bn} и C_{A2n}. Для определения этого произведения используется начальное условие. Предварительно представим начальное распределение плотности вероятности в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Тогда из равенства $W(x,0)=f(x)$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{Bn} C_{A2n} \exp\left(x\frac{K_0}{D_0}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Приравнивая члены ряда при одинаковых значениях их номера n получаем

$$C_{Bn} C_{A2n} = \exp\left(-x\frac{K_0}{D_0}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

В окончательной форме получаем плотность вероятности в следующей форме

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\frac{\pi^2 n^2 D_0^2 + K_0^2 L^2}{4D_0 L^2}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

При переменных значениях коэффициентов диффузии и сноса уравнение (26) точное решение удается получить редко. Рассмотрим приближенные методы решения данного уравнения. Для этого предварительно представим коэффициенты $D(x,t)$ и $K(x,t)$ в виде следующих сумм:

$$D(x,t)=D_0[1+\varepsilon\cdot g(x,t)],\ K(x,t)=K_0[1+\xi\cdot h(x,t)], \tag{29}$$

где $|g(x,t)|\le 1$, $|h(x,t)|\le 1$, $0\le \varepsilon <1$, $0\le \xi <1$, D_0 и K_0 - средние значения рассматриваемых коэффициентов. Далее будем искать решение уравнения (25) в виде следующего ряда

$$W(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \sum_{l=0}^{\infty}\xi^l W_{kl}(x,t). \tag{30}$$

Подстановка данного ряда и соотношений (29) в уравнение (26) позволяет получить следующий результат

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{\infty}\xi^l\,\frac{\partial\,W_{kl}(x,t)}{\partial t}=D_0\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{\infty}\xi^l\,\frac{\partial^2\{[1+\varepsilon\cdot g(x,t)]\,W_{kl}(x,t)\}}{\partial x^2}-$$

$$-K_0\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{\infty}\xi^l\,\frac{\partial\,\{[1+\xi\cdot h(x,t)]\,W_{kl}(x,t)\}}{\partial x}. \quad (31)$$

Группировка коэффициентов при одинаковых степенях параметров ε и ξ позволяет получить уравнения для функций $W_{kl}(x,t)$

$$\frac{\partial\,W_{kl}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2\,W_{kl}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial^2[\,g(x,t)\cdot W_{k-1l}(x,t)]}{\partial x^2}-$$

$$-K_0\frac{\partial W_{kl}(x,t)}{\partial x}-K_0\frac{\partial[\,h(x,t)\cdot W_{kl-1}(x,t)]}{\partial x},\ k\geq 0,\ l\geq 0. \quad (32)$$

Граничные и начальные условия для функций, описываемых полученными уравнениями, имеют следующий вид

$$W_{kl}(0,t)=0,\ W_{kl}(L,\mathrm{t})=0,\ k\geq 0,\ l\geq 0;\ W_{00}(x,0)=f(x),\ W_{kl}(x,\mathrm{t})=0,\ k\geq 1,\ l\geq 1. \quad (33)$$

Уравнения для функций $W_{kl}(x,t)$ могут быть решены методом разделения переменных Фурье, а также другими методами.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Построить поверхности уровня следующих функций, а также их линии уровня, считая z=0

01. $f=x^2+y^2+2y-z+4$;	02. $f=x^2+y^2+3y-z^2+1$;	03. $f=x^2+y^2+y+z^2+3$;
04. $f=x^2-5x-y^2+z^2+3$;	05. $f=x^2+2x-y+z^2+6$;	06. $f=2x^2-3y^2+4z^2+1$;
07. $f=2x^2-3y+4z^2+1$;	08. $f=3y^2+4z^2+9-2x^2$;	09. $f=2x^2+3y^2+4z^2+4$;
10. $f=2x^2+3y^2-4z^2+7$;	11. $f=6x^2+4y^2-2z^2-3$;	12. $f=3x^2+7y^2+9z+5$;
13. $f=2x^2+4y^2+5z^2-2$;	14. $f=3x^2-8y^2+7z^2+2$;	15. $f=6x^2-4y^2+8z^2+8$;
16. $f=2x^2+3y+z^2-8$;	17. $f=x^2+3y^2-7z^2+1$;	18. $f=4x^2+3y^2+4z^2+2$;
19. $f=2x^2+3y^2+5z^2+1$;	20. $f=-x^2+2y^2+3z+4$;	21. $f=2x^2+y^2+3z^2+7$;
22. $f=6x^2+3y^2-z^2+4$;	23. $f=-x^2+2y^2+3z+7$;	24. $f=x^2-y^2-z+5$;
25. $f=x^2+2y^2-5z^2+6$;	26. $f=2x^2+y^2+2z^2-6$;	27. $f=x^2+y^2+z^2+2$;
28. $f=4x^2-6y^2+3z^2+9$;	29. $f=x^2+y^2-z+1$;	30. $f=x^2-y^2-z^2+7$.

II) Найти значения пределов в точке $M(x,y)$. Если функция имеет разрыв в данной точке, определить тип разрыва

01. $\lim\limits_{\substack{x\to 7\\ y\to -2}} \left(e^{x^2 y} - x^2 y\right)$;

02. $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 4}} \dfrac{y}{x^2 - y^2}$;

03. $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ y\to \pi^2/3}} \left(\dfrac{\sqrt{3x+y}}{3xy}\right)$;

04. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 4}} \sqrt{x^3 + 16y}$

05. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\sqrt{\pi}\\ y\to \sqrt{\pi}}} \cos\left(x^2 - y^2\right)$

06. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \ln\left(x^2 - 4y^3\right)$

07. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \ln\left(5y^2 - x^3\right)$

08. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^3 + x^2 y + 1}$

09. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \pi}} \sin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ y\to 0}} tg\left(x^2 y\right)$

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 1{,}5\\ y\to \pi}} \sin\left(x^2 y\right)$

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 1}} \left(x^2 + 3xy + y^2\right)$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \left(3x^2 y - y + 1\right)$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}} \left(x - 4\sqrt{y}\right)$

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ y\to \pi^2/3}} \left(\dfrac{3\sqrt{xy}}{3x + y}\right)$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 11}} \left(\sqrt{x+y}\right)$

17. $\lim\limits_{\substack{x\to \sqrt{\pi}\\ y\to 2}} \sin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$

18. $\lim\limits_{\substack{x\to \sqrt{\pi}\\ y\to 1}} tg\left(x^2 y\right)$

19. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \pi/3}} \left(\dfrac{x - 2y + 3\sqrt{xy}}{3x + y}\right)$

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \left(\dfrac{y^3}{5x^2} - 6\sqrt{y^2 + 1}\right)$

21. $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to 4}} \ln\left(tg\left(\dfrac{x}{y}\right) e^{3x^2 + y}\right)$

22. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \left(\dfrac{x^2}{y}\right)$

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to -\pi}} tg\left(\dfrac{x}{y}\right)$

24. $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to 2}} \cos\left(\dfrac{2x}{y}\right)$

25. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 7}} \left(3x^2 - y\right)$

26. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \left(x^2 - y^2\right)$

27. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} \left(y + \sqrt{x}\right)$

28. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \ln\left(\dfrac{x^2}{4y^3}\right)$

29. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 3}} \left(\dfrac{5x^2 y^2}{6\sqrt{y^2 + x}}\right)$

30. $\lim\limits_{\substack{x\to \sqrt{3}\\ y\to \pi}} tg\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

III) Вычислить частные производные первых двух порядков, градиенты и дивергенции градиентов функций, приведённых в задании I. Найти также крутизну функций в точке M и соответствующий ей угол

01. $M(3,2,1)$	02. $M(4,5,6)$	02. $M(4,5,6)$	04. $M(7,5,4)$	05. $M(2,3,5)$
06. $M(6,4,8)$	07. $M(2,2,2)$	08. $M(3,5,9)$	09. $M(4,6,0)$	10. $M(5,4,3)$
11. $M(6,9,3)$	12. $M(0,2,1)$	13. $M(2,0,0)$	14. $M(2,1,7)$	15. $M(3,5,6)$

16. $M(4,3,2)$ 17. $M(5,9,7)$ 18. $M(4,9,1)$ 19. $M(1,7,8)$ 20. $M(2,5,4)$
21. $M(7,4,3)$ 22. $M(8,5,4)$ 23. $M(6,2,1)$ 24. $M(8,0,3)$ 25. $M(4,5,2)$
26. $M(6,1,4)$ 27. $M(3,2,2)$ 28. $M(0,4,3)$ 29. $M(2,5,1)$ 30. $M(8,6,0)$

IV) Вычислить ротор следующих векторов

01. $\vec{V}(x,y,z)=e^{-x^2+5y+3z^3}\,\vec{i}+\cos\left(4x^2yz^8\right)\vec{j}+\ln\left(\dfrac{1}{x^2y^3z^4}\right)\vec{k}$;

02. $\vec{V}(x,y,z)=\left(-x^2+5y+3z^3\right)\vec{i}+\sin\left(x^2+y^3z^4\right)\vec{j}+\left(x+y^2\right)e^{z^4}\,\vec{k}$;

03. $\vec{V}(x,y,z)=(6x+4y+3z)\,\vec{i}+\dfrac{x^2y^3}{z^2}\,\vec{j}+z\cdot\ln\left(x+y^2\right)\vec{k}$;

04. $\vec{V}(x,y,z)=tg\,(6xy+7z)\,\vec{i}+\dfrac{z\,\vec{j}}{x^2y^3}+z\cdot\cos\left(x+y^2\right)\vec{k}$;

05. $\vec{V}(x,y,z)=(6x+5yz)\,\vec{i}+\dfrac{6x^3+5y^2+z}{xy}\,\vec{j}+e^{z\left(x+y^2\right)}\vec{k}$;

06. $\vec{V}(x,y,z)=\sin(xyz)\,\vec{i}+\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{j}+e^{xyz}\,\vec{k}$;

07. $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt{x^3+16y+z^2}\;\vec{i}+\left(e^{x^2y}-x^2y\right)\vec{j}+\left(3x^2y-y+1\right)\vec{k}$;

08. $\vec{V}(x,y,z)=\left[\dfrac{yz}{x^4}+\sin\left(\dfrac{x^4}{yz}\right)\right]\vec{i}+\dfrac{xyz\,\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+sh\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)\vec{k}$;

09. $\vec{V}(x,y,z)=z\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\vec{i}+\sqrt{3x^2y-y+z}\,\vec{j}+\left(3x^3-e^y+z\right)\vec{k}$;

10. $\vec{V}(x,y,z)=y\,\vec{i}+\ln\left(x-y^3+5z\right)\vec{j}+\sqrt{\dfrac{3x^2+5y+z}{xyz}}\,\vec{k}$;

11. $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{8z+3y}{6x}\vec{i}+\ln\left[\cos\left(\dfrac{xz}{y^3}\right)\right]\vec{j}+\sqrt{\dfrac{x^3+5y}{xz}}\,\vec{k}$;

12. $\vec{V}(x,y,z)=sh\left(\dfrac{5x+4y}{3z}\right)\vec{i}+tg\left(\dfrac{xz}{y^3}\right)\vec{j}+\left(x^3+5y+3\right)\vec{k}$;

13. $\vec{V}(x,y,z)=tg\left(\dfrac{5x+4y}{3z}\right)\vec{i}+\ln\left(xz+y^3\right)\vec{j}+\sqrt[3]{x+7y^2-6z^4}\,\vec{k}$;

14. $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{x^3+16y}{x+8z}}\,\vec{i}+\dfrac{ye^z}{x^2-y^2}\,\vec{j}+z\left(e^{x^2y}-x^2y\right)\vec{k}$;

15. $\vec{V}(x,y,z)=z^8\ln\left(x^2-4y^3\right)\vec{i}+z\cdot\sin\left(x^2y\right)\vec{j}+\dfrac{\sqrt{x+y}}{z+e^{-z^3}}\vec{k}$;

16. $\vec{V}(x,y,z)=tg\left(\dfrac{y}{xz}\right)\vec{i}+z^3\cdot\ln\left(5y^2-x^3\right)\vec{j}+\dfrac{x^8}{y+z}\vec{k}$;

17. $\vec{V}(x,y,z)=\sin\left(\dfrac{y+z}{x+z}\right)\vec{i}+z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)\vec{j}+\sqrt[3]{\dfrac{x^8}{y+z}}\vec{k}$;

18. $\vec{V}(x,y,z)=\sin\left(\dfrac{y+z}{x+z}\right)\vec{i}+z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)\vec{j}+\sqrt[3]{\dfrac{x^8}{y+z}}\vec{k}$;

19. $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{y+z}{x+z}e^{x+3z}\,\vec{i}+\sqrt[3]{z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)}\vec{j}+e^{x+y^2+3z}\,\vec{k}$;

20. $\vec{V}(x,y,z)=th\left[(x+y+z)\,e^{x+3z}\right]\vec{i}+5\left(y^2+x^3\right)z^{-4}\,\vec{j}+\left(x+y^2+3z\right)\vec{k}$;

21. $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{x+3z}{7z}\,\vec{i}+8\left(y^2+x^3\right)\ln\left(6y+5z^4\right)\vec{j}+\left(x^4+y^3+z^2\right)\vec{k}$;

22. $\vec{V}(x,y,z)=\left(x+6y+3z^2\right)th\left(\dfrac{xy}{z}\right)\vec{i}+ch^z\left(y^2+x^3\right)\vec{j}+tg\left(5y+3z\right)\vec{k}$;

23. $\vec{V}(x,y,z)=tg\left(x+6y+3z^2\right)\vec{i}+\ln\left(\dfrac{y^2+x^3}{z}\right)\vec{j}+\dfrac{xy}{z}\vec{k}$;

24. $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt{x+6y+3z^2}\,\ln(2z)\,\vec{i}+\dfrac{y^2+x^3}{x-z^2}\,\vec{j}-(x+y+z)\vec{k}$;

25. $\vec{V}(x,y,z)=8x\cdot\sin\left(2y+z^2\right)\vec{i}+\left(x-z^2\right)\cdot\left(y^2+x^3\right)\vec{j}+ch\left(x+y+z\right)\vec{k}$;

26. $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt[4]{x+6y+3z^2}\,\vec{i}+z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)\vec{j}+e^{x+y^2+3z}\,\vec{k}$;

27. $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{y+z}{x+z}e^{x+3z}\,\vec{i}+tg\left(\dfrac{x+6y+3z^2}{2yz}\right)\vec{j}+e^{z\left(3x-y^2\right)}\vec{k}$;

28. $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{x^2+5y-3z^3}{x^2+y^3z^4}\,\vec{i}+sh\left(\dfrac{x^2+y^3z^4}{x^2+5y-3z^3}\right)\vec{j}+tg\left(\dfrac{x-6y^2-3z^5}{\sqrt[3]{x+6y+3z^2}}\right)\vec{k}$;

29. $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{y-z}{x+z^2}\ln(z)\vec{i}+\dfrac{5\sin(y)\vec{j}}{z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)}+\dfrac{x+y^2+3z}{3x+5y^2+8z^3}\vec{k}$;

30. $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2y+1}}{x+3y+z^2}\vec{i}+tg\left(z\dfrac{y}{x}\right)\vec{j}+\dfrac{x-2y+3\sqrt{xy}+4z^2}{3z\cdot(5x+7y)}\vec{k}$.

V) Для функций задания I найти их условные и безусловные экстремумы, считая z=0. В качестве условий выбрать функции $g=x+2y=0$ для вариантов 01 -

10, $g=x-3y=0$ для вариантов 11 - 20, $g=2x+5y=0$ для вариантов 21 - 30.

VI) Найти: (i) массу области S, распределённую с плотностью $\rho(x,y)$; (ii) координаты центра тяжести области S.

01. $\rho(x,y)=x\cdot y^2-2$, S: $y=x^4$, $y=\sqrt{x}$;
02. $\rho(x,y)=x\cdot(x-y-1)$, S: $y=x^2$, $x=0$, $y=1$;
03. $\rho(x,y)=y(x+1-y)$, S: $y=x$, $y=x^3$;
04. $\rho(x,y)=y\cdot(x^2-y)+1$, S: $y=x^4$, $y=1-x^2$;
05. $\rho(x,y)=3x^2\cdot y-y+1$, S: $y=x$, $y=1-x^2$;
06. $\rho(x,y)=x\cdot y-4x+y-1$, S: $y=x^2$, $y=1$, $x>0$;
07. $\rho(x,y)=1-x\cdot y^3$, S: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;
08. $\rho(x,y)=x\cdot y(8+9xy)$, S: $y=-x^3$, $y=-\sqrt[3]{x}$;
09. $\rho(x,y)=9x^2\cdot y^2-x+y$, S: $y=x$, $y=\sqrt{x}$;
10. $\rho(x,y)=12x^2\cdot y^2-1$, S: $x=1$, $y=-x^2$, $y=-\sqrt{x}$;
11. $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $y=x^2$, $4y=x^2$, $x=\pm 2$;
12. $\rho(x,y)=x^2\cdot y^2$, S: $xy=4$, $y=x$, $y=0$, $x=4$;
13. $\rho(x,y)=y-x$, S: $y^2=4+x$, $x^2=-3y$;
14. $\rho(x,y)=x\cdot y^2-x^2\cdot y$, S: $4y=x^2$, $y=x^2$, $y=4$;
15. $\rho(x,y)=1$, S: $y=x$, $x=1+y$, $y=-1$, $y=0$;
16. $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $ay=x^2$, $4y=x^2-2ax$, $y=x$;
17. $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $x^2+y^2=a^2$, $y\geq 0$, $x\geq 0$;
18. $\rho(x,y)=1$, S: $y=sin(x)$, $y=cos(x)$, $x\in[0;\pi/4]$;
19. $\rho(x,y)=1$, S: $x\,y=1$, $x\,y=8$, $x=1$, $x=2$;
20. $\rho(x,y)=y^2-x^2$, S: $y^2=x^2$, $y=2+x$, $x=0$;
21. $\rho(x,y)=y$, S: $y=e^{-x}$, $x=1$, $y=1$;
22. $\rho(x,y)=y\cdot sin^2(x)$, S: $y=x^2$, $y=x^4-2x^2$;
23. $\rho(x,y)=x\cdot y^2-x+1$, S: $y=8-x$, $x=0$, $y=2\sqrt{x}$;
24. $\rho(x,y)=x\cdot y$, S: $x^2+y^2=a^2$, $x=-a$, $x=a$, $y=0$, $y=2\sqrt{x}$;
25. $\rho(x,y)=y$, S: $y=0$, $y=x^4-2x^2$;
26. $\rho(x,y)=x$, S: $x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=x$;
27. $\rho(x,y)=2-y+x$, S: $y^2=a\,x$, $y=x$;
28. $\rho(x,y)=1$, S: $y^2=a\cdot x$, $x=a$;
29. $\rho(x,y)=y^2$, S: $y=x^2$, $x=\pm 4$;
30. $\rho(x,y)=x^2$, S: $y=1+x^2/2$, $y=2x$, $x=0$.

VII) Вычислить объём области V.

01. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x=2$, $x=5$;
02. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=x^2$, $y=1-x^2$;
03. V: $z\geq 0$, $z+y^2=9$, $x^2+y^2=9$;
04. V: $z=0$, $z+x^2=1$, $y=0$, $y=3$;
05. V: $x=0$, $z=0$, $z+y=2$, $x^2+y^2=4$;
06. V: $z=0$, $z+y^2=1$, $y=x^2$, $y=1-x^2$;
07. V: $z=0$, $4z=1-y^2$, $2x=y$, $x+y=9$;
08. V: $z=0$, $z=1$, $y=sin(x)$, $y=cos(x)$, $x\in[0;\pi/4]$;
09. V: $z=0$, $z=4-y^2$, $x^2+y^2=9$;
10. V: $z=0$, $z=9-y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $x=3$;
11. V: $z=0$, $x+y+z=3$, $x^2+y^2=4$;
12. V: $z=0$, $z=4-y^2$, $y=x^2$, $y=4-x^2$;
13. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x=\pm 2$;
14. V: $z=0$, $z=4-y^2$, $y^2=4+x$, $x=2-3y^2$;
15. V: $z=0$, $z=4-y^2$, $y=1-x^2$, $y=-1$;
16. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=3x^2-2$, $y=2x$;
17. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x^2+y^2=1$;
18. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=x$, $x=1$, $x=2$;

19. V: $z=2$, $x^2+y^2=z$;

20. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x-y=1$, $x=1$, $x=2$;

21. V: $z=0$, $z-x=0$, $x^2+y^2=25$;

22. V: $z=1$, $z=4\sqrt{y}$, $y=0$, $x=0$, $x=4$;

23. V: $x^2+z^2=25$, $y=-1$, $y=1$;

24. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x=0$, $x=4$;

25. V: $y^2+z^2=16$, $x=2$, $x=10$;

26. V: $z=0$, $z=5$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$;

27. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $x^2+y^2=1$;

28. V: $z=0$, $z=1-y^2$, $y=x^2$;

29. V: $z=0$, $z=4-y^2$, $x^2+y^2=16$;

30. V: $z=0$, $x+y-z=5$, $x^2+y^2=9$.

VIII) Вычислить криволинейные интегралы по контуру L.

01. $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(2,2)$;

02. $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx$, L: дуга OA параболы $y=x^2/2$, $O(0,0)$, $A(2,2)$;

03. $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx-x\,dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(2,2)$, $B(2,0)$;

04. $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx-x\,dy$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(4,2)$;

05. $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx$, L: треугольник с вершинами OAB, $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

06. $\int\limits_{(L)}y\,dx+x\,dy$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(4,2)$;

07. $\int\limits_{(L)}y\,dx+x\,dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

08. $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx-2x\,dy$, L: треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

09. $\int\limits_{(L)}2xy\,dx+x^2\,dy$, L: прямая линия AB, $A(1,\pi/6)$, $B(2,\pi/4)$;

10. $\int\limits_{(L)}\cos(2y)\,dx-2x\sin(2y)\,dy$, L: прямая линия AB, $A(1,\pi/6)$, $B(2,\pi/4)$;

11. $\int\limits_{(L)}tg(y)\,dx+x\,dy/\cos(y)$, L: прямая линия AB, $A(1,\pi/6)$, $B(2,\pi/4)$;

12. $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx$, L: первая четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

13. $\int\limits_{(L)}y^2\,dx+(x+y)^2\,dy$, L: третья четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

14. $\int\limits_{(L)}(x-y)\,dx$, L: треугольник с вершинами $A(a,0)$, $B(a,a)$, $C(0,a)$;

15. $\int\limits_{(L)}\left(x-y^2\right)dx$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(3,3)$;

16. $\int\limits_{(L)}\left(x^2+y\right)dy$, L: дуга OA параболы $y^2=x/2$, $O(0,0)$, $A(8,2)$;

17. $\int\limits_{(L)}\left(x^2+y^2\right)dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(2,2)$, $B(2,0)$;

18. $\int\limits_{(L)}\left(x^2-y^2\right)dx+x\,dy$, L: прямая OA, $O(0,0)$, $A(4,3)$;

19. $\int\limits_{(L)}xy\,dx+x\,dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

20. $\int\limits_{(L)}xy\,dx-x\,dy$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(2,0)$;

21. $\int\limits_{(L)}\cos(2y)dx+2x\sin(2y)dy$, L: прямая AB, $A(1,\pi/4)$, $B(1,\pi/4)$;

22. $\int\limits_{(L)}tg(y)dx+x\cos(x)dy$, L: прямая AB, $A(\pi/4,\pi/3)$, $B(\pi/3,\pi/6)$;

23. $\int\limits_{(L)}x^2y^2\,dx+(x+y)^2\,dy$, L: вторая четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

24. $\int\limits_{(L)}\left(x^2+y\right)dy$, L: третья четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

25. $\int\limits_{(L)}\left(x+y^2\right)dy$, L: треугольник с вершинами $A(2,3)$, $B(3,3)$,$C(3,2)$;

26. $\int\limits_{(L)}\left(5x-4y^2\right)dx+x\,dy$, L: дуга AB линии $y=4x^3$, $A(2,32)$, $B(3,108)$;

27. $\int\limits_{(L)}(x+y)dx$, L: треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(3,5)$, $B(4,0)$;

28. $\int\limits_{(L)}\left(x^2+y\right)dy+3x\,dy$, L: дуга AB линии $y^3=x$, $A(1,1)$, $B(8,2)$;

29. $\int\limits_{(L)}5x\,dx+(x-y)dy$, L: дуга AB линии $y=x^2$, $A(2,4)$, $B(3,9)$;

30. $\int\limits_{(L)}(x-y)^2\,dy$, L: треугольник с вершинами $A(2,5)$, $B(3,5)$, $C(2,0)$.

IX) Найти массу и координаты центра тяжести кривой L (контур для каждого варианта определён в задании VIII) с плотностью $\rho(x,y,z)=xyz$.

X) Найти работу силы $\vec F=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$ вдоль кривой L. Контур для каждого варианта определён в предыдущем задании.

01. $P=5x^2+7xy+9y^2$, $Q=-x+8y$; 02. $P=3x^2+2xy$, $Q=5y^2-4y$;

03. $P=9x^2+5xy$, $Q=4y^2+7x-7y$;
04. $P=4x^2-8xy$, $Q=5y^2+5x-6y$;
05. $P=4x^2+3xy$, $Q=8y^2-8y$;
06. $P=2x^2+4xy-7y^2$, $Q=5x-4y$;
07. $P=8x^2+3xy$, $Q=3y^2-5x-4y+9$;
08. $P=7x^2+4xy+8y^2$, $Q=5y$;
09. $P=-3x^2+8xy$, $Q=9y^2+7x+6y$;
10. $P=4x^2+3xy-5y^2$, $Q=8x-7y$;
11. $P=5x^2+4xy$, $Q=3y^2-2y$;
12. $P=7x^2+8xy+9y^2$, $Q=3x-8y$;
13. $P=8x^2+9xy$, $Q=7y^2-5x-8y$;
14. $P=12x^2+5xy$, $Q=6y^2-4y$;
15. $P=7x^2+8xy$, $Q=8x-9y^2-7y$;
16. $P=9x^2+5xy$, $Q=3y^2-8x-6y$;
17. $P=13x^2+9xy$, $Q=-3y^2-8y$;
18. $P=9x^2+6xy+5y^2$, $Q=2x-2y$;
19. $P=-x^2+5xy+8y^2$, $Q=-6x+5y$;
20. $P=3x^2+9xy$, $Q=6y^2+2x-11y$;
21. $P=2x^2+7xy$, $Q=y^2+2x-4y$;
22. $P=6x^2+2xy+y^2$, $Q=2x-5y$;
23. $P=7x^2+2xy$, $Q=15y^2+8x-4y$;
24. $P=9x^2+3xy$, $Q=7y^2+2x$;
25. $P=3x^2+2xy+6y^2$, $Q=-5x-4y$;
26. $P=3x^2+2xy+2y^2$, $Q=8x+9y$;
27. $P=3x^2+2xy-y^2$, $Q=-7x-4y$;
28. $P=7xy+7y^2$, $Q=-9x-3y$;
29. $P=5x^2+4xy$, $Q=3y^2+11x-3y$;
30. $P=3x^2+6xy$, $Q=-7y^2+2x-4y$.

XI) Вычислить интегралы по поверхности S.

01. $\iint\limits_{(S)}(x+y+z)\,dS$, S: верхняя поверхность части плоскости $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$);

02. $\iint\limits_{(S)}(x+y-z)\,dS$, S: верхняя поверхность части плоскости $x+y/2+z/3=1$, расположенной во втором октанте ($x<0$, $y>0$, $z>0$);

03. $I=\iint\limits_{(S)}(z+2x+4y/3)\,dS$, S: верхняя поверхность части плоскости $(x/2)+(y/3)+(z/4)=1$, лежащая в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$);

04. $I=\iint\limits_{(S)}(z+2x-4y/3)\,dS$, S: часть плоскости $(x/2)+(y/3)+(z/4)=1$, лежащая во втором октанте ($x<0$, $y>0$, $z>0$);

05. $I=\iint\limits_{(S)}xyz\,dS$, S: верхняя поверхность плоскости $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$);

06. $I=\iint\limits_{(S)}\frac{xy}{z}\,dS$, S: верхняя поверхность плоскости $x+y+z=a$, расположенной во втором октанте ($x<0$, $y>0$, $z>0$);

07. $I=\iint\limits_{(S)}x^2y^2z^2\,dx\,dy$, S: положительная сторона нижней половины сферы

$x^2+y^2+z^2=R^2$;

08. $I=\iint\limits_{(S)} x^2y^2z^2\,dx\,dy$, S: отрицательная сторона верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

09. $I=\iint\limits_{(S)} z^4\,dx\,dy$, S: внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

10. $I=\iint\limits_{(S)}\left(z^2-x^2-y^2\right)dx\,dy$, S: внутренняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$;

11. $I=\iint\limits_{(S)} xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$, S: внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

12. $I=\iint\limits_{(S)} xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$, S: внутренняя сторона пирамиды, составленной плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

13. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в первом октанте;

14. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной во втором октанте;

15. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в третьем октанте;

16. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz-x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в четвёртом октанте;

17. $I=\iint\limits_{(S)} -y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

18. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz-x^2y^2dx\,dz$, S: внутренняя сторона поверхности, расположенной во втором октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

19. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: внутренняя сторона поверхности, расположенной во третьем октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

20. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy+x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: внешняя сторона поверхности, расположенной во четвёртом октанте и составленной из параболоида вращения $-z=x^2+y^2$ и координатных плоскостей;

21. $I=\int\limits_{(L)} x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2+y^2=1$, $z=0$;

22. $I=\int\limits_{(L)} y^3\,dx+z\,dy+x^2\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2+y^2=1$, $z=0$;

23. $I=\int\limits_{(L)} z\,dx+y^3\,dy+x^2\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2-y^2=1$, $z=0$;

24. $I=\int\limits_{(L)} z\,dx-y^3\,dy-x^2\,dz$ (преобразовать по формуле Стокса в интеграл по поверхности, натянутой на контур L), L: $x^2-2x+y^2+2y=1$, $z=0$;

25. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в пятом октанте;

26. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^4dx\,dy+x^4z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в шестом октанте;

27. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в седьмом октанте;

28. $I=\iint\limits_{(S)} y^2z^2dx\,dy-x^2z^2dy\,dz+x^2y^2dx\,dz$, S: положительная сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в восьмом октанте;

29. $I=\iint\limits_{(S)}\left(z-2x+4y^2\right)dS$, S: часть плоскости $x+2y+3z=4$, лежащая в первом октанте;

30. $I=\iint\limits_{(S)}\left(z^2+3y+2x^3\right)dS$, S: часть плоскости $4x+3y+2z=10$, лежащая в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

XII) Дан треугольник ABC, его вершины $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ и $C(x_C,y_C)$. Определить: (*i*) уравнение прямых AC, BC, AB; (*ii*) внутренние углы треугольника; (*iii*) уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно стороне AC; (*iv*) уравнения высоты и медианы, проведённых из точки B; (*v*) координаты точки B', симметричной точке B, относительно прямой AC; (*vi*) расстояние от точки B до прямой AC.

01. $A(1,2)$, $B(5,4)$, $C(5,6)$; 02. $A(4,3)$, $B(1,8)$, $C(3,2)$;

03. $A(6,4)$, $B(3,8)$, $C(3,5)$;

04. $A(8,2)$, $B(1,3)$, $C(5,7)$;

05. $A(4,2)$, $B(6,5)$, $C(2,3)$;

06. $A(2,3)$, $B(1,5)$, $C(8,6)$;

07. $A(7,7)$, $B(2,1)$, $C(4,0)$;

08. $A(3,5)$, $B(7,2)$, $C(4,2)$;

09. $A(3,1)$, $B(3,5)$, $C(4,0)$;

10. $A(4,6)$, $B(2,3)$, $C(7,8)$;

11. $A(6,5)$, $B(3,4)$, $C(4,1)$;

12. $A(0,2)$, $B(8,6)$, $C(4,2)$;

13. $A(2,9)$, $B(8,5)$, $C(4,2)$;

14. $A(3,7)$, $B(9,6)$, $C(5,8)$;

15. $A(3,9)$, $B(2,2)$, $C(3,1)$;

16. $A(5,5)$, $B(2,3)$, $C(7,4)$;

17. $A(8,2)$, $B(2,5)$, $C(4,3)$;

18. $A(3,2)$, $B(7,2)$, $C(5,4)$;

19. $A(2,3)$, $B(6,8)$, $C(3,4)$;

20. $A(0,7)$, $B(9,8)$, $C(6,4)$;

21. $A(5,3)$, $B(2,8)$, $C(9,9)$;

22. $A(2,4)$, $B(3,8)$, $C(7,5)$;

23. $A(6,4)$, $B(2,3)$, $C(5,8)$;

24. $A(8,9)$, $B(9,5)$, $C(4,3)$;

25. $A(4,3)$, $B(9,5)$, $C(4,3)$;

26. $A(2,1)$, $B(7,8)$, $C(3,5)$;

27. $A(8,8)$, $B(0,3)$, $C(1,1)$;

28. $A(1,7)$, $B(7,5)$, $C(4,3)$;

29. $A(5,6)$, $B(4,8)$, $C(9,3)$;

30. $A(5,6)$, $B(3,0)$, $C(2,5)$.

XIII) Даны две прямые $(x-x_1)/l_1=(y-y_1)/m_1=(z-z_1)/n_1$ и $(x-x_2)/l_2=(y-y_2)/m_2=(z-z_2)/n_2$, плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Определить: (*i*) угол между двумя прямыми; (*ii*) угол между первой прямой и плоскостью; (*iii*) уравнение плоскости, проходящей через первую прямую и точку M_0; (*iv*) уравнение плоскости, проходящей через первую прямую и параллельную второй прямой, если $l_1=m_1= n_1=1$, $l_2=2$, $m_2=3$, $n_2=4$ и

01. $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=3$, $y_0=4$, $y_1=3$, $y_2=2$, $z_0=5$, $z_1=6$, $z_2=4$, $A=3$, $B=6$, $C=2$, $D=1$;

02. $x_0=3$, $x_1=6$, $x_2=5$, $y_0=4$, $y_1=8$, $y_2=3$, $z_0=2$, $z_1=1$, $z_2=7$, $A=9$, $B=6$, $C=4$, $D=2$;

03. $x_0=8$, $x_1=7$, $x_2=4$, $y_0=2$, $y_1=7$, $y_2=1$, $z_0=3$, $z_1=8$, $z_2=7$, $A=2$, $B=1$, $C=1$, $D=6$;

04. $x_0=4$, $x_1=2$, $x_2=1$, $y_0=3$, $y_1=7$, $y_2=9$, $z_0=8$, $z_1=3$, $z_2=8$, $A=5$, $B=0$, $C=3$, $D=2$;

05. $x_0=1$, $x_1=6$, $x_2=4$, $y_0=0$, $y_1=2$, $y_2=1$, $z_0=1$, $z_1=2$, $z_2=5$, $A=5$, $B=5$, $C=2$, $D=6$;

06. $x_0=9$, $x_1=8$, $x_2=0$, $y_0=1$, $y_1=1$, $y_2=3$, $z_0=2$, $z_1=0$, $z_2=5$, $A=1$, $B=3$, $C=8$, $D=9$;

07. $x_0=2$, $x_1=1$, $x_2=6$, $y_0=4$, $y_1=5$, $y_2=8$, $z_0=3$, $z_1=2$, $z_2=2$, $A=1$, $B=0$, $C=7$, $D=9$;

08. $x_0=8$, $x_1=6$, $x_2=4$, $y_0=2$, $y_1=0$, $y_2=7$, $z_0=1$, $z_1=3$, $z_2=8$, $A=7$, $B=2$, $C=1$, $D=1$;

09. $x_0=0$, $x_1=3$, $x_2=2$, $y_0=8$, $y_1=6$, $y_2=4$, $z_0=3$, $z_1=7$, $z_2=1$, $A=0$, $B=5$, $C=4$, $D=3$;

10. $x_0=6$, $x_1=5$, $x_2=4$, $y_0=3$, $y_1=2$, $y_2=1$, $z_0=6$, $z_1=4$, $z_2=5$, $A=2$, $B=7$, $C=0$, $D=1$;

11. $x_0=1$, $x_1=7$, $x_2=8$, $y_0=5$, $y_1=2$, $y_2=1$, $z_0=3$, $z_1=2$, $z_2=5$, $A=8$, $B=7$, $C=4$, $D=6$;

12. $x_0=2$, $x_1=5$, $x_2=3$, $y_0=2$, $y_1=4$, $y_2=1$, $z_0=3$, $z_1=7$, $z_2=5$, $A=2$, $B=8$, $C=0$, $D=6$;

13. $x_0=4$, $x_1=3$, $x_2=2$, $y_0=1$, $y_1=3$, $y_2=2$, $z_0=7$, $z_1=5$, $z_2=9$, $A=4$, $B=8$, $C=3$, $D=2$;

14. x_0=5, x_1=9, x_2=4, y_0=0, y_1=3, y_2=6, z_0=9, z_1=3, z_2=2, A=8, B=7, C=4, D=0;
15. x_0=5, x_1=2, x_2=9, y_0=0, y_1=6, y_2=4, z_0=2, z_1=5, z_2=3, A=7, B=2, C=1, D=7;
16. x_0=3, x_1=8, x_2=6, y_0=5, y_1=3, y_2=2, z_0=7, z_1=9, z_2=5, A=4, B=6, C=2, D=3;
17. x_0=8, x_1=9, x_2=5, y_0=2, y_1=4, y_2=3, z_0=2, z_1=2, z_2=8, A=0, B=4, C=3, D=9;
18. x_0=5, x_1=4, x_2=0, y_0=3, y_1=2, y_2=8, z_0=9, z_1=6, z_2=5, A=4, B=3, C=2, D=1;
19. x_0=1, x_1=1, x_2=0, y_0=7, y_1=1, y_2=5, z_0=4, z_1=9, z_2=5, A=7, B=1, C=8, D=3;
20. x_0=2, x_1=4, x_2=3, y_0=6, y_1=9, y_2=8, z_0=4, z_1=5, z_2=3, A=8, B=9, C=3, D=7;
21. x_0=6, x_1=4, x_2=9, y_0=8, y_1=3, y_2=5, z_0=2, z_1=1, z_2=1, A=5, B=3, C=6, D=8;
22. x_0=0, x_1=0, x_2=6, y_0=4, y_1=9, y_2=5, z_0=4, z_1=3, z_2=9, A=5, B=4, C=6, D=3;
23. x_0=5, x_1=8, x_2=9, y_0=9, y_1=3, y_2=2, z_0=2, z_1=1, z_2=3, A=4, B=3, C=7, D=9;
24. x_0=3, x_1=8, x_2=7, y_0=4, y_1=2, y_2=4, z_0=7, z_1=8, z_2=7, A=2, B=9, C=6, D=8;
25. x_0=9, x_1=5, x_2=2, y_0=4, y_1=3, y_2=3, z_0=9, z_1=7, z_2=8, A=9, B=1, C=2, D=6;
26. x_0=2, x_1=4, x_2=3, y_0=8, y_1=7, y_2=1, z_0=3, z_1=2, z_2=2, A=6, B=4, C=9, D=2;
27. x_0=1, x_1=8, x_2=5, y_0=4, y_1=9, y_2=8, z_0=0, z_1=5, z_2=9, A=1, B=8, C=3, D=3;
28. x_0=9, x_1=9, x_2=5, y_0=3, y_1=1, y_2=8, z_0=6, z_1=4, z_2=5, A=2, B=2, C=5, D=6;
29. x_0=6, x_1=4, x_2=8, y_0=3, y_1=3, y_2=2, z_0=9, z_1=1, z_2=5, A=9, B=4, C=8, D=3;
30. x_0=0, x_1=5, x_2=6, y_0=2, y_1=4, y_2=3, z_0=8, z_1=5, z_2=2, A=2, B=6, C=3, D=4.

XIV) Даны три точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$. Найти: (i) полуоси a и b, расстояние между фокусами, эксцентриситет эллипса, проходящего через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, а также гиперболы проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_3(x_3,y_3)$; (ii) каноническое уравнение параболы, если $M_1(x_1,y_1)$ - её фокус, а $y = y_2$ - её директриса; (iii) записать канонические уравнения для рассмотренных случаев.

01. $M_1(3,1)$, $M_2(1,2)$, $M_3(4,2)$;
02. $M_1(4,1)$, $M_2(0,2)$, $M_3(3,0)$;
03. $M_1(6,2)$, $M_2(4,3)$, $M_3(5,4)$;
04. $M_1(7,1)$, $M_2(5,4)$, $M_3(8,2)$;
05. $M_1(4,3)$, $M_2(7,0)$, $M_3(5,1)$;
06. $M_1(4,3)$, $M_2(1,2)$, $M_3(2,1)$;
07. $M_1(5,3)$, $M_2(7,1)$, $M_3(4,2)$;
08. $M_1(5,1)$, $M_2(0,2)$, $M_3(3,2)$;
09. $M_1(1/5,2/3)$,$M_2(1,1/3)$, $M_3(1/6,0)$;
10. $M_1(2,5)$, $M_2(0,7)$, $M_3(1,2)$;
11. $M_1(4,2)$, $M_2(81/2,0)$, $M_3(3,1)$;
12. $M_1(6,0)$, $M_2(1,2)$, $M_3(7,1)$;
13. $M_1(4,5)$, $M_2(1,2)$, $M_3(3,1)$;
14. $M_1(7,1)$, $M_2(5,2)$, $M_3(1,2)$;
15. $M_1(2,1)$, $M_2(4,3/4)$, $M_3(7,4)$;
16. $M_1(2,7)$, $M_2(3,5)$, $M_3(1,1/3)$;
17. $M_1(4,5)$, $M_2(0,6)$, $M_3(3,0)$;
18. $M_1(3,1/3)$, $M_2(2,1)$, $M_3(2,1)$;
19. $M_1(2,3)$, $M_2(3,0)$, $M_3(1/2,1)$;
20. $M_1(1,1/2)$, $M_2(2,0)$, $M_3(2,3)$;
21. $M_1(5,0)$, $M_2(4,2)$, $M_3(3,1)$;
22. $M_1(5,4)$, $M_2(3,5)$, $M_3(1,1/3)$;

23. $M_1(6,4)$, $M_2(5,3)$, $M_3(3,1)$;
24. $M_1(6,0)$, $M_2(5,1)$, $M_3(8,3)$;
25. $M_1(2,3)$, $M_2(1,6)$, $M_3(4,7)$;
26. $M_1(5,1)$, $M_2(3,2)$, $M_3(6,3)$;
27. $M_1(5,1)$, $M_2(4,3)$, $M_3(6,2)$;
28. $M_1(6,1)$, $M_2(5,3)$, $M_3(7,2)$;
29. $M_1(2,1)$, $M_2(0,3)$, $M_3(6,7)$;
30. $M_1(9,0)$, $M_2(4,1)$, $M_3(11,2)$.

XV) Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду, назвать и построить кривые.

01. $5x^2+7xy+9y^2-x-8y+11=0$;
02. $3x^2+2xy+5y^2-4y+27=0$;
03. $9x^2+5xy+4y^2+7x-7y+4=0$;
04. $4x^2-8xy+5y^2+5x-6y+11=0$;
05. $4x^2+3xy+8y^2-8y-3=0$;
06. $2x^2+4xy-7y^2-5x-4y-9=0$;
07. $8x^2+3xy+3y^2-5x-4y+9=0$;
08. $7x^2+4xy+8y^2-5y-4=0$;
09. $-3x^2+8xy+9y^2+7x+6y+5=0$;
10. $4x^2+3xy-5y^2+8x-7y+7=0$;
11. $5x^2+4xy+3y^2-2y+4=0$;
12. $7x^2+8xy+9y^2-3x-8y+4=0$;
13. $8x^2+9xy+7y^2-5x-8y+6=0$;
14. $12x^2+5xy+6y^2-4y=0$;
15. $7x^2+8xy-9y^2+8x-7y+3=0$;
16. $9x^2+5xy+3y^2-8x-6y+4=0$;
17. $13x^2+9xy-3y^2-8y=0$;
18. $9x^2+6xy+5y^2+2x-2y+8=0$;
19. $-x^2+5xy+8y^2-6x+5y+4=0$;
20. $3x^2+9xy+6y^2+2x-11y=0$;
21. $2x^2+7xy+y^2+2x-4y=0$;
22. $6x^2+2xy+y^2-2x-5y+7=0$;
23. $7x^2+2xy+15y^2+8x-4y+9=0$;
24. $9x^2+3xy+7y^2+2x+1=0$;
25. $3x^2+2xy+6y^2-5x-4y+8=0$;
26. $3x^2+2xy+2y^2+8x+9y+1=0$;
27. $3x^2+2xy-y^2-7x-4y+2=0$;
28. $7xy+7y^2-9x-3y+2=0$;
29. $5x^2+4xy+3y^2+11x-3y+12=0$;
30. $3x^2+6xy-7y^2+2x-4y+8=0$.

XVI) Привести уравнения поверхностей к каноническому виду, назвать и построить поверхности.

01. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{11}=6$;
02. $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}$;
03. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=4$;
04. $0{,}5x^2+y^2-z^2=5$;
05. $y^2=5x$;
06. $0{,}5x^2+y^2-z^2=-7$;
07. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=3$;
08. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{6}=-3$;
05. $z=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}$;
10. $2z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}$;
11. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{5}=-15$;
12. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=11$;

13. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{3}=21$; 14. $9z=\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}$; 15. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{7}=-4$;

16. $\frac{x^2}{2}+y^2-\frac{z^2}{3}=-7$; 17. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}-z^2=4$; 18. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+z^2=4$;

19. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$; 20. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}-z^2=0$; 21. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}+2\frac{z^2}{7}=1$;

22. $3\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{2}=-18$; 23. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{7}=0$; 24. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=5$;

25. $3z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}$; 26. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2=4$; 27. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{7}-\frac{z^2}{1}=0$;

28. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=1$; 29. $2x^2+5y^2+3z^2=11$; 30. $\frac{x^2}{2}+y^2+z^2=7$.

XVII) Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между этими векторами и площадь параллелограмма, построенного на них, если

01*a*. $\vec{a}=3\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$;

01*b*. $\vec{a}=2\vec{c}+3\vec{d}$, $\vec{b}=2\vec{c}-3\vec{d}$, $|\vec{c}|=2$, $|\vec{d}|=2$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d}=60^\circ$;

02*a*. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$;

02*b*. $\vec{a}=2\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}=\vec{c}+4\vec{d}$, $|\vec{c}|=2$, $|\vec{d}|=1$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d}=60^\circ$;

03*a*. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$;

03*b*. $\vec{a}=3\vec{c}-7\vec{d}$, $\vec{b}=8\vec{c}+11\vec{d}$, $|\vec{c}|=3$, $|\vec{d}|=4$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d}=60^\circ$;

04*a*. $\vec{a}=-3\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$;

04*b*. $\vec{a}=2\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}=7\vec{c}+4\vec{d}$, $|\vec{c}|=3$, $|\vec{d}|=3$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d}=60^\circ$;

05*a*. $\vec{a}=6\vec{i}+8\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$;

05*b*. $\vec{a}=6\vec{c}+5\vec{d}$, $\vec{b}=3\vec{d}-2\vec{c}$, $|\vec{c}|=6$, $|\vec{d}|=2$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d}=60^\circ$;

06*a*. $\vec{a}=8\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$;

06*b*. $\vec{a}=7\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{b}=\vec{c}+11\vec{d}$, $|\vec{c}|=1$, $|\vec{d}|=4$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d}=45^\circ$;

07*a*. $\vec{a}=3\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=8\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$;

07*b*. $\vec{a}=5\vec{c}+8\vec{d}$, $\vec{b}=3\vec{c}+2\vec{d}$, $|\vec{c}|=2$,

$\left|\vec{d}\right| = 8$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 45^\circ$;

08*a*. $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$;

08*b*. $\vec{a} = 9\vec{c} + 12\vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 7\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 4$, $\left|\vec{d}\right| = 6$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 45^\circ$;

09*a*. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + 0{,}25\vec{k}$;

09*b*. $\vec{a} = 7\vec{c} + 11\vec{d}$, $\vec{b} = 8\vec{c} + 2\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 5$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 45^\circ$;

10*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 21\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$;

10*b*. $\vec{a} = 4\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} = 7\vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 3$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 45^\circ$;

11*a*. $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 9\vec{j} + 11\vec{k}$;

11*b*. $\vec{a} = -6\vec{c} + 4\vec{d}$, $\vec{b} = 7\vec{c} + 11\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 4$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 30^\circ$;

12*a*. $\vec{a} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

12*b*. $\vec{a} = 4\vec{c} + 12\vec{d}$, $\vec{b} = 5\vec{c} + 8\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 13$, $\left|\vec{d}\right| = 16$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 30^\circ$;

13*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} + 9\vec{j} + 81\vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{j} + 9\vec{k}$;

13*b*. $\vec{a} = 2\vec{c} + 8\vec{d}$, $\vec{b} = 9\vec{c} + 23\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 9$, $\left|\vec{d}\right| = 9$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 30^\circ$;

14*a*. $\vec{a} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 2\vec{k}$;

14*b*. $\vec{a} = 8\vec{c} + 19\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 30^\circ$;

15*a*. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

15*b*. $\vec{a} = 5\vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 4\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 5$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 30^\circ$;

16*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$;

16*b*. $\vec{a} = 3\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} = 4\vec{c} + 2\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 90^\circ$;

17*a*. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$;

17*b*. $\vec{a} = 7\vec{c} + 4\vec{d}$, $\vec{b} = 9\vec{c} + 33\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 1$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 90^\circ$;

18*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

18*b*. $\vec{a} = 11\vec{c} + 3\vec{d}$, $\vec{b} = 27\vec{c} + 5\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 90^\circ$;

19*a*. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$;

19*b*. $\vec{a} = 3\vec{c} + 9\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} + 8\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 6$,

$\left|\vec{d}\right| = 5$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 90^\circ$;

20*a*. $\vec{a} = -3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$;

20*b*. $\vec{a} = 7\vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 4$, $\left|\vec{d}\right| = 3$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 90^\circ$;

21*a*. $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$;

21*b*. $\vec{a} = 3\vec{c} + 6\vec{d}$, $\vec{b} = 9\vec{c} + 12\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 1$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 120^\circ$;

22*a*. $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$;

22*b*. $\vec{a} = 7\vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{b} = 8\vec{c} + 4\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 9$, $\left|\vec{d}\right| = 11$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 120^\circ$;

23*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$;

23*b*. $\vec{a} = \vec{c} + 5\vec{d}$, $\vec{b} = 5\vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 7$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 120^\circ$;

24*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$;

24*b*. $\vec{a} = 2\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} + 6\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, $\left|\vec{d}\right| = 6$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 120^\circ$;

25*a*. $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

25*b*. $\vec{a} = \vec{c} + 3\vec{d}$, $\vec{b} = 4\vec{c} + 9\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 9$, $\left|\vec{d}\right| = 12$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 120^\circ$;

26*a*. $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

26*b*. $\vec{a} = 2\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} = 3\vec{c} + 8\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 4$, $\left|\vec{d}\right| = 4$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 135^\circ$;

27*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} + 9\vec{j} + 81\vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 2\vec{k}$;

27*b*. $\vec{a} = 3\vec{c} + 8\vec{d}$, $\vec{b} = 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 5$, $\left|\vec{d}\right| = 1$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 135^\circ$;

28*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} + 9\vec{j} + 81\vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 2\vec{k}$;

28*b*. $\vec{a} = 4\vec{c} + 7\vec{d}$, $\vec{b} = 6\vec{c} + 4\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, $\left|\vec{d}\right| = 7$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 135^\circ$;

29*a*. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$;

29*b*. $\vec{a} = 5\vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{b} = 3\vec{c} + 11\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\left|\vec{d}\right| = 5$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 135^\circ$;

30*a*. $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

30*b*. $\vec{a} = 6\vec{c}$, $\vec{b} = 4\vec{c} + 3\vec{d}$, $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 1$, $\vec{c}\,^\wedge\,\vec{d} = 135^\circ$.

XVIII) Найти объёмы параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ и пирамиды $A_1B_1C_1D_2$, если

01. $A_1(3,2,1)$, $B_1(6,8,4)$, $C_1(5,7,2)$, $D_2(4,3,-8)$;

02. $A_1(5,4,3)$, $B_1(0,-2,1)$, $C_1(5,6,1)$, $D_2(3,4,5)$;

03. $A_1(6,8,5)$, $B_1(4,3,0)$, $C_1(2,1,7)$, $D_2(3,7,-4)$;

04. $A_1(2,1,1)$, $B_1(3,0,0)$, $C_1(4,1,5)$, $D_2(6,2,4)$;

05. $A_1(2,5,3)$, $B_1(4,2,2)$, $C_1(5,5,5)$, $D_2(3,6,2)$;

06. $A_1(6,5,-4)$, $B_1(1,-3,6)$, $C_1(-2,-4,-6)$, $D_2(0,3,5)$;

07. $A_1(1,8,6)$,$B_1(2,5,4)$, $C_1(0,8,3)$, $D_2(7,2,1)$;

08. $A_1(0,0,1)$,$B_1(7,2,0)$, $C_1(0,2,-11)$, $D_2(5,8,7)$;

09. $A_1(5,3,4)$, $B_1(2,7,7)$, $C_1(5,1,1)$, $D_2(0,8,7)$;

10. $A_1(6,2,4)$, $B_1(8,5,7)$, $C_1(3,1,2)$, $D_2(5,4,8)$;

11. $A_1(0,3,3)$, $B_1(5,8,7)$, $C_1(4,3,1)$, $D_2(8,8,6)$;

12. $A_1(5,4,2)$, $B_1(0,8,-3)$, $C_1(-3,6,5)$, $D_2(2,2,2)$;

13. $A_1(7,4,5)$, $B_1(-3,5,1)$, $C_1(2,1,1)$, $D_2(4,3,2)$;

14. $A_1(5,4,2)$, $B_1(2,7,5)$, $C_1(2,7,8)$, $D_2(4,5,1)$;

15. $A_1(8,7,4)$, $B_1(5,3,2)$, $C_1(4,3,2)$, $D_2(5,8,7)$;

16. $A_1(3,8,3)$, $B_1(5,1,1)$, $C_1(2,1,4)$, $D_2(7,8,9)$;

17. $A_1(9,5,7)$, $B_1(8,9,4)$, $C_1(5,7,8)$, $D_2(4,3,-1)$;

18. $A_1(1,2,1)$, $B_1(3,7,5)$, $C_1(2,1,1)$, $D_2(5,4,0)$;

19. $A_1(19,0,1)$, $B_1(4,3,1)$, $C_1(2,1,1)$, $D_2(3,6,9)$;

20. $A_1(1,7,8)$, $B_1(7,1,1)$, $C_1(0,8,5)$, $D_2(4,3,1)$;

21. $A_1(2,3,7)$, $B_1(9,5,4)$, $C_1(8,6,4)$, $D_2(2,3,1)$;

22. $A_1(4,3,1)$, $B_1(8,6,4)$, $C_1(4,5,6)$, $D_2(2,5,-1)$;

23. $A_1(3,6,4)$, $B_1(2,1,3)$, $C_1(9,7,2)$, $D_2(4,3,2)$;

24. $A_1(6,9,4)$, $B_1(-6,2,2)$, $C_1(0,7,4)$, $D_2(9,3,2)$;

25. $A_1(6,9,2)$, $B_1(5,3,1)$, $C_1(3,2,9)$, $D_2(5,7,3)$;

26. $A_1(5,8,1)$,$B_1(3,4,1)$,$C_1(2,1,8)$, $D_2(4,3,11)$;

27. $A_1(3,8,1)$, $B_1(4,9,11)$, $C_1(2,3,5)$, $D_2(1,3,1)$;

28. $A_1(6,9,4)$, $B_1(5,3,0)$, $C_1(8,3,4)$, $D_2(3,8,1)$;

29. $A_1(5,9,0)$, $B_1(6,2,1)$, $C_1(5,4,3)$, $D_2(7,9,0)$;

30. $A_1(2,4,6)$, $B_1(3,7,7)$, $C_1(2,7,8)$, $D_2(5,1,3)$.

XIX) Построить графики зависимости издержек от размера партии товара x при различных значениях параметров a, b, c, d

01. a=1, b=3, c=2, d=5	02. a=2, b=4, c=1, d=2	03. a=7, b=1, c=3, d=3
04. a=3, b=2, c=5, d=1	05. a=2, b=5, c=4, d=4	06. a=4, b=8, c=3, d=7
07. a=5, b=1, c=2, d=3	08. a=3, b=2, c=8, d=1	09. a=2, b=4, c=3, d=2
10. a=5, b=1, c=5, d=3	11. a=1, b=2, c=3, d=1	12. a=3, b=1, c=0, d=3
13. a=6, b=3, c=1, d=4	14. a=5, b=4, c=3, d=7	15. a=1, b=2, c=4, d=5
16. a=4, b=5, c=4, d=1	17. a=3, b=3, c=1, d=4	18. a=2, b=4, c=5, d=2
19. a=1, b=0, c=4, d=1	20. a=4, b=3, c=7, d=7	21. a=3, b=6, c=0, d=2
22. a=5, b=4, c=2, d=3	23. a=4, b=5, c=5, d=0	24. a=2, b=1, c=4, d=5
25. a=8, b=3, c=1, d=2	26. a=4, b=2, c=0, d=5	27. a=1, b=1, c=3, d=2
28. a=3, b=5, c=1, d=3	29. a=2, b=3, c=3, d=4	30. a=5, b=4, c=5, d=0

XX) Построить зависимости себестоимости единицы S выпускаемой продукции от производительности предприятия V при различных значениях коэффициентов S_i

01. S_1=1, S_2=3, S_3=2	02. S_1=2, S_2=4, S_3=1	03. S_1=7, S_2=1, S_3=3
04. S_1=3, S_2=2, S_3=5	05. S_1=2, S_2=5, S_3=4	06. S_1=4, S_2=8, S_3=3
07. S_1=5, S_2=1, S_3=2	08. S_1=3, S_2=2, S_3=8	09. S_1=2, S_2=3, S_3=1
10. S_1=4, S_2=1, S_3=5	11. S_1=5, S_2=4, S_3=1	12. S_1=8, S_2=7, S_3=3
13. S_1=5, S_2=1, S_3=3	14. S_1=7, S_2=3, S_3=2	15. S_1=5, S_2=6, S_3=8
16. S_1=4, S_2=5, S_3=1	17. S_1=3, S_2=6, S_3=5	18. S_1=4, S_2=2, S_3=5
19. S_1=2, S_2=5, S_3=8	20. S_1=1, S_2=3, S_3=4	21. S_1=5, S_2=3, S_3=1
22. S_1=4, S_2=2, S_3=6	23. S_1=3, S_2=7, S_3=5	24. S_1=1, S_2=4, S_3=3
25. S_1=5, S_2=1, S_3=2	26. S_1=8, S_2=4, S_3=5	27. S_1=6, S_2=3, S_3=1
28. S_1=3, S_2=2, S_3=5	29. S_1=4, S_2=3, S_3=7	30. S_1=2, S_2=5, S_3=1

XXI) Построить зависимости функции прибыли от объемов выпускаемых продукций x_1 и x_2; x_2 и x_3; x_1 и x_3

01. a_1=1, a_2=3, a_3=2, b_1=0.5, b_2=2.5, b_3 =1, c_1=3, c_2=5, c_3=1, c_4=6, c_5=9, c_6=4, d_1 =3, d_2=1.5	02. a_1=2, a_2=4, a_3=3, b_1=1, b_2=3, b_3=0, c_1=2, c_2=1, c_3=4, c_4=7, c_5=2, c_6=1, d_1=5, d_2=1
03. a_1=4, a_2=7, a_3=1, b_1=3, b_2=5, b_3=2, c_1=4, c_2=1, c_3=3, c_4=2, c_5=6, c_6=5, d_1=2, d_2=4	04. a_1=6, a_2=8, a_3=3, b_1=1, b_2=3, b_3=4, c_1=6, c_2=7, c_3=2, c_4=5, c_5=0, c_6=3, d_1=7, d_2=5
05. a_1=8, a_2=4, a_3=7, b_1=1, b_2=4, b_3=7, c_1=2, c_2=6, c_3=3, c_4=5, c_5=3.5, c_6=7, d_1 =2, d_2=4	06. a_1=1, a_2=3, a_3=2, b_1=0.5, b_2=2.5, b_3 =1, c_1=3, c_2=5, c_3=1, c_4=6, c_5=9, c_6=4, d_1 =3, d_2=1.5

07. a_1=2, a_2=8, a_3=7, b_1=4, b_2=3, b_3=2, c_1=6, c_2=4, c_3=5, c_4=2, c_5=4.5, c_6=0, d_1 =2, d_2=6

08. a_1=4, a_2=9, a_3=5, b_1=3, b_2=1, b_3=2, c_1=4, c_2=3, c_3=7, c_4=2, c_5=0, c_6=3, d_1=1, d_2=3

09. a_1=4, a_2=8, a_3=3, b_1=5, b_2=1, b_3=7, c_1=4, c_2=8, c_3=0, c_4=2, c_5=1, c_6=3, d_1=0, d_2=5

10. a_1=8, a_2=6, a_3=5, b_1=4, b_2=3, b_3=7, c_1=2, c_2=4, c_3=5, c_4=3, c_5=1, c_6=4, d_1=8, d_2=3

11. a_1=3, a_2=7, a_3=1, b_1=4, b_2=7, b_3=5, c_1=3, c_2=2, c_3=6, c_4=4, c_5=0, c_6=5, d_1=3 d_2=1

12. a_1=2, a_2=6, a_3=5, b_1=3, b_2=1, b_3=5, c_1=2, c_2=7, c_3=4, c_4=8, c_5=5, c_6=6, d_1=1, d_2=3

13. a_1=2, a_2=5, a_3=3, b_1=1, b_2=8, b_3=6, c_1=4, c_2=3, c_3=1, c_4=5, c_5=7, c_6=1, d_1=3, d_2=2

14. a_1=4, a_2=9, a_3=5, b_1=1, b_2=3, b_3=2, c_1=5, c_2=3, c_3=6, c_4=9, c_5=8, c_6=0, d_1=3, d_2=2

15. a_1=8, a_2=5, a_3=4, b_1=3, b_2=7, b_3=2, c_1=5, c_2=1, c_3=3, c_4=0, c_5=8, c_6=5, d_1=4, d_2=9

16. a_1=2, a_2=5, a_3=7, b_1=9, b_2=4, b_3=9, c_1=2.5, c_2=8, c_3=3, c_4=2, c_5=1, c_6=2, d_1 =4, d_2=6

17. a_1=5, a_2=3, a_3=1, b_1=2, b_2=4, b_3=6, c_1=4, c_2=9, c_3=7, c_4=5, c_5=1, c_6=9, d_1=3, d_2=1

18. a_1=3, a_2=4, a_3=6, b_1=5, b_2=1, b_3=3, c_1=8, c_2=7, c_3=1, c_4=4, c_5=5, c_6=3, d_1=6, d_2=2

19. a_1=3, a_2=6, a_3=1, b_1=2, b_2=3, b_3=9, c_1=4, c_2=0, c_3=5, c_4=7, c_5=1, c_6=4, d_1=9, d_2=2

20. a_1=2, a_2=7, a_3=1, b_1=3, b_2=5, b_3=9, c_1=4, c_2=1, c_3=6, c_4=5, c_5=2, c_6=4, d_1=9, d_2=3

21. a_1=4, a_2=9, a_3=3, b_1=1, b_2=2, b_3=9, c_1=5, c_2=0, c_3=3, c_4=4, c_5=7, c_6=5, d_1=3, d_2=4

22. a_1=4, a_2=3, a_3=7, b_1=2, b_2=0, b_3=1, c_1=3, c_2=4, c_3=2, c_4=1, c_5=7, c_6=2, d_1=1, d_2=3

23. a_1=2, a_2=6, a_3=4, b_1=2, b_2=3, b_3=4, c_1=9, c_2=3, c_3=1, c_4=6, c_5=3, c_6=2, d_1=1, d_2=4

24. a_1=5, a_2=7, a_3=1, b_1=3, b_2=4, b_3=2, c_1=0, c_2=2, c_3=7, c_4=1, c_5=3, c_6=2, d_1=6, d_2=1

25. a_1=2, a_2=4, a_3=8, b_1=3, b_2=5, b_3=9, c_1=1, c_2=3, c_3=5, c_4=9, c_5=2, c_6=4, d_1=7, d_2=5

26. a_1=2, a_2=7, a_3=5, b_1=3, b_2=9, b_3=2, c_1=7, c_2=2, c_3=5, c_4=3, c_5=9, c_6=4, d_1=2, d_2=3

27. a_1=2, a_2=4, a_3=3, b_1=2, b_2=8, b_3=6, c_1=1, c_2=0, c_3=4, c_4=2, c_5=7, c_6=4, d_1=2, d_2=3

28. a_1=2, a_2=4, a_3=3, b_1=1, b_2=6, b_3=5, c_1=0, c_2=3, c_3=4, c_4=9, c_5=5, c_6=3, d_1=4, d_2=5

29. a_1=8, a_2=4, a_3=9, b_1=3, b_2=5, b_3=8, c_1=7, c_2=1, c_3=2, c_4=5, c_5=7, c_6=3, d_1=4, d_2=8

30. a_1=3, a_2=5, a_3=2, b_1=1, b_2=6, b_3=3, c_1=5, c_2=2, c_3=4, c_4=6, c_5=1, c_6=7, d_1=3, d_2=2

XXII) Определить экстремальное значение объема выпускаемой продукции V_{extr}

01. A=1, B=3, R=2, T=5, S=3.

02. A=2, B=4, R=1, T=2, S=3

03. A=7, B=1, R=3, T=3, S=1.

04. A=3, B=2, R=5, T=1, S=1

05. A=2, B=5, R=4, T=4, S=2.

06. A=4, B=8, R=3, T=7, S=2

07. A=5, B=1, R=2, T=3, S=5.

08. A=3, B=2, R=8, T=1, S=4

09. A=2, B=3, R=4, T=5, S=1.

10. A=5, B=1, R=7, T=2, S=0

11. A=2, B=1, R=4, T=7, S=2.

12. A=3, B=7, R=9, T=3, S=5

13. A=0, B=2, R=5, T=1, S=4.

14. A=5, B=3, R=3, T=2, S=3

15. A=4, B=8, R=7, T=5, S=0.
16. A=2, B=1, R=2, T=3, S=1
17. A=1, B=3, R=1, T=4, S=1.
18. A=6, B=9, R=3, T=8, S=4
19. A=9, B=4, R=5, T=3, S=3.
20. A=7, B=2, R=9, T=1, S=6
21. A=1, B=1, R=1, T=3, S=2.
22. A=3, B=2, R=2, T=8, S=2
23. A=1, B=7, R=7, T=6, S=1.
24. A=5, B=4, R=1, T=3, S=3
25. A=7, B=3, R=2, T=2, S=0.
26. A=1, B=5, R=5, T=5, S=1
27. A=3, B=2, R=1, T=7, S=3.
28. A=8, B=3, R=0, T=0, S=4
29. A=4, B=4, R=2, T=1, S=1.
30. A=1, B=2, R=1, T=3, S=0

XXIII) Найти плотность вероятности $W(x,t)$ при постоянных коэффициентах диффузии и сноса следующих значениях параметров

01. D_0=2, K_0=-1, L=1, $f(x)=1-(x-1)^2$
02. D_0=3, K_0=-5, $L=\pi/3$, $f(x)=2\,sin(3x)$
03. D_0=2, K_0=-4, L=2, $f(x)=8-2x^2$
04 D_0=1, K_0=-3, L=3, $f(x)=27-3(x-3)^2$
05. D_0=3, K_0=1, $L=2\pi$, $f(x)=4\,sin(x/2)$
06. D_0=2, K_0=-7, $L=5\pi$, $f(x)=4\,sin(x/5)$
07. D_0=2, K_0=-0.1, $L=\pi/5$, $f(x)=4\,sin(5x)$
08. D_0=0.3, K_0=-5, L=5, $f(x)=125-5(x-5)^2$
09. D_0=0.3, K_0=-5, L=1, $f(x)=1-(x-1)^2$
10. D_0=1, K_0=-3, L=5, $f(x)=125-5(x-5)^2$
11. D_0=2, K_0=-2, $L=5\pi$, $f(x)=4\,sin(x/5)$
12. D_0=4, K_0=1, L=1, $f(x)=1-(x-1)^2$
13. D_0=2, K_0=-1, $L=\pi/5$, $f(x)=4\,sin(5x)$
14. D_0=2, K_0=-5, L=3, $f(x)=27-3(x-3)^2$
15. D_0=3, K_0=-1, L=2, $f(x)=8-2x^2$
16. D_0=4, K_0=-3, L=2, $f(x)=8-2x^2$
17. D_0=1, K_0=4, L=3, $f(x)=27-3(x-3)^2$
18. D_0=3, K_0=-5, L=1, $f(x)=1-(x-1)^2$
19. D_0=2, K_0=-3, $f(x)=2\,cos(3x+1)$;
20. D_0=1, K_0=3, $L=\pi/5$, $f(x)=4\,sin(5x)$
21. D_0=1, K_0=2, $L=\pi/3$, $f(x)=2\,sin(3x)$
22 D_0=1, K_0=-2, L=2, $f(x)=8-2x^2$
23. D_0=5, K_0=-2, $L=\pi/3$, $f(x)=2\,sin(3x)$
24. D_0=4, K_0=-5, L=1, $f(x)=1-(x-1)^2$
25. D_0=3, K_0=-3, L=3, $f(x)=27-3(x-3)^2$
26. D_0=5, K_0=-4, $L=\pi/5$, $f(x)=4\,sin(5x)$
27. D_0=3, K_0=1, L=2, $f(x)=8-2x^2$
28. D_0=1, K_0=-3, $L=2\pi$, $f(x)=4\,sin(x/2)$
29. D_0=2, K_0=-5, $L=\pi/3$, $f(x)=2\,sin(3x)$
30. D_0=3, K_0=-2, L=2, $f(x)=8-2x^2$

XXIV) Найти плотность вероятности $W(x,t)$ при переменных коэффициентах диффузии и сноса для параметров, приведённых в задании XVIII и $g(x,t)=(1-x/L)(1-D_0t/L^2)$, $h(x,t)=(1-x/L)(1-K_0t/L)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко, В.Н. Четвериков. - М.: “Наука”, 2000.
2. Садовничая И.В., Фоменко Т.Н. математический анализ. Функции многих переменных / И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко. 2-е изд., пер. и доп. Учебник и практикум для академического бакалавриата - М.: Издательство Юрайт, 2019.
3. Ивлев В.В. Математический анализ. Функции многих переменных / В.В. Ивлев. - М.: “ИКАР”, 2013.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1,2,3 / Л.Д. Кудрявцев. - М.: Высшая школа, 1981.
6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Т. 1,2 / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. - М.: Высшая школа, 1981.
7. Соколов Г.А. Теория случайных процессов для экономистов / Г.А. Соколов. Санкт-Петербург: Лань. 2010.
8. Богачев В.И., Крылов Н., Рёкнер М., Шапошников С. Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова / В.И. Богачев, Н. Крылов, М. Рёкнер, С. Шапошников. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2013.

Евгений Леонидович **Панкратов**

ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23