МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

С.В. Напалков,
Л.Ю. Нестерова

Избранные вопросы арифметики
(теория делимости целых чисел)

учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией
Балахнинского филиала
для обучающихся по программам среднего общего образования
Специализированного учебного научного центра ННГУ

Нижний Новгород
2021

УДК 512.622(075.8)
ББК 22.144.77я73

Н 270 Напалков С.В., Нестерова Л.Ю. Избранные вопросы арифметики (теория делимости целых чисел): учебное пособие: учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 71 с.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор П.Б. Болдыревский

Настоящее учебное пособие посвящено основным разделам теории чисел, которую справедливо называют азбукой алгебры. Основные математические сведения позволяют решать большой спектр нестандартных задач. Поиск рационального решения таких задач – одна из самых парадоксальных проблем математики. Эта книга позволяет читателю не только познакомиться с теоретическими сведениями арифметики, но и иметь возможность использовать полноценное руководство к решению задач.

Пособие подготовлено для учащихся по программам среднего общего образования, Специализированного учебного научного центра ННГУ.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии Балахнинского филиала
к.э.н. С.С. Квашнин

УДК 512.622(075.8)
ББК 22.144.77я73

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание «Избранные вопросы арифметики» состоит из главы, раскрывающей теорию делимости на множестве целых чисел.

В учебном пособии изложены важные научные теоретические сведения арифметики в психологически доступной трактовке, что позволяет не потерять интерес не только к решению нестандартных задач различного уровня трудности (задачи I типа – по образцу, или задачи II типа требующие специальных методов), но и к изучению математики в целом. Эти задачи способствуют активизации мыслительной деятельности, дают возможность самостоятельно составить подобные задачи, что приводит со временем к открытиям в различных областях математики.

Для более глубоких знаний по курсу в учебное пособие включена информация о конкретных исторических процессах, необходимых для понимания тонкостей, которые великие математики применяли в решении проблем, связанных с теорией чисел.

В пособии изложена теория делимости на множестве целых чисел, дано теоретическое обоснование вопросов, связанных с делимостью школьного курса математики. Рассмотрены свойства отношения делимости, деление целых чисел с остатком, простых чисел, вводится алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя целых чисел. Читатель знакомиться с различными системами счисления, числовыми функциями и цепными дробями.

Каждый параграф начинается с вопросов или решения задачи, нацеленных на установление закономерности, которую в процессе изучения материала необходимо доказать или опровергнуть. Теоретический материал необходим для решения задач, приведенных как в параграфе, так и в практикуме.

В учебном пособии приведены не только ответы, но и указания, полное решение нестандартных задач. В целях удобства решения задач учебник снабжен приложениями, в частности, таблицей простых чисел, таблицей индексов и т.д.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1.
ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В первой главе рассмотрены вопросы, связанные с делимостью целых чисел, изучаемых в курсе математики и алгебры средней школы. Глава состоит из 12 параграфов.

Будем рассматривать только целые числа, поэтому под словом число понимаем «целое число», т.е. любое из чисел: 0, 1, – 1, 2, – 2, 3, – 3, ...

Они состоят из натуральных чисел (1, 2, 3, ...), нуля и противоположных натуральных чисел (– 1, – 2, – 3, ...). $\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{N}\} \cup \{0\} \cup \{-\boldsymbol{N}\}$.

Множества чисел располагаются следующим образом: натуральные числа, целые, рациональные, действительные и комплексные числа (рис. 1).

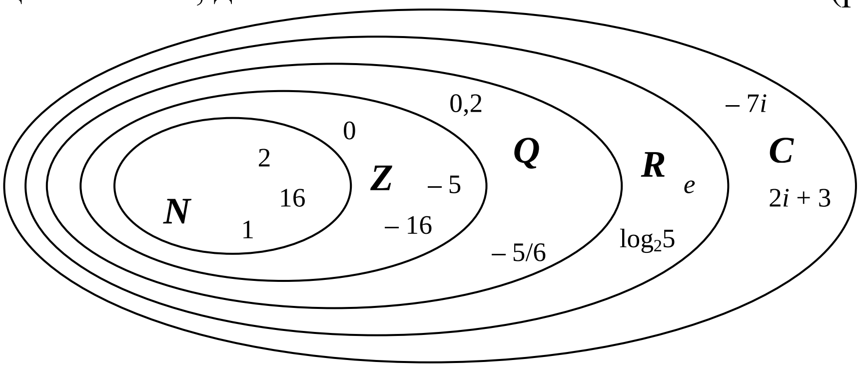


Рис. 1. Числовые множества

Отрицательные числа встречаются уже у греческого математика Диофанта (рис. 2), но он называет их «недопустимыми» и не придает им особого значения при решении задач.

Индийский математик Брахмагупта (рис. 3) описывает подробный перечень правил сложения и вычитания отрицательных чисел. Приведем некоторые из них: «Сумма двух имуществ есть имущество»; «Сумма двух долгов есть долг»; «Сумма имущества и долга равна их разности». Отрицательные числа долгое время не признавались учеными.

Так в Европе в 1544 г. немецкий математик Штифель (рис. 4) называет отрицательные числа «никчемными».

Рис. 2. Диофант
(ок. 215 г. – ок. 299 г.)

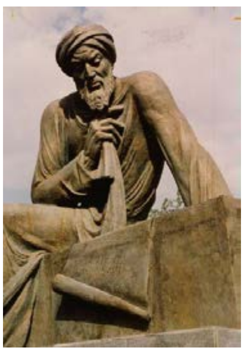


Рис. 3. Брахмагупта
(ок. 598 г. – 670 г.)

Рис. 4. Штифель
(ок. 1487 г. – 1567 г.)

Рис. 5. Декарт
(1596 г. – 1650 г.)

Жирар в своем сочинении уже использует отрицательные числа, но окончательно ввели их в математику Р. Декарт (рис. 5.), который объяснял их как направленные величины, и ученый художник Леонардо – да Винчи (1452 г. – 1591 г.).

1.1. Отношение делимости на множестве целых чисел

Разделите число 125 на 5, 25 на 2, 34 на 3, 16 на 2, 45 на 7, 55 на 11. Сделайте вывод ____
____
____

Что значит разделить число ***a*** на ***b***?

<u>Определение 1.1.1.</u> Число ***a* делится на число *b***, если существует такое c, что $a = b \cdot c$.

В этом случае число a называется **делимым**, b – **делителем** и c – **частным**. Если a делится на b, то пишут $a \vdots b$ и говорят: a **кратно** b.

Примеры $6 \vdots 2$; $121 \vdots 11$; $0 \vdots a$, так как $a \cdot 0 = 0$.

Отношение делимости ($\vdots$) обладает следующими свойствами:

<u>Свойство 1.1.1^0.</u> Отношение делимости рефлексивно, т.е. $a \vdots a$ для любого a.	<u>Доказательство.</u> Это следует из того, что $a = a \cdot 1$. ■
<u>Свойство 1.1.2^0.</u> Отношение делимости транзитивно, т.е. из $a \vdots b$ и $b \vdots c$ следует, что $a \vdots c$.	<u>Доказательство.</u> Действительно, так как $a \vdots b$, то существует число q такое, что $a = b \cdot q$. А из $b \vdots c$ вытекает, что существует число t такое, что $b = c \cdot t$. Отсюда $a = b \cdot q = (c \cdot t) \cdot q = c \cdot (t \cdot q)$. Так как произведение двух целых чисел является целым числом, то $t \cdot q \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $a \vdots c$. ■
<u>Свойство 1.1.3^0.</u> Если $a \vdots b$, то $(-a) \vdots b$, $a \vdots (-b)$ и $(-a) \vdots (-b)$, т.е. отношение делимости сохраняется при изменении знаков делимого и делителя.	<u>Доказательство.</u> В самом деле, если $a \vdots b$, то $a = b \cdot q$, тогда $-a = b \cdot (-q)$, $a = (-b) \cdot (-q)$, $(-a) = (-b) \cdot q$. ■
<u>Свойство 1.1.4^0.</u> Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a + b) \vdots c$, то есть если два числа делятся на c, то и их сумма делится на c.	<u>Доказательство.</u> Действительно, из $a \vdots c$ и $b \vdots c$, вытекает существование таких чисел t и q, что $a = c \cdot t$ и $b = c \cdot q$. Но тогда $a + b = c \cdot t + c \cdot q = c \cdot (t + q)$. Отсюда, $(a + b)$ делится на c. Точно так же доказывается, что $a \vdots c$ и

	$b \vdots c$ следует $(a - b) \vdots c$. ■
<u>Свойство 1.1.5^0.</u> Если $a \vdots c$, то $a \cdot b \vdots c$.	<u>Доказательство.</u> В самом деле, из $a \vdots c$ вытекает существование числа q такого, что $a = c \cdot q$. Но тогда $a \cdot b = (c \cdot q) \cdot b = c \cdot (q \cdot b)$. Отсюда, $a \cdot b \vdots c$. ■

Из свойства 1.1.5^0 0тношения делимости вытекают следствия.

<u>Следствие 1.1.1.</u> Если $a_1 \vdots c$, $a_2 \vdots c$, ..., $a_n \vdots c$, то для любых чисел $r_1, r_2, ..., r_n$ имеем $(r_1 \cdot a_1 + ... + r_n \cdot a_n) \vdots c$.

Доказательство следует из свойств 1.1.5^0 и 1.1.4^0. ■

<u>Следствие 1.1.2</u>. Если числа $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m$ делятся на c и $r_1, r_2, ..., r_n, s_1, s_2, ... , s_m$ – некоторые числа, то из $r_1 \cdot a_1 + ... + r_n \cdot a_n = s_1 \cdot b_1 + ... + s_m \cdot b_m + b_{m+1}$ следует, что $b_{m+1} \vdots c$.

Для доказательства достаточно заметить, что
$b_{m+1} = r_1 \cdot a_1 + ... r_n \cdot a_n - s_1 \cdot b_1 - ... s_m \cdot b_m$ и воспользоваться следствием 1. ■

Утверждения, обратные 1.1.4^0 и 1.1.5^0 ложны: из делимости суммы не вытекает делимость слагаемых, а из делимости произведения не вытекает делимость множителей.

Действительно, $(2 + 8) = 10 \vdots 5$, но $2 \not\vdots\, 5$и $8 \not\vdots\, 5$ или $4 \cdot 30 = 120 \vdots 20$, но $30 \not\vdots\, 20$.

<u>Свойство 1.1.6^0.</u> Если $a \vdots c$, а b не делится на c, то $(a + b)$ не делится на c.	<u>Доказательство.</u> В самом деле, если бы $(a + b) \vdots c$, то из $a \vdots c$ следовало бы, что и $b \vdots c$. ■
<u>Свойство 1.1.7^0.</u> Нуль делится на любое число b.	<u>Доказательство.</u> Действительно,$0 = b \cdot 0$.Частное от деления нуля на b при $b \neq 0$ равно нулю. ■
<u>Свойство 1.1.8^0.</u> Любое число a делится на 1.	<u>Доказательство.</u> В самом деле, $a = 1 \cdot a$. ■
<u>Свойство 1.1.9^0.</u> Если $a \neq 0$, то не существует такого q, что $0 \cdot q = a$.	<u>Доказательство.</u> В самом деле, для любого q имеем: $0 \cdot q = 0$. Поэтому частное $0 \vdots 0$, хотя и существует, но не определено однозначно. Кратко, но не совсем точно говорят деление на нуль – невозможно. Однако, точнее 0 все-таки делится на 0. Поэтому из $a \vdots 0 = b$ вытекает что $a = 0$. ■
<u>Свойство 1.1.10^0.</u> Если $a \vdots b$, то $\lvert a\rvert \geq \lvert b\rvert$.	<u>Доказательство.</u> Если $b \neq 0$, то $\lvert b\rvert \geq 1$, а если $b = 0$, то и $a = 0$. Поэтому из $a = b \cdot q$ вытекает: $\lvert a\rvert = \lvert b\rvert \cdot \lvert q\rvert \geq \lvert b\rvert$.■

<u>Следствие 1.1.3.</u> Если $1 \vdots a$, то либо $a = 1$, либо $a = -1$.

В самом деле, $1 \geq \lvert a\rvert$, но поскольку a – целое число, отличное от нуля, то

$|a| \geq 1$. Значит, $|a| = 1$ и $a = \pm 1$. ■

Следствие 1.1.4. Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$.

В самом деле, из $a \vdots b$ следует, что $|a| \geq |b|$, а из $b \vdots a$, что $|b| \geq |a|$. Значит, $|a| = |b|$ и $a = b$ или $a = -b$. ■

Рассмотрим решение задач на делимость.

Задача 1.1.1. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Цифры единиц и десятков одинаковы. Докажите, что число делится на 7.

Решение. Трехзначное число можно записать в виде $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, где a, b, c – цифры числа в десятичной системе счисления. По условию $\begin{cases} b = c \\ a + b + c = 7. \end{cases}$

Тогда $a + 2b = 7$ и $a = 7 - 2b$. Отсюда: $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 100 \cdot a + 11 \cdot b = 100 \cdot (7 - 2 \cdot b) + 11 \cdot b = 700 - 200 \cdot b + 11 \cdot b = 700 - 189 \cdot b$.

Так как $700 \vdots 7$ и $189 \vdots 7$, то, по свойству 1.1.4, $(700 - 189 \cdot \text{b}) \vdots 7$. А значит, $\overline{abc} \vdots 7$. ■

Задача 1.1.2. Определите, при каких целых n $(n^3 + 4n^2 - 3) \vdots (n + 2)$.

Решение. Разобьем делимое $(n^3 + 4n^2 - 3)$ на сумму трех слагаемых $(n^3 + 2n^2) + (2n^2 + 4n) - (4n + 8) + 5 = n^2(n + 2) + 2n(n + 2) - 4(n + 2) + 5$. Первые три слагаемых делятся на $(n + 2)$. Для решения достаточно найти такие целые значения n, чтобы $5 \vdots (n + 2)$, то есть может быть равным 1; – 1; 5; – 5. Рассмотрим эти случаи по порядку:

a) $n + 2 = 1 \rightarrow n = -1$;

b) $n + 2 = -1 \rightarrow n = -3$;

c) $n + 2 = 5 \rightarrow n = 3$;

d) $n + 2 = -5 \rightarrow n = -7$.

Значит, задача имеет четыре решения: $n = -1; \pm 3; -7$. ■

Задача 1.1.3. Докажите, что при любом натуральном k $(3^{4k-1} + 3^{4k-2} + \ldots + 3^2 + 3 + 1) \vdots 40$.

Решение. Запишем сумму в обратном порядке $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{4k-2} + 3^{4k-1}$. Нетрудно заметить, что это сумма членов геометрической прогрессии с $b_1 = 1$, $q = 3$ и $n = 4k$. По формуле суммы геометрической прогрессии имеем:
$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{4k-2} + 3^{4k-1} = \frac{3^{4k} - 1}{2}.$$

Докажем, что высказывание «$\frac{3^{4k} - 1}{2} \vdots 40$» верно при любом натуральном k.

Применим метод математической индукции.

1. Проверим справедливость высказывания при $k = 1$: $\frac{3^{4k} - 1}{2} = 40 \vdots 40$.

2. Предположим, что: $\frac{3^{4k} - 1}{2} \vdots 40$ и докажем, что тогда: $\frac{3^{4(k+1)} - 1}{2} \vdots 40$

$$\frac{3^{4(k+1)}-1}{2}=\frac{3^4\cdot(3^{4k}-1)+80}{2}=\frac{3^4\cdot(3^{4k}-1)}{2}+40.$$

По предположению первое слагаемое делится на 40 и $40 \vdots 40$. Тогда, на 40 делится и сумма. Значит, высказывание верно для любого натурального k.

1.2. Деление целых чисел с остатком

Разделите число 125 на 2, 25 на 2, 34 на 5, 16 на 3, 45 на 7, 55 на 10.

Сделайте вывод ____
____
____

<u>Определение 1.2.1.</u> Пусть даны числа a и $b \neq 0$. **Разделить *a* на *b* с остатком** – значит, найти числа q и r такие, что $a = bq + r$ (*), где $0 \leq r \leq |b|$.

Число q называют **неполным частным**, а число r – **остатком** от деления a на b. При $r = 0$ получается обычное деление.

<u>Теорема 1.2.1.</u> Деление a на $b \neq 0$ с остатком возможно, причем неполное частное и остаток определяются единственным способом.

<u>Доказательство.</u> Доказательство состоит из двух пунктов: *существование* и *единственность*.

I. Существование.

Возможно четыре случая для чисел a и b:

1) Пусть $a \geq 0$ и $b > 0$. Рассмотрим последовательность a; $a - b$; $a - 2 \cdot b$; $a - 3 \cdot b$; ... , $a - q \cdot b$; $a - (q + 1) \cdot b$; ...

В этой последовательности найдем первое отрицательное число. Такое число обязательно найдется, так как натуральных чисел, не превышающих a, имеется a штук. Пусть им будет $(a - (q + 1) \cdot b)$. Самое последнее из неотрицательных чисел обозначим $r = a - q \cdot b$.

Отсюда вытекает, что $a = b \cdot q + r$, $r \geq 0$.

Докажем, что $r < b$ методом от противного.

Предположим, что $r \geq b$. Тогда $r - b \geq 0$ и $r - b = a - (q + 1) \cdot b$. Но, по ранее доказанному, $a - (q + 1) \cdot b < 0$. Следовательно, $r < b$, то есть $a = b \cdot q + r$ и $0 \leq r < b$.

2) Пусть $a \le 0$ и $b > 0$. Тогда $(-a) \ge 0$ и, по первому случаю, $(-a) = b \cdot q + r$ (1), где $0 \le r < b$. Умножив равенство (1) на (-1), получим $a = b \cdot (-q) - r$ (2). Если $r = 0$, то $a = b \cdot (-q) + 0$, то есть формула (*) выполняется.

Если $r \ne 0$, то к правой части равенства (2) прибавим и вычтем b: $a = b \cdot (-q-1) + (b - r)$, причем $0 < b - r < b$. Таким образом, $a = b \cdot q_1 + r_1$, где $q_1 = -q - 1$, $r_1 = b - r$ и $0 \le r_1 < b$.

3) Пусть $a \ge 0$ и $b < 0$. Тогда $(-b) > 0$ и, по первому случаю, $a = (-b) \cdot q + r$ (3), где $0 \le r < |b|$, $|b| = -b$. Равенство (3) можно переписать в виде (*): $a = b \cdot (-q) + r$, где неполное частное равно $(-q)$.

4) Пусть $a \le 0$ и $b < 0$.Тогда $(-a) \ge 0$ и $(-b) > 0$.

По первому случаю можно разделить $(-a)$ на $(-b)$ с остатком: $-a = (-b)\,q + r$ (4), где $0 \le r < |b|$, $|b| = -b$. Умножив обе части равенства (4) на (-1), получим: $a = b \cdot q - r$ (5). Если $r = 0$, то $a = b \cdot q + 0$. Если $r \ne 0$, то к правой части равенства (5) прибавим и вычтем b, получим: $a = b \cdot (q + 1) + (-b - r)$, причем $0 < -b - r < b = |b|$, то есть получим равенство вида (*).

Таким образом, доказана возможность деления целых чисел с остатком.

II. Единственность. Предположим, что частное и остаток определяются неоднозначно, то есть $a = b \cdot q_1 + r_1$ и $a = b \cdot q_2 + r_2$, где $0 \le r_1 < |b|$ и $0 \le r_2 < |b|$. Приравняем правые части этих равенств $b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot q_2 + r_2$ и перенесем слагаемые с b в левую часть, а с r в правую. Получим $b \cdot (q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ (6). Левая часть равенства (6) делится на b, значит, должна делится на b и правая часть. Поэтому $r_1 - r_2 = b \cdot q_3$, откуда $r_2 = b \cdot (-q_3) + r_1$. Но так как $0 \le r_2 < |b|$, то неполное частное $q_3 = 0$, то есть $r_1 = r_2$. Тогда из равенства (6) и $q_1 = q_2$. ■

Рассмотрим решение задач на деление с остатком.

Задача 1.2.1. Разделите с остатком 1) 173 на 18; 2) – 173 на 18; 3) 173 на – 18; 4) – 173 на – 18.

Решение. 1) $173 = 18 \cdot 9 + 11$;

2) $-173 = 18 \cdot (-9) - 11 = 18 \cdot (-10) - 11 + 18 = 18\,(-10) + 7$;

3) $173 = (-18) \cdot (-9) + 11$;

4) $-173 = (-18) \cdot 9 - 11 = (-18) \cdot 10 + 7$. ■

Задача 1.2.2. Докажите, что при делении на 8 квадрата любого нечетного числа остаток равен единице.

Решение. Любое нечетное число можно представить в виде $2n + 1$. Тогда его квадрат имеет вид $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$. Произведение $4n \cdot (n + 1) \vdots 8$, так как $n \cdot (n + 1) \vdots 2$ (ясно, что из двух последовательных чисел одно – четно). Значит, $(2n + 1)^2 = 8 \cdot q + 1$, то есть $r = 1$. ■

Задача 1.2.3. Докажите, что если натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 = c^2$, то по крайней мере одно из чисел a и b – четное.

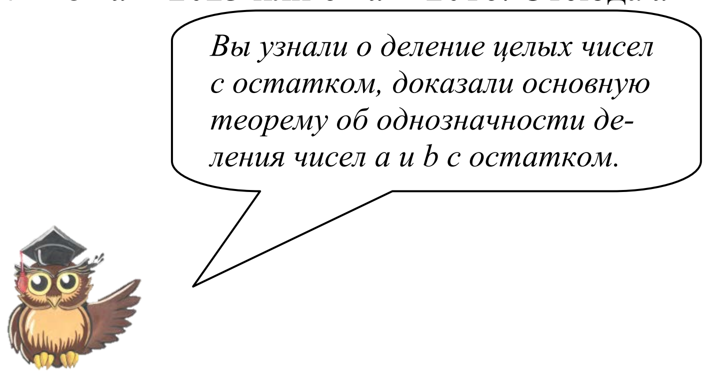
Решение. Предположим, что ни одно из чисел a и b не делится на 2, то есть $a = 2k + 1$ и $b = 2m + 1$.Тогда $a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4\,(k^2 + k + m^2 + m) + 2$. Отсюда следует, что $(a^2 + b^2) \vdots 2$, но не делится на 4.

Тогда $(a^2 + b^2)$ не может быть квадратом, то есть $a^2 + b^2 = c^2$, так как квадрат четного числа всегда делится на 4, а квадрат нечетного числа не делится и на 2. Получили противоречие. Следовательно, предположение неверно и хотя бы одно из чисел a и b – четно. ■

Задача 1.2.4. Первоначально у мальчика было 7 листов бумаги. Некоторые из них он разрезал на 7 кусков каждый. Затем еще некоторые из получившихся кусков снова разрезал на 7 кусков и так сделал несколько раз. Могло ли в результате получиться 2023 куска?

Решение. Пусть a_1 листов разрезано на 7 кусков. Тогда из них получится $7a_1$, а всего кусков будет $7 - a_1 + 7 \cdot a_1 = 7 + 6 \cdot a_1$. Если из $(7 + 6 \cdot a_1)$ кусков взять a_2 кусков и снова разрезать каждый из них на 7 частей, то получится $7 + 6 \cdot a_1 - a_2 + 7 \cdot a_2 = 7 + 6 \cdot (a_1 + a_2)$ кусков. В конечном счете, после k разрезаний, получится $7 + 6 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k)$ кусков. Может ли эта сумма равняться 2023? Решим уравнение: $7 + 6 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k) = 2023$. Отсюда $6 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k) = 2016$ или $(a_1 + a_2 + ... + a_k) = 336$, то есть в результате 336 разрезаний может получиться 2016 кусков. ■

Можно предложить и другое решение. После каждого разрезания кусков становится на 6 больше. Если разрезаний всего сделано a, то получим: $7 + 6 \cdot a = 2023$ или $6 \cdot a = 2016$. Отсюда $a = 336$. Ответ: да. ■



1.3. Наибольший общий делитель целых чисел. Алгоритм Евклида

Что значит запись НОД (a, b)?

Рассмотрим пример, найдем все натуральные делители чисел 25 и 35.

25: 1, 5, 25.

35: 1, 5, 7, 35.

Общие делители чисел 25 и 35 равны: 1, 5.

Наибольший общий делитель чисел 25 и 35 равен 5.

Дадим определение общего делителя, который обозначается ОД (a, b).

Определение 1.3.1. Натуральное число c называется **общим делителем** (ОД) чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, если каждое из этих чисел делится на c.

Рассмотрим следующее определение.

Определение 1.3.2. Натуральное число d называется **наибольшим общим делителем** (НОД) целых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, если:

1) d является общим делителем этих чисел;

2) d делится на любой общий делитель чисел a_1, a_2, ..., a_n.

А, сколько может быть наибольших общих делителей целых чисел один или несколько?

Для ответа на вопрос сформулируем и докажем теорему.

Теорема 1.3.1. Наибольший общий делитель чисел a_1, a_2, ..., a_n определяется однозначно, если хотя бы одно из чисел отлично от 0.

Используем *метод от противного*, а именно предположим, что НОД для чисел a_1, a_2, ..., a_n существуют, но имеем *два* d_1 и d_2.

Доказательство. Пусть d_1 и d_2 – два наибольших общих делителя чисел a_1, a_2, ..., a_n. Так как d_1 – наибольший общий делитель, то он делится на любой общий делитель этих чисел, а значит, $d_1 \vdots d_2$. Аналогично $d_2 \vdots d_1$. Теперь из условий $d_1 \vdots d_2$ и $d_2 \vdots d_1$ следует, что $d_1 = d_2$ или $d_1 = -d_2$. По определению 1.3.2. d_1 и d_2 – натуральные числа. Отсюда $d_1 = d_2$. ■

Для небольших чисел найти НОД сравнительно легко. Покажем это на примере.

Задача 1.3.1. Найдите НОД (120, – 135).

Решение. Запишем множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$ положительных делителей числа 120 и $B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ числа (– 135). Общими делителями чисел 120 и (– 135) являются числа $\{1, 3, 5, 15\}$.Число 15 является наибольшим из общих делителей.

Таким образом, НОД (120, – 135) = 15 или $d = 15$. ■

Решение задачи 1.3.1. показывает, что вычисление НОД (a, b) процесс трудоемкий, если рассмотреть большие числа. Возможен ли другой способ вычисления наибольшего общего делителя целых чисел?

Наибольший общий делитель любого конечного множества чисел существует, так как любое число делится на 1. Опишем способ вычисления наибольшего общего делителя, предложенный древнегреческим математиком Евклидом (рис. 6). Этот способ называют **алгоритмом Евклида**.

Рис. 6. Евклид
(ок. 325 г. до н.э. – до 265 г. до н.э.)

Алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел a и b состоит в следующем.

Пусть $a > b > 0$.

1) Разделим число a на число b с остатком: $a = b \cdot q_0 + r_1$;

2) Если $r_1 = 0$, то $a \vdots b$ и НОД $(a, b) = b$, так как, по определению 3.2, $a \vdots b$ и $b \vdots b$, поэтому b является самым большим из общих делителей чисел a и b. На этом алгоритм заканчивается.

3) если $r_1 > 0$, то берем числа b и r_1 и переходим снова к первому пункту. В результате получим $b = r_1 \cdot q_1 + r_2$. Если $r_2 > 0$, то делим r_1 на r_2 $r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$ и так далее. Получится цепочка равенств:

$$a = b \cdot q_0 + r_1,\ \text{где } 0 \le r_1 < b$$
$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2,\ \text{где } 0 \le r_2 < r_1\ (*)$$
$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3,\ \text{где } 0 \le r_3 < r_2$$
$$\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n,\ \text{где } 0 \le r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n$$

Покажите, что она конечна и позволяет найти НОД (a, b), для этого докажите следующую теорему:

Теорема 1.3.2. Вычисление по алгоритму Евклида заканчивается в конечное число шагов. Последний, отличный от нуля, остаток (или b) является наибольшим общим делителем целых чисел a и b.

Доказательство. Из (*) следует, что $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n \ge 0$.

Это убывающая последовательность неотрицательных чисел. Такая последовательность конечна, так как натуральных чисел, меньших b, не более чем $(b - 1)$. Значит, на каком-то шаге получится остаток, равный нулю.

Докажем, что r_n (предпоследний остаток) является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Сначала докажем, что r_n – общий делитель чисел a и b, то есть $a \vdots r_n$ и $b \vdots r_n$. Из последнего равенства алгоритма Евклида вытекает, что $r_n \vdots r_{n-1}$, из предпоследнего, так как $r_n \vdots r_n$ и $r_{n-1} \vdots r_n$, что и $r_{n-2} \vdots r_n$ и так далее, из второго: так как $r_2 \vdots r_n$ и $r_1 \vdots r_n$, то $b \vdots r_n$ и из первого, так как $r_1 \vdots r_n$ и $b \vdots r_n$, то $a \vdots r_n$, то есть $r_n =$ ОД (a, b).

Докажем теперь, что r_n – наибольший из всех общих делителей чисел a и b. Пусть c – произвольный общий делитель чисел a и b, то есть $a \vdots c$ и $b \vdots c$. Тогда из первого равенства алгоритма Евклида $r_1 \vdots c$, из второго равенства, так как $b \vdots c$ и $r_1 \vdots c$, – $r_2 \vdots c$ и так далее. Из предпоследнего равенства, так как $r_{n-2} \vdots c$ и $r_{n-1} \vdots c$, то и $r_n \vdots c$,то есть $r_n \ge c$ и $r_n =$ НОД (a, b). ■

Следствие 1.3.1. НОД $(a, b) =$ НОД$(-a, b) =$ НОД $(a, -b) =$ НОД $(-a, -b)$.

Доказательство самостоятельно.

____■

Задача 1.3.2. Найдите НОД (173, 18).

Решение. Применим алгоритм Евклида:

$173 = 18 \cdot 9 + 11;$

$18 = 11 \cdot 1 + 7;$

$11 = 7 \cdot 1 + 4;$

$7 = 4 \cdot 1 + 3;$

$4 = 3 \cdot 1 + 1;$

$3 = 3 \cdot 1.$

Последний из неравных нулю остатков равен 1. Следовательно, НОД (173,18) = 1. ■

Сформулируем правило нахождения наибольшего общего делителя нескольких чисел.

Теорема 1.3.3. Если НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) = c$ и НОД $(c, a_n) = d$, то НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = d$.

Доказательство. Если $d =$ НОД (c, a_n), то $c \vdots d$ и $a_n \vdots d$. А так как $c =$ НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$, то $a_1 \vdots c$,$a_2 \vdots c, \ldots, a_{n-1} \vdots c$, $c \vdots d$ и $a_n \vdots d$ следует, что $a_1 \vdots d$, $a_2 \vdots d, \ldots, a_n \vdots d$. Значит , d – общий делитель чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

С другой стороны, пусть d_1 – общий делитель чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Тогда d_1 – общий делитель чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ и $c \vdots d_1$. Но и $a_n \vdots d_1$, отсюда вытекает, что наибольший общий делитель чисел c и a_n делится на d_1, то есть $d \vdots d_1$. Следовательно, $d =$ НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. ■

Следствие 1.3.2. Если НОД $(a_1, a_2) = d_1$, НОД $(d_1, a_3) = d_2$, НОД$(d_2, a_4) = d_3, \ldots$, НОД $(d_{n-2}, a_n) = d_{n-1}$, то НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = d_{n-1}$.

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции.

1) При $n = 2$, то есть для a_1 и a_2 теорема верна: НОД $(a_1, a_2) = d_1$.

2) Пусть теорема верна для некоторого $m = k \geq 2$, то есть из условий НОД $(a_1, a_2) = d_1, \ldots$, НОД $(d_{k-2}, a_k) = d_{k-1}$ следует, что НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = d_{k-1}$.

3) Докажем эту теорему для $m = k + 1$. Пусть НОД $(d_{k-1}, a_{k+1}) = d_k$. Тогда, на основании теоремы 3.3 из условий НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = d_{k-1}$ и НОД $(d_{k-2}, a_k) = d_{k-1}$ вытекает, что НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}) = d$.

Значит, теорема верна для любого натурального n. ■

Следствие 1.3.3. Указывает алгоритм нахождения наибольшего общего делителя нескольких чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Сначала надо найти НОД$(a_1, a_2) = d_1$, затем НОД$(d_1, a_3) = d_2$ и так далее до, $d_{n-1} =$ НОД (d_{n-2}, a_n).

Тогда $d_{n-1}=$ НОД $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Задача 1.3.3. Найдите НОД (120, 135, 18).

Решение. Используя алгоритм Евклида найдем сначала НОД (120, 135).

$135 = 120 \cdot 1 + 15;$

$120 = 15 \cdot 8.$

Тогда $d_1 = 15$. Найдем НОД (15, 18):

$18 = 15 \cdot 1 + 3;$

$15 = 3 \cdot 5.$

Поэтому НОД (15, 18) = 3. Следовательно, НОД (120, 135, 18) = 3. ■

Рассмотрим свойства наибольшего общего делителя целых чисел.

Свойство 1.3.1^0. Если каждое из чисел a и b умножить на одно и то же число $k \neq 0$, то их наибольший общий делитель умножится на $\lvert k \rvert$.	Доказательство. Умножим каждое из равенств алгоритма Евклида на k. Получим: $a \cdot k = k \cdot b \cdot q_0 + k \cdot r_1$, где $0 \le r_1 < b$ $b \cdot k = k \cdot r_1 \cdot q_1 + k \cdot r_2$, где $0 \le r_2 < r_1$ (*) ... $r_{n-2} \cdot k = k \cdot r_{n-1} \cdot q_{n-1} + k \cdot r_n$, где $0 \le r_n < r_{n-1}$ $r_{n-1} \cdot k = k \cdot r_n \cdot q_n$ Отсюда видно, что НОД $(a \cdot k, b \cdot k) =$ $= \lvert k \cdot r_n \rvert = \lvert k \rvert \cdot$ НОД (a, b). ■ Точно так же доказывается, что если числа a и b имеют общий делитель c, то НОД $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{1}{c}$ НОД (a, b).
Свойство 1.3.2^0. Если d – наибольший общий делитель чисел a и b, то существуют такие целые числа x и y, что $a \cdot x + b \cdot y = d$. **Равенство $a \cdot x + b \cdot y = d$ называют представлением наибольшего общего делителя в виде линейной комбинации чисел a и b.**	Доказательство. Из предпоследнего равенства системы (*) алгоритма Евклида выразим $r_n = d$ в виде линейной комбинации r_{n-1} и r_{n-2} : $r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_{n-1}$ (1). Затем r_{n-1} выразим из предыдущего равенства алгоритма через r_{n-2} и r_{n-3} и подставим в равенство (1), получим представление r_n в виде линейной комбинации r_{n-2} и r_{n-3} и так далее. Продолжая аналогичные подстановки, в конце концов получим представление r_n в виде линейной комбинации чисел a и b. ■
Свойство 1.3.3. Если $d =$ НОД $(a_1, a_2, \dots a_n)$, то найдутся такие целые числа $x_1, \dots, x_n$, что $d = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$.	Доказательство предлагаем провести самостоятельно. ______________________________ ______________________________ ______________________________■

Задача 1.3.4. Найдите линейное представление НОД (110, 155).

Решение. Применим алгоритм Евклида к числам $a = 155$ и $b = 110$.

$155 = 110 \cdot 1 + 45;$
$110 = 45 \cdot 2 + 20;$
$45 = 20 \cdot 2 + 5;$
$20 = 5 \cdot 4.$

Отсюда, НОД (110, 155) = 5. Найдем линейное представление НОД (110, 155). Из предпоследнего равенства алгоритма Евклида выразим число «пять»: $5 = 45 - 20 \cdot 2$ (2). Число 20 выразим из предыдущего равенства: 20 = 110 – 45 · 2 и подставим в равенство (2). Получим 5 = 45 – 2 · (110 – 45 · 2) = 45 · 3 – 110 · 2 (3). Число 45 выразим из первого равенства и подставим в равенство (3): 45 = 155 – 110 · 1, тогда 5 = (155 – 110) · 3 – 110 · 2 = 155 · 3 – 110 · 5 = 155 · 3 + 110 · (– 5).

В итоге 5 = 155 · 3 + 110 · (– 5), то есть $x = 5$ и $y = -5$. ■

Задача 1.3.5. Представьте НОД (120, 145, 24) в виде линейной комбинации чисел 120, 145, 24.

Решение. Найдем сначала НОД (145,120). Запишем алгоритм Евклида для чисел 145 и 120.

145 = 120 · 1 + 25;
120 = 25 · 4 + 20;
25 = 20 · 1 + 5;
20 = 5 · 4.

Отсюда, НОД (145, 120) = 5. Затем найдем НОД (5, 24).

24 = 4 · 5 + 4;
5 = 4 · 1 + 1;
4 = 1 · 4.

Отсюда, НОД (5, 24) = 1. Значит, НОД (145, 120, 24) = 1.

Из второй системы 1 = 5 – 4 · 1 = 5 – (24 – 5 · 4) = – 24 + 5 · 5.

Из первой системы 5 = 25 – 20 = 25 – (120 – 25 · 4) = – 120 + 5 · 5 = – 120 + + 5 · (145 – 120) = 5 · 145 – 6 · 120.

Тогда 1 = – 24 + 5 · (5 · 145 – 6 · 120) = – 24 + 25 · 145 – 30 · 120 = 145 · 25 + + 120 · (– 30) + 24 · (– 1).

Следовательно, $x_1 = 25$; $x_2 = -30$; $x_3 = -1$. ■

Задача 1.3.6. Докажите, что НОД (a, b) = НОД ($a - b$, b).

Решение. Пусть НОД (a, b) = d.

Следовательно, $a \,\vdots\, d$ и $b \,\vdots\, d$, тогда и $(a - b) \,\vdots\, d$, то есть d = ОД ($a - b$, b). Пусть d_1 = ОД ($a - b$, b) – тоже общий делитель ($a - b$) и b. Тогда $(a - b) \,\vdots\, d_1$ и $b \,\vdots\, d_1$, отсюда $a \,\vdots\, d_1$. Но d = НОД (a, b), поэтому $d \,\vdots\, d_1$ и d = НОД ($a - b$, b). ■

Этот прием иногда удобно использовать при решении некоторых задач.

Задача 1.3.7. Докажите несократимость дроби $\dfrac{21 \cdot n + 4}{14 \cdot n + 3}$.

Решение. Для того, чтобы доказать несократимость дроби, достаточно доказать, что НОД (21 · n + 4, 14 · n + 3) = 1.

Используя предыдущую задачу, получим: НОД (21 · n + 4, 14 · n + 3) = = НОД (7 · n + 1, 14 · n + 3) = НОД (7 · n + 2, 7 · n + 1) = НОД (1, 7 · n + 1) = 1. ■

Вы узнали НОД (a, b) – наибольший общий делитель целых чисел, о его единственности, методе доказательства теоремы от противного, а также об алгоритме Евклида – способ нахождения НОД (a, b) и правиле нахождения НОД для нескольких чисел.

1.4. Взаимно простые числа и их свойства

А как называются такие пары чисел 13 и 14; 13 и 26; 34 и 45? Вычислите наибольший общий делитель каждой пары.
НОД (13, 14) = _____; НОД (13, 26) = _____; НОД (34, 45) = _____.
Что их объединяет?

Определение 1.4.1. Числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называются **взаимно простыми**, если их наибольший общий делитель равен единице, то есть НОД $(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$.

Пример: числа 20 и 63 взаимно просты, так как НОД (20, 63) = 1.

Теорема 1.4.1. Для того, чтобы числа a и b были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие целые числа x и y, что $a \cdot x + b \cdot y = 1$.

В условии теоремы имеется словосочетание необходимо и достаточно, поэтому доказательство теоремы состоит из двух теорем: прямой (необходимость) и обратной (достаточность) теорем.

Доказательство.

1. Необходимость. Если числа a и b – взаимно просты, то НОД $(a, b) = 1$. Тогда, по свойству $1.3.2^0$ НОД (a, b) существуют такие числа x и y, что $a \cdot x + b \cdot y = 1$.

2. Достаточность. Пусть существуют такие числа x и y, что $a \cdot x + b \cdot y = 1$, и пусть НОД $(a, b) = d$. Тогда из $a \vdots d$, $b \vdots d$ следует, что $1 \vdots d$. Значит, $d = 1$, то есть числа a и b – взаимно просты. ■

Теорема верна и для любого конечного числа n чисел, то есть числа $a_1, a_2, ..., a_n$ взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие числа $x_1, x_2, ..., x_n$, что $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = 1$.

Доказательство аналогично теореме 1.4.1.

____
____
____
____■

Следствие 1.4.1. Если числа a и b взаимно просты и $a \vdots a_1$ и $b \vdots b_1$, то числа a_1 и b_1 взаимно простые.

Доказательство. В самом деле, так как НОД $(a, b) = 1$, то существуют такие числа x и y, что $a \cdot x + b \cdot y = 1$. По условию $a = a_1q$ и $b = b_1t$, следовательно, $a_1(qx) + b_1(ty) = 1$. Отсюда следует, что числа a_1 и b_1 – взаимно просты. ■

Теорема 1.4.2. Если НОД $(a, b) = d$, то числа a/d и b/d – взаимно просты.

Доказательство. Пусть НОД $(a, b) = d$. Тогда существуют такие числа x и

y, что $a \cdot x + b \cdot y = d$, причем $a \vdots d$ и $b \vdots d$. Разделим обе части равенства на d: $(a/d) \cdot x + (b/d) \cdot y = 1$. Из этого равенства вытекает, что a/d и b/d –взаимно просты. ■

Теорема 1.4.3. Если произведение двух чисел $a \cdot b$ делится на c и a взаимно просто с c, то b делится на c.

Доказательство. По условию НОД $(a, c) = 1$, значит, существуют такие числа x и y, что $a \cdot x + b \cdot y = 1$. Умножим обе части этого равенства на b, получим $a \cdot b \cdot x + b \cdot c \cdot y = b$. Так как $a \cdot b \vdots c$ и $b \cdot c \vdots c$, то левая часть равенства делится на c. Следовательно, и правая делится на c, то есть $b \vdots c$. ■

Теорема 1.4.4. Если числа a и b –взаимно просты, то число c делится на произведение $a \cdot b$ тогда и только тогда, когда c делится на a и на b.

Доказательство.

1. Необходимость. Так как c делится на $a \cdot b$, то $c = (a \cdot b) \cdot q$. Из этого равенства следует, что $c \vdots a$ и $c \vdots b$.

2. Достаточность. Если c делится на a, то $c = a \cdot q$. Но c делится еще и на b, а числа a и b взаимно просты. Тогда, по теореме 4.3, $q \vdots b$. Поэтому $c = a \cdot q = a \cdot b \cdot q_1$. Отсюда $c \vdots a \cdot b$. ■

Теорема 1.4.5. Если два числа a и b взаимно просты с третьим числом c, то и их произведение взаимно просто с c.

Доказательство. По условию НОД $(a, c) = 1$ (1), существуют числа x_1 и y_1, что $a \cdot x_1 + c \cdot y_1 = 1$ (2). Аналогично из НОД $(b, c) = 1$, следует существование таких чисел x_2 и y_2, что $b \cdot x_2 + c \cdot y_2 = 1$ (3).

Пусть НОД $(a \cdot b,\ c) = d$. Перемножив левые и правые части равенства (1) и (2), получим: $a \cdot b \cdot x_1 \cdot x_2 + a \cdot c \cdot x_1 \cdot y_2 + b \cdot c \cdot x_2 \cdot y_1 + c^2 \cdot y_1 \cdot y_2 = 1$, где $a \cdot b \vdots d$, $a \cdot c \vdots d$, $b \cdot c \vdots d$, $c^2 \vdots d$, значит, левая часть этого равенства делится на d, поэтому правая тоже делится на d, то есть $1 \vdots d$. Отсюда следует, что $d = 1$ и НОД $(a \cdot b, c) = 1$. Поэтому $a \cdot b$ взаимно просты с c. ■

Теорему 1.4.5. можно сформулировать и доказать и для нескольких чисел.

Теорему 1.4.6. Если каждое из чисел $a_1, ..., a_m$ взаимно просты с каждым из чисел $b_1, ..., b_n$, то и произведение $a_1 \cdot, ..., \cdot a_m$ взаимно просто с произведением $b_1 \cdot, ..., \cdot b_n$.

Доказательство. Действительно, НОД $(a_i, b_k) = 1$, где $i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., n$. Тогда, по теореме 1.4.5, НОД $(a_1 \cdot a_2, b_k) = 1$, где $k = 1, 2, ..., n$, НОД $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,\ b_k) = 1$, ..., НОД $(a_1 \cdot, ..., \cdot a_m, b_k) = 1$,то есть произведение $a_1 \cdot, ..., \cdot a_m = A$ и b_k – взаимно просты.

Аналогично, НОД (A, b_1) = НОД $(A, b_1 \cdot b_2) = ...$ = НОД $(A, b_1, ..., b_n) = 1$, то есть $a_1 \cdot, ..., \cdot a_m$ взаимно просто с произведением $b_1 \cdot, ..., \cdot b_n$. ■

Следствие 1.4.2. Если числа a и b взаимно просты, то любые их натуральные степени-взаимно простые числа, то есть из НОД $(a, b) = 1$ следует НОД $(a^m, b^n) = 1$.

Доказательство предлагаем провести самостоятельно.

■

Задача 1.4.1. Докажите, что $2^{63} - 1$ и $2^{20} - 1$ – взаимно просты.

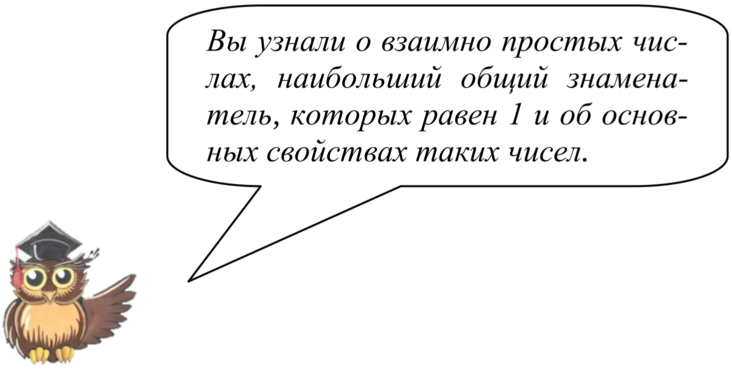
Решение. Найдем наибольший общий делитель этих чисел: НОД $(2^{63} - 1, 2^{20} - 1)$ = НОД $(2^{20} \cdot (2^{43} - 1); 2^{20} - 1)$. При решении воспользуемся формулой НОД (a, b) = НОД $(a - b, b)$. Так как НОД $(2^{20}, 2^{20} - 1) = 1$, то НОД$(2^{20} \cdot (2^{43} - 1), 2^{20} - 1)$ = НОД $(2^{43} - 1, 2^{20} - 1)$. Далее применим то же рассуждение еще несколько раз и получим: НОД $(2^{43} - 1, 2^{20} - 1)$ = = НОД $(2^{20} \cdot (2^{23} - 1), 2^{20} - 1)$ = НОД $(2^{23} - 1, 2^{20} - 1)$ = НОД $(2^{3} - 1, 2^{20} - 1)$ = = НОД $(2^{17} - 1, 2^{3} - 1)$ = ... = НОД $(2^{2} - 1, 2^{3} - 1) = 1$. ■

Аналогично решается следующая задача.

Задача 1.4.2. Докажите, что если m и n взаимно просты, то $2^m - 1$ и $2^n - 1$ тоже взаимно просты.

Предлагаем решить эту задачу самостоятельно.

■



1.5. Наименьшее общее кратное целых чисел

Что значит запись НОК (a, b)?

Рассмотрим пример: найдем общие натуральные кратные чисел 25 и 35: 175, 350, 700, 875, 1050 и т.д.

Общие делители чисел 25 и 35 равны: 1, 5.

Наибольшее общее кратное чисел 25 и 35 равно 175.

Дадим определение общего кратного чисел, которое обозначается ОК (a, b).

Определение 1.5.1. Натуральное число k называется **общим кратным чисел** $a_1, ..., a_n$, если оно делится на каждое из этих чисел, иначе говоря, $k \vdots a_1, ..., k \vdots a_n$.

Определение 1.5.2. Натуральное число m называется **наименьшим общим кратным** чисел $a_1, ..., a_n$, если:

1) m является их общим кратным;

2) любое общее кратное k этих чисел делится на m.

Будем обозначать это следующим образом: НОК $(a_1, ..., a_n) = m$.

Было доказано, что НОД (a, b) единственный. Предположим, что и НОК (a, b) определяется однозначно, сформулируем теорему:

Теорема 1.5.1. Если наименьшее общее кратное чисел $a_1, ..., a_n$ существует, то оно определяется однозначно.

Доказательство. Пусть m_1 и m_2 – наименьшее общие кратные чисел $a_1, ..., a_n$. Тогда $m_1 \vdots m_2$, так как $m_2 =$ НОК $(a_1, ..., a_n)$ и $m_2 \vdots m_1$, так как $m_1 =$ НОК $(a_1, ..., a_n)$. Однако, наименьшее общее кратное является натуральным числом, поэтому из $m_1 \vdots m_2$ и $m_2 \vdots m_1$, следует $m_1 = m_2$. ■

Укажем связь между НОД и НОК целых чисел

Теорема 1.5.2. Если наибольший общей делитель a, b существует, то НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = |a \cdot b|$.

Доказательство. Обозначим через $d =$ НОД (a, b) вытекает $a \vdots d$ и $b \vdots d$, поэтому $a = a_1d$ и $b = b_1d$.

Рассмотрим число $\dfrac{a \cdot b}{d} = \dfrac{d^2 \cdot a_1 \cdot b_1}{d} = d|a_1 \cdot b_1|$. Обозначим $d|a_1 \cdot b_1| = m$ и докажем, что $m =$ НОК (a, b).

Во-первых, $m = d\,|a_1\, b_1| \vdots (d\, a_1)$, то есть $m \vdots a_1$ и $d\,|a_1b_1| \vdots (db_1)$, то есть $m \vdots b$, поэтому $m =$ ОК (a, b).

Во-вторых, если k – произвольное общее кратное чисел a и b, то $k \vdots a$, откуда $k = at = da_1t$. С другой стороны, $k \vdots b$, поэтому $da_1t \vdots db_1$ и $a_1t \vdots b_1$. Но, числа a_1 и b_1 взаимно просты (на основании теоремы 1.4.2), значит, $t \vdots b_1$ и $t = b_1l$.

Откуда $k = da_1b_1l \vdots (d\,|a_1 \cdot b_1|) = m$. Таким образом, $k \vdots m$, поэтому $m =$ НОК (a, b). ■

Из этой теоремы следует, что наименьшее общее кратное любых отличных от нуля чисел существует, так как существует их НОД.

Задача 1.5.1. Найдите НОК (154, 452).

Решение. Найдем сначала НОД (154, 452) по алгоритму Евклида:

$452 = 154 \cdot 2 + 144;$

$154 = 144 \cdot 1 + 10;$

$144 = 10 \cdot 14 + 4;$

$10 = 4 \cdot 2 + 2;$

$4 = 2 \cdot 2.$

Следовательно, НОД (154, 452) = 2 и НОК (154, 452) = $= \dfrac{154 \cdot 452}{2} = 34804$. ■

Рассмотрим свойства наименьшего общего кратного целых чисел.

Свойства 1.5.1^0 Если каждое из чисел a и b умножить на одно и то же число $k > 0$, то их наименьшее общее кратное также умножится на число k.	Доказательство. Из теоремы1.5.2 имеем НОК $(ak, bk) = \dfrac{(a\cdot k)\cdot(b\cdot k)}{\text{НОД }(a\cdot k,\ b\cdot k)}$. Теперь, по свойству 1.3.1, НОД $(ak, bk) = \lvert k\rvert$ НОД (a, b). Поэтому НОК $(ak, bk) = \dfrac{k^2\cdot a\cdot b}{k\cdot\text{НОД }(a,\ b)} = \dfrac{k\cdot a\cdot b}{\text{НОД }(a,\ b)} = k\cdot$ НОД (a, b) (1). ■
Свойства 1.5.2.^{0} Если $a \vdots k$ и $b \vdots k$, то НОК $(\frac{a}{k};\frac{b}{k}) = \dfrac{НОК(a,b)}{k}$.	Доказательство предлагаем провести самостоятельно. ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________■
Свойства 1.5.3^0 Если НОК $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = m_1$ и НОК $(m_1, a_n) = m$, то НОК $(a_1, a_2, ..., a_n) = m$.	Доказательство. Пусть m = НОК (m_1, a_n). Тогда, по определению НОК, $m \vdots m_1$ и $m \vdots a_n$. Но НОК $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = m_1$, откуда $m_1 \vdots a_1, ..., m_1 \vdots a_{n-1}$. Значит, $m \vdots a_1, ..., m \vdots a_{n-1}$ и $m \vdots a_n$, поэтому m является общим кратным чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Возьмем k – произвольное общее кратное чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогда $k \vdots a_1, ..., k \vdots a_{n-1}$ и, следовательно, $k \vdots m_1$, так как m_1 = НОК $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$. Теперь из $k \vdots a_n$ и $k \vdots m_1$, вытекает $k \vdots m$, так как m = НОК (m_1, a_n). Следовательно, m = НОК $(a_1, a_2, ..., a_n)$. ■
Свойства 1.5.4^0 Если НОК $(a_1, a_2) = m_1$, НОК $(m_1, a_3) = m_2$, ..., НОК $(m_{n-2}, a_n) = m_{n-1}$, то НОК $(a_1, a_2, ..., a_n) = m_{n-1}$.	Доказательство предлагаем провести самостоятельно. ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________■
Предлагаем записать правило вычисления НОК нескольких чисел: ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________■	
Свойства 1.5.5^0 Наименьшее общее кратное попарно взаимно простых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ равно модулю их произведения.	Доказательство. Пусть НОД (a_1, a_2) = НОД (a_2, a_3) = … = НОД $(a_{n-1}, a_n) = 1$. Тогда m_2 = НОК $(a_1, a_2) = \dfrac{a_1\cdot a_2}{\text{НОД }(a_1,\ a_2)} = \lvert a_1\cdot a_2\rvert$,

	$m_3 = \text{НОК}\,(m_2, a_3) = \dfrac{\lvert m_1 \cdot a_3 \rvert}{\text{НОД}\,(m_2,\ a_3)} =$ $= \dfrac{\lvert a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \rvert}{\text{НОД}\,(a_1,\ a_2,\ a_3)} = \dfrac{\lvert a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \rvert}{\text{НОД}\,(1,\ a_3)} = \lvert a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \rvert.$ Аналогично рассуждая, получим $m_n = \text{НОК}\,(m_{n-1}, a_n) = \lvert a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \rvert$. ■

Задача 1.5.2. Найдите НОК (250, 650).

Решение. Каждое из чисел 250 и 650 делится на 50 и, на основании свойства 5.1^0, НОК (250, 650) = 50 · НОК (5, 13). Так как НОД (5, 13) = 1, то НОК (5, 13) = 5 · 13 = 65. Тогда НОК (250, 650) = = 50 · 65 = 3250. ■

Задача 1.5.3. Найдите НОК (35, 77, 1141).

Решение. Найдем сначала $\text{НОК}\,(35, 77) = \dfrac{35 \cdot 77}{\text{НОД}\,(35,\ 77)} = \dfrac{35 \cdot 77}{7} = 385.$

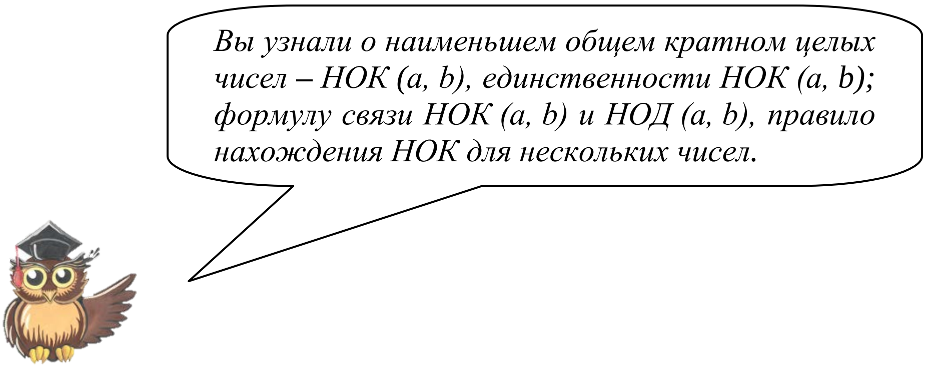
Теперь найдем $\text{НОК}\,(385, 1141) = \dfrac{385 \cdot 1141}{\text{НОД}\,(385,\ 1141)} = \dfrac{385 \cdot 1141}{7} = 62755.$

Тогда НОК (35, 77, 1141) = 62755. ■

Задача 1.5.4. Найдите НОК (23, 81, 13).

Решение. НОД (23, 81) = 1, НОД (23, 13) = 1, НОД (81, 13) = 1.

Тогда НОК (23, 81, 13) = 23 · 81 · 13 = 24219. ■



1.6. Простые числа. Бесконечность простых чисел

А как называются числа: 5, 7, 11, 13, 29? Вычислите наибольший общий делитель 5 и 7; 11 и 13; 13 и 29. Что их объединяет?

____

____

____

Определение 1.6.1. Натуральное число p называется **простым**, если оно имеет ровно два натуральных делителя 1 и p.

Числа 4, 116, 20, 120 сколько имеют делителей?

4: _________________; 116: _________________; 20: _________________; 120: ____.

Такие числа называются составными.

Определение 1.6.2. Натуральное число n называется **составным**, если оно имеет более двух натуральных делителей.

Число 1 не относят ни к простым, ни к составным числам. Первыми простыми числами по порядку являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Выписав одно за другим достаточно много простых чисел, можно заметить, что они встречаются в ряду натуральных чисел все реже и реже; в промежутке от 1 до 100 их больше, чем в промежутке от 100 до 200; в последнем больше, чем между 200 и 300, и так далее.

Естественно возникает вопрос: не существует ли границы, далее которой простые числа более не встречаются? Однако, еще великий греческий математик Евклид в «Началах» доказал, что последнего простого числа нет.

Для доказательства бесконечности множества простых чисел необходимо рассмотреть сначала ряд теорем о простых и составных числах.

Теорема 1.6.1. Пусть n – натуральное число большее 1, и p – наименьший натуральный делитель числа n, больший 1. Тогда:

1) p – простое число;

2) если n – составное, то $p \leq \sqrt{n}$.

Доказательство. 1) По условию $n \vdots p$, откуда $n = pn_1$. Если p – составное число, то существует число $q > 1$ такое, что $p \vdots q$. Следовательно, и $n \vdots q$. Это противоречит тому, что p – наименьший натуральный делитель числа n. Значит, p – простое число.

2) Пусть n – составное число и p – его наименьший делитель. Тогда $n = pn_1$, причем $p \leq n_1$. Умножив обе части этого неравенства на p, получим $p^2 \leq pn_1 = n$ или $p \leq \sqrt{n}$. ■

Из этой теоремы вытекает правило для отыскания простых чисел:

Для того, чтобы убедиться, что некоторое натуральное число *n* является простым нужно поступить так:

1) выписать все простые числа, не превосходящие квадратного корня из *n*,

2) проверить, что *n* не делится ни на одно из них.

Задача 1.6.1. Простым или составным является число 911?

Решение. Если число 911 составное, то его наименьший простой делитель не должен превосходить $\sqrt{911}$. Таким образом, следует выяснить нет ли у 911 простых делителей, не превосходящих $\sqrt{911}$.

Так как $30 < \sqrt{911} < 31$, то выпишем все простые числа, не превосходящие 30. Это числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Проверив каждое из них, убедимся, что число 911 не делится ни на одно из этих чисел. Следовательно, 911 – простое число. ■

Греческий математик Эратосфен (рис. 7) предложил алгоритм выделения простых   чисел из любого отрезка 1, 2, 3 , ..., n натурального ряда:

1. Нужно записать числа 1, 2, 3, ..., n;
2. Затем вычеркнуть число 1;
3. Число 2 обвести в кружок и вычеркнуть все числа кратные двум;
4. Число 3 обвести в кружок и вычеркнуть все числа кратные трем и так далее.

Таким образом, надо вычеркнуть все числа, кратные простым числам $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., $p_k \leq \sqrt{n}$. Оставшиеся («просеявшиеся») числа будут простыми.

Этот метод называется **решето Эратосфена**.

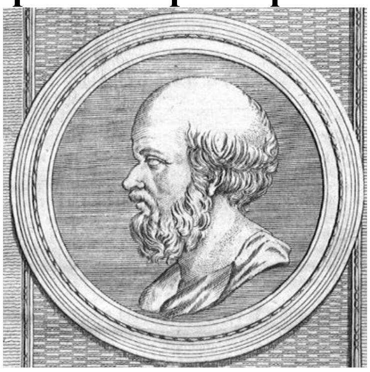


Рис. 7. Эратосфен
(276 г. до н.э. – 194 г. до н.э.)

Методом «решета Эратосфена» и другими были составлены таблицы простых чисел (разумеется, не всех, но достаточно большего количества) и разложений на простые множители составных чисел натурального ряда (рис. 8).

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Рис 8. Таблица простых чисел от 2 до 1000.

Наряду с решетом Эратосфена были предложены: решето Сундарама, решето Аткина.

Из таблиц простых чисел можно извлечь статистические данные о распределении этих чисел среди чисел натурального ряда. Частота появления простых чисел убывает с удалением от начала ряда, но для отдельных тысяч правило убывания не выполняется. Над составлением таблиц простых чисел работали итальянский математик Катальди, швейцарский математик Ламберт, Чернак, Кулик и другие. Существуют пары простых чисел, разность между которыми равна двум, например 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13 и так далее.

Такие пары простых чисел называются **близнецами**. Близнецами были номера годов 1949 и 1951, 1997 и 1999. Наибольшей известной парой близнецов является пара 10999949 и 10999951. До сих пор неизвестно конечно или бесконечно множество пар-близнецов.

Задача 6.2. Составить таблицу простых чисел, не превосходящих 50.

Решение**.** Выпишем натуральные числа от 1 до 50:

1, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~.

Найдем первое натуральное число – 2 > 1 и обведем его кружочком. Вычеркнем теперь из этой последовательности каждое второе число после 2 (числа кратные 2), далее обводим кружком первое из оставшихся чисел – 3 и вычеркиваем каждое третье число после 3 (кратное 3). Так же будем поступать и дальше – вычеркнем сначала каждое пятое число после 5 (кратное 5) и наконец, каждое седьмое число после 7 (кратное 7). Далее вычеркивание можно прекратить, так как квадрат следующего простого числа 11 равен 121. Таким образом, получилась следующая таблица простых чисел, меньших 50: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. ■

Теорема 1.6.2. (Евклида). Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Применим метод от противного. Предположим, что множество простых чисел – конечно и $p_1, p_2, ..., p_k$ – все простые числа, где p_1 – – самое маленькое число и p_k – самое большое. Составим произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$ и рассмотрим число $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k + 1$ (1). Так как $n > p_k$, то n должно быть составным. Следовательно, оно должно делиться на некоторое простое число. Но, по предположению, все простые числа принадлежат множеству $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Значит, n делится на одно из этих чисел, например, на p_i. Однако, ясно также, что произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k \vdots p_i$. Теперь из равенства (1) и условий $n \vdots p_i$ и $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k \vdots p_i$ следует, что $1 \vdots p_i$. Но это невозможно, так как $1 < p_i$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Хотя существует бесконечное количество простых чисел, промежутки между последовательными простыми числами в натуральном ряду могут быть сколь угодно большими. Это легко увидеть, если рассмотреть для любого натурального числа n набор чисел $(n + 1)! + 2$; $(n + 1)! + 3$; ..., $(n + 1)! + (n + 1)$, содержащий n последовательных натуральных составных чисел. Докажем этот факт в следующей теореме.

Теорема 1.6.3. Существуют интервалы натурального ряда произвольной длины, не содержащие простых чисел.

Доказательство. Возьмем произвольное натуральное число $n > 1$ и составим последовательность натуральных чисел: $n! + 2$; $n! + 3$; $n! + 4$, ..., $n! + n$. Все члены этой последовательности являются составными числами, так как $n! \vdots 2$, $n! \vdots 3$, $n! \vdots 4$, ..., $n! \vdots n$ и тогда $(n! + 2) \vdots 2$, $(n! + 3) \vdots 3$, $(n! + 4) \vdots 4$, ..., $(n! + n) \vdots n$. Получили $(n - 1)$ идущих подряд составных чисел. ■

Вы узнали о простых и составных числах, 1 – не простое и не составное, бесконечности простых чисел, решете Эратосфена – метод нахождения простых чисел из промежутка натуральных чисел.

1.7. Представление натурального числа в виде произведения простых сомножителей и его единственность

Числа можно записать так $125 = 5 \cdot 25 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, $10 = 2 \cdot 5$; $200 = 100 \cdot 2 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Можно любое число представить в виде произведения простых чисел?

____
____
____.

Теорема 1.7.1. Если n – натуральное, а p – простое число, то либо n делится на p, либо n и p взаимно просты.

Доказательство. Пусть d = НОД (n, p). Поскольку p – простое число, то либо $d = 1$, либо $d = p$. Если $d = 1$, то n и p взаимно просты, а если $d = p$, то $n \vdots p$. ■

Теорема 1.7.2. Пусть $p_1, p_2, ..., p_k, q$ – простые числа, причём произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot, ..., \cdot p_k$ делится на q. Тогда существует число p_i, где $i \in \{1, ..., k\}$ такое, что $p_i = q$.

Доказательство. Предположим, что ни одно из чисел $p_i \neq q$. Тогда, по теореме 1.4.1, получим НОД $(p_1, q) = 1$, НОД $(p_2, q) = 1$, ..., НОД $(p_k, q) = 1$. Теперь, на основании теоремы 1.4.6, НОД $(p_1, p_2, ..., p_k, q) = 1$. Но, по условию, $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k \vdots q$ и $q \vdots q$, значит и $1 \vdots q$. Получили противоречие. Следовательно, существует p_i, $i \in \{1, ..., k\}$, такое, что НОД $(p_i, q) \neq 1$. На основании теоремы 1.7.1, НОД$(p_i, q) = p_i$, так как p_i – простое число. С другой стороны, НОД $(p_i, q) = q$, так как q – простое число. А поскольку НОД (p_i, q) определяется однозначно, то $p_i = q$. ■

Теорема 1.7.3. (Основная теорема арифметики). Всякое натуральное число $n > 1$ либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел, причём единственным образом.

Доказательство.

1. Существование. Рассмотрим натуральное число $n > 1$. Если n – простое, то теорема верна. Если же n – составное и p_1 – его наименьший простой делитель, то $n = p_1 \cdot n_1$. Теперь, если n_1 – простое число, то разложение n на простые сомножители получено. А если n_1 – составное, то существует наименьший простой делитель p_2 числа n_1 и $n_1 = p_2 \cdot n_2$. Далее, если n_2 – простое число, то теорема доказана и $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$, а если n_2 – составное, то поступаем аналогичным образом: $n_2 = p_3 \cdot n_3$ и так далее. Процесс закончится быстрее, чем за n шагов, так как $n > n_1 > n_2 > ... > 1$ – убывающая последовательность натуральных чисел.

Таким образом, получено разложение n в произведение простых сомножителей $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Существование разложения доказано.

2. Единственность. Пусть n – составное число и оно представлено в виде произведения простых чисел двумя способами: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$ и $n = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$. Приравняем правые части этих равенств: $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$ (1). Левая часть полученного равенства делится на p_1, значит, и правая часть тоже делится на p_1, то есть $q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s \vdots p_1$. Так как все q_i – простые, то на основании теоремы 1.4.6, существует $q_i = p_1$. Для простоты будем считать, что $q_i = q_1$. Иначе можно перенумеровать сомножители в правой части. Разделив обе части равенства (1) на p_1, получим $p_2 \cdot ... \cdot p_k = q_2 \cdot ... \cdot q_s$ (2). Рассуждая аналогичным образом, получим $p_2 = q_2$, сократим на p_2 и продолжим этот процесс. Если предположить, что $k < s$, то после k шагов получится $1 = q_{k+1} \cdot ... \cdot q_s$. Это равенство, очевидно неверно, следовательно, $k = s$. Поэтому при соответствующей нумерации, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, ..., $p_k = q_k$, то есть разложение натурального числа n на простые сомножители единственно. ■

Итак, всякое составное число n может быть представлено в виде произведения простых чисел единственным образом. Среди этих простых множителей могут встречаться одинаковые. Пусть, например, p_1 встречается α_1 раз, p_2 встречается α_2 раз, ..., p_k встречается α_k раз. Тогда разложение числа n на простые сомножители будет иметь вид: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ (3).

Множители $p_1, p_2, ..., p_k$ располагаются обычно в порядке возрастания. Представление числа n в форме (3) называется **каноническим**. Это представление единственно.

Задача 1.7.1. Разложить число 1176 в произведение простых множителей.

Решение. Простыми делителями числа 1176 являются 2, 3, 7, причем 1176 нацело делится на 2^3, на 3, на 7^2, поэтому $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$. ■

Следствие 1.7.1. Пусть натуральные числа n и m представлены в виде произведения простых чисел $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где α_i и β_i – неотрицательны. В этом случае число n делится на m тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \geq \beta_1$, $\alpha_2 \geq \beta_2$, ..., $\alpha_k \geq \beta_k$.

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть $n \vdots m$, тогда $n = mc$. Разложив числа n, m, c в произведение простых сомножителей, получим: $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}) \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s)$ (4). На основании теоремы 1.7.3, числа q_1, q_2, ..., q_s совпадают с числами из множества $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$, поэтому $c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$, где $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, ..., $\gamma_k \geq 0$. Подставив это разложение в равенство (4), получим $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \cdot p_2^{\beta_2+\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k+\gamma_k}$. Отсюда $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2$, ..., $\alpha_k = \beta_k + \gamma_k$. Из этих равенств следует $\alpha_1 \geq \beta_1$, $\alpha_2 \geq \beta_2$, ..., $\alpha_k \geq \beta_k$.

2. Достаточность. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ и $\alpha_1 \geq \beta_1$, $\alpha_2 \geq \beta_2$, ..., $\alpha_k \geq \beta_k$. Тогда $n = m \cdot p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k-\beta_k}$, причем $\alpha_1 - \beta_1 \geq 0$, $\alpha_2 - \beta_2 \geq 0$, ..,, $\alpha_k - \beta_k \geq 0$. Поэтому $n = m \cdot c$ и $n \vdots m$. ■

Следствие 1.7.2. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$. Тогда НОД $(n, m) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$ и НОК $(n, m) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$.

Доказательство. Пусть $d = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$. Докажем, что $d =$ НОД (n, m). На основании следствия 1.7.1, $n \vdots d$ и $m \vdots d$, откуда $d =$ ОД (n, m). Пусть c – произвольный общий делитель чисел n и m, то есть $n \vdots c$ и $m \vdots c$. Тогда $c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$, где $\alpha_1 \geq \gamma_1$, $\alpha_2 \geq \gamma_2$, ..., $\alpha_k \geq \gamma_k$ и $\beta_1 \geq \gamma_1$, $\beta_2 \geq \gamma_2$, ..., $\beta_k \geq \gamma_k$. Поэтому $\min(\alpha_1, \beta_1) \geq \gamma_1$, $\min(\alpha_2, \beta_2) \geq \gamma_2$, ..., $\min(\alpha_k, \beta_k) \geq \gamma_k$. Очевидно, что $d \vdots c$, откуда $d =$ НОД (n, m). Найдем произведение $d \cdot p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)} = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k+\beta_k} = n \cdot m$.

Отсюда следует, что НОК $(n, m) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$. ■

Задача 1.7.2. Найдите каноническое разложение натуральных чисел 2624 и 3232, их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Решение. $2624 = 2^6 \cdot 41$, $3232 = 2^5 \cdot 101$. Тогда НОД $(2624, 3232) = 2^5$ и НОК $(2624, 3232) = 2^6 \cdot 41 \cdot 101$. ■

Вы узнали о каноническом разложении произвольного числа не равного 1 в произведение простых чисел и решили задачи.

1.8. Число и сумма натуральных делителей

Запишите натуральные делители (меньшие этого числа) числа 6 и сложите, сложите указанные делители 6: ____________________
____.

Запишите вывод: ____
____.

Сумма делителей числа 6 равна самому числу – 6. Следующие число с таким свойством 28 : n = 28 имеет натуральные делители 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28. Древних математиков удивляло особое свойство этих чисел: каждое из них равно сумме всех их собственных делителей.

Пифагорейцы развивали свою философию из науки о числах, такие числа они связывали прекрасными образами добродетелей, представляющие собой середину между излишеством и недостатком, очень редки и порождаются совершенным порядком. Из-за трудности нахождения и таинственной непостижимости совершенные числа в старину считались божественными. Так, средневековая церковь полагала, что изучение совершенных чисел ведет к спасению души, что нашедшему новое совершенное число гарантировано вечное блаженство. Существовало также убеждение, что мир потому прекрасен, что сотворен создателем за 6 дней. Такие числа назвали совершенными.

Первые попытки введения числовых функций были сделаны древними греками. Ученые установили, что некоторые натуральные числа n обладают замечательным свойством: сумма делителей числа n равна самому числу n (само число не считалось делителем).

Первые пять из них – 6, 28, 496, 812833550336.

В настоящее время известно более 23 совершенных числа, причем были получены с помощью компьютера.

Еще в XVIII веке Л. Эйлер (рис. 9) доказал, что каждое четное совершенное число m может быть представлено в виде $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$, где $2^n - 1$ – простое число.

Рис. 9. Эйлер
(15.04.1707 г. – 18.09.1783 г.)

Введем следующие числовые функции:
1) $\tau(n)$ число всех натуральных делителей n;
2) $\sigma(n)$ сумма всех натуральных делителей числа n.

Задача 1.8.1. Вычислите $\tau(28)$ и $\sigma(28)$.

Решение. Укажем делители числа 28: 1, 2, 4, 7, 14, 28, следовательно число делителе равно 6, $\tau(28) = 6$; вычислим сумму делителей числа 28: 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56, $\sigma(28) = 56$. ■

Из примера видно, что достаточно легко указали количество и сумму натуральных делителей числа 28.

Однако, если рассмотреть трех или четырехзначные числа, то вычислить $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ не так-то просто.

Поэтому встает вопрос: *Можно ли указать для любого натурального числа n формулы вычисления числа и суммы натуральных делителей этого числа*.

Пример 1.8.2. Числа 2, 3, 7, 23 – простые, т.к. имеют два натуральных делителя 1 и само число; числа 4, 6, 8, 100 – составные – имеют более двух делителей, тогда составное число $100 = 2^2\cdot5^2$.

Выведем формулу числа натуральных делителей, используя вышеизложенный материал.

Теорема 1.8.1. Если каноническая запись числа n имеет вид: $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, то число его натуральных делителей равно $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n + 1)$.

Доказательство. Любое число n большее 1, запишем так: $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$. Любой делитель числа n, можно представить в виде: $c = p_1^{l_1}\cdot p_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{l_n}$, где для любого j $(1\le j\le n)$ выполняются неравенства $0\le l_j\le\alpha_n$. Поэтому показатель l_1 может принимать $(\alpha_1 + 1)$ различных значений: 0, 1, ... k_1, показатель l_2 – $(\alpha_2 + 1)$ различных значений и так далее – l_n – $(\alpha_n + 1)$ различных значений. Следовательно, в кортеже $(l_1, l_2, ..., l_n)$ первая координата может принимать $(\alpha_1 + 1)$ значений, вторая – $(\alpha_2 + 1)$ значений, ... n-я $(\alpha_n + 1)$ значений. Тогда, по правилу произведения, число таких кортежей равно $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n + 1)$, следовательно, $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n + 1)$. ■

Теорема 1.8.2. Если каноническая запись числа n имеет вид $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, то суммы всех натуральных делителей числа n:

$$\sigma(n)=\left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdot\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}\right).$$

Доказательство. Пусть $n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$. Рассмотрим произведение $(1+p_1+\ldots+p_1^{k_1})(1+p_2+\ldots+p_2^{k_2})\ldots(1+p_m+\ldots+p_m^{k_m})$ (1).

Если раскрыть скобки, то получится сумма слагаемых вида $p_1^{l_1}\cdot p_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{l_m}$, где при любом j $(1\le j\le m)$ выполняется неравенство $0\le l_j\le k_j$. Такие числа являются делителями n, причём каждый делитель входит в сумму только один раз, поэтому произведение (1) равно сумме всех делителей n, то есть $\sigma(n)$. Итак, $\sigma(n)=(1+p_1+\ldots+p_1^{k_1})(1+p_2+\ldots+p_2^{k_2})\ldots(1+p_m+\ldots+p_m^{k_m})$ (2).

Однако, каждый сомножитель из (2) является суммой (k_i + 1) членов геометрической прогрессии со знаменателем p_i, где $1 \le i \le m$. Применяя формулу суммы членов геометрической прогрессии, можно получить формулу:

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdot\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}\right). \blacksquare$$

<u>Пример 1.8.2.</u> Найдите число и сумму натуральных делителей числа $n = 84$, двумя способами.

<u>Решение.</u>

Первый способ вычисления $\tau(84)$. Делители 84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84, количество делителей равно 12, $\tau(84) = 12$. ■	Второй способ вычисления $\tau(84)$. Представим: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ и подставим в формулу: формулу $\tau(84) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$. ■
Первый способ вычисления $\sigma(84)$ Вычислим сумму делителей: 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 12 + 14 + 21 + + 28 + 42 + 84 = 224. ■	Второй способ вычисления $\sigma(84)$ $\sigma(84) = \left(\frac{2^3-1}{2-1}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\cdot\left(\frac{7^2-1}{7-1}\right) =$ $= 7 \cdot 4 \cdot 8 = 224$. ■

<u>Задача 8.3.</u> Найдите сумму натуральных делителей числа 360.

<u>Решение.</u> Представим 360 в виде произведения простых множителей: $360 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Тогда $\sigma(360) = \left(\frac{2^3-1}{2-1}\right)\cdot\left(\frac{3^3-1}{3-1}\right)\cdot\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right) = 546$. ■

Вы узнали о божественных (совершенных) числах и формулах вычислениях $\tau(n)$ и $\sigma(n)$, доказали их и решили задачи.

1.9. Распределение простых чисел. Асимптотический закон распределения

Рассмотрите количество простых чисел в первой, второй и третьей сотни натуральных чисел и сделайте вывод. ____
____
____.

Математики конца XVIII – начала XIX века обратились к изучению таблиц простых чисел. Они рассматривали частоту и плотность, с которой попадаются простые числа в натуральном ряду.

Если обозначить количество простых чисел на промежутке $[2,\ x)$ через $\pi(x)$, то получится функция распределения простых чисел в зависимости от длины промежутка. Поскольку из-за нерегулярности распределения простых чисел явного выражения для $\pi(x)$ получить не удалось, то они попытались получить асимптотическое приближение для $\pi(x)$. Будем говорить, что функции $y = f(x)$, $y = \psi(x)$ асимптотически равны при $x \to +\infty$, если они бесконечно велики при $x \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\psi(x)}=1$. В этом случае пишут $f(x) \sim \psi(x)$.

В 1808 году француз Лежандр (рис. 10) опубликовал гипотезу, согласно которой $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x - 1{,}08366...}$.

Рис.10. Лежандр
(18.09.1752 г. – 09.01.1833 г.)

Еще ранее великий немецкий математик К. Гаусс пришел к предположению, что $\pi(x) \approx \int\limits_2^x \dfrac{dt}{\ln t}$.

Однако эти предположения не были ими доказаны.

Первым после Евклида, кто пошел верным путем в вопросе о распределении простых чисел и достиг важных результатов, был великий русский математик Пафнутий Львович Чебышёв (рис. 11).

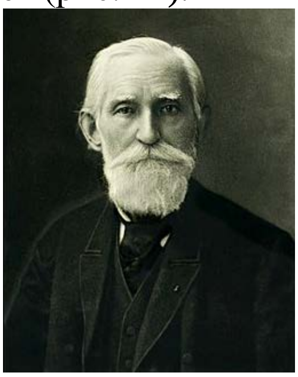


Рис. 11. Чебышёв П.Л.
(4(16).05.1821 г. – 26.11(08.12).1894 г.)

В 1849 году он доказал, что гипотеза Лежандра ложна и что, если при некоторых A и B формула $\pi(x) = \dfrac{x}{A \cdot \ln x + B}$ верна с точностью до слагаемого порядка $\frac{x}{\ln^2 x}$, то $A = 1$, $B = -1$. Отсюда вытекает, что если существует $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi(x) : \frac{x}{\ln x})$, то этот предел должен равняться 1.

Утверждение о том, что $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ называют асимптотическим законом распределения простых чисел.

Получить окончательное доказательство асимптотического закона распределения простых чисел П.Л. Чебышеву не удалось – он не доказал существования предела $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi(x) \div \frac{x}{\ln x})$. Иной подход к проблеме распределения простых чисел П.Л. Чебышев развил во втором мемуаре о простых числах, появившемся в 1850 году. В нем он доказал, что $0{,}92129 < \pi(x) : \frac{x}{\ln x} < 1{,}10555$ (неравенство Чебышева) и вывел отсюда следующую теорему, впервые высказанную без доказательства французским математиком Бертраном: между n ($n > 3$) и $2n - 2$ всегда есть одно простое число.

В 1859 году немецкий математик Б. Риман (рис. 12) изучал функцию $\xi(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, введенную Л. Эйлером, не только для действительных, но и для комплексных значений s. В 1896 году, используя идеи Римана, почти одновременно французский математик Ж. Адамар (рис. 13) и бельгийский математик Ш. Валле-Пуссен (рис. 14) доказали асимптотический закон распределения простых чисел.

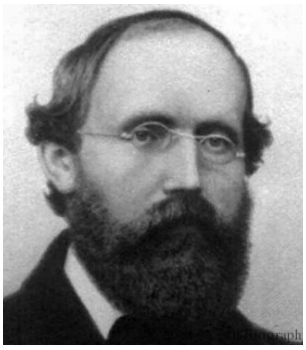


Рис. 12. Б. Риман (17.09.1826 г. – 20.07.1866 г.)

Рис. 13. Ж. Адамар (08.12.1865 г. – 17.10.1963 г.)

Рис. 14. Ш. Валле-Пуссен (14.08.1866 г. – 02.03.1962 г.)

Рассмотрим вопрос о простых числах в арифметической прогрессии. Натуральный ряд чисел является арифметической прогрессией с первым членом 1 и разностью 1. Поэтому достаточно использовать результаты, полученные при изучении распределения простых чисел в натуральном ряду, и при решении вопроса о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях. Здесь можно ограничиться изучением прогрессий, в которых первый член a и разность d взаимно просты. В противном случае, все члены прогрессии будут делиться на наибольший общий делитель a и d и в прогрессии не будет простых чисел. Случай, когда НОД (a, d) = 1, рассмотрел немецкий математик Л. Дирихле (рис. 15). Он доказал в 1837 году следующее обобщение теоремы Евклида.

Рис. 15. Л. Дирихле
(13.02.1805 г. – 05.05.1859 г.)

Теорема 1.9.1. Если НОД (a, d) = 1, то прогрессия a, $a + d$, ..., $a + (n - 1)d$, ... содержит бесконечно много простых чисел.

Ещё до этого теорема о бесконечности множества простых чисел в арифметических прогрессиях была доказана для некоторых частных случаев. Докажем следующую теорему.

Теорема 1.9.2. Арифметическая последовательность с общим членом ($4n + 3$), где $n = 0, 1, 2, ...$ содержит бесконечно много простых чисел.

Доказательство. Рассмотрим число $M = 4n! - 1$, где n – натуральное число. Число M имеет вид $4k + 3$. Оно не может состоять только из простых множителей вида ($4k + 1$), потому, что произведение простых чисел такого вида само является числом такого же вида: $(4k + 1)(4m + 1) = 4(4km + k + m) + 1$. Поэтому число M имеет хотя бы один простой множитель вида ($4k + 3$) или ($4k - 1$), который больше n. Таким образом, для каждого натурального числа n существует простое число, большее n, имеющее вид ($4k + 3$). ■

Теорема 1.9.3. Арифметическая прогрессия с общим членом ($6n + 5$), где $n = 0, 1, 2, ...$ содержит бесконечно много простых чисел.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей. Рассмотрим число M, определяемое равенством $M = 6n! - 1$, где n – натуральное число. Ясно, что M число вида ($6n + 5$) и число M не может состоять только из простых множителей вида ($6n + 1$), так как произведение множителей такого вида является числом вида: $(6k + 1)(6m + 1) = 6(km + k + m) + 1$. Поэтому M имеет хотя бы один простой множитель вида ($6k + 5$), который больше n. Значит, для каждого натурального числа n существует простое число, большее n, имеющее вид $6k + 5$. ■

Вы узнали о распределении простых чисел, познакомились с арифметическими последовательностями, содержащие бесконечно много простых чисел.

1.10. Систематические числа. Перевод из одной системы счисления в другую

Прочитайте стихотворение А.Н. Старикова:

Ей было 1100 лет,
Она в 101-й класс ходила,
В портфеле по 100 книг носила -
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато 100-ногий.
Она ловила каждый звук
Своими 10-ю ушами,
И 10 загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И 10 темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно…
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Поняли ли вы рассказ поэта? Тогда 1100 лет = ______; 101-й класс = ______; 100 книг = ________; 10-ю ушами = ______.

Одно и тоже число можно записать по-разному в различных системах счисления, например, $10_2 = 2_{10}$.

Определение 1.10.1. **Система счисления** – символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков.

Приведем пример *алфавитов некоторых позиционных систем счисления*:
Десятичная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
Двоичная система: {0, 1};
Восьмеричная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
Шестнадцатеричная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E}
Количество цифр в алфавите равно основанию системы счисления.

Существуют две системы счисления: непозиционная и позиционная.

Определение 1.10.2. **Непозиционная** система, для которой значение символа не зависит от его положения в числе.

Общеизвестный пример такой системы – так называемые римские цифры. В этой системе единица обозначается I, пять – V, десять – X, пятьдесят – L, сто – C и т.п., причем смысл каждого символа не зависит от того места, на котором он написан. Из этих символов комбинируются другие числа.

Например, число 88 в этой системе запишется так: LXXXVIII. В этой записи цифра X участвует три раза, причем каждый раз она означает одну и ту же величину – десять единиц.

Римские цифры часто встречаются и сейчас, например, на циферблатах часов, однако в математической практике они не применяются.

Определение 1.10.3. **Позиционная** такая система, в которой значение каждой цифры находится в строгой зависимости от ее позиции в числе.

В них цифры имеют различные значения в зависимости от того, на каком месте в записи числа они стоят.

Например, в числе 222 двойка участвует три раза. Но самая правая из них означает две единицы, вторая справа – два десятка, а третья – две сотни.

Определение 1.10.4. **Систематической записью** числа N по основанию g называют представление этого числа в виде суммы $N = a_n g^n + a_{n-2} g^{n-2} + ... + a_1 g + a_0$ (*), где $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ принимают значения $0, 1, .., g-1$, причем $a_n \neq 0$ в числе.

Используются различные системы счисления.

Десятичная система счисления далеко не сразу заняла то господствующее положение, которое она имеет сейчас. В разные исторические периоды многие народы пользовались системами счисления, отличными от десятичной.

По свидетельству известного исследователя Африки Стенли, у ряда африканских племен была распространена пятеричная система счисления (рис. 16).

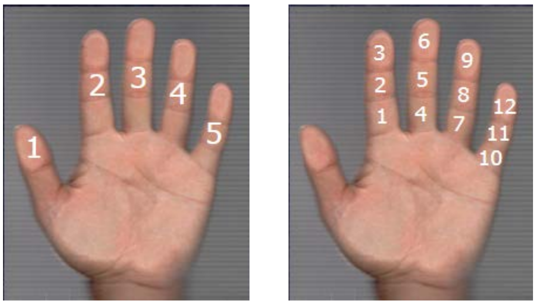


Рис. 16. Пример пятеричной системы счисления

Также довольно широкое распространение имела двенадцатеричная система. Ее происхождение связано, несомненно, тоже со счетом на пальцах, а именно, так как четыре пальца руки (кроме большого) имеют в совокупности 12 фалангов, то по этим фалангам, перебирая их по очереди большим пальцем можно вести счет от 1 до 12.

Затем 12 принимается за единицу следующего разряда и так далее. В устной речи остатки двенадцатеричной системы сохранились до наших дней: вместо того чтобы сказать «двенадцать», мы часто говорим «дюжина». Многие предметы (ножи, вилки, тарелки и т.п.) очень часто считают именно дюжинами, а не десятками. (Вспомните, например, что сервиз бывает, как правило, на 12 или на 6 персон и значительно реже на 10 или на 5).

С математической точки зрения двенадцатеричная система имела бы некоторые преимущества перед десятичной, поскольку число 12 делится на 2, 3, 4 и 6, а число 10 только на 2 и 5.

Больший запас делителей у числа, служащего основанием системы счисления создает известные удобства в ее использовании, например, в связи с признаками делимости. Элементы двенадцатеричной системы счисления сохранились в Англии в системе мер (1 фут = 12 дюймам) и в денежной системе (1 шиллинг = 12 пенсам). Нередко и мы сталкиваемся в быту с двенадцатеричной системой счисления: чайные и столовые сервизы на 12 персон, комплект носовых платков – 12 штук.

В Древнем Вавилоне, культура которого, в том числе и математическая, была довольно высока, существовала весьма сложная шестидесятеричная система счисления. Вавилоняне считали продолжительность года равной 360 суткам, что естественно связывалось с числом 60. Эта система, как и двенадцатеричная, в какой-то степени сохранилась и до наших дней (например, в делении часа на 60 минут, а минут – на 60 секунд и в аналогичной системе измерения углов: 1 градус = 60 минутам, 1 минута = 60 секундам). В целом, однако, такая система, требующая шестидесяти различных «цифр», довольно громоздка и менее удобна, чем десятичная.

Из четырех перечисленных выше систем счисления (двенадцатеричной, пятеричной, шестидесятеричной и двадцатеричной), сыгравших наряду с десятичной заметную роль в развитии человеческой культуры, все, кроме шестидесятеричной, связаны с тем или иным способом счета по пальцам рук (или и рук, и ног), то есть имеют, подобно десятичной системе, несомненное «анатомическое» происхождение.

Примеры различных систем счисления.

1 фут = 12 дюймов;

1 шиллинг = 12 пенсов;

1 час = 60 минут;

1 минута = 60 секунд;

1 градус = 60 минут;

1 минута = 60 секунд;

Теорема 1.10.1. Всякое натуральное число T по основанию g может быть единственным образом представлено в виде систематической записи по любому основанию $g > 1$.

Доказательство.

I. Существование. Разделим число N на g с остатком: $N = N_1g + a_0$, где $0 \le a_0 < g$, далее N_1 на g: $N_1 = N_2g + a_1$, где $0 \le a_1 < g$, ..., $N_n = 0 \cdot g + a_n$, где $0 < a_n < g$. Ясно, что $N > N_1 > N_2 > ... > N_n \ge 0$ – конечная убывающая последовательность натуральных чисел. Процесс деления закончится на $(n + 1)$ шаге. В первое равенство вместо N_1 подставим выражение из второго, получим $N = a_0 + ga + N_2g^2$. Далее вместо N_2 подставим выражение из третьего равенства и так далее. В конце придем к записи: $N = a_ng^n + a_{n-1}g^{n-1} + ... + a_0$.

II. Единственность. Предположим, что существуют две различные записи натурального числа N:

$N = a_kg^k + a_{k-1}g^{k-1} + ... + a_1g + a_0$;

$N = b_mg^m + b_{m-1}g^{m-1} + ... + b_1g + b_0$.

Докажем, что $a_0 = b_0$. Запишем число N следующим образом:
$N = gT + a_0$, $T = a_k g^{k-1} + a_{k-1} g^{k-2} + \ldots + a_2 g + a_1$, где $0 \le a_0 < g$;
$N = gT_1 + b_0$, $T_1 = b_m g^{m-1} + b_{m-1} g^{m-2} + \ldots + b_2 g + b_1$, где $0 \le b_0 < g$.

При делении числа N на g частное и остаток определяются однозначно, т.е. $T = T_1$ и $a_0 = b_0$.

Рассуждая аналогичным образом для чисел T и T_1, докажем, что $a_1 = b_1$ и так далее, получим $a_k = b_k$, причем число цифр в двух записях числа N одинаково, т.е. $k = m$.

Определение 1.10.5. Цифры $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называют цифрами в системе счисления с основанием g и число запишем в строгой зависимости от ее позиции в числе.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1.10.1. Получите десятичную запись числа 4602_7.

Решение. $4602_7 = 4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 2 = 1668$.

Сложение, вычитание, умножение и деление чисел в любой системе счисления с одним и тем же основанием производиться аналогично выполнению этих операций в десятичной системе счисления.

Пусть $M = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_g$ и $P = (b_p b_{p-1} \ldots b_1 b_0)_g$.

Тогда $M + P = (a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \ldots + a_1 g + a_0) + (b_k g^p + b_{p-1} g^{p-1} + \ldots + b_1 g + b_0) = (a_k + b_k) \cdot g^k + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot g + (a_0 + b_0) = (c_k g^p + c_{p-1} g^{p-1} + \ldots + c_1 g + c_0)$, если $p > k$.

Цифры $c_0, c_1, \ldots, c_p$ определяются следующим образом:

$$c_0 = \begin{cases} a_0 + b_0, \text{ если } b_0 + a_0 < g,\ d_1 = 0 \\ a_0 + b_0 - g, \text{ если } b_0 + a_0 \ge g,\ d_1 = 1 \end{cases};$$

$$c_1 = \begin{cases} a_1 + b_1 + d_1, \text{ если } b_1 + a_1 + d_1 < g,\ d_2 = 0 \\ a_1 + b_1 + d_1 - g, \text{ если } b_1 + a_1 + d_1 \ge g,\ d_2 = 1 \end{cases}$$

и т.д.

Задача 1.10.2. Сложите 2321_5 и 414_5.

Решение.

$$\begin{array}{r} 2321_5 \\ + \quad 414_5 \\ \hline 3240_5 \end{array}$$

Первое действие: $1 + 4 = 5 = 5 \cdot 1 + 0$, $d_1 = 1$; $c_0 = 0$.
Второе действие: $1 + 2 + 1 = 4 = 5 \cdot 0 + 4$, $d_2 = 0$; $c_1 = 4$.
Третье действие: $3 + 4 - 5 = 7 = 5 \cdot 1 + 2$, $d_3 = 1$; $c_2 = 2$.
Четвертое действие: $2 + 1 = 3 = 5 \cdot 0 + 3$, $d_4 = 0$; $c_3 = 3$. ■

Найдем произведение чисел M и P.
$M \cdot P = (a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \ldots + a_1 g + a_0) \cdot (b_k g^p + b_{p-1} g^{p-1} + \ldots + b_1 g + b_0) =$
$= a_k b_p g^{k+p} + \ldots + (a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_0 b_2) g^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) g + a_0 b_0$.

Получим следующие равенства:
$a_0 \cdot b_0 = g \cdot d_1 + c_0$, $a_1 \cdot b_0 + d_1 = g \cdot d_2 + c_1$, $a_2 \cdot b_0 + d_2 = g \cdot d_3 + c_2$.

Задача 1.10.3. Умножьте 2415_6 и 242_6.

Решение. Исходя из нижеприведенных равенств, получаем результат:

$$\begin{array}{r} 2415_6 \\ \times \quad 242_6 \\ \hline \end{array}$$

Число 5234_6 получаем при выполнении следующих действий:
$5 \cdot 2 = 6 \cdot 1 + 4$; $2 \cdot 1 + 1 = 3$; $2 \cdot 4 = 6 \cdot 1 + 2$; $2 \cdot 2 + 1 = 5$.

$$\begin{array}{r} 5234_6 \\ + \\ 14512_6 \\ + \\ 5234_6 \\ \hline 1122154_6 \end{array}$$

Число 14512_6 получаем при выполнении следующих действий:
$4 \cdot 5 = 6 \cdot 3 + 2$; $4 \cdot 1 + 3 = 6 \cdot 1 + 1$; $4 \cdot 4 + 1 = 6 \cdot 2 + 5$;
$4 \cdot 2 + 2 = 6 \cdot 1 + 4$.
Число 5234_6 получаем при выполнении следующих действий:
$2 \cdot 5 = 6 \cdot 1 + 4$; $2 \cdot 1 + 1 = 3$; $2 \cdot 4 = 8 = 6 \cdot 1 + 2$;
$4 + 1 = 5 = 6 \cdot 0 +5$;
А результат 1122154_6 получаем сложение чисел

$$\begin{array}{r} 5234_6 \\ + \\ 14512_6 \\ + \\ 5234_6 \end{array} \quad \blacksquare$$

Вычитание и деление рассматриваются как операции, обратные сложению умножению, и выполняются аналогично с десятичной системой счисления.

Укажем, что применение в телеграфии именно двоичной системы связано, очевидно с удобством превращения двоичного числа в систему электрических сигналов. Одним из новейших применений двоичной системы – использование этой системы в вычислительных машинах.

Вы узнали о различных системах счисления, научились выполнять основные действия сложения, вычитания, умножения, деления.

1.11. Конечные цепные дроби. Свойства конечных цепных дробей

Интересные действия: $\dfrac{79}{23} = 3 + \dfrac{10}{23} = 3 + \dfrac{1}{2+\dfrac{3}{10}} =$

$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}=[3;\ 2,\ 3,\ 3]$. Хотелось узнать, что обозначает!

Что послужило для изучения таких дробей?

Гюйгенс (рис. 17), задавшись целью построить с помощью зубчатых колес модель солнечной системы, был поставлен перед необходимостью определения числа зубцов этих колес таким образом, чтобы отношение чисел двух связанных между собой колес (равное отношению времен полного их оборота) было по возможности близко к отношению α, времен обращения соответствующих планет. Вместе с тем эти числа зубцов по техническим причинам не могли, разумеется, быть чрезмерно большими. На рисунке 18 указана модель Солнечной системы, в основу которой было положено вычисление α.

Рис. 17. Гюйгенс Х.
(1629 г. – 1695 г.)

Таким образом, встал вопрос об отыскании такой рациональной дроби, числитель и знаменатель которой не превосходили бы данного предела и которая вместе с тем возможно ближе лежала бы к данному числу α.

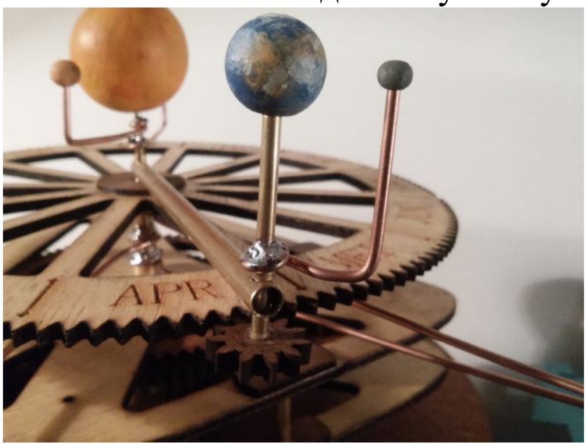


Рис. 18. Старинная модель Солнечной системы

Интересные факты о цепных дробях можно узнать из книги В.И. Арнольда «Цепные дроби».

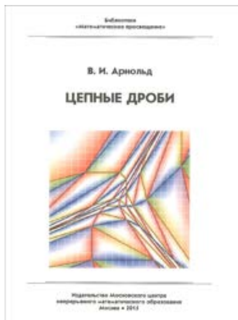


Рис. 19. Арнольд В.И. Цепные дроби

<u>Определение 1.11.1.</u> Выражение вида

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

называют ***конечной цепной дробью***, где $q_0 \in \boldsymbol{Z}$, $q_1, ..., q_n \in \boldsymbol{N}$, причем $q_n \neq 1$.

Теорема 1.11.1. Всякое рациональное число может быть записано в виде конечной цепной дроби, причем единственным образом.

Доказательство.

I. Существование. Пусть $\frac{a}{b}$ – рациональное число, где $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$. Применим алгоритм Евклида к числам a и b. Получим:

$$\begin{array}{lcl}
a = b \cdot q_0 + r_1 & & \dfrac{a}{b} = q_0 + \dfrac{r_1}{b} \\
b = r_1 \cdot q_1 + r_2 & & \dfrac{b}{r_1} = q_1 + \dfrac{r_2}{r_1} \\
r_1 = r_2 \cdot q_1 + r_3 & & \dfrac{r_1}{r_2} = q_2 + \dfrac{r_3}{r_2} \\
\dots & \rightarrow & \dots \\
r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n & & \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \dfrac{r_n}{r_{n-1}} \\
r_{n-1} = r_n \cdot q_n & & \dfrac{r_{n-1}}{r_n} = q_n .
\end{array} \qquad (*)$$

Из второго равенства легко найти, что $\frac{r_1}{b} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{r_2}{r_1}}$.

Подставляя это выражение в первое равенство, получим

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} \qquad (1).$$

Теперь из третьего равенства аналогично находим $\frac{r_1}{r_2} = \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}$ и подставляем в равенство (1), получится $\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}}$ и так далее. Окончательно приходим к записи: $\dfrac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$.

II. Единственность.

Пусть даны два представления числа $\dfrac{a}{b}$ в виде конечной цепной дроби:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \text{ и } \frac{a}{b} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots + \cfrac{1}{b_k}}}}.$$

Обозначим через c и d вторые слагаемые цепных дробей:

$$c = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}};\ d = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{b_4 + \ddots + \cfrac{1}{b_k}}}}.$$

Так как $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ... b_k$ – натуральные числа, то $0 < c < 1$ и $0 < d < 1$.

Тогда $\dfrac{a}{b} = a_0 + c$, где $0 < c < 1$ и $\dfrac{a}{b} = b_0 + d$, $0 < d < 1$, то есть a_0 и b_0 – целые части одного и того же числа $\dfrac{a}{b}$. Но целая часть числа определяется однозначно, значит $a_0 = b_0$. Из этого равенства следует, что

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{b_4 + \ddots + \cfrac{1}{b_k}}}}$$

Рассуждая аналогичным образом, получим $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и так далее.

Возможно три случая:

1) $n = k$. В этом случае $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_k$.

2) $n < k$. Тогда получим: $a_n = b_n + \cfrac{1}{b_{n+1} + \cfrac{1}{b_{n+2} + \cfrac{1}{b_{n+3} + \ddots + \cfrac{1}{b_k}}}}$. Это равенство возможно, только если $k = n + 1$ и $b_{n+1} = 1$. Однако, по определению, $b_k \neq 1$. Значит, этот случай невозможен.

3) Аналогично невозможен и случай $n > k$. Следовательно, $n = k$ и $a_0 = b_0$,

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_k$. ■

Сокращенно цепную дробь $\dfrac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$ будем обозначать: $\dfrac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, ..., q_n]$.

Задача 1.11.1. Запишите в виде конечной цепной дроби рациональное число $\left(-\dfrac{127}{52}\right)$.

Решение. Применим алгоритм Евклида к числам $a = -127$ и $b = 52$. Получим:

$-127 = 52 \cdot (-3) + 29$; $q_0 = -3$;
$52 = 29 \cdot 1 + 23$; $q_1 = 1$;
$52 = 29 \cdot 1 + 23$; $q_1 = 1$;
$29 = 23 \cdot 1 + 6$; $q_2 = 1$;
$23 = 6 \cdot 3 + 5$; $q_3 = 3$;
$6 = 5 \cdot 1 + 1$; $q_4 = 1$;
$5 = 5 \cdot 1$; $q_5 = 5$.

Значит, $-\dfrac{127}{52} = -3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}} = [-3; 1, 1, 3, 1, 5]$. ■

Сформулируем и докажем обратную теорему:

Теорема 1.11.2. Всякая конечная цепная дробь есть рациональное число.

Доказательство. Пусть дана цепная дробь $q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$.

Если произвести последовательное сложение дробей в знаменателях, то получим рациональное число. ■

Задача 1.11.2. Запишите цепную дробь [5; 4, 3, 2, 3] в виде рационального числа.

Решение.

$$[5; 4, 3, 2, 3] = 5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{7}}} = 5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{7}}} = 5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{7}{24}} = 5 + \frac{24}{103} = \frac{539}{103}.$$

С понятием конечной цепной дроби тесно связано понятие подходящих дробей.

Пусть дана конечная цепная дробь $\dfrac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$.

Определим числа P_k и Q_k, где $k = 0, 1, ..., n$, индуктивно с помощью следующих формул $P_0 = q_0$, $P_1 = q_0 \cdot q_1 + 1$, ..., $P_k = P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2}$ и $Q_0 = 1$, $Q_1 = q_1$, ..., $Q_k = Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2}$, где $k = 2, 3, ..., n$.

<u>Определение 1.11.2.</u> Дроби $\dfrac{P_0}{Q_0}$, $\dfrac{P_1}{Q_1}$, $\dfrac{P_2}{Q_2}$, ... называются подходящими дробями для цепной дроби $\dfrac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$.

<u>Теорема 1.11.3.</u> Для любой подходящей дроби $\dfrac{P_i}{Q_i}$ имеет место равенство

$$\frac{P_i}{Q_i} = q_1 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_i}}}}. \qquad (2)$$

<u>Доказательство.</u> Применим метод математической индукции по i.

1) Проверим справедливость утверждения при $i = 0$ и $i = 1$. Так как $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$, то $\dfrac{P_0}{Q_0} = q_0$. А если $P_1 = q_0 \cdot q_1 + 1$ и $Q_1 = q_1$, тогда $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = q_0 + \dfrac{1}{q_1}$.

2) Предположим, что равенство (2) верно для m и $m + 1$.

Докажем (2) для $(m + 2)$. Рассмотрим цепную дробь

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{m+1} + \cfrac{1}{q_{m+2}}}}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q'_{m+1}}}} = \frac{P'_{m+1}}{Q'_{m+1}},$$

так как для формула (2) верна $(m + 1)$, где $q'_{m+1} = q_{m+1} + \dfrac{1}{q_{m+2}}$.

По индуктивным формулам для $P'_{m+1} = P_m \cdot q'_{m+1} + P_{m-1}$ и $Q_{m+1} = Q_m \cdot q'_{m+1} + Q_{m-1}$.

Тогда: $\dfrac{P'_{m+1}}{Q'_{m+1}} = \dfrac{P_m q'_{m+1} + P_{m-1}}{Q_m q'_{m+1} + Q_{m-1}} = \dfrac{P_m(q_{m+1} + \dfrac{1}{q_{m+2}}) + P_{m-1}}{Q_m(q_{m+1} + \dfrac{1}{q_{m+2}}) + Q_{m+1}} =$

$$= \frac{P_m q_{m+1} + P_{m-1} + P_m \dfrac{1}{q_{m+2}}}{Q_m q_{m+1} + Q_{m-1} + Q_m \dfrac{1}{q_{m+2}}} = \frac{P_{m+1} q_{m+2} + P_m}{Q_{m+1} q_{m+2} + Q_m} = \frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}}.$$

Итак, формула (2) справедлива для (m + 2). Следовательно, равенство (2) верно для любого $i \in \boldsymbol{N}$. ■

Задача 1.11.3. Найти все подходящие дроби рационального числа $\dfrac{1023}{101}$.

Решение. Применим алгоритм Евклида к числам a = 1023 и b = 101.
1023 = 101 · 10 + 13; $q_0 = 10$;
101 = 13 · 7 + 10; $q_1 = 7$;
13 = 10 · 1 + 3; $q_2 = 1$;
10 = 3 · 3 + 1; $q_3 = 3$;
3 = 1 · 3; $q_4 = 3$.

Подходящие дроби $\dfrac{P_i}{Q_i}$ лучше находить по таблице.

№ дробей	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
q_i	10	7	1	3	3
P_i	10	71	81	314	1023
Q_i	1	7	8	31	101

Значения P_i и Q_i вычисляются так:
$P_0 = q_0$, $P_1 = q_0 \cdot q_1 + 1$, $P_2 = P_1 \cdot q_2 + P_0$, $P_3 = P_2 \cdot q_3 + P_1$, $P_4 = P_3 \cdot q_4 + P_2$.
$Q_0 = 1$, $Q_1 = q_1$; $Q_2 = Q_1 \cdot q_2 + Q_0$; $Q_3 = Q_2 \cdot q_3 + Q_1$; $Q_4 = Q_3 \cdot q_4 + Q_2$.
Тогда: $\dfrac{P_0}{Q_0} = \dfrac{10}{1}$; $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{71}{7}$; $\dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{81}{8}$; $\dfrac{P_3}{Q_3} = \dfrac{314}{31}$; $\dfrac{P_4}{Q_4} = \dfrac{1023}{101}$. ■

Задача 1.11.4. Сократите дробь $\dfrac{3587}{2743}$.

Решение. Найдем подходящие дроби этого числа. Последняя из подходящих дробей равна данной, полученной после сокращения.

3587 = 2743 · 1 + 844; $q_0 = 1$;
2743 = 844 · 3 + 211; $q_1 = 3$;
844 = 211 · 4 + 3; $q_2 = 4$.

	0	**1**	**2**
q_i	1	3	4
P_i	1	4	17
Q_i	1	3	13

Ответ: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p_2}{Q_2} = \dfrac{17}{13}$. ■

Рассмотрим свойства подходящих дробей.

Свойство 1.11.1^0 Имеет место равенство: $P_i \cdot Q_{i-1} - P_{i-1} \cdot Q_i = (-1)^{i-1}$ (3)	Доказательство. 1) Проверим справедливость равенства (3) при $i = 1$ и $i = 2$. $P_1 \cdot Q_0 - P_0 \cdot Q_1 = (q_0 \cdot q_1 + 1) \cdot 1 - q_0 \cdot q_1 \cdot 1 = (-1)^0$. $P_2 \cdot Q_1 - P_1 \cdot Q_2 = (P_1 \cdot q_2 + P_0) \cdot Q_1 -$ $- P_1 \cdot (Q_1 \cdot q_2 + Q_0) = P_0 \cdot Q_1 - P_1 \cdot Q_0 = -1 = (-1)^1$. 2) Предположим, что теорема верна для m и $(m + 1)$, то есть $P_m \cdot Q_{m-1} - P_{m-1} \cdot Q_m = (-1)^{m-1}$ и $P_{m+1} \cdot Q_m - P_m \cdot Q_{m+1} = (-1)^m$. 3) Докажем, что (3) выполняется для $(m + 2)$. $P_{m+2} \cdot Q_{m+1} - P_{m+1} \cdot Q_{m+2} =$ $= (P_{m+1} \cdot q_{m+2} + P_m) \cdot Q_{m+1} - P_{m+1} \cdot (Q_{m+1} \cdot q_{m+2} +$ $+ Q_m) = P_m \cdot Q_{m+1} - P_{m+1} \cdot Q_m = ... =$ $= -(P_{m+1} \cdot Q_m - P_m \cdot Q_{m+1}) = (-1)^{m+1}$. Отсюда вытекает справедливость равенства(3). ■
Свойство 1.11.2.^{0} Имеет место: $$\frac{P_i}{Q_i} - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} = \frac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}}.$$	Доказательство. Преобразуем разность следующим образом: $\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} - \frac{P_m}{Q_m} = \frac{P_{m-2}Q_m - P_m Q_{m-2}}{Q_{m-2}Q_m} =$ $= \frac{P_{m-2}(Q_{m-1}q_m + Q_{m-2}) - (P_{m-1}q_m + P_{m-2})Q_{m-2}}{Q_{m-2}Q_m} =$ $= \frac{(P_{m-2}Q_{m-1} - P_{m-1}Q_{m-2})q_m}{Q_{m-2}Q_m} =$ $= -\frac{(P_{m-1}Q_{m-2} - P_{m-2}Q_{m-1})q_m}{Q_{m-2}Q_m} = \frac{(-1)^{m-1}q_m}{Q_{m-2}Q_m}$. Знаменатель получившейся дроби $Q_{m-2}Q_m > 0$, так как в алгоритме Евклида $q_1, ..., q_n > 0$. Итак, $\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} - \frac{P_m}{Q_m} = \frac{(-1)^{m-1}q_m}{Q_{m-2}Q_m}$ (5). а) Если m – четное, то $\frac{(-1)^{m-1}q_m}{Q_{m-2}Q_m} < 0$ и $\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} < \frac{P_m}{Q_m}$, то есть подходящие дроби нечетного порядка образуют возрастающую последовательность. б) Если m – нечетное, то $\frac{(-1)^{m-1}q_m}{Q_{m-2}Q_m} > 0$ и $\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} > \frac{P_m}{Q_m}$, то есть подходящие дроби нечетного порядка образуют убывающую последователь-

	ность. ■
<u>Свойство 1.11.3.^{0}</u> Каждая подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ четного порядка меньше дробей $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$ и $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$.	Из свойства 1.11.1^0 вытекает, что $P_i \cdot Q_{i-1} - P_{i-1} \cdot Q_i = = (-1)^{i-1}$. Разделив обе части равенства на $Q_i \cdot Q_{i-1}$, получим равенство (4). ■ Найдем разности: $\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} = \frac{P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m}{Q_{m-1} Q_m} = \frac{(-1)^{m-1}}{Q_{m-1} Q_m}$ и $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_m}{Q_m} = \frac{(-1)^m}{Q_m Q_{m+1}}$. Если m – четное, то $(-1)^{m-1} = -1 < 0$ и $(-1)^m = 1 > 0$. Значит, при четном m: $\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} < 0$, $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_m}{Q_m} > 0$ Отсюда следует, что $\frac{P_m}{Q_m} < \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$ и $\frac{P_m}{Q_m} < \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$. ■
<u>Свойство 1.11.4.^{0}</u> Подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а нечетного порядка – убывающую последовательность.	Каждая подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ нечетного порядка больше подходящих дробей $\frac{P_{m\;1}}{Q_{m\;1}}$ и $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$. Доказательство предлагаем провести самостоятельно. ____ ____ ____ ____ ■
<u>Свойство 1.11.5.^{0}</u> Любая подходящая дробь четного порядка меньше любой подходящей дроби нечетного порядка.	<u>Доказательство.</u> Из свойств подходящих дробей при $n \geq m$ вытекает, что $\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} \leq \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$. А при $n < m$, получается $\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$. Следовательно, при любых n и m выполняется неравенство: $\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$. ■
<u>Свойство 1.11.6.0</u> Если α – положительное рациональное число, то $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \ldots \alpha < \ldots$	Если последняя подходящая дробь, совпадающая с числом α, имеет четный порядок, то она больше остальных подходящих дробей четного порядка, которые дают приближения α по недостатку. Вместе с тем α меньше любой подходящие дроби нечетного порядка, и, следователь-

$$\ldots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1},$$ то есть четные подходящие дроби являются последовательными приближениями числу α по недостатку, а нечетные – по избытку (за исключением последней дроби, совпадающей с α).	но, подходящие дроби нечетного порядка дают для α приближения с избытком. Аналогично проходит доказательство в случае, когда последняя подходящая дробь, совпадающая с α, является дробью нечетного порядка. ■
Свойство 1.11.7.^{0} Если α – положительное рациональное число и $\frac{P_m}{Q_m}$ – подходящая дробь m – порядка разложения α в цепную дробь, то $$\left\|\alpha - \frac{P_m}{Q_m}\right\| \le \frac{1}{Q_m \cdot Q_{m+1}} < \frac{1}{Q_m^2}.$$	По предыдущей теореме, число α заключено между любыми двумя соседними подходящими дробями, то есть $\left\|\alpha - \frac{P_m}{Q_m}\right\| \le \left\|\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}\right\|$. Но $\left\|\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}\right\| = \left\|\frac{(-1)^{m+1}}{Q_m \cdot Q_{m+1}}\right\| = \left\|\frac{1}{Q_m \cdot Q_{m+1}}\right\|$. Тогда $\left\|\alpha - \frac{P_m}{Q_m}\right\| \le \frac{1}{Q_m \cdot Q_{m+1}} < \frac{1}{Q_m^2}$. ■

Полученный ряд простых результатов позволяет сделать весьма важные заключения о взаимном расположении подходящих дробей данной дроби. В самом деле свойства подходящих дробей показывают, что подходящие дроби четных порядков образуют возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечетного порядков – убывающую последовательность, так что эти две последовательности идут друг другу навстречу. Так как, по свойствам каждая дробь нечетного порядка больше непосредственно следующей за ней дроби четного порядка, то, очевидно, и любая подходящая дробь нечетного порядка должна быть больше любой подходящей дроби четного порядка.

Задача 1.11.4. Замените число $\frac{245}{83}$ такой подходящей дробью, чтобы полученная при этом погрешность не превышала 0,001.

Решение. Разложим $\frac{245}{83}$ в цепную дробь:

$245 = 83 \cdot 2 + 79;$
$83 = 79 \cdot 1 + 4;$
$79 = 4 \cdot 19 + 3;$
$4 = 3 \cdot 1 + 1;$
$3 = 3 \cdot 1.$

$$\frac{245}{83} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} = [2;\, 1, 19, 1, 3].$$

Найдем подходящие дроби. Для этого составим и заполним следующую таблицу:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
q_i	2	1	19	1	3
P_i	2	3	59	62	245
Q_i	1	1	20	21	83

По свойству $1.11.7^0$ можно записать такое неравенство: $\left|\frac{245}{83}-\frac{59}{20}\right|<\frac{1}{20\cdot 21}$. Полученное число больше, чем $\frac{1}{1000}$. Поэтому дробь $\frac{59}{20}$ не удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим следующую подходящую дробь, а именно $\frac{62}{21}$ и запишем аналогичное неравенство: $\left|\frac{245}{83}-\frac{62}{21}\right|<\frac{1}{21\cdot 83}<\frac{1}{1000}$. Следовательно, искомая дробь – $\frac{62}{21}$.

Вы узнали что любое рациональное число α может быть представлено конечной цепной дробью, причем единственным образом. Основное значение такого факта заключается в том, что зная число α, представленное в виде цепной дроби, можно вычислить его с любой наперед заданной степенью точности.

1.12. Представление действительных чисел цепными дробями. Периодические цепные дроби

Рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби, при этом используют задачи аппроксимации (приближенного вычисления дроби). А, можно ли обратить в цепную дробь действительное число, действуя по аналогии с рациональными числами.

Рассмотрим задачу.

Задача 12.1.Обратите в цепную дробь $\sqrt{11}$.

Решение. $\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{11-9} = \frac{\sqrt{11}+3}{2} = 3 + \frac{1}{x_2}$.

Выразим из последнего равенства x_2 получим:

$x_2 = \frac{2}{\sqrt{11}-3} = \frac{2(\sqrt{11}+3)}{2} = \sqrt{11} + 3 = 6 + \frac{1}{x_3}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{11}-3} = x_1$.

Тогда $\sqrt{11} = 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\ddots}}}} = [3; (3, 6)]$.

Ясно, что $\sqrt{11}$ – обращается в бесконечную периодическую цепную дробь. ■

Определение 1.12.1. **Бесконечной цепной дробью** называется выражение вида $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \ddots}}}}$.

Определение 1.12.1. Дроби $\frac{P_0}{Q_0}$; $\frac{P_1}{Q_1}$; ... называются подходящими дробями для данной бесконечной цепной дроби.

Для подходящих дробей бесконечной цепной дроби выполняются те же свойства, что и для конечной цепной дроби, то есть

1) $P_m \cdot Q_{m-1} - P_{m-1} \cdot Q_m = (-1)^{m-1}$;

2) $\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{Q_m \cdot Q_{m-1}}$;

3) $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \ldots < \alpha < \ldots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}$.

Теорема 1.12.1. Для бесконечной цепной дроби существует предел подходящих дробей.

Доказательство. 1) Рассмотрим последовательность четных подходящих дробей. Эта последовательность является возрастающей и ограниченной сверху любой подходящей дробью нечетного порядка, таким образом

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \ldots < \alpha < \ldots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}.$$

Тогда такая последовательность имеет предел (точную верхнюю грань), то есть

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = c.$$

Нечетные подходящие дроби образуют убывающую ограниченную снизу (точную нижнюю грань) последовательность. Такая последовательность тоже имеет предел

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} = d.$$

2) Докажем, что $c = d$. Рассмотрим разность $\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} - \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \frac{1}{Q_{2m} \cdot Q_{2m+1}}$ и

найдем предел этой разности: $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}-\frac{P_{2m}}{Q_{2m}}\right)=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{1}{Q_{2m}\cdot Q_{2m+1}}\right)=0$, так как $Q_0, Q_1, ..., Q_{2m}, ...$ образует бесконечно возрастающую последовательность. Значит, $d-c=0$ и $c=d$. ■

Определение 1.12.3. **Числовым значением** бесконечной цепной дроби называется предел ее подходящих дробей, то есть

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}=\lim_{m\to\infty}\frac{P_m}{Q_m}.$$

Теорема 1.12.2. Пусть $\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$ и $\alpha_1=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}$ – две цепные бесконечные дроби (вторая – это «оборванная» спереди первая). Тогда имеет место равенство $\alpha=a_0+\frac{1}{\alpha_1}$.

Доказательство. Рассмотрим конечные цепные дроби

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}=\frac{P_n}{Q_n} \text{ и } a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}=\frac{P'_n}{Q'_n}.$$

Тогда $a_0+\cfrac{1}{\left(\cfrac{P'_n}{Q'_n}\right)}=\frac{P_n}{Q_n}$. Переходя в этом равенстве к пределу, получим: $a_0+\frac{1}{\alpha_1}=\alpha$, так как $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{P_m}{Q_m}=\alpha$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{P'_m}{Q'_m}=\alpha_1$. ■

Следствие 1.12.1. Пусть $\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$ и $\alpha_i=a_i+\cfrac{1}{a_{i+1}+\cfrac{1}{a_{i+2}+\ddots}}$ – две цепные бесконечные дроби. Тогда $\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_i}}}$.

Доказательство предлагаем провести самостоятельно.

Теорема 1.12.3. Пусть $\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$ и $\alpha_i=a_i+\cfrac{1}{a_{i+1}+\cfrac{1}{a_{i+2}+\ddots}}$.

Тогда имеет место равенство: $\alpha=\frac{P_{i-1}\cdot\alpha_i+P_{i-2}}{Q_{i-1}\cdot\alpha_i+Q_{i-2}}$.

Доказательство. Для конечной цепной дроби $\gamma = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_i}}}$ выполняется равенство $\gamma = \frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i-1} \cdot \alpha_i + P_{i-2}}{Q_{i-1} \cdot \alpha_i + Q_{i-2}}$. Тогда для дроби $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_i}}} = \frac{P_{i-1} \cdot \alpha_i + P_{i-2}}{Q_{i-1} \cdot \alpha_i + Q_{i-2}}$. ■

Теорема 1.12.4. Каждое действительное иррациональное число может быть записано в виде бесконечной цепной дроби, причем единственным образом.

Доказательство.

1. Существование. Возьмем некоторое иррациональное число α и выделим его целую часть k_0, то есть представим это число в виде: $\alpha = k_0 + \frac{1}{\alpha_i}$, где $0 < \alpha - k_0 < 1$, откуда $k_0 < \alpha < k_0 + 1$. Тогда $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - k_0} > 1$ и α_1 – иррациональное. Выделим целую часть числа α_1 и представим в виде: $\alpha_1 = k_1 + \frac{1}{\alpha_2}$. Отсюда $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - k_1} > 1$ и α_2 – иррациональное число. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим $k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$.

По ранее доказанному, каждая четная подходящая дробь меньше α, а нечетная – больше α, то есть $\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} < \alpha < \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}}$.

Переходя к пределу, получим $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \le \alpha \le \lim\limits_{m\to\infty} \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}}$.Однако, по теореме 1.12.1, $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} = \alpha$. Таким образом, $\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots}}$.

2. Единственность. Пусть число α представимо в виде двух бесконечных цепных дробей:

$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

Тогда $k_0 < \alpha < k_0 + 1$ и $a_0 < \alpha < a_0 + 1$. Отсюда $a_0 = k_0$ и тогда

$$k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\ddots}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}=\alpha_1,$$ где $k_1 < \alpha_1 < k_1 + 1$ и $a_1 < \alpha_1 < a_1 + 1$.

Тогда $k_1 = a_1$ и так далее. Последовательно получаем: $a_0 = k_0$, $a_1 = k_1$, $a_2 = k_2$, ..., то есть равенство всех коэффициентов. Поэтому представление числа α единственно. ■

Определение 1.12.4. Бесконечная цепная дробь называется **периодической**, если последовательность чисел a_0, a_1, a_2, ... повторяется. ■

Например, бесконечную цепную дробь $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7\ddots}}}}$ можно записать в таком виде:[3; (2, 7)] указав в круглых скобках цифры периода.

Теорема 1.12.5. Периодическая цепная дробь является корнем некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Доказательство. Пусть α – периодическая цепная дробь, тогда можно записать эту дробь следующим образом:

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_k+\cfrac{1}{a_{k+1}+\ddots}}}}$$ = $[a_0; (a_1, a_2, ..., a_k)]$, где $(a_1, a_2, ..., a_k)$ – ее период, то есть $a_{k+1} = a_1$, $a_{k+2} = a_2$, ..., $a_{2k} = a_k$, ..., $a_{mk+1} = a_1$, $a_{mk+2} = a_2$, ... Обозначим $\alpha_{k+1}=a_{k+1}+\cfrac{1}{a_{k+2}+\cfrac{1}{a_{k+3}+\ddots}}$ и $\alpha_{mk+1}=a_{mk+1}+\cfrac{1}{a_{mk+2}+\cfrac{1}{a_{mk+3}+\ddots}}$.

Тогда $$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_k+\cfrac{1}{\alpha_{k+1}+\ddots}}}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P_k\cdot\alpha_{k+1}+P_{k-1}}{Q_k\cdot\alpha_{k+1}+Q_{k-1}} \quad (1)$$ и

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{mk}+\cfrac{1}{\alpha_{mk+1}}}}} = \frac{P_{mk+1}}{Q_{mk+1}}=\frac{P_{mk}\cdot\alpha_{mk+1}+P_{mk-1}}{Q_{mk}\cdot\alpha_{mk+1}+Q_{mk-1}} \quad (2),$$ так как

$$\alpha_{mk+1}=\alpha_{k+1}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_k+\ddots}}}.$$

Из равенств (1) и (2) вытекает, что $\dfrac{P_k \cdot \alpha_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k \cdot \alpha_{k+1} + Q_{k-1}} = \dfrac{P_{mk} \cdot \alpha_{k+1} + P_{mk-1}}{Q_{mk} \cdot \alpha_{k+1} + Q_{mk-1}}$. Применив свойство пропорции, получим:

$$(P_k \cdot \alpha_{k+1} + P_{k-1}) \cdot (Q_{mk} \cdot \alpha_{k+1} + Q_{mk-1}) = (Q_k \cdot \alpha_{k+1} + Q_{k-1}) \cdot (P_{mk} \cdot \alpha_{k+1} + P_{mk-1}).$$

Раскрывая скобки и введя новые обозначения, получим квадратное уравнение относительно α_{k+1}: $a \cdot \alpha_{k+1}^2 + b \cdot \alpha_{k+1} + c = 0$ (3), где $a = P_kQ_{mk} - Q_kP_{mk}$, $b = P_kQ_{mk-1} - P_{k-1}Q_{k} - Q_{k-1}P_{km}$; $c = P_{k-1}Q_{mk-1} - Q_{k-1}P_{km-1}$. Из равенства (1) вытекает, что $\alpha \cdot Q_k \cdot \alpha_{k+1} - \alpha \cdot Q_{k-1} = P_k \cdot \alpha_{k+1} + P_{k-1}$ или $\alpha_{k+1} = \dfrac{P_{k-1} - \alpha \cdot Q_{k-1}}{\alpha \cdot Q_k - P_k}$. Подставив это значение α_{k+1} в уравнение (3), получим:

$$a \cdot \left(\frac{P_{k-1} - \alpha \cdot Q_{k-1}}{\alpha \cdot Q_k - P_k} \right)^2 + b\left(\frac{P_{k-1} - \alpha \cdot Q_{k-1}}{\alpha \cdot Q_k - P_k} \right) + c = 0.$$

Откуда $a \cdot \left(P_{k-1} - \alpha \cdot Q_{k-1}\right)^2 + b \cdot \left(P_{k-1} - \alpha \cdot Q_{k-1}\right)\left(\alpha \cdot Q_k - P_k\right) + c\left(\alpha \cdot Q_{k-1} - P_k\right)^2 = 0$ и $u \cdot \alpha^2 + v \cdot \alpha + w = 0$. Таким образом, α – корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами. ■

<u>Теорема 1.12.6.</u> Если α – корень квадратного уравнения $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$ (*) с целыми коэффициентами и $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$, где a_0 – целое число, то α_1 также является корнем некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами, дискриминант которого совпадает с дискриминантом уравнения (*).

<u>Доказательство.</u> Пусть $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ – корень уравнения $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$.

Отсюда $A\left(a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}\right)^2 + B\left(a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}\right) + C = 0$ или

$$\frac{1}{\alpha_1^2} \cdot A + \frac{1}{\alpha_1} \cdot \left(2 \cdot A \cdot a_0 + B\right) + \left(A \cdot a_0^2 + B \cdot a_0 + C\right) = 0.$$

Умножив обе части последнего уравнения на a_1^2, получим:

$$\left(A \cdot a_0^2 + B \cdot a_0 + C\right) \cdot \alpha_1^2 + \left(2 \cdot A \cdot a_0 + B\right) \cdot \alpha_1 + A = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D_1 = \left(2 \cdot A \cdot a_0 + B\right)^2 - 4\left(A \cdot a_0^2 + B \cdot a_0 + C\right) \cdot A$ = $B^2 - 4 \cdot A \cdot C = D$ равен дискриминанту исходного уравнения (*). ■

<u>Теорема 12.7.</u> Если α является иррациональном корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, то α можно представить в виде бесконечной периодической цепной дроби.

<u>Доказательство.</u> Пусть α – иррациональный корень уравнения $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$. Для определенности будем считать коэффициент при x^2 положительным, то есть $A > 0$. Составим последовательность

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}},\ \alpha_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}},\ \alpha_2 = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}, \ldots$$

По теореме 1.12.6, α_1 удовлетворяет уравнению $A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C_1 = 0$, α_2 удовлетворяет уравнению $A_2 \cdot x^2 + B_2 \cdot x + C_2 = 0$ и так далее, причем дискриминанты этих уравнений равны $D = D_1 = D_2 = \ldots$

Представив α в виде: $\alpha = \dfrac{P_i \cdot \alpha_i + P_{i+1}}{Q_i \cdot \alpha_{i+1} + Q_{i-1}}$ и подставив это значение в уравнение $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$, получим:

$$A \cdot \left(\frac{P_i \cdot \alpha_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i \cdot \alpha_{i+1} + Q_{i-1}} \right)^2 + B \cdot \left(\frac{P_i \cdot \alpha_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i \cdot \alpha_{i+1} + Q_{i-1}} \right) + C = 0.$$

Освобождаясь от знаменателей, придем к равенству:

$$A \cdot \left(P_i \cdot \alpha_{i+1} + P_{i-1}\right)^2 + B \cdot \left(P_i \cdot \alpha_{i+1} + P_{i-1}\right) \cdot \left(Q_i \cdot \alpha_{i+1} + Q_{i-1}\right) + C \cdot \left(Q_i \cdot \alpha_{i+1} + Q_{i-1}\right)^2 = 0$$

или

$$\left(A \cdot P_i^2 + B \cdot P_i \cdot Q_i\right)^2 \cdot \alpha_{i+1}^2 + \left(2A \cdot P_i \cdot P_{i-1} + B \cdot P_{i-1} \cdot Q_i + B \cdot P_i \cdot Q_{i-1} + 2 \cdot C \cdot Q_i \cdot Q_{i-1}\right) \cdot \alpha_{i+1} +$$
$$+ \left(A \cdot P_{i-1}^2 + B \cdot P_{i-1} \cdot Q_{i-1} + C \cdot Q_{i-1}^2\right) = 0.$$

Аналогично α_{i+1} удовлетворяет уравнению $A_{i+1} \cdot x^2 + B_{i+1} \cdot x + C_{i+1} = 0$, откуда

$$A_{i+1} = A \cdot P_i^2 + B \cdot P_1 \cdot Q_1 + C \cdot Q_i^2 = Q_i^2 \cdot \left(A \cdot \left(\frac{P_i}{Q_i} \right)^2 + B \cdot \left(\frac{P_i}{Q_i} \right) + C \right) = Q_i^2 \cdot f \cdot \left(\frac{P_i}{Q_i} \right),$$

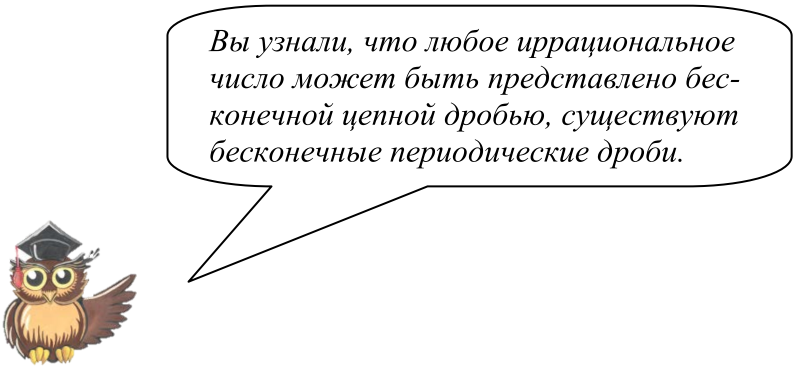
где $f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ и $C_{i+1} = Q_{i-1}^2 \cdot f \cdot \left(\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} \right)$.

Так как по условию $f(\alpha) = 0$, то график квадратного трехчлена $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ пересекает ось OX в точке $(\alpha, 0)$.

При $A > 0$ этим графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

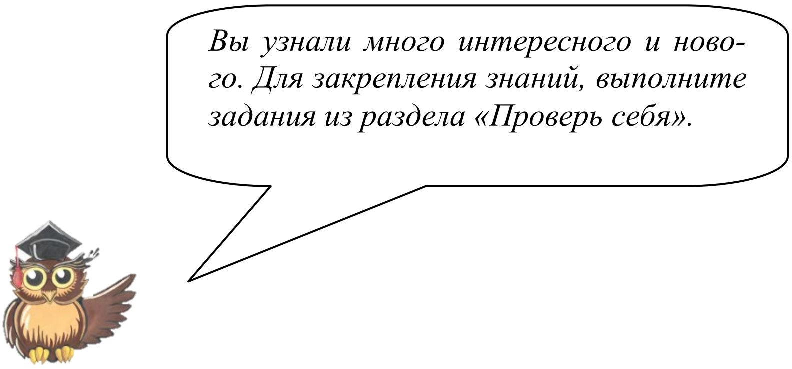
Из условия $\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} < \alpha < \dfrac{P_i}{Q_i}$ вытекает, что $f\left(\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}\right) < 0$ и $f\left(\dfrac{P_i}{Q_i}\right) > 0$, где $(i-1)$ – нечетное число, следовательно, i – четное. Значит, $A_{i+1} = f\left(\dfrac{P_i}{Q_i}\right) > 0$ и $C_{i+1} = f\left(\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}\right) < 0$ и $A_{i+1} \cdot C_{i+1} < 0$. Тогда $D = B_{i+1}^2 - 4A_{i+1}C_{i+1} > B_{i+1}^2$ (4), то есть $D > B_{i+1}^2$. Но целых чисел, квадраты которых меньше данного числа D, конечное число, то есть значений для B_{i+1} конечное множество. Из (4) следует, что $A_{i+1} \cdot C_{i+1} = \dfrac{B_{i+1}^2 - D}{4}$.

Множество целых делителей конечного множества чисел вида $\dfrac{B_{i+1}^2 - D}{4}$ также является конечным. Таким образом доказано, что среди чисел A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., C_1, C_2, ... имеется лишь конечное множество различных чисел. Следовательно, найдутся два одинаковых уравнения с различными номерами, то есть дробь будет периодической. ■



ПРАКТИКУМ

Проверь себя



Проверь себя 1.1.

1. Дополни определение: Число ***a*** **делится на число *b***, если _____________ такое c, что _______________.

2. Отношение делимости нацело обозначается ____________.

3. Сумма чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ оканчивается цифрой:
1) 0, 1, 3, 5, 6, 8; 2) 1, 2, 3, 7; 3) 7, 8; 4) 0, 1, 3, 5, 6, 7.

4. Число 70^{15} больше или меньше числа 10^{30}.

5. Число $(333^{777} + 777^{333})$ не делится на 10 или делится на 10.

6. Сумма нескольких четных последовательных чисел равна 100. Эти числа следующие:
1) 22 + 24 + 26 + 28; 2) 16 + 18 + 20 + 22 + 24; 3) 33 + 34 + 33; 4) 49 + 51.

7. Двузначные числа делящиеся на произведение своих цифр равны:
1) 11; 2) 12; 3) 16; 4) 105.

8. Последняя цифра числа 6^{2021} равна:
1) 2; 2) 4; 3) 7; 4) 6.

9. В книжном магазине Васю и Толю заинтересовала одна книга. Для ее покупки у Васи не хватала 150 рублей, а у Толи 200 рублей. Когда Вася попросил взаймы у Толи половину его наличности, Вася смог купить и него еще осталось 100 рублей на проезд. Тогда книга стоила:
1) 210; 2) 401; 3) 117; 4) 200.

Проверь себя 1.2.

1. Неполное частное и остаток от деления числа (– 35) на 32 равны:
1) (– 1), (– 3); 2) 1, 3; 3) 1, 1; 4) (– 2), 29.

2. Неполное частное и остаток от деления числа (– 35) на (– 32) равны:
1) (– 1), (– 3); 2) 1, 3; 3) 1, 1; 4) 2, 29.

3. Неполное частное и остаток от деления числа 35 на (– 32) равны:
1) (– 1), (– 3); 2) 1, 3; 3) 1, 1; 4) (– 1), 3.

4. Неполное частное и остаток от деления числа 35 на 32 равны:
1) (– 1), (– 3); 2) (– 1), 3; 3) 1, 1; 4) 1, 3.

5. Количество четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97 равно:
1) 2; 2) 4; 3) 7; 4) 6.

6. Разность чисел ($9^{1972} - 7^{1972}$) делится на 10:
1) с остатком; 2) без остатка.

7. Наименьшее шестизначное число, делящееся на 3, 7 и 13 без остатка равно:
1) 22389; 2) 412345; 3) 78906; 4) 100191.

8. Длины всех сторон прямоугольного треугольника – целые числа. Могут ли длины катетов быть нечетными числами?

9. Последняя цифра следующих чисел 1) 9^{2000}; 2) 5^{2025}; 4) 2^{2030} равна
1) 9; 2) 5; 3) 1; 4) 4.

Проверь себя 1.3.

1. НОД (846, 246) равен:
1) 3; 2) 1; 3) 5; 4) 6.

2. НОД (1960, 588) равен:
1) 246; 2) 141; 3) 5343; 4) 196.

3. Линейная комбинация НОД чисел 1960, 588 равна:
1) 1960(7) + 588(5); 2) 588(7) + 1960(5); 3) 1960(– 7) + 588(5); 4) 1960(1) + 588(– 3).

4. НОД (n, $2n + 1$) равен:
1) 3; 2) 3; 3) 5; 4) 1.

5. НОД($10n + 9$, $n + 1$) равен:
1) 3; 2) 3; 3) 5; 4) 1.

6. НОД ($3n + 1$, $10n + 3$) равен:
1) 3; 2) 3; 3) 5; 4) 1.

7. Результат вычитания дробей $\frac{13}{846} - \frac{1}{246}$ равен:

1) $\frac{196}{17343}$; 2) $\frac{323}{2345}$; 3) 5; 4) $\frac{1121}{846}$.

8. Решение системы уравнений в натуральных числах $\begin{cases} x + y = 150; \\ \text{НОД } (x,\ y) = 30. \end{cases}$

равно:
1) (30, 120), (60, 90), (120, 30), (90, 60); 2) (1395, 315), (60, 90), (120, 30), (90, 60); 3) (95, 5), (6, 9); 4) (12, 3), (9, 6).

9. Решение системы уравнений в натуральных числах $\begin{cases} \text{НОД } (x,\ y) = 45; \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{31}{7}. \end{cases}$

равно:
1) (30, 120), (60, 90), (120, 30), (90, 60); 2) (1395, 315); 3) (95, 5), (6, 9); 4) (12, 3), (9, 6).

Проверь себя 1.4.

1. Если числа взаимно простые, то НОД чисел равен:

1) 5; 2) 13; 3) 2; 4) 1.

2. Следующие числа взаимно-простые:

1) 5 и 10; 2) 13 и 12; 3) 2 и 22; 4) 100 и 1000.

3. НОД (13, 25) = 1, то НОД (13^{2021}, 25^{2021}) равен:

1) 2021; 2) 2120; 3) 2; 4) 1.

4. НОД двух последовательных четных чисел равен:

1) 5; 2) 13; 3) 2; 4) 1.

5. НОД двух последовательных нечетных чисел равен:

1) 5; 2) 13; 3) 2; 4) 1.

6. Если НОД (a, c) = НОД (b, c) = 1, то НОД ($a \cdot b$, c) равен:

1) 5; 2) 13; 3) 2; 4) 1.

7. Линейное представление НОД (25, 228) имеет вид:

1) 228 · 8 + (– 73) · 25 = – 1; 2) (– 228) · 8 + 73 · 25 = 1; 3) (– 228) · 7 + 73 · 25 = 229;
4) (– 228) · 5 + 73 · 25 = 685.

8. Если числа взаимно простые, то

1) НОД (a_1, a_2) = 1; 2) $x \cdot a_1 + y \cdot a_2 = 1$; 3) $x \cdot a_1 + y \cdot a_2 = d$;
4) $a \cdot b \vdots c$, НОД (a, c) = 1 $\Rightarrow$ $b \vdots c$; 5) НОД (a_1, a_2) = 1 $\Rightarrow$ НОД ($a_1^m ; a_2^b$) = k.

9. Дробь $\dfrac{131}{231}$:

1) сократимая; 2) несократимая.

Проверь себя 1.5.

1. НОК (846, 246) равен:

1) 3; 2) 34686; 3) 1234; 4) 846;

2. Продолжи фразу: Натуральное число c называется ________________ чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ если каждое из этих чисел делится на c.

3. Наибольший общий делитель чисел – это натуральное число k, удовлетворяющее свойствам:

1) k– общий делитель чисел; 2) k^2 – делитель суммы всех чисел;
3) k – общее кратное чисел; 4) k – общее слагаемое чисел;
5) k –делится на любой общий делитель.

4. НОК (a_1, a_2) обладает следующими свойствами:

1) НОК (a_1, a_2) = $\dfrac{|a_1 \cdot a_2|}{\text{НОД }(a_1, a_2)}$; 2) НОК ($a_1$, k a_2) = $\dfrac{|a_1 \cdot k \cdot a_2 \cdot k|}{\text{НОД }(k \cdot a_1, k \cdot a_2)}$;

3) НОК (a_1, a_2) = ($a_1 \cdot a_2$) · НОД (a_1, a_2); 4) НОД (a_1, a_2) = 1, то НОК (a_1, a_2) = $|a_1 \cdot a_2|$.

5. НОК (356, 1068, 1424) равен:

1) 3; 2) 34686; 3) 1234; 4) 4272;

6. Натуральные числа a и b, удовлетворяющие условиям НОД (a, b) = 15 и НОК (a, b) = 420 равны:

1) 15 и 420; 60 и 105; 2) – 15 и – 420; – 60 и – 105; 3) 34 и 86; 4) 4272 и 1234;

7. Общее кратное чисел 16 и 25 равно:

1) 3; 2) 16; 3) 100; 4) 400;

8. Общий делитель чисел равен 16 и 25 равен:

1) 1; 2) 16; 3) 100; 4) 400;

9. НОД (123, 13) равен:

1) 1; 2) 16; 3) 1599; 4) 400.

Проверь себя 1.6.

1. Число 101

1) простое; 2) составное.

2. Количество простых чисел от 700 до 800 равно:

1) 2; 2) 12; 3) 14; 4) 21.

3. Количество простых чисел от 900 до 1000 равно:

1) 2; 2) 12; 3) 14; 4) 20.

4. Пять последовательных составных чисел равны:

1) 122,123,124,125,126; 2) 1, 2, 3, 4, 5; 3) 101,102,103,104,105;
4) 1000, 1001,1002, 1003, 1004.

5. Все простые числа между 100 и 110 следующие:

1) 101, 103, 107, 109; 2) 101, 103; 3) 107, 109; 4) 109, 110.

6. Все простые числа между 190 и 200 следующие:

1) 191, 193, 197, 199; 2) 191, 193; 3)197, 199; 4) 199, 200.

7. Теорему о бесконечности простых чисел доказал:

1) Евклид; 2) Гаусс; 3) Эратосфен; 4) Диофант.

8. Простые числа от 80 до 90 следующие:

1) 81, 82, 83, 87, 89; 2) 82, 84, 86, 88; 3) 83, 89; 4) 83, 86, 89.

9. Числа n, $n + 10$, $n + 14$, одновременно являются простыми при n равным:

1) 7; 2) 6; 3) 3; 4) 8.

Проверь себя 1.7.

1. Каноническое разложение числа 123 равно:

1) $123 = 1 \cdot 123$; 2) $123 = 2 \cdot 62 + 1$; 3) $123 = 3 \cdot 41$; 4) $41 + 79 + 3$.

2. Евклид доказал, что множество простых чисел:

1) бесконечно; 2) ограничено сверху; 3) конечно; 4) имеет последнее простое число.

3. Укажите, какие из приведенных чисел одновременно простыми быть не могут:

1) $p + 5$ и $p + 10$; 2) p, $p + 2$ и $p + 5$; 3) p, $p + 10$, $p + 14$; 4) p, $p + 1$, $p + 2$.

4. Каноническое разложение числа 1125 следующее:

1) $5^3 \cdot 3^2$; 2) $5^3 \cdot 3^2 \cdot 3$; 3) $11^2 \cdot 12$; 4) $11^2 \cdot 5^4$; 5) $7 \cdot 5 \cdot 3$.

5. Любое составное число можно представить в канонической форме следующим образом:

1) $m = nq$; 2) $m = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$; 3) $m = 0{,}1 \cdot \mathrm{p} + 0{,}01 \cdot a + 0{,}001 \cdot b$;
4) $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

6. Установите соответствие между портретом и фамилией ученого.

Портреты ученых:

				
Р.	Е.	В.	О.	Н.

Фамилии ученых:

1) Евклид; 2) Гаусс; 3) Эйлер; 4) Эратосфен; 5) Ферма.

Запишите правильную последовательность:

1) __.; 2) __; 3) __; 4) __; 5) __.

7. Установите соответствие между фамилий ученого и его открытием:

Фамилии ученых:

1) Евклид; 2) Гаусс; 3) Эйлер; 4) Эратосфен; 5) Ферма.

Открытия ученых:

1. Метод нахождения простых чисел;
2. Метод решения систем линейных уравнений;
3. Великая теорема;
4. Функция вычисления количества чисел взаимно простых чисел, не превосходящих этого числа;
5. Алгоритм вычисления наибольшего общего делителя.

Выберете правильную последовательность:

1) 5, 2, 4, 1, 3; 2) 1, 5, 3, 2, 4; 3) 2, 3, 4, 5, 1; 4) 3, 2, 4, 5.

8. Количество простых чисел, находящихся между числами 470 и 520 равно:

1) 12; 2) 24; 3) 6.

9. Основная теорема арифметики формулируется так:

1) Любое натуральное число $n > 1$ либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел, причём единственным образом;
2) Любое натуральное число либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел, причём единственным образом;
3) Любое натуральное число $n > 1$ либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел;
4) Любое натуральное число может быть представлено в виде произведения простых чисел, причём единственным образом.

Проверь себя 1.8.

1. $\tau(n)$ это число ________ натуральных ________ n;

2. $\sigma(n)$ это _____________ всех ________________ делителей числа n.

3. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то количество натуральных делителей равно $\tau(n)$ = _______________________.

4. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то сумма всех натуральных делителей равна $\sigma(n)$ = __________________________________.

5. Если у натурального числа N имеется три делителя, и их сумма равна 133, то число N равно:
1) 121; 2) 234; 3) 1767; 4) 12.

6. Совершенные числа следующие:
1) 6, 28, 496; 2) 1, 2, 3; 3) 34, 172, 234; 4) 67, 54, 1234.

7. $\tau(121)$ равно:
1) 3; 2) 234; 3) 122; 4) 12.

8. $\sigma(121)$ равно:
1) 2; 2) 234; 3) 122; 4) 133.

9. Каждое четное совершенное число m может быть представлено в виде m = ____________________, где $2^n - 1$ – простое число.

Проверь себя 1.9.

1. Количество простых чисел на промежутке $[2, x)$ обозначают через ___________.

2. Если НОД $(a, d) = 1$, то прогрессия a, $a + d$, ..., $a + (n - 1) \cdot d$, ... содержит __________________ много ____________________ чисел.

3. Арифметическая последовательность с общим членом $(4n + 3)$, где $n = 0, 1, 2, ...$ содержит _____________ много ______________ чисел.

4. Арифметическая прогрессия с общим членом $(6n + 5)$, где $n = 0, 1, 2, ...$ содержит бесконечно много ______________ чисел.

5. Число 619 можно представить в виде арифметической последовательности с общим членом:
1) $(6n + 5)$; 2) $(4n + 3)$.

6. Число 701 можно представить в виде арифметической последовательности с общим членом:
1) $(6n + 5)$; 2) $(4n + 3)$.

7. Число 787 можно представить в виде арифметической последовательности с общим членом:
1) $(6n + 5)$; 2) $(4n + 3)$.

8. Число 977 можно представить в виде арифметической последовательности с общим членом:
1) $(6n + 5)$; 2) $(4n + 3)$.

9. Числа-близнецы описаны выражением p и $p + 2$, следующие пары чисел являются:
1) 6 и 8; 2) 71 и 73; 3) 15 и 17; 4) 857 и 859.

Проверь себя 1.10.

1. Дополните определения: **Система счисления** – ______________ метод записи чисел, представление чисел с помощью _______________ знаков.

2. Дополните определения: **Непозиционная** система, для которой значение символа __________________от его положения в числе.

3. **Позиционная** такая система, в которой значение каждой цифры находится в _______________________________________ от ее позиции в числе.

4. $\boldsymbol{N} = a_n g^n + a_{n-2} g^{n-2} + ... + a_1 g + a_0$ (*), где $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ принимают

значения 0, 1, ..., $g-1$, причем $a_n \neq 0$ называется ___________________________.

5. В восьмеричной системе счисления 32014_5 равно:
1) 4126_8; 2) 132_8; 3) 1110050_8; 4) 1145001_8.

6. Число 241 в системе счисления с основанием 5 записывается так:
1. 423_5; 2. 555_5; 3. 1431_5; 4. 721_5; 5. 125_5.

7. Римскими цифрами число 125 записывается так:
1. CXXV; 2. 100 + 20 + 5; 3. XXV; 4. LC; 5. CC.

8. Запись числа 46 в двоичной системе равна:
1) 101110_2; 2) 132_2; 3) 1110000_2; 4) 111001_2.

9. Результат вычисления $\left(\dfrac{120111_3}{102_3}\right)+201_3\cdot 12_3$ равен:

1) 128_7; 2) 1271_3; 3) 11221_3; 4) 2_3; 5) 11111_3

Проверь себя 1.11.

1. Подходящие дроби четного порядка образуют _____________________ последовательность.

2. Подходящие дроби нечетного порядка образуют _____________________ последовательность.

3. Четные подходящие дроби являются последовательными приближениями числу α по _______________.

4. Нечетные подходящие дроби являются последовательными приближениями числу α по _________________ (за исключением последней дроби, совпадающей с α).

5. Всякое ______________________ может быть записано в виде ___________________ дроби, причем _____________________ образом.

6. Имеет место равенство $P_i \cdot Q_{i-1} - P_{i-1} \cdot Q_i =$ _______________.

7. Имеет место: $\dfrac{P_i}{Q_i} - \underline{\qquad} = \dfrac{(-1)^{i-1}}{Q_i Q_{i-1}}$.

8. Рациональное число $\dfrac{2121}{1500}$ можно записать в виде конечной цепной дроби следующим образом:
1) [1; 2, 2, 2, 2, 5,3]; 2) [1; 2, 2, 5,3]; 3) [0; 2, 2, 2, 2, 5,3]; 4) [1; 2, 2, 2, 2].

9. Конечную цепную дробь [1; 1, 3, 4] можно записать дробью:
1) $\dfrac{30}{17}$; 2) $\dfrac{10}{17}$; 3) $\dfrac{40}{27}$; 4) $\dfrac{15}{17}$.

Проверь себя 1.12.

1. Дополните определение: Такая дробь $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \ddots}}}}$

называется ______________________________________.

2. Дополните формулировку теоремы: Для бесконечной цепной дроби существует _____________________________ дробей.

3. Дополните формулировку теоремы: Каждое действительное иррациональное число может быть записано в виде _______________ цепной дроби, причем _______________________.

4. Дополните формулировку теоремы: Если α является иррациональном корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, то α можно представить в виде ____ дроби.

5. Укажите какие из чисел можно представить в виде конечной цепной дроби:

1) $\sqrt{21}$; 2) $\sqrt{81}$; 3) $\dfrac{3}{21}$; 4) $\sqrt[3]{4}$; 5) $\dfrac{5}{121}$.

6. $\sqrt{15}$ представим в виде бесконечной цепной дроби:

1) [2; (1, 2, 3)]; 2) [3; (1, 6)]; 3) [2; (1, 2, 3)]; 4) [1; (1, 4, 5)]; 5) [0; (1, 0, 4)].

7. Подходящая дробь к $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001 равна:

1) (1; 3, 1, 5, ...); 2) (1; 3); 3) (1; 4); 4) (1; (2, 2, 2)).

8. Голландский математик ____________________ использовал свойства непрерывных дробей при построении модели __________________ системы.

9. Дополни формулировку теоремы: Периодическая цепная дробь является _______________ некоторого квадратного уравнения ________________.

Задачи для самостоятельного решения

Выполни задания первого и второго типов.

Задачи I типа

1. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число?

2. Чему равно количество простых чисел между 200 и 220?

3. Напишите 12 последовательных составных натуральных чисел.

4. Укажите простое число: 1) 127; 2) 919; 3) 742.

5. Укажите натуральное число n такое, чтобы n, $n + 10$, $n + 14$, все были простыми.

6. Запишите в виде конечной цепной дроби следующие рациональные числа: 1) $\frac{153}{46}$; 2) 2,013.

7. Запишите десятичной дробью: [1; 1, 2, 2, 1, 2].

8. Решить уравнение $[x; 2, 3, 4] = \frac{73}{30}$.

9. Выполните действия над числами в шестеричной системе счисления: $1543_6 + 42_6 + 5034_6 \cdot 545_6$.

10. Какой рациональной дроби равна конечная цепная дробь

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}?$$

Задачи II типа

1. Петя сказал Васе: «Я задумал двузначное число. Если переставить его цифры, то получиться число, которое в сумме с задуманным даст143. Отгадай задуманное число, если известно, что оно простое». Какое число задумал Петя?

2. Дано сто чисел 1, 2^2, 3^2, ..., 100^2. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 3^2 - 1$, $a_2 = 4^2 - 2^2$, ..., $a_{98} = 100^2 - 98^2$. Чему равна сумма этих разностей?

3. Докажите, что уравнение $y^2 - x^2 = 2013x^5$ имеет бесчисленное множество решений в натуральных числа x и y. (задание школьной олимпиады г. Арзамаса, 10 класс).

4. Когда одно из двух целых чисел умножили на 15, а другое разделили на 15, оказалось, что сумма новых чисел равна изначальной сумме. Докажите, что

разность новых чисел делится на 7. (задание олимпиады БИБН, 2017 г., 8 класс).

5. Найдите делитель и остаток, если делимое 534, частное 26.

6. Найдите делитель и остаток, если делимое – 945, частное – 16.

7. При делении a^5 на 7 остаток равен 5. Чему равен остаток при делении на 7 числа a?

8. Укажите натуральные числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений: $\begin{cases} x+y=667, \\ \dfrac{\text{НОК }(x,y)}{\text{НОД }(x,y)}=120. \end{cases}$

9. Найдите линейное представление НОД (2576, 154).

10. Решите в натуральных числах следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} x\cdot y=8400, \\ \text{НОД }(x,y)=20. \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{9}, \\ \text{НОД }(x,y)=28. \end{cases}$

11. а) Даны натуральные числа a и b, такие, что $3a + b$ и $3b + a$ дают одинаковые остатки при делении на 10. Верно ли, что сами числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 10? б) Верно ли, что натуральные числа a, b и c дают одинаковые остатки при делении на 10, если три числа $2a + b$, $2b + c$, $2c + a$ дают одинаковые остатки при делении на 10? (задание олимпиады БИБН, 2018 г., 9 класс).

12. Двоечник Вова складывает дроби $\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{(m+p)}{n+q}$.

а) существуют ли натуральные числа m, n, p и q, для которых Вовин «способ» дает правильный ответ?

б) может ли Вовин «способ» дать правильный ответ для каких-то двух несократимых дробей $\dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{p}{q}$ (m и p – целые числа: n, q – натуральные числа), не равных по абсолютной величине?

13. Петя говорит Коле: «Я расставил некоторые числа в вершинах куба, а затем на каждой грани написал сумму четырёх чисел в ее вершинах. Потом я сложил все шесть чисел на гранях и у меня получилось 2019. Сможешь ли ты узнать, чему равна сумма восьми чисел в вершинах куба?» А как бы вы на месте Коли ответили на этот вопрос?

14. Докажите, что для всех натуральных n число $(n^{2024} + 4)$ составное.

15. Докажите, что $(n+20)(n + 201)(n + 2020)$ делится на 6 для любого натурального n.

16. Сколько существует дробей $\dfrac{n}{m}$, обладающих такими свойствами: n и m – двузначные натуральные числа, причём значение дроби не изменится, если к n прибавить 20, а к m прибавить 19?

17. Существует ли такое натуральное n, что число $n^2 + 90n + 2025$ делится

на 100?

18. Докажите, что число $(2021^2 + 2023^2) / 2$ можно представить как сумму двух квадратов натуральных чисел.

19. Докажите, что число $(2^{2022} + 1)$ составное.

20. Докажите, что для всех натуральных n число $(n^3 + 6n^2 + 12n + 7)$ составное.

Тест

1. Укажите, остаток при деление – 281 на (– 191):
1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) 101.

2. НОД (1800, – 175) равен:
1) 4; 2) 5; 3) – 21; 4) 25.

3. Линейная комбинациях чисел a = 1800 и b = (– 175) имеет вид:
1) 1800(2) + 175(– 7); 2) 18000(2) + 175(– 1); 3) 1800(3) + 175(– 4);
4) 1800(– 3) + (– 31)(– 175).

4. Укажите значение НОД (n и n + 1).
1) 2; 2) 1; 3) 10; 4) 8.

5. НОК (35, 77, 847) равен:
1) 62755; 2) 5929; 3) 4235; 4) 24.

6. Укажите p при которых три числа p, (p + 2) и (p + 8) одновременно будут простыми:
1) 2; 2) 5; 3) 71; 4) 13.

7. Канонический вид числа 112545 представим:
1) $5^3 \cdot 3^2$; 2) $5^3 \cdot 2^2 \cdot 3$; 3) $5 \cdot 3^2 \cdot 61 \cdot 41$; 4) $11^2 \cdot 5^4$; 5) $7 \cdot 5 \cdot 3$.

8. Результат вычисления $(315_6 \cdot 14_6 - 1153_6 : 31_6 - 150_6) : 205_6$ равен:
1) 123_6; 2) 23_6; 3) 25_6; 4) 213_6.

9. Дробь $-\dfrac{840}{1872}$ представима виде конечной цепной дроби:
1) [– 1; 1, 1, 4, 2, 1]; 2) [0; 142]; 3) [– 1; 4124]; 4) [2; 114].

10. $\sqrt{15}$ представим в виде бесконечной цепной дроби:
1) [2; (1, 2, 3)]; 2) [3; (1, 6)]; 3) [2; (1, 2, 3)]; 4) [1; (1, 4, 5)]; 5) [0; (1, 0, 4)].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.А. Задачник-практикум по теории чисел. Ч. III / В.А. Александров, С.М. Горшенин. – Москва: Просвещение, 1972.

2. Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. – 4-е изд., исправленное и дополненное. – Москва: МЦНМО, 2018.

3. Балаян Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ. 9-11 классы / Э.Н. Балаян. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. – 317 с.

4. Бухштаб А.А. Теория чисел: учебное пособие / А.А. Бухштаб. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/65053 (дата обращения: 28.04.2020). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 123 с. – (Антология мысли). – ISBN 978-5-534-12085-1. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/447009 (дата обращения: 23.03.2021).

6. Виноградов И.М. Основы теория чисел: учебное пособие / И.М. Виноградов. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/139285 (дата обращения: 28.04.2020). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

7. Девенпорт Г. Высшая арифметика: Введение в Теорию чисел: перевод с английского / Г. Девенпорт. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.

8. Деза Е.И., Котова Л.В. Сборник задач по теории чисел (112 задач с подробными решениями): Учебное пособие. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

9. ЕГЭ 2020. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень) / Г.И. Вольфсон [и др.]. – 4-е изд., исправленное и дополненное. – Москва: МЦНМО, 2020.

10. Жмурова И.Ю. Теория чисел: учебное пособие для вузов / И.Ю. Жмурова, А.В. Игнатова. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 52 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-13691-3. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/466419 (дата обращения: 23.03.2021).

11. Карацуба А.Л. Основы аналитической теории чисел. – М, 2003.

12. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. – М.: Просвещение, 1970.

13. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979.

14. Куликов Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, А.А. Фомин. – М.: Просвещение, 1993.

15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Высшая школа, 1979.

16. Курош А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1967.

17. Ларин С.В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля: учебное пособие для вузов / С.В. Ларин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 160 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-05567-2. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/454465 (дата обращения: 23.03.2021).

18. Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1979.

19. Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа,1967.

20. Нестерова Л.Ю., Напалков С.В. Реализация проектного метода в системе высшего образования с использованием рабочей тетради // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. – 2015. – № 2 (38). – С. 175-181.

21. Нестерова Л.Ю., Напалков С.В. Теория чисел в примерах и задачах (учебно-методическое пособие) // Международный журнал экспериментального образования. 2015. № 1-1. С. 71-72.

22. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М, 2003.

23. Сборник задач по алгебре / под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987.

24. Сушкевич А.К. Теория чисел / А.К. Сушкевич. – Москва: Вузовская книга, 2016.

25. Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – М.: Наука, 1977.

26. Фарков А.В. Школьные математические олимпиады. 5-11 классы / А.В. Фарков. – Изд. 2-е. – Москва: ВАКО, 2016. – 240 с.

27. Bentley P.J The Book of Numbers, Ontario, Firefly Books, 2008.

28. Hardy G.H. Mathematician s ApologyCambridgeUniversity Press, 1940.

29. Ifrah G.H. The Universal History of Numbers, London, The Harvill Press, 1987.

30. Kline M. Mathematical Thought (3 Volumes), USA, OxfordUniversity Press, 1990.

31. Maor E. The Pythagorean Theorem: A 4,000 – Year History. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 2007.

32. Pickover C.A. Wonders of Numbers, USA, OxfordUniversity Press, 2002.