МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

С.В. Напалков

Решение задач школьной математики

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Балахнинского филиала
для обучающихся по программам среднего общего образования
Специализированного учебного научного центра ННГУ

Нижний Новгород
2021

УДК 378.14
ББК 74.26
М 64

Напалков С.В. Решение задач школьной математики: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 78 с.

Рецензенты: Болдыревский П.Б.

Настоящее издание предназначено для выполнения учащимися заданий на занятиях по математике, а также для организации и контроля их самостоятельной работы. В основу проведения практических занятий положена современная задачная технология (использование окрестностей обобщенных математических задач) и Web-технология (применение тематических образовательных Web-квестов).

Учебно-методическое пособие подготовлено для учащихся по программам среднего общего образования, Специализированного учебного научного центра ННГУ.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии Балахнинского филиала
к.э.н. С.С. Квашнин

УДК 378.14
ББК 74.26

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В рамках изучения предмета «Математика» основной задачей является формирование систематизированных знаний, умений и навыков в области элементарной математики, создание необходимой теоретической базы для решения школьных математических задач, чем и служит данное учебное пособие «Решение задач школьной математики».

Процесс изучения этой дисциплины направлен на владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения; способностью использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования; способностью работать с информацией в глобальных компьютерных сетях; обладание мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности.

Настоящее пособие в своей структуре сочетает современные методические тенденции задачной технологии и интерактивного обучения учащихся. Каждое занятие построено на основе синтеза традиционного практикума, современных задачных подходов, базирующихся на окрестностях обобщенных математических задач, а также организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся посредством использования Web-квест технологий. В соответствии с этим в структуре занятий выделены четыре основные части: теоретический базис, ключевые задачи, окрестности задач и задания тематического образовательного Web-квеста.

Наш выбор определён тематическими образовательными Web-квестами, под которыми понимаем такой Web-квест, который имеет информационный контент, определяющийся содержанием учебной темы, целями и задачами заключительного этапа её изучения и предполагает выполнение заданий с использованием Интернет-ресурсов, способствующих развитию познавательной самостоятельности учащихся.

Его информационный контент включает в себя пять основных компонентов: теория (дополнительная информация, учебно-познавательные задания, позволяющие углубить имеющие знания, получить целостное представление о их месте и роли в изучаемой теории), приложения (сведения и учебно-познавательные задания, расширяющие представления о возможных применениях изученного в учебной теме математического аппарата), проблемы (информация и учебно-познавательные задания исследовательского характера, позволяющие отыскивать или открывать неизвестные студентам факты, закономерности, свойства, формулы или сведения, связанные с учебным материалом изученной темы), архивы (сведения историко-биографического характера, касающиеся учебного материала темы, и учебно-познавательные задания по их упорядочиванию, хронологическому или сюжетному представлению) и ошибки (информация о больших и малых заблуждениях, курьёзных случаях, распространённых или единичных ошибках по учебному материалу темы, имевших место когда-либо или с кем-либо, а также учебно-познавательные задания по их анализу и отысканию возможных путей предупреждения), которые охватывают наиболее значимые направления методической работы.

Наполнение указанных компонентов информационного контента тематического образовательного Web-квеста определяют, прежде всего, поисково-познавательные задания, они образуют задачную конструкцию особого рода, имеющую своё композиционное построение, функциональную направленность и лексическую форму.

Выполнение такого рода заданий в малых группах или индивидуально позволяет педагогу организовать проектную деятельность учащихся, а самим учащимся сформировать соответствующие навыки создания проектов по итогам выполнения каждого задания.

Учебно-методическое пособие подготовлено для учащихся по программам среднего общего образования, Специализированного учебного научного центра ННГУ.

Тема 1.
СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Теоретический базис

Определение: Если для целого числа a и целого числа b, отличного от нуля, существует целое число c такое, что $a = b \cdot c$, то говорят, что a делится на b, или что b делит a.

Отношение делимости на множестве целых чисел обладает следующими *свойствами:*

1. Если целое число a делится на целое число b, то $\pm a$ делится на $\pm b$.
2. Если b делится на c и a делится на b, то a делится на c (транзитивность).
3. Если a и b – натуральные числа, то из того, что a делится на b и b делится на a, следует, что $b = a$.
4. Если a и b – натуральные числа и a делится на b, то $b \le a$.

Следствие: Каждое целое число, отличное от нуля, имеет конечное множество делителей; а нуль имеет бесконечно много делителей.

Теорема о делении с остатком: Для любого целого a и любого натурального b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = b \cdot q + r$ и $0 \le r < b$.

При этом r называют остатком от деления a на b, а q – неполным частным.

Ключевые задачи

К ним следует отнести задания на прямое применение теоретических знаний, т.е. на поиск последней цифры числа, остатков от деления или доказательство факта делимости одного числа на другое.

Задача 1.1. Какой цифрой заканчивается десятичная запись числа 2014^{2015}?

Решение:

Можно проследить, что 4^1 оканчивается на 4; 4^2 на 6; 4^3 снова – на 4; 4^4 – на 6 и т.д., т.е. четная степень числа 4 оканчивается на 6; а нечетная – на 4. Поэтому десятичная запись числа 2014^{2015} оканчивается на 4, т.к. 2015 – нечетное число.

Задача 1.2. Какой остаток при делении на 5 дает число 7^{2014}?

Решение:

Заметим, что 7^1 оканчивается на 7; 7^2 на 9; 7^3 – на 3; 7^4 – на 1 и т.д., тогда $7^{2014} = 7^{4k+2} = 10p + 9 = 10p + 5 + 4$ (где p – натуральное число), т.е. число 7^{2014} при делении на 5 дает остаток 4.

Задача 1.3. Докажите, что число $15^{2n} - 8^{2n}$ делится на 161 при любом натуральном n.

Доказательство:

Можно выполнить разложение записи исходного числа на множители, применяя обобщенную формулу сокращенного умножения

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$, тогда получится $15^{2n} - 8^{2n} = (225^n - 64^n) =$ $= (225-64)(225^{n-1} + 225^{n-2} \cdot 64 + ... + 64^{n-1}) = 161p$ (где p – натуральное число), из этого следует, что $15^{2n} - 8^{2n}$ делится на 161.

Окрестности задач

Окрестности обобщенных ключевых задач можно построить, расширяя множества цифр, на которые могут оканчиваться числа, множества остатков от деления, а также перенося и обобщая другие формулы сокращенного умножения, в частности, разложение на множители суммы нечетных степеней чисел.

№ 1. На какие цифры могут оканчиваться натуральные степени чисел: а) 2; б) 3; в) 8; г) 9?

№ 2. Докажите, что число $15^{2n+1} + 8^{2n+1}$ делится на 23 при любом натуральном n.

№ 3. Найдите наибольшее натуральное число a, которое при делении на 13 дает в неполном частном 17.

№ 4. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 дает остаток 2; при делении на 5 – остаток 4; на 7 – остаток 6.

№ 5. Какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на: а) 3; б) 5; в) 7?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могли понадобиться людям свойства делимости? - когда и как люди научились делить с остатком? - кто из учёных математиков внёс вклад в создание и развитие теории делимости?	- хронологию познания человеком сущности и свойств делимости; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в развитие теории делимости; - библиографию научных трудов, посвящённых делимости.	Проект «Исторический экскурс по делимости чисел» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых в теории делимости; - взаимосвязи изученных понятий темы «Свойство делимости. Деление с остатком» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся свойств делимости.	- тезаурус темы «Свойства делимости»; - опорный конспект темы «Деление с остатком»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Свойства делимости. Деление с остатком».	Проект «Анализ развития теории делимости чисел» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с делением с остатком? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться со свойствами	- карту приложений свойств делимости; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств делимости и делением с остатком (технической направленности);	Проект «Применение свойств делимости» (презентация, реферат, доклад).

	делимости? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело со свойствами делимости и делением с остатком?	- подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств делимости и делением с остатком (общекультурного назначения).	
Проблемы	- какие свойства делимости применяются при делении чисел? - какие свойства делимости применяются при решении геометрических задач? - какие свойства делимости применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Свойства делимости»; - анимационную презентацию «Деление чисел с остатком»; - памятку «Что нужно знать для решения задач на свойства делимости и деление с остатком».	Проект «Исследование использования свойств делимости в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на свойства делимости; - заблуждения (недоразумения), связанные с делением с остатком; - математические софизмы, связанные со свойствами делимости.	- банк математических ошибок по теме «Свойства делимости. Деление с остатком»; - памятку «Так нельзя применять свойства делимости при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по свойствам делимости» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 2.
КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Теоретический базис

Определение 1: Натуральные числа, не равные единице и имеющие ровно два натуральных делителя, называют *простыми*.

Определение 2: Натуральные числа, не равные единице и имеющие более двух натуральных делителя, называют *составными*.

Теорема 1: Любое натуральное число, отличное от единицы, имеет простой делитель.

Теорема 2: Любое натуральное число, отличное от единицы, можно представить в виде произведения простых чисел.

Определение 3: Представление натурального числа в виде произведения натуральных степеней различных простых чисел называется *каноническим*.

Замечание: Из определения следует, что представление натурального числа n в виде $n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q_k^{\alpha_k}$ будет каноническим только, если выполняются условия: 1) для любого натурального i из отрезка $[1; k]$ q_i является простым числом; 2) если $i \neq j$, то $q_i = q_j$; 3) для любого натурального i из полуинтервала $[1; k)$ α_i является натуральным числом.

Теорема 3: Любое составное натуральное число n имеет простой делитель, не превосходящий $\sqrt{n}$.

Теорема 4: Если простое число делит произведение целых чисел, то оно делит по крайней мере один сомножитель.

Основная теорема арифметики: Любое натуральное число, большее единицы, обладает единственным каноническим представлением.

Ключевые задачи

Среди таких задач можно указать задания на определения простых и составных чисел, на поиск простых делителей составного числа и на каноническое разложение натуральных чисел.

Задача 2.1. Докажите, что при любом натуральном n число $32^n + 1$ является составным.

Доказательство:

С помощью формулы $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, которая выполняется при всех нечетных натуральных значениях n, можно исходное число представить в следующем виде $(2^n)^5 + 1^5 = (2^n + 1)(16^n - 8^n + 4^n - 2^n + 1)$, т.е. заданное число имеет более двух делителей (1, сам себя и еще два из полученного равенства).

Задача 2.2. Найдите все простые числа из отрезка [350; 400].

***Решение*:**

Решить эту задачу можно, например, используя алгоритм решета Эратосфена. Выпишем исходные числа: 350; 351; 352; 353; 354; 355; 356; 357; 358; 359; 360; 361; 362; 363; 364; 365; 366; 367; 368; 369; 370; 371; 372; 373; 374;

375; 376; 377; 378; 379; 380; 381; 382; 383; 384; 385; 386; 387; 388; 389; 390; 391; 392; 393; 394; 395; 396; 397; 398; 399; 400. Вычеркнем из них все четные и получим следующие оставшиеся: 351; 353; 355; 357; 359; 361; 363; 365; 367; 369; 371; 373; 375; 377; 379; 381; 383; 385; 387; 389; 391; 393; 395; 397; 399. Затем исключим из второго набора все числа, кратные трем, останутся такие: 353; 355; 359; 361; 365; 367; 371; 373; 377; 379; 383; 385; 387; 389; 391; 395; 397. Исключаем теперь числа, оканчивающиеся на пять, получим: 353; 359; 361; 367; 371; 373; 377; 379; 383; 387; 389; 391; 397. Далее исключаем числа, делящиеся на семь, остаются: 353; 359; 361; 367; 373; 377; 379; 383; 389; 391; 397. Затем удаляем числа, кратные одиннадцати, получим: 353; 359; 361; 367; 373; 377; 379; 383; 389; 391; 397. Далее уберем числа, делящиеся на тринадцать, останутся: 353; 359; 361; 367; 373; 379; 383; 389; 391; 397. А затем исключим числа, кратные семнадцати, останутся: 353; 359; 361; 367; 373; 379; 383; 389; 397. И наконец, убираем числа, кратные девятнадцати, после исчерпывания остаются простые числа из указанного в условии отрезка: 353; 359; 367; 373; 379; 383; 389; 397.

Задача 2.3. Разложите число 8010 на простые множители.

Решение:

Выполним разложение известным способом деления:

$$\begin{array}{c|c} 8010 & 2 \\ 4005 & 5 \\ 801 & 3 \\ 267 & 3 \\ 89 & 89 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда получаем, что 8010 = 2·3·3·5·89.

Окрестности задач

Обобщение ключевых задач может быть связано с использованием других формул сокращенного умножения и их обобщений при нахождении множителей натуральных чисел; расширением длины промежутка простых чисел; увеличением чисел, дополнением требований поиском делителей квадратов натуральных чисел и т.п.

№ 1. Докажите, что число $2^{2n+1}-1$ является составным при любом натуральном n.

№ 2. Найдите все простые числа из отрезка [200; 260].

№ 3. Для чисел 123; 321; 654; 12321; 13456; 24025; 25024; 87374 найдите канонические разложения и укажите, какие из них являются квадратами натуральных чисел.

№ 4. Числа p и $2p+1$ – простые, большие 5. Простым или составным будет число $4p+1$?

№ 5. Число является квадратом целого числа. Может ли оно иметь ровно: а) пять натуральных делителей? б) 10 натуральных делителей? (Если может, то приведите пример.)

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста.*

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- как возникло понятие простого числа? - когда и как появилась проблема находить разложение натурального числа на простые множители? - кто из учёных математиков внёс вклад в создание и развитие способов нахождения простых чисел?	- хронологию познания человеком свойств простых чисел; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в развитие способов нахождения простых чисел; - библиографию научных трудов, посвящённых каноническому разложению натуральных чисел.	Проект «Исторический экскурс – простые числа» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых в теории простых чисел; - взаимосвязи изученных понятий темы «Простые числа» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся канонического разложения простых чисел.	- тезаурус темы «Каноническое разложение простых чисел»; - опорный конспект темы «Простые числа»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Простые числа».	Проект «Анализ развития способов канонического разложения натуральных чисел» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с простыми числами? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с каноническим разложением натуральных чисел? - в каких науках учёные имеют дело с основной теоремой арифметики?	- карту приложений канонического разложения натуральных чисел; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием канонического разложения натуральных чисел (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием основной теоремы арифметики (общекультурного назначения).	Проект «Применение основной теоремы арифметики» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- какие свойства канонического разложения натуральных чисел применяются при доказательстве основной теоремы арифметики? - какие свойства канонического разложения натуральных чисел применяются при решении задач? - как применяется основная теорема арифметики при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Проблема канонического разложения натуральных чисел»; - анимационную презентацию «Простые числа в различных системах счисления»; - памятку «Что нужно знать для решения задач с использованием свойств простых и составных чисел».	Проект «Исследование использования свойств простых и составных чисел в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на поиск простых делителей составного числа;	- банк математических ошибок по теме «Простые числа»; - памятку «Так нельзя	Проект «Ошибки и софизмы по свойствам простых чисел» (творческая работа, презентация, доклад).

	- заблуждения (недоразумения), связанные со свойствами простых чисел; - математические софизмы, связанные со свойствами простых чисел.	применять свойства канонического разложения натуральных чисел»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 3.
АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Теоретический базис

Определение 1: Общим делителем чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ называется целое число d, на которое делится каждое из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.

НОД чисел – это их наибольший общий делитель.

Теорема 1: Если целые числа связаны соотношением $a = b \cdot q + r$, то НОД чисел a и b равен НОД чисел b и r.

Теорема 2: Если a – целое число, b – натуральное число и a делится на b, то НОД чисел a и b равен b.

Теорема 3: Если a – целое число, b – натуральное число и

$$a = b \cdot q_0 + r_1 \text{ (где } 0 < r_1 < b),$$
$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2 \text{ (где } 0 < r_2 < r_1),$$
$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3 \text{ (где } 0 < r_3 < r_2),$$
$$\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n \text{ (где } 0 < r_n < r_{n-1}),$$
$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n,$$

то НОД чисел a и b равен r_n.

Замечание: Система равенств из теоремы 3 называется алгоритмом Евклида, в котором НОД чисел a и b равен последнему ненулевому остатку.

Определение 2: Общим кратным чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ называется целое число m, которое делится на каждое из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.

НОК чисел – это их наименьшее общее кратное.

Теорема 4: Для любых натуральных чисел a и b имеет место равенство НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = a \cdot b$.

Определение 3: Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ называются взаимно простыми, если их НОД равен единице.

Ключевые задачи

Задачи на нахождение НОД И НОК натуральных чисел, на определение их взаимной простоты.

Задача 3.1. Найдите НОД чисел 42476 и 8610 (двумя способами).

Решение:

1 *способ* (через разложение на множители): Разложим на простые множители оба числа (подчеркнем в разложениях общие множители для двух чисел).

42476	$\underline{2}$	8610	$\underline{2}$
21238	2	4305	5
10619	$\underline{7}$	861	3
1517	37	287	$\underline{7}$
41	$\underline{41}$	41	$\underline{41}$
1		1	

Тогда НОД чисел 42476 и 8610 равен произведению подчеркнутых множителей, т.е. $2 \cdot 7 \cdot 41 = 574$.

2 *способ* (с помощью алгоритма Евклида): Последовательно будем делить, сначала большее число на меньшее:

$$42476 = 8610 \cdot 4 + 8036,$$

теперь меньшее на полученный остаток:

$$8610 = 8036 \cdot 1 + 574,$$

а затем 8036 на 574:

$$8036 = 574 \cdot 14.$$

Последний ненулевой остаток и есть НОД чисел 42476 и 8610, т.е. 574.

Задача 3.2. Найдите НОК чисел 2015 и 3224.

Решение:

Выполним разложение обоих чисел на простые множители:

2015	5	3224	2
403	13	1612	2
31	31	806	2
1		403	13
		31	31
		1	

Для нахождения НОК нужно выписать разложение одного из чисел и дополнить его недостающими множителями из другого числа, т.е. оно будет равно $5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 8 = 16120$.

Задача 3.3. Делится ли число $(n^2 - 1)$ на 12, если n и 6 взаимно простые числа при любом натуральном n?

Решение:

Если числа n и 6 взаимно простые, то n не делится на 6 и остатке от деления на 6 не может давать 2; 3 или 4, т.е. можно представить число n в одном из следующих видов:

1) $n = 6p + 1$ (где p – натуральное число),

тогда $(n^2 - 1) = (n-1)(n+1) = 6p(6p+2) = 12p(3p+1)$, т.е. кратно 12;

2) $n = 6p + 5$ (где p – натуральное число),

тогда $(n^2 - 1) = (n-1)(n+1) = (6p+4)(6p+6) = 12(p+1)(3p+2)$, т.е. тоже кратно 12.

Окрестности задач

Окрестности обобщенных задач могут быть связаны с использованием большего количества чисел, применением понятий НОД, НОК и взаимно простых чисел при решении различных задач на дроби, а также при решении сюжетных задач.

№ 1. Найдите НОД и НОК чисел 567; 333 и 1776.

№ 2. Сократите дроби: $\dfrac{123}{123321}$; $\dfrac{456}{654}$; $\dfrac{333}{30303}$.

№ 3. При каких натуральных значениях n несократимы дроби: а) $\dfrac{8}{n+11}$;

б) $\dfrac{5n+3}{6n+1}$; в) $\dfrac{3n+1}{4n+2}$?

№ 4. Братья Петя и Ваня измеряли расстояние от дома до игровой площадки шагами. Длина шага Пети равна 60 см, а Вани – 50 см. Каково измеренное расстояние (в см), если следы братьев совпадали 5 раз?

№ 5. Пусть p – натуральное число, взаимно простое с 10. Существует ли число, запись которого состоит из одних единиц, кратное p? (Если существует, приведите пример.)

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем мог понадобиться людям алгоритм Евклида? - когда и как люди научились находить НОД и НОК чисел? - кто из учёных математиков внёс вклад в продолжение развития теории делимости?	- хронологию познания человеком сущности и свойств НОД и НОК; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в создание и развитие теории делимости; - библиографию научных трудов, посвящённых делимости чисел.	Проект «Исторический экскурс по открытию алгоритма Евклида» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемые при нахождении НОД и НОК чисел; - взаимосвязи изученных понятий темы «Алгоритм Евклида. НОД. НОК» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся свойств НОД и НОК чисел.	- тезаурус темы «Алгоритм Евклида. НОД. НОК»; - опорный конспект темы «НОД и НОК»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «НОД и НОК».	Проект «Анализ развития теории делимости» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту с НОД и НОК чисел? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с понятиями НОД и НОК? - в каких науках учёные сталкиваются с элементами теории делимости?	- карту приложений НОД чисел; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств НОД и НОК чисел (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств НОД и НОК чисел (общекультурного назначения).	Проект «Применение свойств НОД и НОК чисел» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- какие свойства НОД и НОК чисел применяются для случая взаимно простых чисел? - какие свойства НОД чисел применяются при решении математических задач? - какие свойства НОК чисел применяются при решении	- презентацию «Сопоставление способов нахождения НОД и НОК чисел»; - анимационную презентацию «Алгоритм Евклида»; - памятку «Что нужно знать для решения задач на	Проект «Исследование способов применения свойств НОД и НОК чисел в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).

	нестандартных задач по математике?	нахождение НОД и НОК чисел».	
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при нахождении НОД и НОК чисел; - заблуждения (недоразумения), связанные с алгоритмом Евклида; - математические софизмы, связанные с НОД и НОК чисел.	- банк математических ошибок по теме «Алгоритм Евклида. НОД. НОК»; - памятку «Так нельзя применять свойства НОД и НОК чисел» при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по свойствам НОД и НОК чисел» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 4.
ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Теоретический базис

Признаки делимости на некоторое натуральное число p – это условия, которым удовлетворяют натуральные числа тогда и только тогда, когда они делятся на p.

Наиболее простыми и известными являются следующие признаки делимости:

1) на 2 – число делится на 2, если его десятичная запись оканчивается на четную цифру;

2) на 3 – число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3;

3) на 4 – число делится на 4, если число, составленное из двух последних цифр его десятичной записи, делится на 4;

4) на 5 – число делится на 5, если его десятичная запись оканчивается на 5 или на 0;

5) на 9 – число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9;

6) на 11 – число делится на 11, если разность между суммами его цифр, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11;

7) на 25 – число делится на 25, если число, составленное из двух последних цифр его десятичной записи делится, на 25.

Ключевые задачи

Задачи на прямое применение признаков делимости.

Задача 4.1. На какие из чисел 2; 3; 4; 5; 9; 11 или 25 делится число 1234567890?

Решение:

Это число делится на 2, т.к. последняя цифра четная; на 3 и на 9, потому что сумма его цифр равна 45 (делится на 9); на 5, т.к. оканчивается на нуль; но не делится на 11 (т.к. указанная разность равна 5 и не делится на 11); не делится также на 4 и 25, т.к. 90 не является кратным этих чисел.

Задача 4.2. Какую цифру можно приписать к числу 867 справа так, чтобы полученное число было кратным 11?

Решение:

Новое число будет иметь вид $\overline{867x}$, при этом x принадлежит множеству цифр (т.е. может быть равным 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 или 9). Согласно признаку делимости на одиннадцать разность $(6+x-7-8)$ должна делиться на 11, такому условию удовлетворяет только цифра 9.

Задача 4.3. К числу 2015 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы новое число было кратным 45.

Решение:

Если приписать слева цифру x, а справа y, то новое число примет вид $\overline{x2015y}$, чтобы число делилось на 45, оно должно делиться на 9 и 5, т.е. y может быть только 0 или 5 (по признаку делимости на 5).

Если $y=0$, тогда сумма цифр числа, равная $(8+x)$, должна делиться на 9, т.е. x может быть равным 1.

Если же $y=5$, то сумма цифр числа, равная $(13+x)$, тоже должна делиться на 9, т.е. x может быть равным 5.

Окрестности задач

Обобщение задач для построения окрестности может быть связано с сочетанием нескольких признаков, а также с варьированием расположения искомых цифр в числах и увеличением их количества.

№ 1. К числу 1357 припишите две цифры справа так, чтобы полученное число стало кратным 12.

№ 2. К числу 86420 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы новое число стало делиться на 99.

№ 3. Запишите наименьшее натуральное число, которое при делении на 4; 9; 11 и 25 дает в остатке 1.

№ 4. В шестизначном числе $\overline{91{*}{*}28}$ стерли две средние цифры, но было известно, что это число делилось на 33. Можно ли восстановить запись числа?

№ 5. Можно ли из цифр 2; 4; 6; 5; 0 составить пятизначное число, кратное 495? А можно ли из этих цифр, не включая нуль, составить четырёхзначное число, кратное 495?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могли понадобиться людям признаки делимости? - когда и как люди сформулировали признаки делимости? - кто из учёных математиков внёс вклад в открытие признаков делимости?	- хронологию открытия признаков делимости чисел; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в нахождение признаков делимости; - библиографию научных трудов, посвящённых признаком делимости.	Проект «Исторический экскурс в нахождение признаков делимости» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых в признаках делимости; - взаимосвязи изученных признаков делимости друг с другом; - зависимости, отражённые в признаках делимости, касающиеся свойств чисел.	- тезаурус темы «Признаки делимости»; - опорный конспект темы «Признаки делимости»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Признаки делимости».	Проект «Анализ развития признаков делимости» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с признаками делимости? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с признаками делимости? - в каких науках учёные имеют дело с признаками делимости?	- карту приложений признаков делимости; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием признаков делимости (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием признаков делимости (общекультурного назначения).	Проект «Применение признаков делимости» (презентация, реферат, доклад).

Проблемы	- как признаки делимости применяются при решении арифметических задач? - как признаки делимости применяются при решении геометрических задач? - как признаки делимости применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Сочетание различных признаков делимости»; - анимационную презентацию «Признаки делимости»; - памятку «Что нужно знать для применения признаков делимости».	Проект «Исследование использования признаков делимости в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на признаки делимости; - заблуждения (недоразумения), связанные с признаками делимости; - математические софизмы, основанные на признаках делимости.	- банк математических ошибок по теме «Признаки делимости»; - памятку «Так нельзя применять признаки делимости при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по признакам делимости» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 5.
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ

Теоретический базис

Определение: Бесконечную десятичную дробь $\overline{a_k...a_1a_0,b_1b_2...b_n}$ называют периодической, если b_1, b_2, ... b_n – последовательность цифр дроби, стоящих после запятой, является периодической, т.е. найдутся такие натуральные p и $t \geq 0$, что для каждого $i > t$ выполняется равенство $b_{i+p} = b_i$. При этом, если $t = 0$, то дробь называют чисто периодической, в противном случае – смешанной периодической дробью. Наименьшее такое p называют длиной периода, а $\overline{b_{t+1}b_{t+2}...b_{t+p}}$ – периодом десятичной дроби.

Чисто периодическую дробь записывают $\overline{a_k...a_1a_0,(b_1b_2...b_n)}$. Смешанную периодическую дробь с наименьшим числом t цифр, стоящих до периода, и периодом $\overline{b_{t+1}b_{t+2}...b_{t+p}}$ записывают в виде $\overline{a_k...a_1a_0,b_1b_2...b_t(b_{t+1}b_{t+2}...b_{t+p})}$. При этом $\overline{b_1b_2...b_t}$ называют предпериодом, а число t – длиной предпериода дроби.

Теорема 1: Любая правильная чисто периодическая дробь обращается в такую обыкновенную, числитель которой равен числу, стоящему в периоде, а знаменатель равен числу, записываемому девяткой, повторяющейся столько раз, сколько цифр в периоде.

Теорема 2: Всякая правильная смешанная периодическая дробь обращается в такую обыкновенную, числитель которой равен разности между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а знаменатель равен числу, записываемому девяткой, повторяющейся столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями на конце, сколько цифр в предпериоде.

Ключевые задачи

К таким можно отнести задания на перевод обыкновенной дроби в десятичную и на обратный перевод из чисто периодической или смешанной периодической дроби в обыкновенную.

Задача 5.1. Запишите дроби: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{25}{12}$ виде десятичных периодических дробей.

Решение:

Для такого перевода требуется выполнить деление числителя на знаменатель (деление производится до получения повторяющегося остатка, тогда число до первого повторяющегося остатка – это предпериод дроби, а от первого остатка до второго такого же является периодом дроби).

При делении числителя первой дроби на её знаменатель получаем, что $\frac{3}{5} = 0,6$.

При делении 4 на 7 получаем, что $\frac{4}{7}=0,(571428)$.

И, наконец, деление 25 на 12 дает следующий результат: $\frac{25}{12}=2,08(3)$.

Задача 5.2. Запишите следующие периодические дроби в виде обыкновенных дробей: а) 0,(31); б) 0,2(187); в) 13,31(13).

Решение:

а) Воспользуемся заменой, т.е. обозначим искомую дробь за x = 0,(31). Умножим обе части равенства на 100 (т.е. на число, состоящее из единицы и стольких нулей, сколько цифр в периоде), получим: 100x = 31,(31). При вычитании из второго равенства первого, уравнение примет вид: 99x = 31. А его решение даст искомую дробь $x=\frac{31}{99}$. Ответ можно проверить (или даже получить) с помощью теоремы 1, т.е. $0,(31)=\frac{31}{99}$.

б) Применим аналогичный прием, тогда x = 0,2(187). Сначала умножим обе части равенства на 10 (чтобы вынести предпериод за запятую), получим: 10x = 2,(187). Теперь, как в предыдущем случае дробь стала чисто периодической, тогда умножим второе равенство на 1000, получим: 10000x = 2187,(187), вычтем из третьего равенства второе: 9990x = 2185. Решая последнее уравнение, находим, что $x=\frac{2185}{9990}$. Можно сократить полученную дробь, тогда $0,2(187)=\frac{437}{1998}$. Результат можно проверить с помощью теоремы 2.

в) При нахождении обыкновенной дроби, равной числу 13,31(13), необходимо понимать, что получиться неправильная дробь (т.к. целая часть не равна нулю). Повторяя рассмотренный способ, обозначим искомую дробь за x = 13,31(13). Умножим обе части равенства на 100:100x = 1331,(13). Затем еще раз умножим обе части второго равенства на 100, т.е. 10000x = 133113,(13). Вычтем из последнего равенства предыдущее: 9900x = 131782. Решим полученное уравнение: $x=\frac{131782}{9900}$, сократив дробь, получим, что $13,31(13)=\frac{65891}{4950}$. Результат можно проверить (или получить) с помощью теоремы 2.

Окрестности задач

Обобщение задач связано с увеличением цифр в периоде и предпериоде, рассмотрением арифметических действий с периодическим дробями, самостоятельным составлением обобщенных примеров периодических дробей и равных им обыкновенных или наоборот.

№ 1. Запишите в виде десятичной периодической дроби число $\frac{13}{73}$.

№ 2. Переведите в обыкновенную дробь число 74,123(568).

№ 3. Выполните действия:

а) 0,25(4) + 3,(29);

б) $43\frac{1}{4}-9,(35)$;

в) $1,2(98)\cdot 3,(45)$.

№ 4. Приведите примеры обыкновенных дробей, обращающихся в десятичные периодические дроби: а) с одной цифрой в периоде и двумя цифрами в предпериоде; б) с двумя цифрами в периоде и одной цифрой в предпериоде.

№ 5. Расположите в порядке возрастания числа:

2,0(678); 2,(0678); 2,06(87); 2,0687; 2,068(7).

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям представление рациональных чисел в виде десятичной дроби? - когда и как появилось понятие периодической дроби? - кто из учёных-математиков внёс вклад в создание и развитие теоретических положений, описывающих операции над рациональными числами.	- хронологию познания человеком рациональных чисел; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в развитие теоретических положений, описывающих операции над рациональными числами; - библиографию научных трудов, посвящённых периодическим дробям и действиям над ними.	Проект «Исторический экскурс по теоретическим положениям, описывающим операции над рациональными числами» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий и теоремы, используемые при выполнении действий с рациональными числами; - взаимосвязи изученных понятий темы «Представление рациональных чисел в виде десятичной дроби» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся представления рациональных чисел в виде десятичной дроби.	- тезаурус темы «Рациональные числа»; - опорный конспект темы «Рациональные числа»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Рациональные числа».	Проект «Анализ развития теоретических положений, описывающих представление рациональных чисел в виде десятичной дроби» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с рациональными числами? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с рациональными числами? - в каких науках учёные непременно будут иметь	- карту приложений рациональных чисел; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием представления десятичных чисел в виде десятичной дроби (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с	Проект «Применение представления десятичных чисел в виде десятичной дроби» (презентация, реферат, доклад).

	дело с представлением рациональных чисел в виде десятичной дроби?	использованием представления десятичных чисел в виде десятичной дроби (общекультурного назначения).	
Проблемы	- какие свойства рациональных чисел применяются при их представлении в виде десятичной дроби? - какие свойства рациональных чисел применяются при решении геометрических задач? - какие свойства периодических дробей применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Сопоставление рациональных чисел и десятичных дробей»; - анимационную презентацию «Представление рациональных чисел в виде десятичной дроби»; - памятку «Что нужно знать для представления рациональных чисел в виде десятичной дроби».	Проект «Исследование способов представления рациональных чисел в виде десятичной дроби в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при представлении рациональных чисел в виде десятичной дроби; - заблуждения (недоразумения), связанные с рациональными числами; - математические софизмы, связанные с рациональными числами.	- банк математических ошибок по теме «Представление рациональных чисел в виде десятичной дроби»; - памятку «Так нельзя представлять рациональные числа в виде десятичной дроби»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы при представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 6.
ЦЕЛЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Теоретический базис

Z – это множество всех целых чисел, которое включает в себя все натуральные числа, число нуль и противоположные натуральным.

При выполнении действий с этими числами необходимо соблюдать следующие правила:

1) При сложении двух отрицательных чисел нужно сложить их модули, а перед результатом поставить знак минус.

2) При сложении положительного числа с отрицательным нужно из большего модуля вычесть меньший, и поставить знак большего по модулю числа.

3) При умножении (делении) двух отрицательных чисел умножаются (делятся) их модули.

4) При умножении (делении) положительного числа на отрицательное (или наоборот) умножаются (делятся) их модули, и перед результатом ставится знак минус.

5) Отрицательное число всегда меньше положительного и нуля.

Q – это множество всех рациональных чисел, т.е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное. При выполнении действий с этими числами нужно помнить не только указанные выше правила, но и соблюдать правила выполнения арифметических действий с обыкновенными и десятичными дробями; а также для рациональности использовать основные законы этих действий, т.е. их свойства (коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность).

Ключевые задачи

Задания на выполнение совместных действий с целыми и рациональными числами, на решение сюжетных задач и уравнений с двумя переменными в целых числах.

Задача 6.1. Сравните числа: $\dfrac{-0,2\cdot\frac{2}{7}+\frac{9}{14}\cdot 0,5}{1,71\cdot\left(-\frac{3}{19}\right)}$ и $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\cdot 8,2-\frac{5}{7}\cdot(-4,2)\right)^2}{-3\frac{1}{14}}$.

Решение:

Прежде всего, упростим каждое из числовых выражений (найдем их значения). В записи первого числа выполним указанные действия: 1) $-0,2\cdot\frac{2}{7}=-\frac{2}{35}$; 2) $\frac{9}{14}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{28}$; 3) $-\frac{2}{35}+\frac{9}{28}=\frac{-8+45}{140}=\frac{37}{140}$; 4) $\frac{171}{100}\cdot\left(-\frac{3}{19}\right)=-\frac{27}{100}$; 5) $\frac{37}{140}\div\left(-\frac{27}{100}\right)=-\frac{37}{140}\cdot\frac{100}{27}=-\frac{185}{189}$.

Выполним упрощение второго числа по действиям:

1) $\frac{3}{4}\cdot\frac{82}{10}=\frac{123}{20}$; 2) $\frac{5}{7}\cdot\frac{42}{10}=\frac{21}{7}=3$; 3) $\frac{123}{20}+3=\frac{123+60}{20}=\frac{183}{20}$; 4) $\left(\frac{183}{20}\right)^2=\frac{33489}{400}$;

5) $\frac{33489}{400}\div\left(-3\frac{1}{14}\right)=-\frac{33489}{400}\cdot\frac{14}{43}=-\frac{234423}{8600}$.

Первое число по модулю меньше 1, а второе больше, поэтому по правилу сравнения отрицательных чисел первое число больше второго.

Задача 6.2. Найдите все целые решения уравнения $x^2-4x=y^2+1$.

Решение:

Перенесем все слагаемые, содержащие переменные в левую часть: x^2-4x-$y^2=1$. Выделим полный квадрат по x: $(x-2)^2-y^2=5$. Левую часть разложим на множители с помощью формулы разности квадратов: $(x-y-2)(x+y-2)=5$. Такое уравнение имеет решения в целых числах, если множители из его левой части являются парами целых делителей числа 5. Для их нахождения нужно решить следующие системы уравнений в целых числах:

1) $\begin{cases} x-y-2=5, \\ x+y-2=1 \end{cases}$, её решение (5; -2);

2) $\begin{cases} x-y-2=-5, \\ x+y-2=-1 \end{cases}$, решение этой системы (-1; 2);

3) $\begin{cases} x-y-2=1, \\ x+y-2=5 \end{cases}$, а её решение в целых числах (5; 2);

4) $\begin{cases} x-y-2=-1, \\ x+y-2=-5 \end{cases}$, решение этой системы в целых числах (-1; -2).

Других парных целых делителей у числа 5 нет, значит, и других решений исходного уравнения нет.

Задача 6.3. Найдите положительное двузначное число, сумма квадратов цифр которого равна 25, а само число больше суммы своих цифр на 27.

Решение:

Применим алгебраический способ решения задачи, обозначим на x цифру десятков, за y – цифру единиц искомого числа.

По условию составим систему уравнений и решим ее: $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 10x+y-x-y=27 \end{cases}$, из второго уравнения x = 3, а из первого y = ±4. Учитывая, что x и y – цифры, получаем, что искомое число 34.

Окрестности задач

Составление окрестности обобщенных задач может заключаться в увеличении количества действий, выполняемых в числовых выражениях с целыми и рациональными числами; в недоопределенности условий сюжетных задач; в решении уравнений в целых числах различными способами.

№ 1. Выполните действия $\dfrac{\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{7}}{\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{7}}\cdot(1+4,6)\div\left(-\dfrac{4}{110}\right).$

№ 2. Задумали натуральное число, к нему приписали справа цифру, после чего новое число стало равным разности квадратов исходного числа и 3. Какое число задумали? Какую цифру приписали?

№ 3. Решите уравнение в целых числах:

а) $xy+2x-y=7$;

б) $x^2-6x+y^2-2y=3$.

№ 4. Найдите все натуральные числа, произведения цифр которых на 2 больше суммы их цифр.

№ 5. Найдите значение выражения: $\left(\dfrac{|y-2|}{y-2}\cdot y^2-2y\cdot\dfrac{|y+2|}{y+2}+2y-4\right)\div|y-4|$ при y = -4.

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем понадобились людям целые числа? - когда и как люди научились выполнять действия с целыми числами? - кто из учёных математиков внёс вклад в создание и развитие теоретических положений, описывающих свойства арифметических действий на множестве целых чисел?	- хронологию познания человеком сущности и свойств целых чисел; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в развитие теоретических положений, описывающих свойства арифметических действий на множестве целых чисел; - библиографию научных трудов, посвящённых действиям с целыми числами.	Проект «Исторический экскурс по целым числам» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемые при выполнении действий с целыми числами; - взаимосвязи изученных понятий темы «Целые и рациональные числа» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся свойств целых чисел.	- тезаурус темы «Целые числа»; - опорный конспект темы «Целые и рациональные числа»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Целые и рациональные числа».	Проект «Свойства операций над целыми и рациональными числами» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с целыми числами? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с целыми	- карту приложений целых чисел; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств операций над целыми числами (технической направленности);	Проект «Применение свойств целых и рациональных чисел» (презентация, реферат, доклад).

	числами? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с целыми и рациональными числами?	- подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств целых и рациональных чисел (общекультурного назначения).	
Проблемы	- какие свойства целых и рациональных чисел применяются при решении арифметических задач? - какие свойства целых и рациональных чисел применяются при решении геометрических задач? - какие свойства целых и рациональных чисел применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Сопоставление свойств целых и рациональных чисел»; - анимационную презентацию «Целых и рациональные числа»; - памятку «Что нужно знать для решения задач с целыми и рациональными числами».	Проект «Исследование использования свойств целых и рациональных чисел в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач с целыми и рациональными числами; - заблуждения (недоразумения), связанные с целыми и рациональными числами; - математические софизмы, связанные со свойствами целых чисел.	- банк математических ошибок по теме «Целые и рациональные числа»; - памятку «Так нельзя применять свойства целых и рациональных чисел при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по свойствам целых и рациональных чисел» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 7.
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

Теоретический базис

Определение: Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называется *арифметической* прогрессией. При этом постоянное слагаемое, называют разностью арифметической прогрессии $d = a_n - a_{n-1}$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$, где a_1 – первый член прогрессии, a_n – n-ый член арифметической прогрессии, n – номер члена прогрессии ($n \in N$), d – её разность.

Свойство арифметической прогрессии: Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, т.е. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ ($n \geq 2$).

Замечание: Можно обобщить свойство арифметической прогрессии, т.е. сформулировать следующим образом – каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух её членов, одинаково удаленных от него, $a_n = \dfrac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$ ($n \geq 2$).

Ключевые задачи

Задания на применение формулы n-го члена арифметической прогрессии, её свойства в различных формулировках, сюжетные задачи на применение самого понятия арифметической прогрессии.

Задача 7.1. Найдите двадцатый член арифметической прогрессии, если её седьмой член равен 18, а двенадцатый член равен –2.

Решение:

Применим формулу n-го члена арифметической прогрессии для седьмого и двенадцатого членов прогрессии: $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{12} = a_1 + 11d$. Подставляя в равенства заданные значения, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными (a_1 и d): $\begin{cases} a_1 + 6d = 18, \\ a_1 + 11d = -2. \end{cases}$

Решением этой системы являются значения $a_1 = 42$ и $d = -4$.

Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии и подставляя в неё найденные значения a_1 и d, найдем двадцатый член прогрессии $a_{20} = a_1 + 19d = 42 - 76 = -34$.

Задача 7.2. Сумма пятого и семнадцатого членов арифметической прогрессии равна –200. Какой член прогрессии можно найти? Чему равно его значение?

Решение:

В указанной арифметической прогрессии одинаково удаленным от пятого и семнадцатого членов является одиннадцатый её член, его значение можно найти, используя обобщенную формулировку свойства арифметической прогрессии $a_{11} = \frac{a_5 + a_{17}}{2} = \frac{-200}{2} = -100$.

Задача 7.3. Мама составляет коллекцию комнатных растений. Каждый месяц она увеличивает количество приобретаемых цветов на 2. Сколько цветов она купит в десятый раз, если первая покупка составляла 3 цветка?

Решение:

Поскольку каждый раз количество приобретаемых растений увеличивается на одно и тоже число, значит, говорится об арифметической прогрессии, при чем первый её член равен 3, а разность равна 2. Тогда применяем формулу n-го члена арифметической прогрессии и получаем, что $a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 18 = 21$.

Окрестности задач

Окрестности обобщенных задач можно получить путем увеличения числа требований задач, их обобщения через нахождение различных способов задания арифметической прогрессии.

№ 1. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии, если её пятый член равен – 2,7; а восьмой член равен 8,3.

№ 2. Петя ежедневно увеличивает число покупаемых марок на 3. На седьмой день он купил 19 штук. Сколько марок купил Петя в первый день? Сколько он купит в 11 день? В какой день он купил семь марок?

№ 3. Известно, что в арифметической прогрессии шестой член равен -0,6. Чему равна сумма пятого и седьмого её членов? Сумму каких членов прогрессии можно еще найти? (Приведите пример.)

№ 4. Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена: $a_n = -30 - 5n$. Чему равен первый член прогрессии? Какое значение принимает её разность? Найдите сумму девятого и одиннадцатого её членов.

№ 5. Между числами -10, 6 и 2 запишите 5 чисел так, чтобы полученные семь чисел образовали арифметическую прогрессию.

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могли понадобиться людям числовые последовательности? - когда и как люди научились суммировать простейшие арифметические прогрессии? - кто из учёных математиков внёс вклад в создание и развитие теории числовых рядов?	- хронологию познания человеком сущности и свойств арифметической прогрессии; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в развитие теории числовых рядов; - библиографию научных трудов, посвящённых числовым последовательностям.	Проект «Исторический экскурс по арифметической прогрессии» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых в теории последовательностей; - взаимосвязи изученных	- тезаурус темы «Арифметическая прогрессия»; - опорный конспект темы	Проект «Анализ развития теории числовых последовательностей» (презентация, реферат,

	понятий темы «Арифметическая прогрессия» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся свойств арифметической прогрессии.	«Арифметическая прогрессия»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Арифметическая прогрессия».	доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с числовыми последовательностями? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с арифметической прогрессией? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с арифметической прогрессией?	- карту приложений свойств арифметической прогрессии; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств арифметических прогрессий (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств арифметических прогрессий (общекультурного назначения).	Проект «Применение свойств арифметической прогрессии» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- какие свойства арифметической прогрессии применяются при решении арифметических задач? - какие свойства арифметической прогрессии применяются при решении геометрических задач? - какие свойства арифметической прогрессии применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Сопоставление скоростей роста арифметических прогрессий»; - анимационную презентацию «Разности площадей вписанных друг в друга многоугольников»; - памятку «Что нужно знать для решения задач с использованием свойств арифметической прогрессии».	Проект «Исследование использования свойств арифметических прогрессий в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач с последовательностями; - заблуждения (недоразумения), связанные с арифметическими прогрессиями; - математические софизмы, связанные с арифметической прогрессией.	- банк математических ошибок по теме «Арифметическая прогрессия»; - памятку «Так нельзя применять свойства арифметической прогрессии при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по свойствам арифметической прогрессии» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 8.
СУММА ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Теоретический базис

Теорема: Сумма n первых членов член арифметической прогрессии равна $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где a_1 – первый член прогрессии, a_n – n-ый член арифметической прогрессии, n – номер члена прогрессии ($n \in N$).

Если в указанную формулу подставить выражение для n-ого члена арифметической прогрессии, т.е. $a_n = a_1 + d(n-1)$, то получится еще одна формула для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, где a_1 – первый член прогрессии, a_n – n-ый член арифметической прогрессии, n – номер члена прогрессии ($n \in N$), d – её разность.

Ключевые задачи

Прямое применение каждой формулы и использование их при решении сюжетных задач.

Задача 8.1. Известно, что первый член арифметической прогрессии равен -50, а её десятый член равен 20. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

Решение:

Применим первую формулу для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии: $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{-50 + 20}{2} \cdot 10 = -150$.

Задача 8.2. В арифметической прогрессии известны первый член (равен 3,2) и разность (равна -0,3). Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятого по девятый.

Решение:

Для того, чтобы найти сумму членов с пятого по девятый, можно найти разность между суммами первых девяти членов прогрессии и первых четырех её членов, используя вторую формулу, т.е. $S_9 = \frac{2 \cdot 3{,}2 - 0{,}3 \cdot 8}{2} \cdot 9 = 18$, $S_4 = \frac{2 \cdot 3{,}2 - 0{,}3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 11$, тогда искомая сумма равна $S_9 - S_4 = 18 - 11 = 7$.

Задача 8.3. Настя мастерит елочные украшения, еженедельно увеличивая их количество на пять. Сколько украшений она смастерит на шестой неделе, если за все шесть недель она смастерила 135 украшений?

Решение:

Поскольку каждый раз количество украшений увеличивается на одно и тоже число, значит, в задаче говорится об арифметической прогрессии, при чем её разность равна 5, а сумма шести первых членов равна 135. Тогда применяем вторую формулу для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии и получаем, что $135 = \frac{2a_1 + 5 \cdot 5}{2} \cdot 6$, теперь можно найти первый член прогрессии, он будет равен 10. Тогда шестой член прогрессии можно найти из первой формулы $135 = \frac{10 + a_6}{2} \cdot 6$, он будет равен 35.

Окрестности задач

Окрестности обобщенных задач можно построить, увеличивая количество искомых величин заданной арифметической прогрессии, обобщая формулы и используя свойства этой прогрессии.

№ 1. В арифметической прогрессии известно, что сумма её первого и пятого членов равна 12. Найдите сумму первых пяти её членов и третий член прогрессии.

№ 2. В арифметической прогрессии сумма первых семи членов равна -20, а сумма тринадцати первых её членов равна 300. Можно ли записать формулу n-го члена этой арифметической прогрессии?

№ 3. Известно, что в арифметической прогрессии шестой член равен -0,8. Чему равна сумма пятого, шестого и седьмого её членов? Можно ли найти сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии?

№ 4. Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена: $a_n = -3 + 6n$. Найдите сумму членов этой прогрессии с десятого по двадцатый.

№ 5. Между числами -0,6 и 20 запишите 6 чисел так, чтобы полученные восемь чисел образовали арифметическую прогрессию. Найдите их сумму наиболее рациональным способом.

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могли понадобиться людям суммы членов числовых последовательностей? - когда и как люди научились суммировать простейшие арифметические прогрессии? - кто из учёных математиков внёс вклад в создание и развитие теоретических положений, позволяющих находить суммы членов числовых последовательностей?	- хронологию познания человеком сущности, свойств и формул для нахождения суммы членов арифметической прогрессии; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в развитие теоретических положений, позволяющих находить суммы членов числовых последовательностей; - библиографию научных трудов, посвящённых суммированию членов арифметических прогрессий.	Проект «Исторический экскурс по формулам суммы членов арифметической прогрессии» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых в теоретических положениях, позволяющих находить суммы членов числовых последовательностей; - взаимосвязи изученных	- тезаурус темы «Сумма членов арифметической прогрессии»; - опорный конспект темы «Сумма арифметической прогрессии»; - структурно-логическую	Проект «Анализ развития теоретических положений, позволяющих находить суммы членов арифметической прогрессии» (презентация, реферат, доклад).

	понятий темы «Сумма членов арифметической прогрессии» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся суммирования членов арифметической прогрессии.	схему системы понятий темы «Сумма членов арифметической прогрессии».	
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с суммированием членов арифметической прогрессии? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с суммированием членов арифметической прогрессии? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с суммированием членов арифметической прогрессии?	- карту приложений формул для нахождения суммы членов арифметической прогрессии; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных формул для нахождения суммы членов арифметической прогрессии (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных формул суммы членов арифметической прогрессии (общекультурного назначения).	Проект «Применение различных формул для нахождения суммы членов арифметической прогрессии» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- как формулы суммы членов арифметической прогрессии применяются при решении геометрических задач? - как формулы суммы членов арифметической прогрессии применяются при решении арифметических задач? - как формулы суммы членов арифметической прогрессии применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Сопоставление формул для нахождения суммы первых членов арифметической прогрессии»; - анимационную презентацию «Сумма площадей вписанных друг в друга квадратов»; - памятку «Что нужно знать для решения задач с использованием формул для нахождения суммы первых членов арифметической прогрессии».	Проект «Исследование применения формул суммы первых членов арифметической прогрессии в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на суммирование членов арифметической прогрессии; - заблуждения (недоразумения), связанные с суммированием членов арифметической прогрессии; - математические софизмы, связанные с суммированием членов арифметической прогрессии.	- банк математических ошибок по теме «Сумма первых членов арифметической прогрессии»; - памятку «Так нельзя применять формулы суммы членов арифметической прогрессии при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по формулам суммы членов арифметической прогрессии» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 9.
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ, ЕЁ ВИДЫ И СВОЙСТВА

Теоретический базис

Определение: Числовая последовательность b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... называется *геометрической* прогрессией, если для всех натуральных n выполняется равенство $b_n + 1 = b_n \cdot q$, где $b_n \neq 0$, q – некоторое число, неравное нулю; при этом q называют знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, где b_1 – первый член прогрессии, b_n – n-ый член геометрической прогрессии, n – номер члена прогрессии ($n \in N$), q – её знаменатель.

Свойство геометрической прогрессии: Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен по модулю среднему геометрическому двух соседних с ним членов, т.е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ ($n \geq 2$).

Замечание: Среди геометрических прогрессий выделяют знакочередующиеся (когда знаменатель принимает отрицательные значения) и бесконечно убывающие (если модуль знаменателя прогрессии меньше единицы).

Ключевые задачи

Задания на применение формулы n-го члена геометрической прогрессии, её свойства, а также свойств знакочередующейся и бесконечно убывающей геометрических прогрессий, сюжетные задачи на их применение.

Задача 9.1. Найдите десятый член геометрической прогрессии, если её третий член равен 4, а шестой член равен 32.

Решение:

Применим формулу n-го члена геометрической прогрессии для третьего и шестого членов прогрессии:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2,\ b_6 = b_1 \cdot q^5.$$

Подставляя в равенства заданные значения, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными (b_1 и q):

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = 4, \\ b_1 \cdot q^5 = 32. \end{cases}$$

Решением этой системы являются значения $b_1 = 1$ и $q = 2$.

Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии и подставляя в нее найденные значения b_1 и q, найдем десятый член прогрессии $b_{10} = b_1 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$.

Задача 9.2. В знакочередующейся геометрической прогрессии с положительным первым членом $b_5 \cdot b_7 = \dfrac{1}{81}$. Какой член прогрессии можно найти? Чему равно его значение?

Решение:

В указанной геометрической прогрессии между пятым и седьмым членами находится шестой её член, его значение можно найти, используя свойство геометрической прогрессии $b_6 = \pm\sqrt{b_5 \cdot b_7} = \pm\sqrt{\frac{1}{81}} = \pm\frac{1}{9}$. Но поскольку первый член этой знакочередующейся прогрессии по условию является положительным числом, значит, все члены прогрессии, стоящие на нечетных местах – положительны, а на четных – отрицательные. Поэтому $b_6 = -\frac{1}{9}$.

Задача 9.3. Оля собирает коллекцию новогодних шаров. Каждый месяц она увеличивает количество приобретаемых шаров в 2 раза. Сколько шаров она купит в пятый раз, если первая покупка составляла 3 шарика?

Решение:

Поскольку каждый раз количество приобретаемых шаров увеличивается в одно и тоже число раз, значит, говорится о геометрической прогрессии, при чем первый её член равен 3, а знаменатель равен 2. Тогда применяем формулу n-го члена геометрической прогрессии и получаем, что $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$.

Окрестности задач

Окрестности обобщенных задач можно получить путем увеличения числа требований задач, их обобщения через нахождение различных способов задания геометрической прогрессии.

№ 1. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии, если её третий член равен -1; а седьмой член равен -0,0016.

№ 2. Вася еженедельно увеличивает число покупаемых марок в 3 раза. На пятый день он купил 162 штук. Сколько марок купил Вася в первый день? Сколько он купит в седьмой день? В какой день он купил 18 марок?

№ 3. Известно, что в геометрической прогрессии второй член равен -0,6. Чему равно произведение первого и третьего её членов?

№ 4. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена: $b_n = -32 \cdot 4^n$. Чему равен первый член прогрессии? Какое значение принимает её знаменатель? Найдите сумму пятого и восьмого её членов.

№ 5. Между числами 128 и 2 запишите четыре числа так, чтобы полученные шесть чисел образовали геометрическую прогрессию.

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могли понадобиться людям геометрические прогрессии? - когда и как люди открыли свойства и виды геометрических прогрессий? - кто из учёных математиков внёс вклад в создание и развитие теоретических положений, описывающих свойства различных видов геометрических прогрессий?	- хронологию познания человеком сущности и свойств геометрической прогрессии; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в изучение свойств геометрических прогрессий; - библиографию научных трудов, посвящённых изучению свойств и видов геометрических прогрессий.	Проект «Исторический экскурс по геометрической прогрессии» (презентация, реферат, доклад).

Теория	- различные определения понятий, используемых в теоретических положениях, описывающих свойства геометрических прогрессий; - взаимосвязи изученных понятий темы «Геометрическая прогрессия» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся свойств геометрических прогрессий.	- тезаурус темы «Геометрическая прогрессия»; - опорный конспект темы «Геометрическая прогрессия»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Геометрическая прогрессия».	Проект «Анализ развития теоретических положений, описывающих свойства геометрических прогрессий» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с геометрическими прогрессиями? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с геометрической прогрессией? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с геометрической прогрессией?	- карту приложений геометрической прогрессии; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств геометрических прогрессий (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием свойств геометрических прогрессий (общекультурного назначения).	Проект «Применение свойств геометрической прогрессии» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- какие свойства геометрической прогрессии применяются при решении арифметических задач? - какие свойства арифметической прогрессии применяются при решении геометрических задач? - какие свойства геометрической прогрессии применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Сопоставление скоростей роста геометрических прогрессий»; - анимационную презентацию «Отношение площадей вписанных друг в друга квадратов»; - памятку «Что нужно знать для решения задач с использованием свойств геометрической прогрессии».	Проект «Исследование использования свойств геометрических прогрессий в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на свойства геометрических прогрессий; - заблуждения (недоразумения), связанные с геометрическими прогрессиями; - математические софизмы, связанные со свойствами различных видов геометрических прогрессий.	- банк математических ошибок по теме «Геометрическая прогрессия»; - памятку «Так нельзя применять свойства геометрической прогрессии при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по свойствам геометрической прогрессии» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 10.
СУММА ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Теоретический базис

Теорема: Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем, не равным единице, равна $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, n – номер последнего члена прогрессии ($n \in N$), q – знаменатель прогрессии.

Если заданная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, то можно найти сумму всех её членов по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Ключевые задачи

Прямое применение формулы суммы n-первых членов геометрической прогрессии, в том числе в частном случае бесконечно убывающей прогрессии, и использование их при решении сюжетных задач.

Задача 10.1. Известно, что первый член геометрической прогрессии равен -3, а её знаменатель равен 2. Найдите сумму её членов с третьего по шестой.

Решение:

Для того, чтобы найти сумму членов с третьего по шестой, можно найти разность между суммами первых шести членов прогрессии и первых трех её членов, т.е. $S_6 = \frac{-3\cdot\left(2^6-1\right)}{2-1} = -3\cdot 63 = -189$, $S_3 = \frac{-3\cdot\left(2^3-1\right)}{2-1} = -3\cdot 7 = -21$, тогда искомая сумма равна $S_6 - S_3 = -189 + 21 = -168$.

Задача 10.2. В геометрической прогрессии известны первый член (равен 4) и знаменатель (равен -0,5). Найдите сумму всех членов этой прогрессии.

Решение:

Применим формулу для нахождения суммы членов бесконечно убывающей прогрессии, т.к. знаменатель её по модулю меньше 1, т.е. $S = \frac{4}{1+0,5} = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

Задача 10.3. Сладкоежка коллекционирует конфеты, еженедельно увеличивая их количество в 3 раза. Сколько конфет он приобретет на четвертой неделе, если за все четыре недели он собрал 480 конфет?

Решение:

Поскольку каждый раз количество конфет увеличивается в одно и тоже число раз, значит, в задаче говорится о геометрической прогрессии, при чем её знаменатель равен 3, а сумма четырех первых членов равна 480. Тогда применяем формулу для нахождения суммы n первых членов геометрической прогрессии и получаем, что $480=\frac{b_1\left(3^4-1\right)}{3-1}$, теперь можно найти первый член прогрессии, он будет равен 12. Тогда четвертый член прогрессии можно найти по формуле n-го члена прогрессии, он будет равен 324.

Окрестности задач

Окрестности обобщенных задач можно построить, увеличивая количество искомых величин заданной геометрической прогрессии, обобщая формулы и используя свойства этой прогрессии.

№ 1. В знакочередующейся геометрической прогрессии с первым положительным членом известно, что произведение её третьего и пятого членов равно 16. Найдите четвёртый член прогрессии. Сумму каких членов прогрессии можно найти? Произведение каких членов можно найти?

№ 2. В геометрической прогрессии сумма первых четырех членов равна 80, а сумма пяти первых её членов равна 242. Можно ли записать формулу n-го члена этой прогрессии?

№ 3. Известно, что в геометрической прогрессии шестой член равен –0,2. Можно ли найти сумму десяти первых членов этой прогрессии? А их произведение?

№ 4. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена: $b_n=-3\cdot 6^n$. Найдите сумму членов этой прогрессии с пятого по восьмой.

№ 5. Между числами –0,8 и –100 запишите два числа так, чтобы полученные четыре числа образовали геометрическую прогрессию. Найдите их сумму наиболее рациональным способом.

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям суммировать члены геометрических прогрессий? - когда и как люди научились находить суммы членов геометрических прогрессий? - кто из учёных математиков внёс вклад в открытие формул для нахождения сумм членов геометрических прогрессий?	- хронологию познания человеком формул для нахождения сумм членов геометрических прогрессий; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в открытие формул для нахождения сумм членов геометрических прогрессий; - библиографию научных трудов, посвящённых суммированию членов геометрической прогрессии.	Проект «Исторический экскурс по формулам для нахождения сумм членов геометрических прогрессий» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых в формулах для нахождения сумм членов геометрических прогрессий; - взаимосвязи изученных формул для нахождения сумм членов геометрических прогрессий друг с другом; - зависимости, отражённые в	- тезаурус темы «Сумма первых членов геометрической прогрессии»; - опорный конспект темы «Сумма членов геометрической прогрессии»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Сумма первых членов геометрической прогрессии».	Проект «Анализ теоретических положений описывающих суммирование членов геометрических прогрессий» (презентация, реферат, доклад).

	формулировках утверждений, касающихся формул для нахождения сумм членов геометрических прогрессий.		
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с суммированием членов геометрических прогрессий? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с суммой членов геометрической прогрессии? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с суммой членов геометрической прогрессии?	- карту приложений геометрической прогрессии; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием формул для нахождения сумм членов геометрических прогрессий (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием суммирования членов геометрических прогрессий (общекультурного назначения).	Проект «Применение формул для нахождения сумм членов геометрических прогрессий» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- как формулы для нахождения сумм членов геометрических прогрессий применяются при решении арифметических задач? - как формулы суммы членов геометрических прогрессий применяются при решении геометрических задач? - как формулы суммы первых членов геометрической прогрессии применяются при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Сумма членов геометрической прогрессии»; - анимационную презентацию «Суммы отношений площадей вписанных друг в друга квадратов»; - памятку «Что нужно знать для решения задач с использованием формул суммы первых членов геометрической прогрессии».	Проект «Исследование использования формул суммы первых членов геометрической прогрессии в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на суммирование членов геометрической прогрессии; - заблуждения (недоразумения), связанные с формулами на нахождение сумм членов геометрических прогрессий; - математические софизмы, связанные с суммированием членов геометрических прогрессий.	- банк математических ошибок по теме «Сумма членов геометрической прогрессии»; - памятку «Так нельзя применять формулы суммы членов геометрических прогрессий» при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по формулам суммы членов геометрических прогрессий» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 11.
СОЧЕТАНИЕ СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИЙ

Теоретический базис

Напомним, что n-ый член арифметической прогрессии находится по формуле: $a_n = a_1 + d(n-1)$, где a_1 – первый член прогрессии, a_n – n-ый член арифметической прогрессии, n – номер члена прогрессии ($n \in N$), d – её разность. Кроме того, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, обладает следующим свойством $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ ($n \geq 2$). В обобщенной формулировке оно принимает вид: $a_n = \dfrac{a_{n-p}+a_{n+p}}{2}$ ($n \geq 2$).

Сумма n первых членов член арифметической прогрессии может быть найдена по одной из двух формул: $S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ или $S_n = \dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии имеет вид: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, где b_1 – первый член прогрессии, b_n – n-ый член геометрической прогрессии, n – номер члена прогрессии ($n \in N$), q – её знаменатель. А каждый её член, начиная со второго, равен по модулю среднему геометрическому двух соседних с ним членов, т.е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$ ($n \geq 2$).

Сумму n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем, не равным единице, можно найти по формуле $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$; в случае бесконечно убывающей прогрессии можно найти сумму всех её членов $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Ключевые задачи

Задачи на сочетание указанных свойств и формул арифметической и геометрической прогрессий.

Задача 10.1. Между числами -20 и $-0{,}032$ поставьте три числа так, чтобы полученные пять чисел являлись последовательными членами: а) арифметической прогрессии; б) знакочередующейся геометрической прогрессии.

Решение:

а) Первый член прогрессии равен -20, а пятый её член равен $-0{,}032$. Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии, можно найти её разность: $a_5 = a_1 + 4d = -20 + 4d = -0{,}032$, откуда $d = 4{,}992$. Теперь по определению арифметической прогрессии можно найти требуемые числа: $-15{,}008$; $-10{,}016$; $-5{,}024$.

б) Решение меняется только в связи с тем, что прогрессия становится геометрической. Тогда $b_1 = -20$; $b_5 = -0{,}032$ и по формуле $-20\cdot q^4 = -0{,}032$, откуда $q = \pm 0,2$. А поскольку прогрессия знакочередующаяся, то её знаменатель принимает отрицательные значения, т.е. $q = -0,2$; а искомые числа (найдем по определению): 4; – 0,8; 0,16.

Задача 10.2. Три натуральных числа образуют арифметическую прогрессию, при чем сумма двух первых её членов равна 4. А если к последнему числу прибавить 4, то прогрессия станет геометрической. Найдите исходные числа.

Решение:

Сначала используем свойство арифметической прогрессии, обозначив заданные числа: a, b и c, получим первое уравнение $b = \frac{a+c}{2}$. Затем используем свойство геометрической прогрессии для чисел a, b и $c+4$ и получаем уравнение $|b| = \sqrt{a \cdot (c+4)}$. И, наконец, по условию составляем третье уравнение: $a + b = 4$. Таким образом, для нахождения трех чисел требуется решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a+b=4 \\ a+c=2b, \\ b^2 = a\cdot(c+4) \end{cases}$. Из первого уравнения можно выразить b, из второго (подставляя выражение для b) – c. Подставляя в третье уравнения полученные выражения, можно найти возможные значения a: $\begin{cases} b=4-a, \\ c=8-3a, \\ 16-8a+a^2 = a\cdot(12-3a), \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} b=3, \\ c=5, \\ a=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b=0, \\ c=-4, \\ a=4, \end{cases}$

но второй случай противоречит условию. Поэтому исходные числа 1; 3 и 5.

Окрестности задач

Окрестности обобщенных задач можно получить путем объединения свойств и формул различных видов прогрессий, а также увеличивая количество требований, включая задания на составление конечных геометрических и арифметических прогрессий.

№ 1. Известно, что три числа являются последовательными членами арифметической и геометрической прогрессий. Чему равна разность арифметической прогрессии? Каково значение знаменателя геометрической прогрессии? Можно ли найти сумму этих чисел.

№ 2. Можно ли подобрать четыре натуральных числа так, чтобы при увеличении второго числа на три они образовали арифметическую прогрессию, а при увеличении третьего числа в пять раз – геометрическую прогрессию?

№ 3. Задайте десять членов арифметической прогрессии так, чтобы три из них образовали геометрическую прогрессию. Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии.

№ 4. Найдите четыре числа, первые три из которых образуют геометрическую прогрессию, а вторые три – арифметическую прогрессию, если сумма первых двух равна 9, а последних двух 30.

№ 5. Можно ли подобрать пять натуральных чисел так, чтобы три первых образовали арифметическую прогрессию, а три последних – геометрическую прогрессию, причем сумма двух крайних чисел была равна среднему?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могли понадобиться людям сочетания последовательностей? - когда и как люди научились сочетать свойства прогрессии? - кто из учёных математиков внёс вклад в создание и развитие теории числовых последовательностей?	- хронологию познания человеком сущности и свойств сочетания последовательностей; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в развитие теории числовых последовательностей; - библиографию научных трудов, посвящённых числовым последовательностям.	Проект «Исторический экскурс по сочетанию свойств арифметической и геометрической прогрессий» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых в теории числовых последовательностей; - взаимосвязи изученных понятий темы «Сочетание свойств арифметической и геометрической последовательностей» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся сочетания свойств прогрессий.	- тезаурус темы «Сочетание свойств прогрессий»; - опорный конспект темы «Сочетание свойств прогрессий»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Сочетание свойств прогрессий».	Проект «Анализ развития теории числовых последовательностей» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с сочетанием различных видов числовых последовательностей? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с сочетанием прогрессий? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с несколькими видами прогрессией?	- карту приложений сочетания свойств прогрессий; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием сочетаний свойств прогрессий (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с использованием сочетаний свойств прогрессий (общекультурного назначения).	Проект «Сочетание свойств числовых последовательностей» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- как свойства арифметической и геометрической прогрессий применяются при решении арифметических задач? - как свойства арифметической и геометрической прогрессий применяются при решении геометрических задач?	- презентацию «Сочетание свойств прогрессий»; - анимационную презентацию «Сочетание свойств арифметической и геометрической прогрессий»; - памятку «Что нужно знать для решения задач на сочетание свойств прогрессий».	Проект «Исследование сочетаний свойств арифметической и геометрической прогрессий в нестандартных ситуациях» (исследовательская работа, презентация, доклад).

	- как свойства арифметической и геометрической прогрессий применяются при решении нестандартных задач по математике?		
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач с числовыми последовательностями; - заблуждения (недоразумения), связанные с сочетанием свойств арифметической и геометрической прогрессий; - математические софизмы, связанные с сочетанием свойств арифметической и геометрической прогрессий.	- банк математических ошибок по теме «Сочетание свойств прогрессий»; - памятку «Так нельзя применять свойства сочетаний прогрессий при решении математических задач»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы по сочетаниям свойств арифметической и геометрической прогрессий» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 12.
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Теоретический базис

Задачи с целочисленными неизвестными, чаще всего, приводятся к исследованию соотношений между натуральными числами, в которых, как правило, используются следующие утверждения:

1) если к натуральному числу a приписывают справа n-значное число b, то получается число $10^n \cdot a + b$;

2) если a и b – натуральные числа, причем $a > b$ и a не делится на b, то существует и притом единственная пара натуральных чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $r < b$.

В таких задачах речь, чаще всего, идет о количестве некоторых объектов, выполнении арифметических действий с целыми (натуральными) числами или их десятичной записью.

Ключевые задачи

Задачи на подсчет количества элементов некоторых множеств, выполнении арифметических действий с целыми числами или десятичной записью натуральных чисел.

Задача 12.1. В двух пачках лежат 200 тетрадей, если из первой пачки переложить 20 тетрадей во вторую, то их станет в обеих пачках поровну. Сколько тетрадей лежало в каждой пачке первоначально?

Решение:

Эту задачу можно решить алгебраически с помощью системы уравнений или одного уравнения. Рассмотрим решение с помощью системы уравнений, тогда примем за x – количество тетрадей в первой пачке, а за y – количество тетрадей во второй пачке первоначально. Тогда, исходя из начальной ситуации, получаем первое уравнение: $x + y = 200$, после перекладывания ситуация стала соответствовать второму уравнению: $x - 20 = y + 20$. Решая систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 200, \\ x - y = 40 \end{cases}$, находим искомые значения: $x = 120$, $y = 80$. Таким образом, в первой пачке первоначально было 120 тетрадей, а во второй – 80 тетрадей.

Задача 12.2. Сумма цифр двузначного числа равна 11, если к этому числу прибавить 45, то получится число, записанное теми же цифрами, но в другом порядке. Найдите исходное число.

Решение:

Решим эту задачу также с помощью системы уравнений, если примем за x – цифру десятков, за y – цифру единиц, тогда получим уравнения: $x + y = 11$ и $10x + y + 45 = 10y + x$. Решим систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 11, \\ 9x - 9y = -45 \end{cases}$, найдем значения переменных: $x = 3$, $y = 8$. Таким образом, исходное число равно 38.

Задача 12.3. При умножении двух чисел, из которых одно на 12 больше другого, сделали ошибку, уменьшив цифру десятков в произведении на единицу. При делении полученного (ошибочного) произведения на меньший множитель получили в частном 45, а в остатке 24. Найдите исходные множители.

Решение:

Пусть больший множитель равен x, тогда меньший множитель равен $x-12$. Тогда, исходя из условия, можно составить уравнение: $x(x-12)-10=45(x-12)+24$. Решениями этого уравнения являются числа 46 и 11, но условию задачи не удовлетворяет число 11 (большее число должно быть больше 12). Поэтому больший множитель равен 46, а меньший – равен 34.

Окрестности задач

Обобщение задач связано с увеличением количества искомых величин для более обобщенных представлений о задачной ситуации; с недоопределением условия, позволяющим составить обобщенную модель решения задач; увеличением количества выполняемых действий с числами.

№ 1. Сумма цифр двузначного числа равна 11, если к этому числу прибавить 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в другом порядке. Найдите исходное число.

№ 2. В двух ящиках находятся яблоки, если из первого ящика переложить 30 яблок во второй, то их станет в обоих ящиках поровну. Сколько яблок могло лежать в каждом ящике первоначально, если известно, что их в сумме было 65?

№ 3. Сумма двух натуральных числе равна 63, а их произведение принадлежит отрезку от 500 до 900. Сколько пар таких чисел существует?

№ 4. В десятичной записи пятизначного числа цифру единиц, равную трем, перенесли на первое место, полученное число оказалось на 6714 больше исходного. Найдите заданное число, полученное число. Существует ли шестизначное число, удовлетворяющее условию задачи?

№ 5. Задумали натуральное число, к его записи приписали справа цифру 5, разделили новое (полученное) число на 5 и вычли из результата удвоенное задуманное число, при этом получился результат, на единицу меньше задуманного. Можно ли найти задуманное число?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям решать текстовые задачи с целочисленными неизвестными? - какими способами люди научились решать текстовые задачи с целочисленными неизвестными? - кто из учёных внёс вклад в описание методов и способов решения текстовых задач с целочисленными	- хронологию познания способов решения задач с целочисленными неизвестными; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в описание методов и способов решения текстовых задач с целочисленными неизвестными; - библиографию научных трудов, посвящённых	Проект «Исторический экскурс по методам решения задач с целочисленными неизвестными» (презентация, реферат, доклад).

	неизвестными?	методам решения задач с целочисленными неизвестными.	
Теория	- различные определения понятий, используемых при решении текстовых задачи с целочисленными неизвестными; - взаимосвязи изученных понятий темы «Текстовые задачи с целочисленными неизвестными» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся процесса решения текстовых задач с целочисленными неизвестными.	- тезаурус темы «Текстовые задачи с целочисленными неизвестными»; - опорный конспект темы «Текстовые задачи с целочисленными неизвестными»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Текстовые задачи с целочисленными неизвестными».	Проект «Анализ развития методов решения задач с целочисленными неизвестными» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с решением текстовых задачи с целочисленными неизвестными? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с текстовыми задачами в целых числах? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с решением текстовых задач с целочисленными неизвестными?	- карту приложений методов решения текстовых задачи с целочисленными неизвестными; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных методов решения текстовых задач с целочисленными неизвестными (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с помощью методов решения текстовых задач с целочисленными неизвестными (общекультурного назначения).	Проект «Применение методов решения текстовых задачи с целочисленными неизвестными» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- какие методы решения текстовых задач с целочисленными неизвестными применяются при решении алгебраических задач? - какие методы решения текстовых задач с целочисленными неизвестными применяются при решении геометрических задач? - какие методы решения текстовых задач с целочисленными неизвестными при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Рациональные способы решения текстовых задач с целочисленными неизвестными»; - анимационную презентацию «Способы решения текстовых задач с целочисленными неизвестными»; - памятку «Что нужно знать для решения задач с целочисленными неизвестными».	Проект «Исследование использования различных методов решения текстовых задач с целочисленными неизвестными» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач с целочисленными неизвестными; - заблуждения (недоразумения), связанные решением текстовых задач с целочисленными	- банк математических ошибок по теме «Текстовые задачи с целочисленными неизвестными»; - памятку «Так нельзя решать текстовые задачи с целочисленными неизвестными»;	Проект «Ошибки и софизмы при решении текстовых задач с целочисленными неизвестными » (творческая работа, презентация, доклад).

	неизвестными; - математические софизмы, связанные с решением текстовых задач с целочисленными неизвестными.	- плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 13.
СЮЖЕТНЫЕ ЗАДАЧИ НА СУХОПУТНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Теоретический базис

В математических задачах на сухопутное движение принято считать движение равномерным и прямолинейным, поэтому основное отношение, характеризующее такой вид движения, связывает между собой основные характеристики (скорость, время, скорость, расстояние) следующей формулой $S = V \cdot t$, из которой можно получить два следствия:

1^0. $V = \dfrac{S}{t}$;

2^0. $t = \dfrac{S}{V}$.

При совместном движении нескольких объектов принято выделять четыре основные ситуации.

А) Движение из *разных пунктов* – «навстречу друг другу». Такое движение характеризуется понятием скорость сближения: $V_{сбл.} = V_1 + V_2$ (см. рис. 13.1).

Рис. 13.1. Движение из разных пунктов.

Б) Движение из *одного пункта в разных направления*. Характеризуется скоростью удаления: $V_{удал.} = V_1 + V_2$ (см. рис. 13.2).

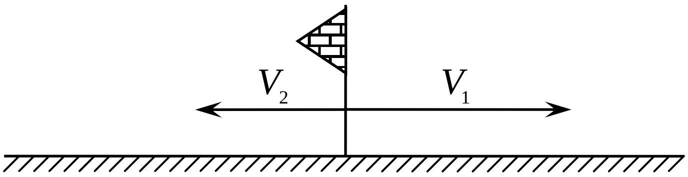


Рис. 13.2. Движение из одного пункта в разных направлениях.

В) Движение из *одного пункта в одну сторону* (с разными скоростями). Характеризуется скоростью обгона: $V_{обг.} = V_1 - V_2$ (см. рис. 13.3).

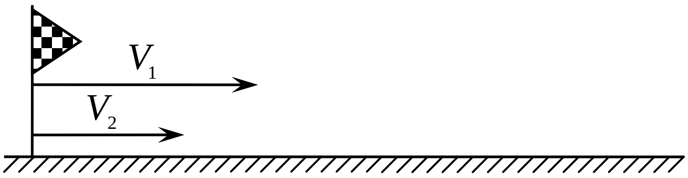


Рис. 13.3. Движение из одного пункта в одну сторону.

Г) Движение из разных пунктов в одном направлении (когда один догоняет другого ($V_1 > V_2$)). Такое движение характеризуется скоростью вдогонку: $V_{вдогон.} = V_1 - V_2$ (см. рис. 13.4).

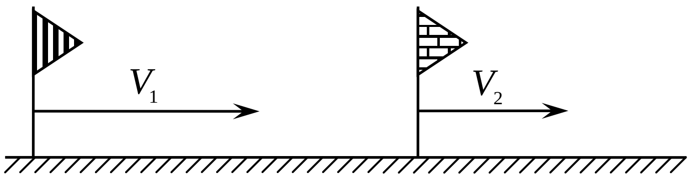


Рис. 13.4. Движение из разных пунктов в одном направлении.

Ключевые задачи

Среди таких задач можно привести примеры задач на движение из разных пунктов, из одного пункта в разных направлениях, из одного пункта в одну сторону, из разных пунктов в одном направлении.

Задача 13.1. Из городов *А* и *Б*, расстояние между которыми 600 км одновременно навстречу друг другу выехали два поезда. Скорость поезда, вышедшего из пункта *А*, равна 80 км/ч, а скорость поезда, вышедшего из пункта *Б,* равна 70 км/ч. Через сколько часов поезда встретятся? Через какое время после встречи расстояние между поездами станет равно 450 км?

Решение:

Арифметический способ решения задачи.

1) 80 + 70 = 150 (км/ч) – скорость сближения;

2) 600 : 150 = 4 (ч.) – время до встречи;

3) 450 : 150 = 3 (ч.) – время после встречи.

Задача 13.2. Два велосипедиста отправляются в 160-километровый пробег. Скорость первого велосипедиста оказалась на 6 км/ч больше скорости второго, и поэтому он первым прибыл к финишу на 6 часов раньше второго. Найдите скорость первого велосипедиста.

Решение:

Алгебраический способ решения задачи.

Пусть x км/ч – скорость первого велосипедиста, тогда $(x-6)$ км/ч – скорость второго велосипедиста. Время движения первого велосипедиста $t_1=\dfrac{160}{x}$, время второго – $t_2=\dfrac{160}{x-6}$. Составим уравнение, используя тот факт, что разность между временем их движения равна 6.

$$\frac{160}{x-6}-\frac{160}{x}=6,$$

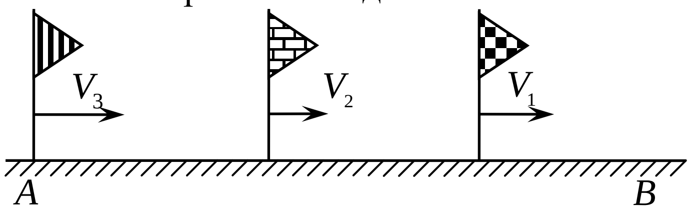
$$160x-160x+160\cdot 6=6x(x-6),$$

$$x^2-6x-160=0.$$

Решая квадратное уравнение, получим: $x_1=16$, $x_2=-10$. Так как скорость не может быть отрицательной, то получаем, что скорость первого велосипедиста равна 16 км/ч.

Задача 13.3. Из пункта *А* в пункт *В* отправляются три велосипедиста. Скорость первого велосипедиста равна 10 км/ч. Второй велосипедист отправился через 30 минут после первого со скоростью 8 км/ч. Какова скорость третьего велосипедиста, если известно, что он выехал через 30 минут после второго и догнал первого через 4 часа после того, как догнал второго?

Решение:
Алгебраический способ решения задачи.



Пусть x км/ч – скорость третьего велосипедиста. Время, которое затратит третий, чтобы догнать первого $t_{3-1} = \frac{10}{x} - 10$, а время, которое затратит третий, чтобы догнать второго $t_{3-2} = \frac{4}{x} - 8$, тогда $\frac{10}{x-10} - \frac{4}{x-8} = 4$. Получим квадратное уравнение: $2x^2 - 39x + 180 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим: $x_1 = 12$, $x_2 = 7{,}5$. Так как скорость первого велосипедиста 10 км/ч, то скорость третьего велосипедиста не может быть 7,5 км/ч. Скорость третьего велосипедиста равна 12 км/ч.

Окрестности задач

Обобщение задач связано с увеличением количества движущихся объектов, с увеличением количества искомых величин, характеризующих описываемое движение; с увеличением количества видов движений (в одну сторону или в разные стороны, навстречу друг другу или вдогонку), позволяющим составить более общую модель решения задач.

№ 1. Из городов Нижний Новгород и Саратов, расстояние между которыми 630 км, навстречу друг другу выехали два автобуса и встретились через 3 часа на расстоянии 225 км от города Нижний Новгород. Найти скорость автобуса, выехавшего из города Саратов, если скорость автобуса, выехавшего из города Нижний Новгород, равна 60 км/ч. Через сколько часов после встречи автобус, выехавший из Саратова, попадет в Нижний Новгород?

№ 2. Электричка каждую минуту проезжает на 550 метров меньше, чем скоростной поезд «Ласточка», и на путь в 220 км тратит времени на 2 часа больше, чем «Ласточка». Найдите скорость электрички. На сколько км/ч скорость электрички меньше скорости поезда «Ласточка»? Сколько времени потребуется каждому поезду на путь в 600 км?

№ 3. Два велосипедиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 28 км. Через сколько минут велосипедисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 2 км/ч больше скорости другого? А через сколько минут они поравняются второй раз? Как изменится решение задачи, если велосипедисты будут двигаться в разных направлениях?

№ 4. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 15 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 75 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч. Сколько времени потребуется каждому автомобилю, чтобы пройти путь AB, равный 600 км?

№ 5. Из города Арзамас в город Лукоянов, расстояние между которыми 61 км, одновременно выехали велосипедист и автомобилист. Известно, что за час велосипедист проезжает на 40 км меньше, чем автомобилист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в город Лукоянов на 6 часов позже автомобилиста. Сколько времени потребуется велосипедисту, чтобы пройти путь из Арзамаса в Лукоянов? Сколько времени потребуется на этот путь автомобилисту?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям решать сюжетные задачи на сухопутное движение? - какими способами люди научились решать сюжетные задачи на сухопутное движение? - кто из учёных внёс вклад в описание методов и способов решения сюжетных задач на сухопутное движение?	- хронологию познания способов решения сюжетных задач на сухопутное движение; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в описание методов и способов решения сюжетных задач на сухопутное движение; - библиографию научных трудов, посвящённых методам решения сюжетных задач на сухопутное движение.	Проект «Исторический экскурс по методам решения сюжетных задач на сухопутное движение» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых при решении сюжетных задач на сухопутное движение; - взаимосвязи изученных понятий темы «Сюжетные задачи на сухопутное движение» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся процесса решения задач на сухопутное движение.	- тезаурус темы «Сюжетные задачи на сухопутное движение»; - опорный конспект темы «Сюжетные задачи на сухопутное движение»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Сюжетные задачи на сухопутное движение».	Проект «Анализ развития методов решения сюжетных задач на сухопутное движение» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с решением сюжетных задач на сухопутное движение? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с сюжетными задачами на сухопутное движение? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с решением сюжетных задач на сухопутное движение?	- карту приложений методов решения сюжетных задач на сухопутное движение; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных методов решения сюжетных задач на сухопутное движение (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с помощью методов решения сюжетных задач на сухопутное движение (общекультурного назначения).	Проект «Применение методов решения сюжетных задач на сухопутное движение» (презентация, реферат, доклад).

Проблемы	- как алгебраические методы применяются при решении сюжетных задач на сухопутное движение? - как геометрические методы применяются при решении сюжетных задач на сухопутное движение? - какие методы решения сюжетных задач на сухопутное движение при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Различные способы решения сюжетных задач на сухопутное движение»; - анимационную презентацию «Способы решения сюжетных задач на сухопутное движение»; - памятку «Что нужно знать для решения сюжетных задач на сухопутное движение».	Проект «Исследование использования различных методов решения сюжетных задач на сухопутное движение» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении сюжетных задач на сухопутное движение; - заблуждения (недоразумения), связанные решением сюжетных задач на сухопутное движение; - математические софизмы, связанные с решением сюжетных задач на сухопутное движение.	- банк математических ошибок по теме «Сюжетные задачи на сухопутное движение»; - памятку «Так нельзя решать сюжетные задачи на сухопутное движение»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы при решении сюжетных задач на сухопутное движение» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 14.
ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ПО РЕКЕ

Теоретический базис

В задачах на движение по воде скорость реки считается постоянной и неизменной. При движении по течению скорость реки прибавляется к собственной скорости плывущего тела, так как скорость реки помогает двигаться телу. При движении против течения от собственной скорости вычитается скорость реки (реально собственная скорость тела больше скорости реки), так как в этом случае скорость реки мешает движущемуся телу. Скорость плота считается равной скорости реки.

Скорость перемещения тела V по воде, при скорости течения реки $V_р$ и собственной скорости движения $V_с$, выражается:

1) $V_{\text{по течению}} = V_с + V_р$ при движении тела по течению реки.

2) $V_{\text{против течения}} = V_с - V_р$ при движении тела против течения реки.

Замечание. $V_{\text{по течению}} - V_{\text{против течения}} = 2V_р$ – разность скоростей по течению и против течения реки равна удвоенной скорости течения.

Замечание. Формула для нахождения собственной скорости тела имеет вид: $V_с = \dfrac{V_{\text{по течению}} + V_{\text{против течения}}}{2}$.

Ключевые задачи

Среди таких задач можно привести примеры задач на движение по течению реки и против течения, задачи в которых течение реки не учитывается.

Задача 14.1.

Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длилась 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Определите, сколько километров теплоход прошел за весь рейс.

Решение:

Заполним таблицу данными из условия задачи: собственная скорость теплохода $V_с = 25$, скорость течения реки $V_р = 3$, $V_{\text{по течению}} = V_с + V_р = 28$ при движении по течению реки, $V_{\text{против течения}} = V_с - V_р = 22$ при движении против течения реки.

	Скорость, V	Время, t: $t = \dfrac{S}{V}$	Расстояние, S
по течению	$V_{\text{по течению}} = 28$	$t_{\text{по течению}} = \dfrac{x}{28}$	$\times$
против течения	$V_{\text{против течения}} = 22$	$t_{\text{против течения}} = \dfrac{x}{22}$	$\times$

Зная, что стоянка длилась 5 часов, а на весь путь затрачено 30 часов, составим уравнение: $\dfrac{x}{28} + \dfrac{x}{22} + 5 = 30$.

Решая его, получим $\frac{x}{28}+\frac{x}{22}=25$, $\frac{x}{2\cdot 14}+\frac{x}{2\cdot 11}=25$, $\frac{11x+14x}{2\cdot 14\cdot 11}=25$, $\frac{25x}{308}=25$, $x=308$. Искомый путь 616 км.

Задача 14.2. От пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним со скоростью, на 2 км/ч большей, отправился второй. Расстояние между пристанями равно 168 км. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Примем скорость первого теплохода за x км/ч. Тогда скорость второго теплохода равна $x+2$ км/ч. Расстояние оба проехали одинаковое – 168 километров. Осталось записать время. Поскольку $t=\frac{S}{V}$, то первый затратит $\frac{168}{x}$ часов, а второй $\frac{168}{x+2}$ часов.

	V	t	S
1	x	$\frac{168}{x}$	168
2	$x+2$	$\frac{168}{x+2}$	168

Сказано, что через два часа после отправления первого, в путь отправился второй, то есть затратил время на движение на два часа меньше:

$\frac{168}{x+2}$ на 2 меньше, чем $\frac{168}{x}$, т.е.

$$\frac{168}{x+2}=\frac{168}{x}-2$$

Умножаем левую и правую части на $x(x+2)$:

$$168x=168(x+2)-2x(x+2),$$
$$168x-168x-336+2x^2+4x=0,$$
$$2x^2+4x-336=0,$$
$$x^2+2x-168=0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем ответ: $x_1=12$, $x_2=-14$.

Скорость есть величина положительная, значит, она равна 12 км/ч.

В этой задаче понятия «скорость течения» отсутствует и она от задач на движение по суше практически ничем не отличается.

Задача 14.3. Моторная лодка прошла против течения реки 120 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч.

Решение:

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x. Тогда скорость движения моторки по течению равна $x+1$, а скорость, с которой она движется против течения x – 1. Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаковое и равно 120 км. Занесем скорость и расстояние в таблицу.

Заполняем графу «время». При движении по течению затраченное на путь время равно $\frac{120}{x+1}$, при движении против течения $\frac{120}{x-1}$. Причем $\frac{120}{x+1}$ на 2 часа меньше, чем $\frac{120}{x-1}$. Да это и логично, что времени на движение по течению реки затрачивается меньше.

	V	t	S
По течению	$x + 1$	$\frac{120}{x+1}$	120
Против течения	$x - 1$	$\frac{120}{x-1}$	120

Таким образом:

$$\frac{120}{x-1}-2=\frac{120}{x+1}\Big|\cdot(x+1)(x-1),$$

$$120(x+1)-2(x+1)(x-1)-120(x-1)=0,$$

$$120x+120-2x^2+2-120x+120=0,$$

$$-2x^2+242=0,$$

$$x^2=121.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 11$, $x_2 = -11$ (оба этих числа при возведении в квадрат дают 121). Но, конечно же, отрицательный ответ не подходит – скорость лодки должна быть положительной: 11 км/ч.

Окрестности задач

Обобщение задач связано с увеличением количества движущихся объектов, с увеличением количества искомых величин, характеризующих описываемое движение; с недоопределением условия, позволяющим составить обобщенную модель решения задач, с сочетанием режимов «движения».

№ 1. Теплоход отправился в 8:30 от пункта *А* в пункт *В*, расстояние между которыми равно 250 км, и вернулся назад в 18:30 того же дня, затратив на стоянку 2 часа. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Сколько времени он тратит на путь из *А* в *В*? А сколько на обратный путь?

№ 2. Из пункта *С* в пункт *Н* вышли лодка и плот. Лодка, доплыв до пункта *Н*, сразу возвращается в пункт *С*. На каком расстоянии от пункта *Н* произойдет их встреча, если расстояние *СН* равно 35 км, собственная скорость лодки 7 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Через сколько часов произойдет их встреча? Сколько времени потребуется плоту, чтобы доплыть до пункта *Н*?

№ 3. Из пункта *А* в пункт *В* вниз по течению реки отправилась моторная лодка, одновременно с ней из пункта *В* в пункт *А* отправилась баржа, а через час после начала их движения вышел плот. На каком расстоянии от пункта *А* окажется плот в момент встречи лодки и баржи, если известно, что собственная скорость лодки равна 60км/ч, а баржи – 40 км/ч, *АВ* = 200км, скорость течения реки 5 км/ч? На каком расстоянии от пункта *B* произойдет встреча моторной лодки и баржи?

№ 4. Скорость течения реки 3 км/ч. На её берегах расположены пристани *A*, *C* и *H*, причем *C* находится посередине между *A* и *H*. От пристани *C* одновременно отходит плот, который движется по течению к пристани *H*, и моторная лодка, которая идет к пристани *A*. Дойдя до пристани *A*, лодка поворачивает по направлению к пункту *H*. Какие значения может принимать собственная скорость лодки, при которых лодка приходит в *H* позже, чем плот?

№ 5. Турист проделал путь, двигаясь вначале пешком 20 км со скоростью равной 4 км/ч; затем на плоту по реке в течении 10 часов; а обратно он возвращался на лодке и велосипеде, при этом на лодке он проделал тот же путь, что и на плоту. Найдите расстояние, которое преодолел турист и время его движения на каждом из участков, если скорость течения реки равна 1,5 км/ч.

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям решать задачи на движение по реке? - какими способами люди научились решать задачи на движение по реке? - кто из учёных внёс вклад в описание методов и способов решения задач на движение по реке?	- хронологию познания способов решения сюжетных задач на движение по реке; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в описание методов и способов решения задач на движение по реке; - библиографию научных трудов, посвящённых методам решения сюжетных задач на движение по реке.	Проект «Исторический экскурс по методам решения сюжетных задач на движение по реке» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых при решении сюжетных задач на движение по реке; - взаимосвязи изученных понятий темы «Задачи на движение по реке» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся процесса решения сюжетных задач на движение по реке.	- тезаурус темы «Задачи на движение по реке»; - опорный конспект темы «Задачи на движение по реке»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Задачи на движение по реке».	Проект «Анализ развития методов решения задач на движение по реке» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с решением задач на движение по реке? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с задачами на движение по реке? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с решением задач на движение по реке?	- карту приложений методов решения задач на движение по реке; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных методов решения сюжетных задач на движение по реке (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с помощью методов решения задач на движение по реке	Проект «Применение методов решения сюжетных задач на движение по реке» (презентация, реферат, доклад).

		(общекультурного назначения).	
Проблемы	- как алгебраические методы применяются при решении задач на движение по реке? - как геометрические методы применяются при решении задач на движение по реке? - какие методы решения задач на движение по реке при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Различные способы решения задач на движение по реке»; - анимационную презентацию «Способы решения сюжетных задач на движение по реке»; - памятку «Что нужно знать для решения задач на движение по реке».	Проект «Исследование использования различных методов решения задач на движение по реке» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на движение по реке; - заблуждения (недоразумения), связанные решением задач на движение по реке; - математические софизмы, связанные с решением задач на движение по реке.	- банк математических ошибок по теме «Задачи на движение по реке»; - памятку «Так нельзя решать задачи на движение по реке»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы при решении задач на движение по реке» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 15.
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ

Теоретический базис

Задачи «на работу» делятся на два вида: на производительность труда и на производительность различных механизмов (труб, насосов и т.д.). Такие задачи часто решаются по формуле:

$$A = P \cdot t,$$

где P – производительность труда, т.е. часть работы, выполняемая в единицу времени; t – время, необходимое для выполнения всей работы.

Пусть $P \cdot t = 1$ – взаимообратные величины, т.е. вся работа $A = 1$, следовательно:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{1}{t}, \ \ t = \frac{A}{P} = \frac{1}{P}.$$

Ключевые задачи

Задачи на нахождение характеристических величин, описывающих процесс совместной работы нескольких сотрудников, в случаях, когда выполняемая работа одна и та же и не выражена в конкретных единицах, а также, когда объём выполняемой работы задаётся в конкретных единицах (деталях, страницах, литрах и т.п.).

Задача 15.1. Серёжа и Андрей вымоют машину за 15 минут, а один Андрей – за 25 минут. За сколько минут вымоет машину один Серёжа?

Решение:

Решим задачу арифметическим способом. Поскольку работа одна и та же и не выражена в конкретных единицах, примем её объём за 1.

Про Андрея нам все известно: время его работы равно 25 минутам, следовательно, его производительность равна $\frac{1}{25}$; а совместная производительность $\frac{1}{15}$.

Тогда производительность Серёжи равна $\frac{1}{15} - \frac{1}{25} = \frac{2}{75}$, а время, которое потребуется Серёже, чтобы вымыть машину, равно 37,5 минут.

Задача 15.2.

Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Решение:

Решим задачу алгебраическим способом.

1. Введем неизвестные. Пусть x – время заполнения резервуара первой трубой; y – время заполнения резервуара второй трубой; $\frac{1}{x}$ –

производительность первой трубы; $\frac{1}{y}$ – производительность второй трубы; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – совместная производительность.

2. Примем объем резервуара равным 1.

3. У нас 2 неизвестных, поэтому будем составлять систему из двух уравнений.

По условию задачи, первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая, следовательно время работы первой трубы на 6 минут больше, чем второй: $x = y + 6$.

Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты, следовательно, время совместной работы равно 4 минуты. Получаем второе уравнение системы: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)4=1.$

Получили систему уравнений: $\begin{cases} x=y+6, \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)4=1 \end{cases}$, $\left(\frac{1}{y+6}+\frac{1}{y}\right)4=1,$

$\frac{4}{y+6}+\frac{4}{y}=1,\ 4y+4(y+6)=y(y+6),\ y^2-2y-24=0,\ y_1=6,\ y_2=-4.$

Одна вторая труба заполняет резервуар за 6 минут.

Задача 15.3. На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Решение:

Пусть x деталей в час изготавливает первый рабочий. (x – 12) деталей – изготавливает в час второй рабочий. $\frac{540}{x}$ час – время, затраченное первым рабочим. $\frac{600}{x-10}$ час – время, затраченное вторым рабочим. Так как первым рабочим затрачено на 12 часов меньше, то $\frac{600}{x-10}-\frac{540}{x}=12$. Решив уравнение, получаем, что первый рабочий в час делает 30 деталей.

Окрестности задач

В обобщенных задачах количество рабочих больше двух, требуется найти больше величин, характеризующих описываемую задачную ситуацию; недоопределяются некоторые элементы условия, позволяющие составить обобщенную модель решения задач.

№ 1. Сладкоежка и Лакомка едят варенье, Сладкоежка съедает 5 банок варенья за 2 часа; а Лакомка – 7 банок за 4 часа. За сколько часов они вместе съедят 51 баноку варенья? Сколько времени потребуется каждому из них, чтобы съесть по 35 банок?

№ 2. Ира, Катя и Юля перебирают фасоль. Если они будут перебирать её втроем, то им потребуется 20 минут, Ира и Катя вдвоем переберут фасоль за 40 минут; а Катя с Юлей – за 30 минут. Сколько минут потребуется каждой девочке, чтобы перебрать фасоль самостоятельно? Сколько времени нужно для этого Ире и Юле, если они будут работать вдвоем?

№ 3. Одна бригада из пяти человек может оштукатурить дом за 20 дней; а другая бригада из 8 человек может это сделать за 12 дней. Двое человек из второй бригады перешли в первую. За сколько дней теперь сможет каждая бригада оштукатурить дом, работая отдельно? За сколько времени они могли бы это сделать, работая вместе?

№ 4. Одна труба наполняет бассейн в 100 литров за 5 часов, вторая – за 8 часов, а третья труба сливает воду из этого бассейна за 10 часов. Через сколько часов бассейн сможет заполниться, если открыты 1 и 2 трубы? А если открыты только 2 и 3 трубы? Если открыты все три трубы?

№ 5. Три землекопа могут вырыть траншею, длиной 300 м, за 4 дня. Они начали работу вместе, но через день заболел первый, а через три дня – второй землекоп. Сколько времени потребуется третьему землекопу, чтобы завершить работу? Какой объем работы они выполнили вместе?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям решать текстовые задачи на совместную работу? - какими способами люди научились решать текстовые задачи на совместную работу? - кто из учёных внёс вклад в описание методов и способов решения текстовых задач на совместную работу?	- хронологию познания способов решения текстовых задач на совместную работу; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в описание методов и способов решения текстовых задач на совместную работу; - библиографию научных трудов, посвящённых методам решения текстовых задач на совместную работу.	Проект «Исторический экскурс по методам решения текстовых задач на совместную работу» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых при решении текстовых задач на совместную работу; - взаимосвязи изученных понятий темы «Текстовые задачи на совместную работу» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся процесса решения текстовых задач на совместную работу.	- тезаурус темы «Текстовые задачи на совместную работу»; - опорный конспект темы «Текстовые задачи на совместную работу»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Текстовые задачи на совместную работу».	Проект «Анализ развития методов решения текстовых задач на совместную работу» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с решением текстовых задач на совместную работу? - в каких сферах	- карту приложений методов решения текстовых задач на совместную работу; - подборку прикладных задач, решаемых с	Проект «Применение методов решения текстовых задач на совместную работу» (презентация, реферат, доклад).

	производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с текстовыми задачами на совместную работу? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с решением текстовых задач на совместную работу?	использованием различных методов решения текстовых задач на совместную работу (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с помощью методов решения текстовых задач на совместную работу (общекультурного назначения).	
Проблемы	- как алгебраические методы применяются при решении текстовых задач на совместную работу? - как геометрические методы применяются при решении текстовых задач на совместную работу? - какие методы решения текстовых задач на совместную работу при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Различные способы решения текстовых задач на совместную работу»; - анимационную презентацию «Способы решения текстовых задач на совместную работу»; - памятку «Что нужно знать для решения текстовых задач на совместную работу».	Проект «Исследование использования различных методов решения текстовых задач на совместную работу» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении текстовых задач на совместную работу; - заблуждения (недоразумения), связанные решением текстовых задач на совместную работу; - математические софизмы, связанные с решением текстовых задач на совместную работу.	- банк математических ошибок по теме «Текстовые задачи на совместную работу»; - памятку «Так нельзя решать текстовые задачи на совместную работу»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы при решении текстовых задач на совместную работу» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 16.
СЮЖЕТНЫЕ ЗАДАЧИ НА ЧАСТИ И ДОЛИ

Теоретический базис

Задачи на части и доли часто связаны с тремя основными видами задач на дроби и их решение сводится, в основном, к нахождению: дроби (части) от числа; числа по его части; соотношения между частью и числом. Первая задача решается по правилу: чтобы найти дробь от числа, нужно умножить эту дробь на заданное число. Вторая задача является обратной к первой и решается следующим образом: чтобы найти число по его части (дроби), нужно часть поделить на дробь. Для нахождения того, какую дробь (часть) составляет одно число от другого, нужно первое число разделить на второе.

Ключевые задачи

Задачи на прямое применение алгоритмов решения каждой из трех основных задач.

Задача 16.1. В детский сад привезли 300 новых игрушек, $\frac{3}{5}$ из которых – мячи, а $\frac{1}{3}$ всех мячей – красные. Сколько красных мячей привезли в детский сад?

Решение:

Эту задачу можно решить арифметически с помощью применения первого правила. Сначала найдем количество мячей, привезенных в детский сад, $\frac{3}{5}\cdot 300=180$, а затем вычислим количество красных мячей $\frac{1}{3}\cdot 180=60$.

Задача 16.2. В вазе лежали конфеты. Сладкоежка съел $\frac{3}{4}$ всех конфет из вазы, а после этого Лакомка съел $\frac{1}{2}$ оставшихся конфет, тогда в вазе осталось 7 конфет. Сколько конфет лежало в вазе первоначально?

Решение:

Решим эту задачу также арифметически с помощью второго алгоритма. Количество конфет, оставшихся после Сладкоежки, находится так: $7\div\frac{1}{2}=14$. А количество конфет, лежащих первоначально в вазе: $14\div\frac{1}{4}=56$.

Задача 16.3. Бабушки и внучка вышивают цветы; бабушка вышила 25 цветов, а внучка – 15. Какую часть всей работы выполнила внучка?

Решение:

Вместе они вышили 40 цветов. Тогда дробь, определяющую часть работы, выполненную внучкой, можно найти по третьему правилу, она будет равной $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$.

Окрестности задач

Обобщение задач связано с использованием основных алгоритмов или ключевых задач как составных частей задачной ситуации, с сочетанием трех основных задач в различных вариантах; с увеличением количества искомых величин.

№ 1. В детский сад привезли 600 новых игрушек, $\frac{3}{8}$ из которых – кубики, а $\frac{8}{9}$ всех кубиков – синие. Сколько синих кубиков привезли в детский сад? Сколько привезли машинок, если известно, что их количество равно 0,4 от числа кубиков?

№ 2. Маша, Даша и Кира фотографировали бабочек для конкурса, выяснилось, что количество фотографий Маши составляет $\frac{3}{4}$ от фотографий Даши, у Киры количество фотографий бабочек составляет $\frac{3}{7}$ от фотографий Маши и Даши. Сколько фотографий сделала каждая девочка, если вместе на конкурс они представили 400 фотографий? Кто из девочек сделал большую часть фотографий?

№ 3. В пакете лежали пряники. Некто взял 5 пряников, что составило $\frac{5}{8}$ всех пряников из пакета, а после этого другой съел $\frac{1}{3}$ оставшихся пряников. Сколько пряников лежало в пакета первоначально? Сколько съел второй? Сколько их осталось?

№ 4. В первый день Денис налил $\frac{1}{2}$ бокала сиропа и разбавил газировкой, после того, как он отпил $\frac{3}{4}$ смеси, он снова добавил газировки и отпил еще $\frac{1}{5}$ новой смеси. Во второй день он налил $\frac{3}{4}$ бокала сиропа, разбавил газировкой и выпил половину смеси, а затем долил еще газировки и выпил $\frac{2}{5}$ новой смеси. В какой день Денис выпил больше чистого сиропа? На сколько?

№ 5. В новогоднем подарке количество шоколадных конфет, карамели и ириса относятся как $6 \div 5 \div 4$. Некто забрал 5 шоколадных конфет и положил 3 карамельки, после чего их количество стало равным. Сколько конфет было в подарке? Каким стало соотношение количеств шоколадных конфет, карамели и ириса? Сколько ириса было в подарке?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям решать сюжетные задачи на части и доли? - какими способами люди научились решать сюжетные задачи на части и доли? - кто из учёных внёс вклад в описание методов и способов решения сюжетных задач на части и доли?	- хронологию познания способов решения сюжетных задач на части и доли; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в описание методов и способов решения сюжетных задач на части и доли; - библиографию научных трудов, посвящённых методам решения сюжетных задач на части и доли.	Проект «Исторический экскурс по методам решения сюжетных задач на части и доли» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых при решении сюжетных задач на части и доли; - взаимосвязи изученных понятий темы «Сюжетные задачи на части и доли» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся процесса решения сюжетных задач на части и доли.	- тезаурус темы «Сюжетные задачи на части и доли»; - опорный конспект темы «Сюжетные задачи на части и доли»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Сюжетные задачи на части и доли».	Проект «Анализ развития методов решения сюжетных задач на части и доли» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с решением сюжетных задач на части и доли? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с сюжетными задачами на части и доли? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с решением сюжетных задач на части и доли?	- карту приложений методов решения сюжетных задач на части и доли; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных методов решения сюжетных задач на части и доли (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с помощью методов решения сюжетных задач на части и доли (общекультурного назначения).	Проект «Применение методов решения сюжетных задач на части и доли» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- как алгебраические методы применяются при решении сюжетных задач на части и доли? - как геометрические методы применяются при решении сюжетных задач на части и доли? - какие методы решения сюжетных задач на части и доли при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Различные способы решения сюжетных задач на части и доли»; - анимационную презентацию «Способы решения сюжетных задач на части и доли»; - памятку «Что нужно знать для решения сюжетных задач на части и доли».	Проект «Исследование использования различных методов решения сюжетных задач на части и доли» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении сюжетных задач на части и	- банк математических ошибок по теме «Сюжетные задачи на части и доли»;	Проект «Ошибки и софизмы при решении сюжетных задач на части и доли»

	доли; - заблуждения (недоразумения), связанные решением сюжетных задач на части и доли; - математические софизмы, связанные с решением сюжетных задач на части и доли.	- памятку «Так нельзя решать сюжетные задачи на части и доли»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	(творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 17.
ЗАДАЧИ НА СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Теоретический базис

Процент – одна сотая часть величины или числа. Обозначается символом «%».

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

В задачах на проценты достаточно часто используются следующие соотношения между десятичными дробями и процентами:

1) Для преобразования десятичной дроби в проценты, её необходимо умножить на 100.

2) Для преобразования процентов в десятичную дробь необходимо число процентов разделить на 100.

Сложные проценты – эффект, часто встречающийся в экономике и финансах, когда проценты прибыли в конце каждого периода прибавляются к основной сумме, и полученная величина в дальнейшем становится исходной для начисления новых процентов.

Наиболее распространенные типы задач на проценты:

1) Найти указанный процент от заданного числа.

2) Найти число по заданному другому числу и его величине в процентах от искомого числа.

3) Найти процентное выражение одного числа от другого.

4) Найти число на заданный процент большее (меньшее) исходного числа.

5) Найти число, зная значение числа большего (меньшего) от исходного на заданный процент.

6) Найти сложные проценты.

Метод решения задач с процентами:

Все соотношения и формулы, полученные для решения задач с процентами, выводятся из пропорции.

Данные задачи на проценты можно записать в виде следующих соотношений:

$$\begin{array}{c} \text{все} \; - \; 100\% \\ \text{часть} \; - \; \text{часть в } \%, \end{array}$$

которые можно записать в виде пропорции

$$\frac{\text{все}}{\text{часть}} = \frac{100\%}{\text{часть в } \%}$$

Используя эту пропорцию, можно получить формулы для решения основных типов задач на проценты.

Формулы для решения задач на проценты:

Формула вычисления процента от заданного числа. Если дано число A и необходимо вычислить число B, составляющее P процентов от A, то $B = \frac{A \cdot P}{100\%}$.

Формула вычисления числа по его проценту. Если дано число B которое составляет P процентов от числа A и необходимо найти значение числа A, то $A = \frac{B \cdot 100\%}{P}$.

Формула вычисления процентного выражения одного числа от другого. Если даны два числа (A и B) и необходимо определить, какой процент составляет число B от числа A, то $P = \frac{B}{A} \cdot 100\%$.

Формула вычисления числа, которое больше исходного числа на заданный процент. Если дано число A и необходимо найти число B, которое на P процентов больше числа A, то $B = A\left(1 + \frac{P}{100\%}\right)$.

Формула вычисления числа, которое меньше исходного числа на заданный процент. Если дано число A и необходимо найти число B, которое на P процентов меньше числа A, то $B = A\left(1 - \frac{P}{100\%}\right)$.

Формула вычисления исходного числа по значению числа, которое больше от исходного на заданный процент. Если дано число B, которое на P процентов больше числа A, и необходимо найти число A, то $A = \frac{B \cdot 100\%}{100\% + P}$.

Формула вычисления исходного числа по значению числа, которое меньше от исходного на заданный процент. Если дано число B, которое на P процентов меньше числа A, и необходимо найти число A, то $A = \frac{B \cdot 100\%}{100\% - P}$.

Формула вычисления сложных процентов: $B = A\left(1 + \frac{P}{100\%}\right)^n$,

где B – будущая стоимость; A – текущая стоимость; P – процентная ставка за расчетный период (день, месяц, год, ...); n – количество расчетных периодов.

Ключевые задачи

Применение каждого правила и использование их при решении задач на сложные проценты.

Задача 17.1. В конце января количество снега увеличилось на 30%, а к началу февраля уменьшилось на 30%. Как изменилась высота снежного покрова?

Решение:

Количество снега увеличилось на 30%, то есть высота снежного покрова стала 130%, что составляет 130 : 100 = 1,3 от первоначальной высоты снежного покрова. Затем он уменьшился на 30%, то есть высота стала 100% – 30% = 70%, что составляет 70 : 100 = 0,7 от новой высоты. Пусть первоначальная высота была x. После увеличения высота стала $1{,}3x$, а после уменьшения $0{,}7 \cdot 1{,}3x = 0{,}91x$. Найдем разницу между начальной и конечной высотой снежного покрова $x - 0{,}91x = 0{,}09x$, что составляет $0{,}09 \cdot 100\% = 9\%$ от начальной высоты. Значит, высота снежного покрова уменьшилась на 9%.

Задача 17.2. На первом заседании парламента присутствовало 40% от списочного состава депутатов, на втором заседании – 55%. Сколько процентов депутатов присутствовало на обоих заседаниях?

Решение:

В этой задаче нельзя дать определенный ответ. Если все присутствующие на первом заседании были и на втором, то на двух заседаниях было 40% депутатов. Если же никто из посетивших первое заседание не пришел на второе, то на двух заседаниях было 0% депутатов. Понятно, что пересечением этих групп может быть любое целое число депутатов в промежутке от 0% до 40%.

Задача 17.3. Сколько нужно взять сливок жирностью 36% и жирностью 18%, чтобы получить 90 кг сливок с содержанием 30% жира?

Решение:

Пусть нужно взять x кг сливок жирностью 36%, жира в них содержится $0,36x$ кг. Сливок жирностью 18% нужно взять y кг, в них содержится $0,18\ y$ кг жира. Всего сливок $x + y = 90$кг, жира в них будет $0,36x + 0,18y – 0,3 \cdot 90$ кг. Решая полученную систему из двух уравнений, найдем $x = 60$ кг, $y = 30$ кг. Значит, нужно взять 60 кг сливок жирностью 36% и 30 кг сливок жирностью 18%.

Окрестности задач

Обобщение задач связано с увеличением количества искомых величин для более обобщенных представлений о задачной ситуации; с недоопределением условия, позволяющим составить обобщенную модель решения задач; с параметрическим заданием условия.

№ 1. Заработная плата рабочих повысилась на некоторое число процентов, а во второй раз на утроенное количество процентов. На сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз, если изначально она была равна 8000 руб., а после второго повышения составила 9660 руб.?

№ 2. Акции предприятия в понедельник подорожали на 20%, а во вторник подешевели на 10%, в результате одна акция стала стоить 1080 руб. Сколько акций можно было купить на 100000 руб. в понедельник? А сколько во вторник?

№ 3. На первой неделе продаж цена одной банки консервов была снижена на 10%, на второй неделе – еще на 5%, а на третьей – на 20%. Сколько стоила банка консервов изначально? Сколько стоила банка консервов на каждой из недель, если человек, купивший 5 банок, заплатил за них на последней неделе 684 руб.?

№ 4. Цена конструктора за неделю была повышена с 400 руб. до 500 руб.; а к выходным она понизилась на столько же процентов, на сколько была повышена. Сколько стал стоить конструктор в выходные дни? Сколько нужно было заплатить на следующей неделе за два конструктора, если объявлена акция – при покупке одного конструктора скидка на второй составляет 50%?

№ 5. Цена товара сначала была повышена на несколько процентов, а затем снижена на столько же процентов. В результате последующего снижения на удвоенное количество процентов товар стал стоить 144 руб. Какова начальная цена товара? Сколько он стал стоить после подорожания? Сколько он стал стоить после первого снижения? На сколько процентов цена понижалась каждый раз?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста*.

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям решать задачи на сложные проценты? - какими способами люди научились решать задачи на сложные проценты? - кто из учёных внёс вклад в описание методов и способов решения задачи на сложные проценты?	- хронологию познания способов решения задач на сложные проценты; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в описание методов и способов решения задач на сложные проценты; - библиографию научных трудов, посвящённых методам решения задач на сложные проценты.	Проект «Исторический экскурс по методам решения задач на сложные проценты» (презентация, реферат, доклад).
Теория	- различные определения понятий, используемых при решении задач на сложные проценты; - взаимосвязи изученных понятий темы «Задачи на сложные проценты» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся процесса решения задач на сложные проценты.	- тезаурус темы «Задачи на сложные проценты»; - опорный конспект темы «Задачи на сложные проценты»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Задачи на сложные проценты».	Проект «Анализ развития методов решения задач на сложные проценты» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с решением задач на сложные проценты? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с задачами на сложные проценты? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с решением задач на сложные проценты?	- карту приложений методов решения задач на сложные проценты; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных методов решения задач на сложные проценты (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с помощью методов решения задач на сложные проценты (общекультурного назначения).	Проект «Применение методов решения задач на сложные проценты» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- как алгебраические методы применяются при решении задач на сложные проценты? - как геометрические методы применяются при решении задач на сложные проценты? - какие методы решения задач на сложные проценты при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Различные способы решения задач на сложные проценты»; - анимационную презентацию «Способы решения задач на сложные проценты»; - памятку «Что нужно знать для решения задач на сложные проценты».	Проект «Исследование использования различных методов решения задач на сложные проценты» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении задач на сложные проценты;	- банк математических ошибок по теме «Задачи на сложные проценты»;	Проект «Ошибки и софизмы при решении задач на сложные проценты»

	- заблуждения (недоразумения), связанные решением задач на сложные проценты; - математические софизмы, связанные с решением задач на сложные проценты.	- памятку «Так нельзя решать задачи на сложные проценты»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	(творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

Тема 18.
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА СМЕСИ, СПЛАВЫ И РАСТВОРЫ

Теоретический базис

Человеку часто приходится смешивать различные жидкости, порошки, газообразные или твердые вещества, или разбавлять что-либо водой.

Если два сплава (раствора) соединяют в один «новый» сплав (раствор), то $V = V_1 + V_2$ – сохраняется объем; $m = m_1 + m_2$ – сохраняется масса.

Абсолютное содержание вещества в смеси – это количество вещества, выраженное в единицах измерения (грамм, литр и др.).

Относительное содержание вещества в смеси – это отношение абсолютного содержания и общей массы (объему) смеси. Часто относительное содержание вещества в смеси называют концентрацией или процентным содержанием. Сумма концентраций всех компонентов смеси равна 1.

При решении задач на смеси, сплавы и растворы используется их общее свойство, которое заключается в том, что масса смеси, раствора или сплава равна сумме масс их компонентов. Процентное содержание каждого компонента указывает на отношение массы компонента к массе смеси (раствора или сплава). При смешивании смесей, растворов или сплавов их общие массы, как и массы компонентов, складывают.

Ключевые задачи

Задачи на нахождение процентного содержания вещества в смеси; на добавление чистого вещества в раствор; на соединение растворов с различной концентрацией вещества.

Задача 18.1. Сколько нужно добавить воды в 20 литров тридцати процентного раствора соли, чтобы понизить её процентное содержание на 20%?

Решение:

Эту задачу можно решить арифметически, сначала найдем количество чистой соли в исходном растворе: $0,3 \cdot 20 = 6$ литров; а затем найдем объем второго раствора: $6 \div 0,1 = 60$ литров. Значит, добавили $60 - 20 = 40$ литров воды.

Задача 18.2. Имеется 60 кг винограда с 80%ным содержанием воды. Сколько процентов воды будет содержаться в 25 кг изюма, полученного из этого винограда?

Решение:

Эту задачу также можно решить арифметически, сначала найдем количество сухой виноградной массы в винограде: $0,2 \cdot 60 = 12$ кг; затем посчитаем, сколько воды в изюме: $25 - 12 = 13$ кг, а потом выразим 13 кг от 25 кг в процентах, получим $\frac{13}{25} \cdot 100 = 52\%$.

Задача 18.3. Смешали тридцати процентный раствор кислоты с сорока процентным, получили 36%ный раствор. Какова масса полученного раствора, если известно, что тридцати процентного раствора кислоты было взято на 10 кг меньше, чем сорока процентного?

Решение:

Используем алгебраический способ, для этого обозначим за x кг количество сорока процентного раствора кислоты. Тогда по условию задачи составим уравнение: $0,3(x-10)+0,4x=0,36(2x-10)$. При его решении получаем, что x=30. Тогда масса нового равна $30\cdot 2-10=50$ кг.

Окрестности задач

Обобщение задач связано с увеличением количества искомых величин; с недоопределением условия, позволяющим составить обобщенную модель решения; с комбинацией элементов трех ключевых задач.

№ 1. Сколько килограмм воды нужно выпарить из 3 т массы, влажность которой составляет 70%, чтобы получить массу, влажность которой равна 30%? (10%? 50%?)

№ 2. Имеется 150 кг свежих яблок с 75%-ым содержанием воды. Сколько процентов воды будет содержаться в 50 кг сушеных яблок? Сколько свежих яблок нужно взять, чтобы получить 20 кг сушеных с таким же процентом влажности? Сколько сушеных яблок можно получить из 200 кг свежих?

№ 3. Смешали тридцатипятипроцентный раствор соли с сорокапятипроцентным, добавили к этой смеси 20 кг воды, получили 37%-ый раствор. Если бы вместо воды добавили столько же пятидесятипроцентного раствора соли, то получили бы сорокадвухпроцентный раствор. Сколько взяли каждого раствора изначально? Сколько получили нового раствора?

№ 4. Имеется два сплава никеля и серебра. В первом отношение никеля к серебру равно 2:3, а во втором – 7:3. Какого веса можно взять куски каждого сплава, чтобы получить новый сплав с содержанием серебра 50%?

№ 5. Из бочки, содержащей 80 л чистого вещества, вылили несколько литров и долили до первоначального объема водой, затем вылили смеси столько же, сколько в первый раз чистого вещества, в результате в бочке осталось 45 л чистого вещества. Сколько литров чистого вещества вылили в первый раз? А сколько во второй? Какова концентрация полученного раствора?

Задания Web-квеста

Выполните следующие поисково-познавательные задания *тематического образовательного Web-квеста.*

	<Узнать>	<Создать>	<Оформить>
Архивы	- зачем могло понадобиться людям решать текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы? - какими способами люди научились решать текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы? - кто из учёных внёс вклад в описание методов и способов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы?	- хронологию познания способов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы; - галерею учёных-математиков, внёсший свой вклад в описание методов и способов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы; - библиографию научных трудов, посвящённых методам решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы.	Проект «Исторический экскурс по методам решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы» (презентация, реферат, доклад).

Теория	- различные определения понятий, используемых при решении текстовых задач на смеси, сплавы и растворы; - взаимосвязи изученных понятий темы «Текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы» друг с другом; - зависимости, отражённые в формулировках утверждений, касающихся процесса решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы.	- тезаурус темы «Текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы»; - опорный конспект темы «Текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы»; - структурно-логическую схему системы понятий темы «Текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы».	Проект «Анализ развития методов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы» (презентация, реферат, доклад).
Приложения	- встречается ли человек в быту (в повседневной жизни) с решением текстовых задач на смеси, сплавы и растворы? - в каких сферах производственной деятельности вероятнее всего человеку приходится встречаться с текстовыми задачами на смеси, сплавы и растворы? - в каких науках учёные непременно будут иметь дело с решением текстовых задач на смеси, сплавы и растворы?	- карту приложений методов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы; - подборку прикладных задач, решаемых с использованием различных методов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы (технической направленности); - подборку прикладных задач, решаемых с помощью методов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы (общекультурного назначения).	Проект «Применение методов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы» (презентация, реферат, доклад).
Проблемы	- как алгебраические методы применяются при решении текстовых задач на смеси, сплавы и растворы? - как геометрические методы применяются при решении текстовых задач на смеси, сплавы и растворы? - какие методы решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы при решении нестандартных задач по математике?	- презентацию «Различные способы решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы»; - анимационную презентацию «Способы решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы»; - памятку «Что нужно знать для решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы».	Проект «Исследование использования различных методов решения текстовых задач на смеси, сплавы и растворы» (исследовательская работа, презентация, доклад).
Ошибки	- распространённые ошибки, допускаемые при решении текстовых задач на смеси, сплавы и растворы; - заблуждения (недоразумения), связанные решением текстовых задач на смеси, сплавы и растворы; - математические софизмы, связанные с решением текстовых задач на смеси, сплавы и растворы.	- банк математических ошибок по теме «Текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы»; - памятку «Так нельзя решать текстовые задачи на смеси, сплавы и растворы»; - плакат-предостережение «Осторожно, ошибка!».	Проект «Ошибки и софизмы при решении текстовых задач на смеси, сплавы и растворы» (творческая работа, презентация, доклад).

За необходимой помощью в выполнении заданий Web-квеста обращайтесь в ресурсный центр, расположенный на методическом сайте: http://edquest.ru/.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование современных Web-квест задачных технологий предоставляет возможность организовать занятия со школьниками различными способами: выполнение заданий Web-квеста по каждой теме может быть осуществлено в малых группах или индивидуально; в аудитории под руководством педагога или самостоятельно в домашней работе; оформление проектов по итогам выполнения каждого задания также предполагает различные варианты – в печатной, рукописной форме (реферат, исследование, творческая работа) или в виде компьютерного файла, презентации и т.п.; решение задач обобщенных окрестностей, чаще всего, осуществляется на занятии индивидуально каждым школьником либо во фронтальной форме, либо в групповой; при этом в качестве домашнего задания школьникам часто предлагается дополнить окрестности (основываясь на различных направлениях обобщения математических задач) и решить подобранные или самостоятельно составленные задачи (один из видов творческой работы).

Таким образом, использование рассмотренного в пособии подхода к построению занятий практикума по решению математических задач в практике обучения позволит повысить у школьников уровень сформированности информационной и коммуникационной компетентности, готовности их к самообразованию и самостоятельному решению проблем, разнообразить формы проведения занятий, что будет способствовать совершенствованию образовательного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н.В. Горбачев. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
2. Иванов О.А. Элементарная математика: для школьников, студентов и преподавателей / О.А. Иванов. – М.: МЦНМО, 2009. – 383 с.
3. Лурье М.В. Задачи на составление уравнений. Техника решения / М.В. Лурье. – М.: Издательский отдел УНЦ ДО, ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 124 с.
4. Степанова Л.Л. Практикум по элементарной математике: Арифметика / Л.Л. Степанова, А.В. Жмулёва, Е.И. Деза. – М.: МЦНМО, 2008. – 207 с.
5. Сборник задач по математике с решениями / Под ред. М.И. Сканави. – М.: Издательский дом ОНИКС: Альянс-В, 1998. – 624 с.

Электронные ресурсы

6. Всероссийский Вахтеровский фестиваль-конкурс творческих работ по математике «Красота и Величие математики». – Режим доступа: http://vk.com/club69162759.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». – Режим доступа: http://window.edu.ru.
8. Методический сайт МатематикУм: Тематический образовательный Web-квест по теме «Квадратные уравнения». – Режим доступа: http://matematikum.ucoz.ru/index/kvadratnye_uravnenija_8_klass/0-8.
9. Методический сайт EdQuest: Конструктора для создания курсов онлайн-обучения в игровом жанре «квест». – Режим доступа: http://edquest.ru/.

10 Образовательные тесты. – Режим доступа: http://testedu.ru.

11. Путеводитель школьника «Мир Задач». – Режим доступа: http://mirzadach.narod.ru.
12. Современные Web-технологии образовательного назначения: перспективы и направления развития: сборник статей участников Международной научно-практической конференции / Под общей редакцией С.В. Мироновой, С.В. Напалкова; Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2016. – 387с. – Режим доступа: http://elibrary.ru/item.asp?id=26440768.
13. Социальная сеть 4Портфолио. – Режим доступа: http://4portfolio.ru.
14. Социальная сеть работников образования. – Режим доступа: http://nsportal.ru.
15. Стратегия модернизации российского школьного образования. – Режим доступа: http://www.ntf.ru/win/news/strateg/1/3/rigt.htm.
16. Федеральный портал «Российское образование». – Режим доступа: http://www.edu.ru.
17. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов. – Режим доступа: http://fcior.edu.ru.
18. Web-технологии в образовательном пространстве: проблемы, подходы, перспективы: сборник статей участников Международной научно-

практической конференции / Под общей редакцией С.В. Арюткиной, С.В. Напалкова; Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2015. – 581 с. – Режим доступа: http://elibrary.ru/item.asp?id=23426131.

Дополнительная литература

19. Арюткина С.В. О сущности обобщения математической задачи / С.В. Арюткина // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4. – С. 23.

20. Арюткина С.В. Обобщенные приемы математической деятельности как основа математического творчества школьников / С.В. Арюткина // Педагогические технологии математического творчества: сборник статей участников международной научно-практической конференции. – Арзамас, 2011. – С. 57-62.

21. Арюткина С.В. Подготовка учителей к формированию у школьников обобщенных приемов действий / С.В. Арюткина // Высшее образование в России. – 2012. – № 1. – С. 149-151.

22. Арюткина С.В., Напалков С.В. О способе реализации требований ФГОС по математике посредством использования тематических образовательных Web-квестов / С.В. Арюткина, С.В. Напалков // Информационные технологии в обеспечении федеральных государственных образовательных стандартов: материалы Международной научно-практической конференции. – Елец, 2014. – С. 80-85.

23. Арюткина С.В., Напалков С.В. Практикум решения задач школьной математики: применение Web-квест технологии: учебно-методическое пособие. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2015 – 85 с.

24. Вишенский В.О. Задачи по математике / В.О. Вишенский, М.О. Перестюк, А.М. Самойленко. – Киев: Высшая школа, 2010 – 264 с.

25. Габович И.Г. Сколько корней имеет уравнение? / И.Г. Габович, П.И. Горнштейн // Квант. – 2009 – №3 – С. 43-46.

26. Говоров В.М. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями): Учеб. пособие / В.М. Говоров, П.Т. Дыбов, Н.В. Мирошин, С.Ф. Смирнова. – 2-е издание – М.: Наука, 2010. – 384 с.

27. Голубев В.И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике / В.И. Голубев. – Львов, 2011. – 96 с. – (Квантор №8).

28. Голубев В.И. О параметрах – с самого начала / В.И. Голубев, А.М. Гольдман, Г.В. Дорофеев // Репетитор. – 2007. – №2 – С. 3-13.

29. Горделадзе Ш.Х. Сборник конкурсных задач по математике. 3-е издание / Ш.Х. Горделадзе, М.М. Кухарчук, Ф.П. Яремчук. – Киев: Высшая школа, 2010. – 328 с.

30. Горнштейн П.И. Необходимые условия в задачах с параметрами / П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир // Квант. – 2000. – № 11. – С. 44-49.

31. Дорофеев Г.В. Как расположены корни трёхчленов? / Г.В. Дорофеев // Квант. – 2008. – № 7. – С. 45-49.

32. Дорофеев Г.В. Квадратный трёхчлен в задачах / Г.В. Дорофеев. – Львов, 2009. – 103 с. – (Квантор, №2).

33. Дорофеев Г.В. О задачах с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы / Г.В. Дорофеев // Математика в школе. – 2009. – №4. – С. 36-40.

34. Дорофеев Г.В. Пособие по математике для поступающих в вузы / Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. – М.: Наука, 2008. – 638 с.

35. Дорофеев Г.В. Решение задач, содержащих параметры / Г.В. Дорофеев, В.В. Затавкай. – М.: Науч.-пед. об-ние «Перспектива», 2010. – Ч.2. – 38 с.

36. Дорофеев Г.В. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными / Г.В. Дорофеев // Квант. – 2008. – № 9. – С. 63-67.

37. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебно-методическое пособие / И.В. Роберт, С.В. Панюкова, А.А. Кузнецов, А.Ю. Кравцова; под ред. И.В. Роберт. – М.: Дрофа, 2008. – 312 с.

38. Марков В.К. Метод координат и задачи с параметрами / В.К. Марков. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. – 146 с.

39. Напалков С.В. Конструирование заданий для электронных образовательных ресурсов в соответствии с требованиями ФГОС по математике / С.В. Напалков // Нижегородское образование. – 2014. – № 3. – С. 126-131.

40. Напалков С.В. О практическом использовании тематических образовательных Web-квестов в школьном обучении математике / С.В. Напалков // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. – 2014. – № 8. – С. 125-129.

41. Напалков С.В. Поисково-познавательные задания тематического образовательного Web-квеста по математике как средство формирования ключевых компетенций учащихся / С.В. Напалков // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8-2. – С. 469-474.

42. Напалков С.В. Тематические образовательные Web-квесты как средство развития познавательной самостоятельности учащихся при обучении алгебре в основной школе: автореф. ... канд. пед. наук / Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева. – Саранск, 2013. – 25 с.

43. Напалков С.В., Напалкова Е.С. Web-квест технологии как реализация проектировочной деятельности преподавателя высшей школы / С.В. Напалков, Е.С. Напалкова // Преподаватель высшей школы: от проектировочной деятельности − к проектировочной компетентности: сборник научных статей по материалам Международной заочной научно-практической конференции. Воронежский государственный университет. – 2014. – С. 73-77.

44. Нестеренко Ю.В. Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов. – М.: Наука, 2009. – 512 с.

45. Нестерова Л.Ю., Напалков С.В. Теория чисел в примерах и задачах (учебно-методическое пособие) / Л.Ю. Нестерова, С.В. Напалков // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 1-1. – С. 71-72.

46. Панюкова С.В. Использование информационных и коммуникационных технологий в образовании: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Информатика» / С.В. Панюкова. – Москва, 2010. Сер. Высшее профессиональное образование. Информатика.

47. Панюкова С.В. Как организовать дистанционное обучение / С.В. Панюкова // Ученые записки ИИО РАО. – 2005. – № 16. – С. 19-28.

48. Панюкова С.В. Современные подходы к автоматизации процессов информационного обеспечения и управления / С.В. Панюкова // Ученые записки ИИО РАО. – 2008. – № 28. – С. 12-15.

49. Панюкова С.В. О проекте создания социальной сети 4portfolio.ru для ведения Веб-портфолио / С.В. Панюкова, А.М. Гостин, Н.В. Самохина // Инновация в образовании. Современная психология в обучении: материалы II Международной научной конференции: В 2 томах. ИП Синяев Дмитрий Николаевич. – 2013. – С. 59-60.

50. Планирование учебного материала для IX класса с углублённым изучением математики: Метод. рекомендации. / М.Г. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – М.: Б.И., 2010 – 172 с.

51. Пятьсот четырнадцать задач с параметрами / Под ред. С.А. Тынянкина – Волгоград: Б.И., 2010 – 160 с.

52. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие / П.Т. Дыбов, А.И. Забоев, А.С. Иванов, Д.Ф. Калиниченко, Н.В. Шолохов; под редакцией А.И. Прилепко. – М.: Высшая школа, 2008 – 239 с.

53. Хрестоматия по методике математики. Т. 1. Обучение через задачи / Сост. М. И. Зайкин, С. В. Арюткина. – Арзамас: АГПИ, 2005. – 300 с.

54. Цыпкин А.Г. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – М.: Наука, 2009. – 576 с.

55. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 10-х классов средней школы / И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

56. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 11 класса средней школы / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

57. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами / Г.А. Ястребинецкий. – М.: Просвещение, 2011. – 128 с.

58. Ausubel D.P. Psychologi des Unterrichts. Basel. 1974.

59. Denkpsychologische Analisen matimatischer Fahigkeiten. Berlin. 1971. iHS.

60. Dunker K. Zur Psychologi des produktiven Denkens. Berlin (West). 1966.