

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В.В. Новиков
Л.Н. Февральских

СТРУКТУРА СИЛ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2022

УДК 531.391.5:517.929.4(075.8)

ББК 22.213.7я73

Н73

Н73 Новиков В.В., Февральских Л.Н. СТРУКТУРА СИЛ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 68 с.

Рецензент: д.ф.-м.н, профессор **Д.В. Баландин**

Пособие посвящено разделу «Устойчивость равновесия и стационарных движений» курса «Теоретическая и прикладная механика».

Рассмотрение проводится на основе уравнений первого приближения. Представлена классификация сил по их математической структуре, обсуждается их влияние на устойчивость движения.

Основное внимание уделено рассмотрению примеров применения теории устойчивости движения к решению практических задач.

Пособие предназначено для студентов направлений подготовки 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих курсы «Прикладная механика», «Математические модели современного естествознания».

УДК 531.391.5:517.929.4(075.8)

ББК 22.213.7я73

В.В. Новиков, Л.Н. Февральских

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2022

Оглавление

Глава 1. Исследование устойчивости равновесия и стационарных движений по первому приближению	4
1.1. Уравнения возмущенного движения, уравнения первого приближения. Теоремы Ляпунова	4
1.2. Классификация сил	6
1.3. Устойчивость консервативных систем. Теорема Лагранжа	8
1.4. Примеры	10
1.5. Задачи для самостоятельного решения.....	20
1.6. Структура сил, действующих на систему. Теоремы Кельвина-Тета.....	23
1.7. Примеры.....	24
1.8. Задачи для самостоятельного решения.....	27
Глава 2. Некоторые задачи устойчивости механических систем	29
2.1. О левитации тел в силовых полях.....	29
2.2. «Классический» флаттер.....	37
2.3. Динамика двойного маятника. Влияние диссипации на устойчивость .	41
2.4. О динамике транспортной машины	49
2.5. Устойчивость параллельных течений жидкости.....	53
2.6. О влиянии диссипации на устойчивость ограниченных систем	62
Литература.....	66

Глава 1. Исследование устойчивости равновесия и стационарных движений по первому приближению

1.1. Уравнения возмущенного движения, уравнения первого приближения. Теоремы Ляпунова

Обозначим через $u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)$ вещественные переменные, характеризующие состояние динамической системы.

Изменение во времени переменных $u_i(t)$ описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые можно разрешить относительно вторых производных по времени:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dt^2} = F_1(u_1, \dots, u_l, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_l, t), \\ \dots \\ \frac{d^2 u_l}{dt^2} = F_l(u_1, \dots, u_l, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_l, t), \end{cases} \quad (1)$$

где $F_i(u_1, \dots, u_l, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_l, t)$ – известные функции u_j, \dot{u}_j, t .

Невозмущенное движение – это вполне определенное движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость.

Переменные $u_1^0(t), \dots, u_l^0(t)$, отвечающие невозмущенному движению, являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1^0(t)}{dt^2} = F_1(u_1^0, \dots, u_l^0, \dot{u}_1^0, \dots, \dot{u}_l^0, t), \\ \dots \\ \frac{d^2 u_l^0(t)}{dt^2} = F_l(u_1^0, \dots, u_l^0, \dot{u}_1^0, \dots, \dot{u}_l^0, t), \end{cases} \quad (2)$$

удовлетворяющие следующим условиям при $t = 0$:

$$\begin{aligned} u_1^0(0) = f_1, \dots, u_l^0(0) = f_l, \\ \dot{u}_1^0(0) = v_1, \dots, \dot{u}_l^0(0) = v_l. \end{aligned}$$

Возмущенное движение – это движение системы, отвечающее измененным начальным условиям:

$$\begin{aligned} u_1(0) = f_1 + \Delta_1, \dots, u_l(0) = f_l + \Delta_l, \\ \dot{u}_1(0) = v_1 + \delta_1, \dots, \dot{u}_l(0) = v_l + \delta_l. \end{aligned}$$

Значения переменных $u_j(t)$ в возмущенном движении запишем в виде:

$$u_j(t) = u_j^0(t) + x_j(t). \quad (3)$$

Невозмущенному движению отвечают все $x_j(t) = 0$.

Для вывода уравнений возмущенного движения подставим выражение (3) в систему уравнений (1):

$$\frac{d^2 u_j^0(t)}{dt^2} + \frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = F_j(u_1^0 + x_1, \dots, u_l^0 + x_l, \dot{u}_1^0 + \dot{x}_1, \dots, \dot{u}_l^0 + \dot{x}_l, t), \quad (4)$$

$$j = 1, \dots, l.$$

Разложим правую часть (4) в ряд Тейлора по степеням x_i и $\dot{x}_i, i = 1, \dots, l$:

$$F_j(u_1^0 + x_1, \dots, u_l^0 + x_l, \dot{u}_1^0 + \dot{x}_1, \dots, \dot{u}_l^0 + \dot{x}_l, t) = F_j(u_1^0, \dots, u_l^0, \dot{u}_1^0, \dots, \dot{u}_l^0, t) +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_l} \right)_0 x_l + \left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \dot{x}_1 + \dots + \left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_l} \right)_0 \dot{x}_l + N_j.$$

Здесь N_j – совокупность членов, зависящих от $x_1, \dots, x_l, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_l$ в степени выше первой.

На основании того, что $u_j^0(t)$ удовлетворяет уравнениям (2), после подстановки этого ряда в (3) имеем систему уравнений:

$$\frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = a_{j1} x_1 + \dots + a_{jl} x_l + b_{j1} \dot{x}_1 + \dots + b_{jl} \dot{x}_l + N_j, \quad (5)$$

$$j = 1, \dots, l.$$

где

$$a_{jk} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right)_0, \quad b_{jk} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_k} \right)_0, \quad j, k = 1, \dots, l.$$

Уравнения (5) называют уравнениями *возмущенного движения*. Если отбросить в них нелинейные члены $N_j, j = 1, \dots, l$, то получим *уравнения первого приближения*:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = a_{11} x_1 + \dots + a_{1l} x_l + b_{11} \dot{x}_1 + \dots + b_{1l} \dot{x}_l, \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = a_{21} x_1 + \dots + a_{2l} x_l + b_{21} \dot{x}_1 + \dots + b_{2l} \dot{x}_l, \\ \dots \\ \frac{d^2 x_l(t)}{dt^2} = a_{l1} x_1 + \dots + a_{ll} x_l + b_{l1} \dot{x}_1 + \dots + b_{ll} \dot{x}_l. \end{cases} \quad (6)$$

Это система l линейных уравнений с постоянными коэффициентами $a_{jk}, b_{jk}, j, k = 1, \dots, l$.

А.М. Ляпунов первым определил условия, при выполнении которых уравнения первого приближения дают ответ на вопрос об устойчивости

движения (равновесия) системы. Подчеркнем, что речь идет об автономных системах, т.е. для случаев, когда a_{jk}, b_{jk} не зависят от времени.

Решение системы уравнений (6) ищем в виде:

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, \dots, x_l = A_l e^{\lambda t}.$$

После подстановки $x_j(t)$ в (6) приходим к однородной системе алгебраических уравнений относительно A_j . Эта система уравнений имеет нетривиальное решение, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}\lambda - \lambda^2 & a_{12} + b_{12}\lambda & \dots & a_{1l} + b_{1l}\lambda \\ a_{21} + b_{21}\lambda & a_{22} + b_{22}\lambda - \lambda^2 & \dots & a_{2l} + b_{2l}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} + b_{l1}\lambda & a_{l2} + b_{l2}\lambda & \dots & a_{ll} + b_{ll}\lambda - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) – *характеристическое уравнение* рассматриваемой динамической системы.

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению:

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка [9].

Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению:

Если среди корней характеристического уравнения найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости [9].

1.2. Классификация сил

Во многих случаях об устойчивости движения при малых возмущениях можно сделать заключение по структуре сил, действующих на систему. Поэтому сначала дадим классификацию сил, действующих на систему с конечным числом степеней свободы, по их математической структуре.

Будем исходить из того, что исследование устойчивости движения относительно величин x_k и \dot{x}_k сводится к анализу дифференциальных уравнений возмущенного движения, которые приведены к одному матричному уравнению вида:

$$A\ddot{x} + \tilde{B}\dot{x} + \tilde{C}x = 0. \quad (8)$$

Здесь x – матрица-столбец с элементами x_1, x_2, \dots, x_l , A, \tilde{B}, \tilde{C} – заданные квадратные матрицы порядка l с постоянными коэффициентами.

Считаем, что матрица $A = \|a_{ik}\|$ является симметричной ($a_{ik} = a_{ki}$, т.е. $A = A^T$), а отвечающая ей квадратичная форма:

$$T = \frac{1}{2} (A\dot{q})^T \cdot \dot{q}$$

положительно определенная.

Уравнению (8) можно отнести некоторую материальную систему, в которой переменные x_1, x_2, \dots, x_l служат обобщенными координатами, их производные по времени – обобщенными скоростями, а квадратичная форма T – кинетической энергией. Часто форма T действительно является кинетической энергией реальной системы, но во многих случаях она возникает в результате преобразований уравнений движения.

Составляющие матриц-столбцов $\tilde{B}\dot{x}$ и $\tilde{C}x$ уравнения (7), взятые со знаком минус, можно трактовать как силы, причем в некоторых случаях они представляют реальные силы, а в некоторых – члены, возникающие при выводе уравнений возмущенного движения.

В дальнейшем для простоты квадратичную форму T будем называть *кинетической энергией*, составляющие матриц $\tilde{B}\dot{x}$, $\tilde{C}x$ или сами эти матрицы – *силами*, приложенными к системе (\tilde{B} – матрица скоростных сил, \tilde{C} – матрица позиционных сил), переменные x_1, x_2, \dots, x_l – *координатами*, а их производные по времени – *скоростями*.

Разобьем матрицы \tilde{B}, \tilde{C} на симметричные и кососимметричные части, положив:

$$\tilde{B} = B + G, \quad \tilde{C} = C + P,$$

где

$$B = B^T = \frac{1}{2} (\tilde{B} + \tilde{B}^T), \quad G = -G^T = \frac{1}{2} (\tilde{B} - \tilde{B}^T),$$

$$C = C^T = \frac{1}{2} (\tilde{C} + \tilde{C}^T), \quad P = -P^T = \frac{1}{2} (\tilde{C} - \tilde{C}^T).$$

В результате уравнение (8) принимает вид:

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + G\dot{x} + Cx + Px = 0.$$

- Силы Cx с симметричной матрицей $C = \|c_{kj}\|$ – *потенциальные (или консервативные) силы*, а отвечающая им квадратичная форма:

$$\Pi = \frac{1}{2} (Cx)^T \cdot x -$$

потенциальная энергия.

Как правило, силы Cx представляют собой линейные части реальных потенциальных сил, например, сил тяжести, упругости.

- Составим с помощью симметричной матрицы $B = \|b_{kj}\|$ квадратичную форму:

$$F = \frac{1}{2} (B\dot{x})^T \cdot \dot{x}.$$

Если эта форма не отрицательна, то её называют **функцией рассеивания, или диссипативной функцией Релея**. Соответствующие силы $B\dot{x}$ в этом случае – **диссипативные силы**. Обычно диссипативные силы возникают естественным образом при движении тел в сопротивляющейся среде, в электрических цепях при наличии омического сопротивления и т.п.

- Силы $G\dot{x}$, линейно зависящие от скоростей \dot{x} и имеющие кососимметричную матрицу коэффициентов $G = \|g_{kj}\|$, называют **гироскопическими**. Чаще всего эти силы встречаются в системах, содержащих гироскопы.
- Силы Px , линейно зависящие от координат q и имеющие кососимметричную матрицу коэффициентов $P = \|p_{kj}\|$, не имеют твердо установившегося названия. Часто их называют **неконсервативными, псевдогироскопическими, циркуляционными** силами. Мы будем называть их **неконсервативными позиционными силами**.

1.3. Устойчивость консервативных систем. Теорема Лагранжа

Будем считать, что на систему действуют только потенциальные силы Cx , а все остальные силы отсутствуют ($B = G = P = 0$). Тогда после перехода к нормальным координатам z уравнения возмущенного движения можно записать

$$A\ddot{z} + C_0 z = 0, \tag{9}$$

где C_0 – диагональная матрица вида:

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение (9) эквивалентно с скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 = 0, \\ \dots \\ \ddot{z}_s + c_s z_s = 0. \end{cases}$$

Уравнения этой системы не связаны между собой и интегрируются независимо друг от друга.

В случае $c_k > 0$ характеристические показатели

$$p_k = \pm i\omega_k = \pm i\sqrt{c_k}, \quad i = \sqrt{-1}$$

являются чисто мнимыми. По теории Ляпунова об устойчивости по первому приближению это критический случай. Однако часто такое невозмущенное движение рассматривают как устойчивое в том смысле, что возмущения не нарастают во времени. Говорят, что система **консервативно устойчива**, если каждая k -я степень свободы является консервативно устойчивой:

$$z_k = A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

где $\omega_k = \sqrt{c_k}$.

Если $c_j < 0$, то

$$z_j = A_j e^{\nu_j t} + B_j e^{-\nu_j t},$$

где $\nu_j = \sqrt{-c_j}$, A_j, B_j и α_j – постоянные интегрирования.

Каждому $c_j < 0$ (если оно имеется) отвечает неустойчивая координата z_j и, следовательно, невозмущенное движение при наличии $c_j < 0$ неустойчиво.

Числа c_k называются **коэффициентами устойчивости системы**. Число отрицательных c_k называется **степенью неустойчивости** (это определение принадлежит Пуанкаре). Существенно не число отрицательных коэффициентов $c_k < 0$, а четность или нечетность степени неустойчивости. Причем для определения этого необязательно переходить к нормальным координатам. Так как

$$C_0 = Y^T C Y,$$

где Y – матрица преобразования при переходе к новой системе ($x = Yz$), то

$$\det C_0 = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_s = (\det Y)^2 \det C.$$

Таким образом, если степень неустойчивости четная, то $\det C_0 > 0$, а значит, и $\det C > 0$. В противном случае (степень неустойчивости нечетная) $\det C_0 < 0$, и следовательно, $\det C < 0$. Отсюда справедливо правило:

Если определитель матрицы C потенциальных сил исходных уравнений возмущенного движения положителен $\det C > 0$, то степень неустойчивости системы четная, если же $\det C < 0$, то степень неустойчивости системы нечетная.

Ж. Л. Лагранж в 1788 году сформулировал теорему, определяющую достаточные условия устойчивости равновесия консервативных систем, т.е. систем с голономными стационарными связями, находящимися под действием потенциальных сил. Строгое доказательство дал Г.Л. Дирихле, поэтому часто теорему называют теоремой Лагранжа – Дирихле.

Теорема Лагранжа:

Если в положении равновесия консервативной системы с голономными стационарными связями потенциальная энергия имеет изолированный минимум, то положение равновесия устойчиво.

Можно ли утверждать, что при отсутствии минимума потенциальной энергии равновесие будет неустойчивым?

Ляпунов сформулировал две теоремы, которые обобщил Четаев:

Если потенциальная энергия является аналитической функцией обобщенных координат, а в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума, то равновесие неустойчиво.

1.4. Примеры

1.4.1. Исследование динамики волчка Лагранжа

Рассмотрим движение осесимметричного твердого тела, закрепленного в неподвижной точке, в однородном поле тяготения. Тело приведено во вращение вокруг оси симметрии.

На волчок, угловая скорость собственного вращения которого $\vec{\Omega}$, действуют две внешние силы: сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру масс C волчка, и реакция опоры \vec{R} в точке O . Силами сопротивления пренебрегаем.

Положение оси симметрии Oz относительно неподвижных осей $Oxyz$ задают углы α и β (рис. 1). Переход от $Oxyz$ к системе координат, связанной с телом, осуществляется поворотом на угол α вокруг Oy ($Oxyz \rightarrow O\xi yz'$), затем поворотом на угол β вокруг оси $O\xi$ ($O\xi yz' \rightarrow O\xi \eta \zeta$) (рис. 2).

В невозмущенном движении волчок равномерно вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси Oz , совпадающей с Oz :

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \beta = 0, \quad \dot{\beta} = 0,$$

$$\dot{\phi} = \Omega = const.$$

В возмущенном движении все эти величины будут меняться.

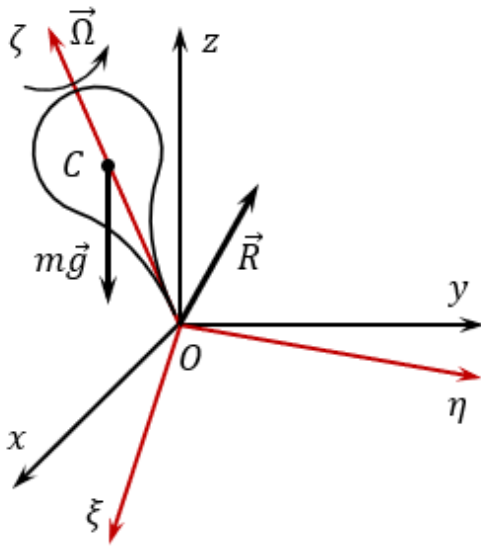


Рис. 1. Волчок Лагранжа

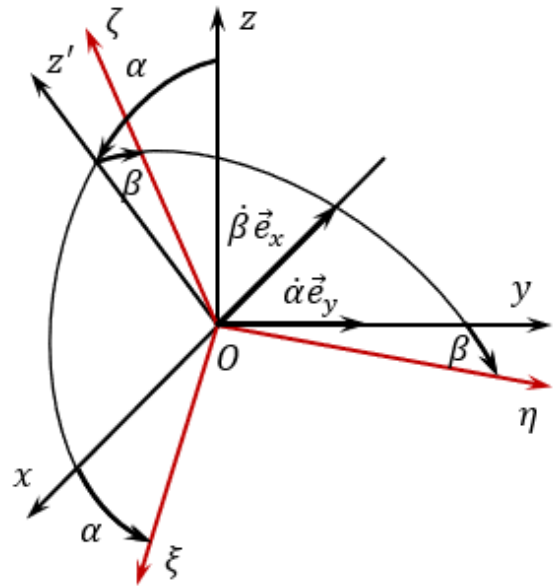


Рис. 2. Переход от системы $Oxyz$ к $O\xi\eta\zeta$

Угловая скорость тела $\vec{\omega}$ в связанной с телом системе координат $O\xi\eta\zeta$ определяется равенством:

$$\vec{\omega} = -\dot{\beta}\vec{e}_\xi + \dot{\alpha}\cos\beta\vec{e}_\eta + (\Omega + \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{e}_\zeta.$$

Кинетическая и потенциальная энергии волчка имеют вид:

$$T = \frac{1}{2}I_\xi(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta) + \frac{1}{2}I_\zeta(\Omega + \dot{\alpha}\sin\beta)^2,$$

$$\Pi = mg\cos\alpha\cos\beta,$$

где m – масса тела, I_ξ – экваториальный, а I_ζ – аксиальный моменты инерции.

Отсюда функция Лагранжа равна

$$L = \frac{1}{2}I_\xi(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta) + \frac{1}{2}I_\zeta(\Omega + \dot{\alpha}\sin\beta)^2 - mg\cos\alpha\cos\beta.$$

Уравнения Лагранжа волчка, записанные с учетом малости углов α и β , имеют вид:

$$I_\xi\ddot{\alpha} + I_\zeta\Omega\dot{\beta} - mgl\alpha = 0,$$

$$I_\xi\ddot{\beta} - I_\zeta\Omega\dot{\alpha} - mgl\beta = 0.$$

Запишем их следующим образом:

$$\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} - \chi\alpha = 0,$$

$$\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} - \chi\beta = 0,$$

где приняты обозначения:

$$H = \frac{I_z \Omega}{I_\xi}, \quad \chi = \frac{mgl}{I_\xi}.$$

В матричной форме эта система уравнений имеет вид:

$$A\ddot{u} + G\dot{u} + Cu = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\chi & 0 \\ 0 & -\chi \end{pmatrix}.$$

а. Пусть волчок не вращается: $H = 0$.

Характеристические показатели: $p_{1,2} = \pm\sqrt{\chi}$.

Система находится под действием одних потенциальных сил:

$$\Pi = \frac{1}{2}(Cx)^T \cdot x = \frac{1}{2}(-\chi\alpha^2 - \chi\beta^2).$$

В $\alpha = \beta = 0$ максимум потенциальной функции. Степень неустойчивости четная.

б. Введем в рассмотрение гироскопические силы ($H \neq 0$).

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} p^2 - \chi & Hp \\ -Hp & p^2 - \chi \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad p^2 - \chi = \pm iHp.$$

б.1. При малой скорости вращения волчка, когда $H < 2\sqrt{\chi}$

$$p_{1,2} = i\frac{H}{2} \pm \sqrt{\chi - \frac{H^2}{4}}$$

и комплексно-сопряженная им пара корней.

Один из характеристических показателей $p_{1,2}$ имеет положительную вещественную часть, т.е. в этом случае вращение волчка (гироскопические силы) не приводит к стабилизации.

б.2. С увеличением H (угловой скорости Ω) при $H \geq 2\sqrt{\chi}$ характеристические показатели становятся мнимыми:

$$p_{1,2} = i\left(\frac{H}{2} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} - \chi}\right) = i\omega_{1,2}.$$

Говорят, система консервативно устойчива. Гироскопические силы стабилизировали волчок: он вращается с угловой скоростью Ω вокруг своей

оси Oz , которая в свою очередь описывает коническую поверхность вокруг Oz .

На комплексной плоскости p этой ситуации отвечает расположение характеристических показателей на мнимой оси – критический случай по Ляпунову. Для разрешения его введем в рассмотрение малое сопротивление, пропорциональное скорости. Система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} - \chi\alpha + h\dot{\alpha} &= 0, \\ \ddot{\beta} - H\dot{\alpha} - \chi\beta + h\dot{\beta} &= 0.\end{aligned}$$

Решение уточненного характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} p^2 - \chi + hp & Hp \\ -Hp & p^2 - \chi + hp \end{vmatrix} = 0$$

ищем в виде:

$$p_j = i\omega_j + \delta_j,$$

где

$$\omega_1 = \frac{H}{2} - \sqrt{\frac{H^2}{4} - \chi}, \quad \omega_2 = \frac{H}{2} + \sqrt{\frac{H^2}{4} - \chi}.$$

Для упрощения расчетов ограничимся заданием числовых значений параметров задачи:

$$H = 2, \quad \chi = \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$\omega_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставив $p_j = i\omega_j + \delta_j$ в характеристическое уравнение и ограничившись в нем членами, линейными по h и δ , найдем, что

$$\delta_j = h \frac{4\omega_j^2 + 1}{14 - 8\omega_j^2}.$$

Таким образом, учет малой диссипации приводит к вещественным поправкам для характеристических показателей. Знак δ_j определяется знаменателем приведенного выражения. Нижний характеристический показатель переходит с мнимой оси в правую полуплоскость ($\delta_1 > 0$), а верхний – в левую полуплоскость ($\delta_2 < 0$) комплексной плоскости p (рис. 3).

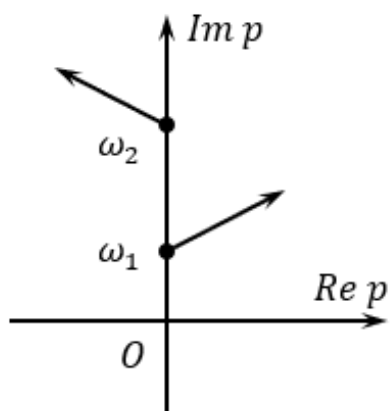


Рис. 3. Перемещение характеристических показателей в комплексной плоскости

Итак, систему, неустойчивую с четной степенью неустойчивости при действии одних потенциальных сил, стабилизировали гироскопическими силами, но введение диссипативных сил разрушило эту стабилизацию.

1.4.2. Устойчивость гибкого вала с постоянным числом оборотов

Ротор (твердое тело в виде однородного диска) закреплен на гибком безмассовом валу (рис. 4). Концы вала находятся в соосных подшипниках. Ось вала проходит через центр диска.

Будем интересоваться плоскопараллельным движением диска, т.е. считаем, что точка P движется в плоскости ортогональной оси подшипников. Введем две системы координат: Oxy – неподвижная система и $O\xi\eta$ – система, вращающаяся с постоянной угловой скоростью Ω вместе с валом (рис. 5), тогда угол поворота $\varphi = \Omega t$.

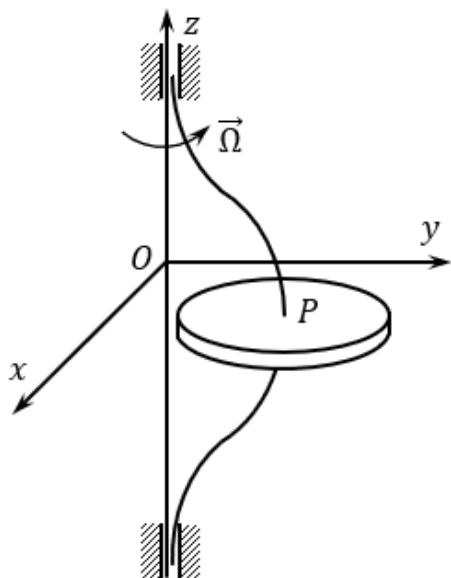


Рис. 4. Ротор на гибком валу

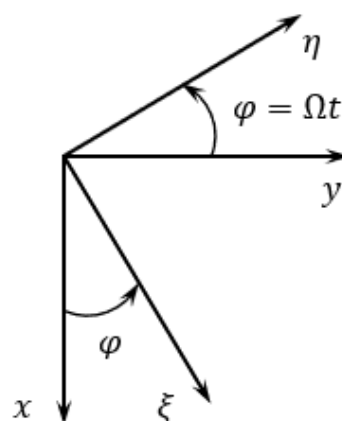


Рис. 5. Поворот связанной с валом системы координат

Будем считать, что вал имеет круговое сечение. Тогда силу упругости, действующую на диск, можем представить пружинами с одинаковыми жесткостями: $k_x = k_y = k$.

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2),$$

кинетическая энергия:

$$T = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Функция Лагранжа системы:

$$L = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2).$$

Учтем непотенциальные силы, действующие на систему:

- **внешнее трение** возникает при движении вала относительно неподвижной системы и имеет вид $\vec{F}_e = -h_e(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j})$, где h_e – коэффициент трения.
- **внутреннее трение** возникает за счет движения вала и диска относительно друг друга, происходит трение между ними, которое также пропорционально скорости, но уже той, которая измеряется относительно вращающегося вала. Поэтому введем его в подвижной системе $\vec{F}_i = -h_i(\dot{\xi}\vec{e}_\xi + \dot{\eta}\vec{e}_\eta)$, где h_i – коэффициент внутреннего трения.

Перейдем от переменных x, y к переменным ξ, η :

$$x = \xi \cos \Omega t - \eta \sin \Omega t, \quad y = \xi \sin \Omega t + \eta \cos \Omega t.$$

Между единичными векторами систем имеется такая же связь:

$$\vec{i} = \vec{e}_\xi \cos \Omega t - \vec{e}_\eta \sin \Omega t, \quad \vec{j} = \vec{e}_\xi \sin \Omega t + \vec{e}_\eta \cos \Omega t.$$

После перехода к координатам ξ, η функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m}{2}((\dot{\xi} - \Omega\eta)^2 + (\dot{\eta} + \Omega\xi)^2) - \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2),$$

непотенциальные силы:

$$\vec{F}_e = -h_e((\dot{\xi} - \Omega\eta)\vec{e}_\xi + (\dot{\eta} + \Omega\xi)\vec{e}_\eta), \quad \vec{F}_i = -h_i(\dot{\xi}\vec{e}_\xi + \dot{\eta}\vec{e}_\eta).$$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\text{непот}}, \quad j = 1, 2,$$

где $q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$ – обобщенные координаты, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + (\omega^2 - \Omega^2)\xi - 2\Omega\dot{\eta} + h_e(\dot{\xi} - \Omega\eta) + h_i\dot{\xi} = 0, \\ \ddot{\eta} + (\omega^2 - \Omega^2)\eta + 2\Omega\dot{\xi} + h_e(\dot{\eta} + \Omega\xi) + h_i\dot{\eta} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь принято $m = 1$ и введено следующее обозначение: $\omega^2 = k$.

Полагая $\xi = ae^{pt}$, $\eta = be^{pt}$, от уравнений (10) приходим к системе алгебраических уравнений относительно a, b :

$$\begin{cases} a[p^2 + (\omega^2 - \Omega^2) + p(h_i + h_e)] - b[2\Omega p + h_e\Omega] = 0, \\ a[2\Omega p + h_e\Omega] + b[p^2 + (\omega^2 - \Omega^2) + p(h_i + h_e)] = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю её определителя:

$$\begin{vmatrix} p^2 + (\omega^2 - \Omega^2) + p(h_i + h_e) & -(2p + h_e)\Omega \\ (2p + h_e)\Omega & p^2 + (\omega^2 - \Omega^2) + p(h_i + h_e) \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение принимает вид:

$$p^2 + (\omega^2 - \Omega^2) + p(h_i + h_e) = \pm i(2p + h_e)\Omega. \quad (12)$$

Ограничимся случаем знака плюс, т.к. отрицательному знаку отвечают комплексно-сопряженная пара корней.

а. Сначала рассмотрим динамику системы без учета диссипации.

Уравнение (12) в этом случае имеет вид:

$$p^2 + (\omega^2 - \Omega^2) \mp 2i\Omega p = 0.$$

Его решение – две пары комплексно-сопряженных корней (рис. 6):

$$\begin{aligned} p_{01} &= i(\omega + \Omega), & p_{01}^* &= -i(\omega + \Omega), \\ p_{02} &= -i(\omega - \Omega), & p_{02}^* &= i(\omega - \Omega). \end{aligned}$$

Итак, в отсутствие диссипации при любых скоростях вращения характеристические показатели остаются на мнимой оси комплексной плоскости p (рис. 7).

Решение задачи при $h_i = 0$, $h_e = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 e^{i(\omega + \Omega)t} + a_2 e^{-i(\omega - \Omega)t} + \text{к. с.}, \\ \eta &= b_1 e^{i(\omega + \Omega)t} + b_2 e^{-i(\omega - \Omega)t} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (13)$$

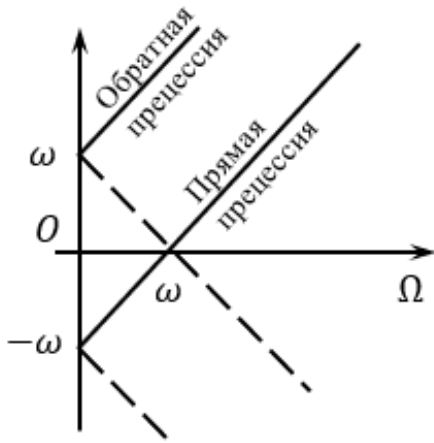


Рис. 6. Прямая и обратная прецессия

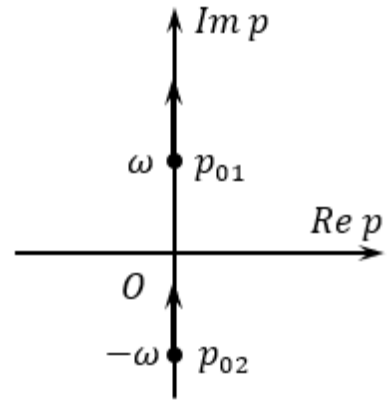


Рис. 7. Перемещение характеристических показателей в комплексной плоскости без учета диссипации

После подстановки (13) в одно из уравнений (10) (для определенности в первое) получим:

$$a_1[-(\omega + \Omega)^2 + (\omega^2 - \Omega^2)] - b_1 2i\Omega(\omega + \Omega) = 0,$$

$$a_2[-(\omega - \Omega)^2 + (\omega^2 - \Omega^2)] - b_2 2i\Omega(\omega - \Omega) = 0.$$

Отсюда $b_1 = ia_1$, $b_2 = -ia_2$.

Решение (13) запишем в виде:

$$\xi = a_1 \cos(\omega + \Omega)t + a_2 \cos(\Omega - \omega)t,$$

$$\eta = -a_1 \sin(\omega + \Omega)t + a_2 \sin(\Omega - \omega)t.$$

На рис. 8, 9 показана траектория центра диска (точка P) в связанной системе координат при обратной и прямой прецессии.

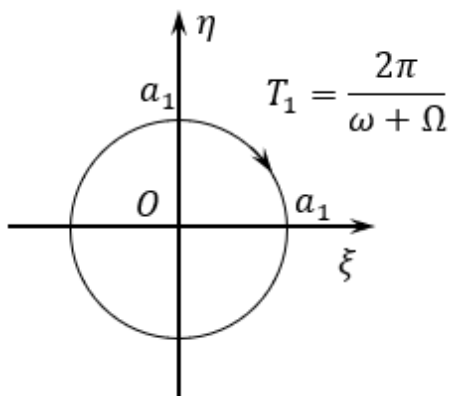


Рис. 8. Обратная прецессия

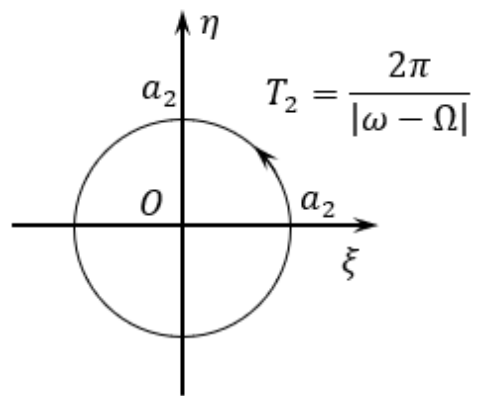


Рис. 9. Прямая прецессия

Это критический случай по Ляпунову. Необходимо либо ввести в рассмотрение диссипацию, либо нелинейность. Учтем внешнее и внутреннее трение.

$$p^2 + (\omega^2 - \Omega^2) + p(h_i + h_e) = \pm i(2p + h_e)\Omega.$$

б. Вновь обратимся к характеристическому уравнению (12), предполагая коэффициенты h_i , h_e малыми. Будем искать решение в виде:

$$p_j = p_{0j} + \delta.$$

После подстановки в характеристическое уравнение (12) ограничимся в нем линейными по h_i, h_e, δ членами:

$$p_{0j}^2 + (\omega^2 - \Omega^2) + 2p_{0j}\delta + p_{0j}(h_i + h_e) = 2i\Omega p_{0j} + 2i\Omega\delta + ih_e\Omega,$$

где $p_{0j}^2 + (\omega^2 - \Omega^2) = 2i\Omega p_{0j}$.

Отсюда

$$\delta = -\frac{h_i p_{0j} + h_e(p_{0j} - i\Omega)}{2(p_{0j} - i\Omega)}.$$

После подстановки в это выражение p_{01}, p_{02} получим:

$$\delta_1 = -\frac{h_e\omega + h_i(\omega + \Omega)}{2\omega}, \quad \delta_2 = -\frac{h_e\omega + h_i(\omega - \Omega)}{2\omega}.$$

На комплексной плоскости p изменение характеристических показателей имеет вид, показанный на рис. 10.

При любых Ω значение $\delta_1 < 0$, а δ_2 может быть положительным при условии:

$$h_e\omega + h_i(\omega - \Omega) < 0$$

или

$$\omega(h_e + h_i) < \Omega h_i.$$

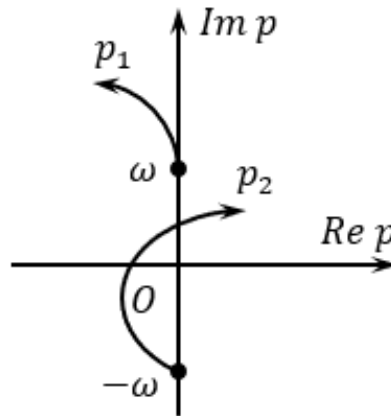


Рис. 10. Перемещение характеристических показателей в комплексной плоскости с учетом малой диссипации

Условие устойчивости системы (рис. 11):

$$\Omega < \omega \left(1 + \frac{h_e}{h_i} \right). \quad (14)$$

Устойчивость нарушается на прямой прецессии.

Выводы:

- При $h_i = 0$ (отсутствует внутреннее трение) $\delta_1 = \delta_2 = -h_e/2$.
Внешнее трение стабилизирует систему. Она устойчива при любых Ω .
- При $h_e = 0, h_i \neq 0$

$$\delta_1 = -\frac{h_i(\omega + \Omega)}{2\omega}, \quad \delta_2 = -\frac{h_i(\omega - \Omega)}{2\omega}.$$

Система неустойчива при $\Omega > \omega, \Omega_* = \omega -$ критическая скорость вращения вала.

- Граница области устойчивости (12) зависит от соотношения между h_e и h_i .

Внешнее трение стабилизирует систему: при увеличении h_e по отношению к h_i граница области устойчивости смещается в сторону больших Ω .

Внутреннее трение дестабилизирует систему в том смысле, что при увеличении h_i по отношению к h_e граница области устойчивости смещается в сторону меньших Ω .

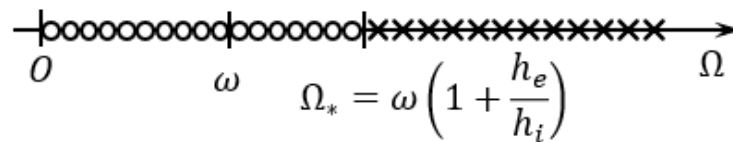


Рис. 11. Бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра Ω

1.5. Задачи для самостоятельного решения

В задачах №1-№9 записать уравнения движения, уравнения первого приближения, исследовать устойчивость.

№1 Записать уравнение движения материальной точки массы m , перемещающейся вдоль кривой $y(x)$ в вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести при наличии силы трения, пропорциональной скорости точки с коэффициентом пропорциональности $2mh$. Найти состояния равновесия, линеаризовать уравнение движения в их окрестности. В зависимости от параметров исследовать состояния равновесия на устойчивость.

1) $y = x^3 - 3x + 1,$

3) $y = -x^4 + 2x^2 + 2,$

2) $y = x^4 - 2x^2 + 2,$

4) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2.$

№2 Материальная точка находится в поле тяжести на поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$. Найти состояния равновесия, исследовать их устойчивость, записать уравнения движения материальной точки в окрестности состояний равновесия. Считать, что трение в системе отсутствует, а ось Oz направлена вверх.

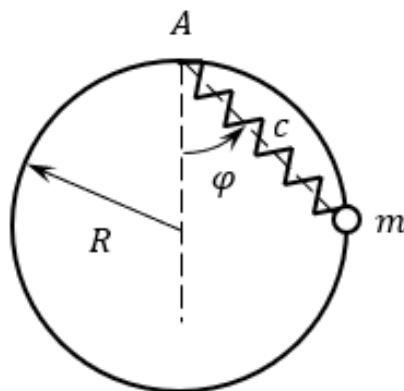
1) $z = 4x^2 + 2xy + y^2,$

3) $z = -4x^2 + 2xy - y^2.$

2) $z = x^2 - xy + y^2.$

4) $z = 2xy.$

№3 По гладкой проволочной окружности радиуса R , неподвижно закрепленной в вертикальной плоскости, может скользить тяжелое колечко массы m , соединенное с наивысшей точкой A окружности пружиной жесткости c (см. рисунок). Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0 . Найти положения равновесия колечка и исследовать их устойчивость.



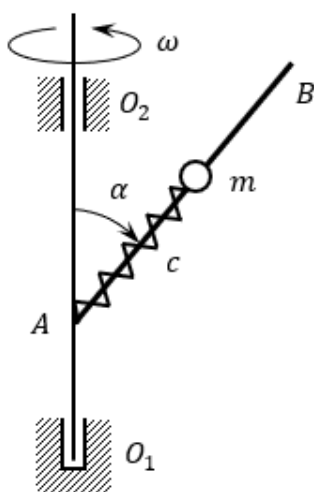
К задаче №3

№4 Стержень AB , образующий угол α с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O_1O_2 (см. рисунок). По стержню может двигаться без трения тяжелое колечко массы m , соединенное с неподвижным концом стержня A пружиной жесткости c . Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0 . Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их на устойчивость.

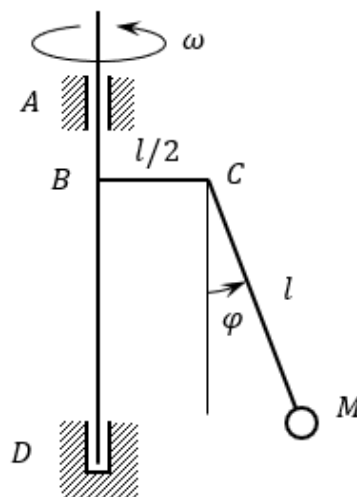
№5 Прямой угол ABC вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{g/l} / \sqrt[4]{3}$ вокруг вертикальной оси AD (см. рисунок). В точке C с углом шарнирно соединен невесомый стержень CM , несущий на свободном конце груз массы m . Длина стержня $CM = l$ вдвое больше стороны BC . Показать, что положение груза, соответствующее $\varphi = \pi/6$, является положением устойчивого равновесия во вращающейся системе отсчета.

№6 Тяжелый шарик массы m может скользить по гладкой проволоке, изогнутой в форме параболы $x^2 = 2py$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy . Найти положения относительного равновесия шарика и исследовать их устойчивость.

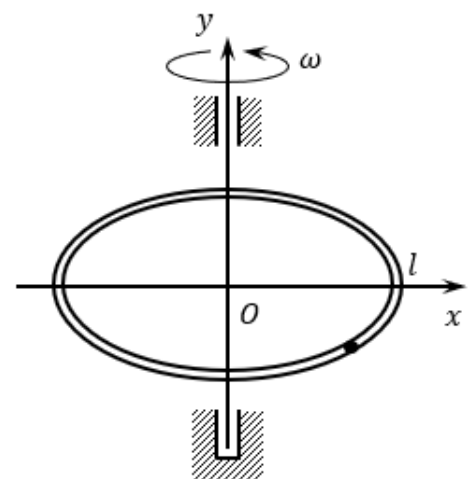
№7 Шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и вращающейся вокруг вертикальной оси Oy с постоянной угловой скоростью ω (см. рисунок). Определить положения относительного равновесия точки и исследовать их устойчивость.



К задаче №4



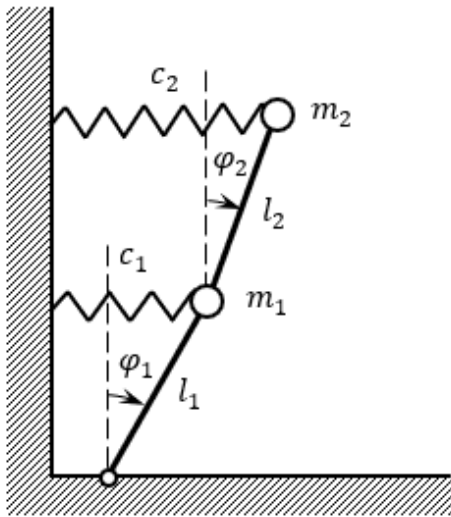
К задаче №5



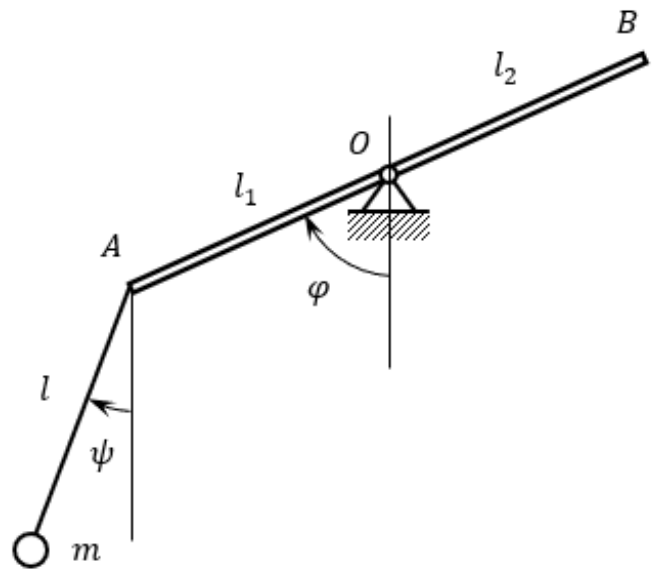
К задаче №7

№8 Записать уравнения малых колебаний «обращенного» двойного маятника около вертикального положения равновесия (см. рисунок). Маятник может быть представлен в виде двух материальных точек масс m_1 и m_2 , связанных стержнями длин l_1 и l_2 . В вертикальном положении равновесия пружины жесткости c_1 и c_2 не напряжены. При каких значениях параметров системы состояние равновесия будет устойчиво?

№9 Груз массы m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины l к точке A однородного стержня массы M , который может вращаться вокруг закрепленной точки O ($AO = l_1, OB = l_2$) (см. рисунок). Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



К задаче №8



К задаче №9

1.6. Структура сил, действующих на систему. Теоремы Кельвина-Тета

Исследование устойчивости волчка Лагранжа и гибкого вала проведено, опираясь на теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Однако в ряде случаев важные выводы можно сделать на основе общих теорем о влиянии структуры сил, действующих на систему, на устойчивость движения.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) сформулировал достаточные условия устойчивости равновесия консервативных систем, т.е. систем с голономными стационарными связями, находящимися под действием потенциальных сил (п. 1.3).

В 1879 году Томсоном (лордом Кельвиным (1824-1907)) были доказаны следующие четыре теоремы:

Теорема 1.

Если неустойчивость невозмущенного движения потенциальной системы имеет нечетную степень неустойчивости, то стабилизировать движение нельзя никакими гироскопическими силами.

Теорема 2.

Если невозмущенное движение потенциальной системы устойчиво, то добавление произвольных гироскопических и диссипативных сил (не обязательно с полной диссипацией) устойчивость движения сохраняется.

Теорема 3.

Если невозмущенное движение устойчиво при одних потенциальных силах, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил с полной диссипацией.

Теорема 4.

Невозмущенное движение, неустойчивое под действием потенциальных сил, остается неустойчивым при добавлении любых гироскопических сил и сил диссипации, если последние обладают полной диссипацией.

Опираясь на теоремы Лагранжа и Томсона, покажем, что некоторые выводы, к которым пришли в рассмотренных ранее задачах, можно сформулировать на основе общих теорем.

Задачи устойчивости движения волчка Лагранжа и гибкого ротора, рассмотренные ранее, обсудим теперь, применяя общие теоремы устойчивости (теоремы Лагранжа и Томсона).

1.7. Примеры

1.7.1. Исследование динамики волчка Лагранжа

Уравнения движения в матричной форме имеет вид

$$\ddot{u} + Cu + G\dot{u} + Bu = 0,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\chi & 0 \\ 0 & -\chi \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

а. Уравнение $\ddot{u} + Cu = 0$ описывают динамику системы, находящейся под действием потенциальных сил с потенциальной энергией:

$$\Pi = -\frac{\chi\xi^2}{2} - \frac{\chi\eta^2}{2}.$$

По теореме Лагранжа система неустойчива с четной степенью неустойчивости.

б. Добавление гироскопических сил ($\ddot{u} + Cu + G\dot{u} = 0$) по теореме Томсона может стабилизировать систему.

Заметим, что значения параметра $H(\Omega)$, обеспечивающие стабилизацию, не может быть определено с помощью общих теорем.

в. Учет диссипации ($\ddot{u} + Cu + G\dot{u} + Bu = 0$) по теореме Томсона разрушает гироскопическую стабилизацию систем.

Волчок Лагранжа неустойчив при любых значениях угловой скорости вращения Ω .

1.7.2. Устойчивость гибкого вала с постоянным числом оборотов

Обратимся к системе уравнений:

$$\begin{array}{|l} \boxed{\begin{array}{|l} \ddot{\xi} + (\omega^2 - \Omega^2)\xi - 2\Omega\dot{\eta} + h_i\dot{\xi} + h_e(\dot{\xi} - \Omega\eta) = 0, \\ \ddot{\eta} + (\omega^2 - \Omega^2)\eta + 2\Omega\dot{\xi} + h_i\dot{\eta} + h_e(\dot{\eta} + \Omega\xi) = 0. \end{array}} \\ \hline I \\ \hline II \\ \hline III \end{array}$$

Запишем систему в матричной форме:

$$\ddot{u} + Cu + G\dot{u} + B_1\dot{u} + B_2\dot{u} + Pu = 0,$$

где $u = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ – вектор-столбец обобщенных координат,

$C = \begin{pmatrix} \omega^2 - \Omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \Omega^2 \end{pmatrix}$ – симметричная матрица – матрица потенциальных (консервативных) сил,

$G = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ 2\Omega & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметричная матрица – матрица гироскопических сил,

$B_1 = \begin{pmatrix} h_i & 0 \\ 0 & h_i \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} h_e & 0 \\ 0 & h_e \end{pmatrix}$ – матрицы диссипативных сил с полной диссипацией,

$P = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметричная матрица отвечает псевдогироскопическим, циркуляционным силам.

Рассмотрим сначала систему I :

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + (\omega^2 - \Omega^2)\xi = 0, \\ \ddot{\eta} + (\omega^2 - \Omega^2)\eta = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения описывают поведение некоторой системы, находящейся под действием одних потенциальных сил, которым отвечает потенциальная энергия:

$$\Pi = (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\xi^2}{2} + (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\eta^2}{2}.$$

При $\Omega < \omega$ по теореме Лагранжа система I устойчива.

Добавление гироскопических сил (система II) не изменяет её устойчивости, а добавление сил внутренней диссипации (система III) упрочняет устойчивость до асимптотической.

При $\Omega \geq \omega$ система I неустойчива с четной степенью неустойчивости. По теореме Кельвина равновесие, неустойчивое при одних потенциальных силах, может быть стабилизировано путем добавления гироскопических сил, но лишь в том случае, когда степень неустойчивости четная. Таким образом, при $\Omega \geq \omega$ система II устойчива.

Заключение о влиянии на устойчивость сил внешнего трения ($h_i = 0$, $h_e \neq 0$) легко сделать, оставаясь в невращающейся системе координат, где гироскопические силы отсутствуют.

Функцию Лагранжа запишем в виде:

$$L = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

или

$$L = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2),$$

т.к. $x = \xi \cos \Omega t - \eta \sin \Omega t$, $y = \xi \sin \Omega t + \eta \cos \Omega t$.

Уравнения движения принимают вид:

$$m\ddot{x} + kx + h_e \dot{x} = 0,$$

$$m\ddot{y} + ky + h_e \dot{y} = 0.$$

Система устойчива (теорема Лагранжа). Добавление внешнего трения – силы с полной диссипацией по теореме Кельвина упрочняет устойчивость до асимптотической.

Таким образом, применяя общие теоремы, приходим к выводам, что при учете лишь внешнего трения h_e ($h_e \neq 0, h_i = 0$) ротор устойчив при любых значениях угловой скорости вращения (рис. 12).

При учете лишь внутреннего трения ($h_e = 0, h_i \neq 0$) ротор устойчив при $0 \leq \Omega < \omega$ (рис. 13).

Подчеркнем, что обычно введение диссипации сопровождается затуханием колебаний системы относительно равновесного состояния. Однако иногда результат может быть противоположным.

Совместное действие на вал внутреннего и внешнего трения не может быть определено с применением только общих теорем.

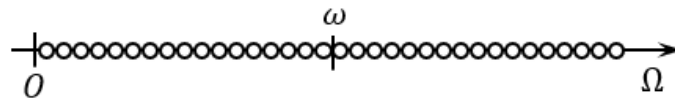


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма при $h_e \neq 0, h_i = 0$ в зависимости от параметра Ω

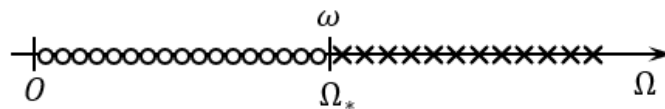


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма при $h_e = 0, h_i \neq 0$ в зависимости от параметра Ω

1.8. Задачи для самостоятельного решения

В задачах №1-№9 определить структуру сил и провести анализ устойчивости на основе теорем Кельвина-Тета.

В задачах №10-№15 провести анализ структуры сил, действующих на систему. Найти кинетическую энергию, потенциальную энергию, диссипативную функцию Релея. Исследовать устойчивость состояния равновесия.

$$\text{№10} \begin{cases} \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 4x_1 - 4x_2 = 0, \\ 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 5\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + 5x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{№11} \begin{cases} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - 3\dot{x}_1 + 6\dot{x}_2 + 3x_1 = 0, \\ 3\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + 3\dot{x}_1 + 9\dot{x}_2 + 7x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{№12} \begin{cases} 2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 - 4\dot{x}_1 + 7\dot{x}_2 - 4x_1 - x_2 = 0, \\ 2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + 4\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + 4x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{№13} \begin{cases} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 5\dot{x}_2 + 3x_1 = 0, \\ 2\ddot{x}_1 - 3\ddot{x}_2 + 8\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 7x_1 - 8x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{№14} \begin{cases} 2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 - 4\dot{x}_1 + 7\dot{x}_2 - 5x_1 = 0, \\ -\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 - 5\dot{x}_1 - 8x_1 + 7x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{№15} \begin{cases} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 5\dot{x}_2 + 6x_1 - 6x_2 = 0, \\ 2\ddot{x}_1 - 3\ddot{x}_2 + 8\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 2x_1 - 14x_2 = 0. \end{cases}$$

№16 Исследовать устойчивость состояния равновесия в зависимости от параметра a . При каком значении a состояние равновесия консервативно устойчиво, неустойчиво? В каком случае его можно стабилизировать гироскопическими силами?

$$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 + (2a - 9)x_1 - (6 - 3a)x_2 = 0, \\ -\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 - (a + 6)x_1 + (2a + 3)x_2 = 0. \end{cases}$$

№17 При каких значениях параметров a, b состояние равновесия консервативно устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво?

$$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 - 3\ddot{x}_2 + (4b - 1)\dot{x}_1 + (5 - 3b)\dot{x}_2 + (2a + 12)x_1 - 3ax_2 = 0, \\ \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + (2b - 4)\dot{x}_1 - (1 - 2b)\dot{x}_2 + (a - 8)x_1 + 2ax_2 = 0. \end{cases}$$

№18 Исследовать устойчивость состояния равновесия в зависимости от параметров h, c, ω при $h, c > 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega y + cx = 0, \\ \ddot{y} + 2h\dot{y} - \omega x + cy = 0. \end{cases}$$

№19 Исследовать устойчивость состояния равновесия в зависимости от параметров ω, c при $c > 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega \dot{y} - 2cx + cy = 0, \\ \dot{y} - \omega \dot{x} + cx - 2cy = 0. \end{cases}$$

№20 Исследовать устойчивость состояния равновесия в зависимости от параметров ω, h_i при $A, C, m, g, l > 0$

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} - mgl\alpha = -h_i(\dot{\alpha} + \omega\beta), \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} - mgl\beta = -h_i(\dot{\beta} - \omega\alpha). \end{cases}$$

В задачах **№21-№25** исследовать устойчивость состояния равновесия в зависимости от значений параметра a .

$$\text{№21} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} a-1 & a-3 & a-3 \\ 0 & a-3 & a-3 \\ 0 & -a & 3 \end{pmatrix} x = 0.$$

$$\text{№22} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} a-2 & 1 & a \\ 0 & -a+1 & a-1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} x = 0.$$

$$\text{№23} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 3a-7 & 2a-8 & 2a-6 \\ 2a-9 & a-1 & -6a+17 \\ -1 & 1 & -2a+6 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} -a & a-1 & a-1 \\ -a & -3a & 3 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix} x = 0.$$

$$\text{№24} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} a-3 & -1 & -2 \\ 2a-2 & a-5 & 2a-5 \\ -1 & 1 & -a+2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} -a & 1 & -a \\ -a & 2a & -2 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix} x = 0.$$

$$\text{№25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 2(a^2+2a-3) & a^2+2a-4 & -1 \\ 2a^2+4a-5 & a^2+2a-5 & 2a^2+4a-7 \\ a^2+2a-3 & a^2+2a-2 & -2a^2-4a+7 \end{pmatrix} \dot{x} + \\ + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & -2 \\ 0 & -a-2 & a+2 \end{pmatrix} x = 0.$$

В задачах **№26-№28** исследовать устойчивость состояния равновесия в зависимости от значений параметров a, b .

$$\text{№26} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 2a+1 & -2-a & a-2 \\ a-1 & 0 & -2 \\ a+3 & -1 & a+1 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} -a & -b & -a \\ -a & -a & -b \\ 0 & a & b \end{pmatrix} x = 0.$$

$$\text{№27} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 4a+9 & -2a-2 & -a-3 \\ 2a+4 & a+2 & a+2 \\ 0 & -a-1 & -a-2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} -2a & -2b & -a \\ -a & a & 2b \\ 0 & -a & -2b \end{pmatrix} x = 0.$$

$$\text{№28} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 2a+3 & 2a+5 & a+3 \\ 2a+4 & 2a+3 & 2a+4 \\ 0 & -a-1 & -a-2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} -a & -b & a \\ -a & 2a & -2b \\ 0 & -a & b \end{pmatrix} x = 0.$$

Глава 2. Некоторые задачи устойчивости механических систем

2.1. О левитации тел в силовых полях

Левитация – состояние, при котором твёрдое тело «парит» в силовом поле подвеса без какого-либо контакта с окружающими телами.

В 30-е годы прошлого столетия ферромагнитное тело было вывешено в магнитном поле. А в 1945 году московский ученый В. Аркадьев создал неконтактный подвес, используя явление сверхпроводимости. Он заставил левитировать небольшой постоянный магнит над сверхпроводящим свинцовым диском.

Неконтактный подвес, прежде всего, решает проблему трения и позволяет создавать «вечные» подшипники, которые не изнашиваются во время эксплуатации. Применение левитации открыло новую эру в развитии транспортной техники, позволяя создавать высокоскоростной транспорт на магнитной подвеске.

2.1.1. Запрет Ирншоу

Обсудим ключевые проблемы, возникающие при осуществлении левитации.

Рассмотрим следующую систему. Разместим на оси z на одинаковом расстоянии l от начала координат два одинаковых положительных заряда q и закрепим их (рис. 14). Для одноименного подвижного заряда начало координат является положением равновесия. Силу тяжести не учитываем.

При смещении заряда в плоскости Oxy (например, по Ox) возникает сила, выталкивающая заряд от оси z .

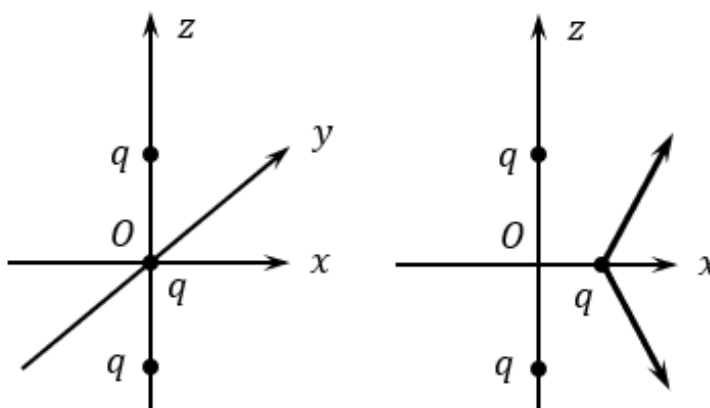


Рис. 14. Система трех зарядов

Запишем уравнение движения подвижного заряда. Потенциальная энергия подвижного заряда:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (l \pm z)^2}.$$

Будем считать, что $x, y, z \ll l$. Разложим потенциальную функцию Π в ряд Тейлора по отклонениям от положения равновесия x, y, z и ограничимся квадратичными по этим величинам членами:

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 l^3} (2z^2 - x^2 - y^2).$$

Отсюда сила, действующая на подвижный заряд:

$$\vec{F} = -grad \Pi = \frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 l^3} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z).$$

Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} = kx, \quad \ddot{y} = ky, \quad \ddot{z} = -2kz.$$

Закон движения подвижного заряда:

$$x = a_1 e^{\sqrt{k}t} + a_2 e^{-\sqrt{k}t}, \quad y = b_1 e^{\sqrt{k}t} + b_2 e^{-\sqrt{k}t}, \quad z = c \cos(\sqrt{2k}t + \alpha),$$

где

$$k = \frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 l^3 m}.$$

В направлении z жесткость рассматриваемого подвеса положительна, а в направлениях x, y отрицательна, т.е. система имеет четную степень неустойчивости.

При рассмотрении данного электростатического подвеса проявилось одно из главных препятствий, возникающих перед разработчиками устройств с левитирующими телами, заключающееся в природе электростатического поля. Этот факт в физике называют *запретом Ирншоу*. Доказанная Ирншоу теорема утверждает, что *любая статическая конфигурация электрических зарядов является неустойчивой. Иначе, нельзя создать электрическое поле, в котором электрические заряды находились бы в устойчивом равновесии.*

В 1839 году, когда Ирншоу (E. Earnshaw) выступал с докладом «О природе молекулярных сил, определяющих физическое строение светоносного эфира», он не интересовался проблемой левитации. Ирншоу пытался найти природу сил, которые делают материю устойчивой. Оказалось, что в случае сил, убывающих обратно квадрату расстояния между взаимодействующими точками, система не может находиться в устойчивом положении равновесия.

Теорема Ирншоу сыграла большую роль в развитии теории атома, т.к. из этой теоремы следует, что атом не может быть построен из неподвижных зарядов, связанных между собой только электрическими силами. Атом должен представлять собой динамическую систему.

Аналогичная ситуация имеет место в гравитационном поле, где материальные точки притягиваются по закону всемирного тяготения. Устойчивость Солнечной системы обеспечивается лишь движением планет.

2.1.2. Стабилизация тела в электростатическом поле

Обратим внимание на аналогию между задачей об устойчивости волчка Лагранжа и задачей о левитации заряженного тела. Как удержать вывешенное в электростатическом поле тело? Нужно создать гироскопические силы (теорема Томсона).

Известно, что на точечный заряд q , движущийся в магнитном поле, действует сила $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}]$. Включим магнитное поле \vec{B} , направленное по z .

Уравнения движения материальной точки в плоскости Oxy принимают вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - kx + N\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} - ky - N\dot{x} &= 0,\end{aligned}$$

где

$$N = \frac{qB}{m}.$$

Перейдем от x, y к комплексной переменной $s = x + iy$. Запишем систему уравнений в спрессованном виде:

$$\ddot{s} - ks - iN\dot{s} = 0.$$

После подстановки $s = Ae^{pt}$ приходим к характеристическому уравнению:

$$p^2 - k - iNp = 0.$$

Отсюда находим:

$$p_{1,2} = i \frac{H}{2} \mp \sqrt{k - \frac{H^2}{4}}.$$

При $0 \leq H < 2\sqrt{k}$ одна пара характеристических показателей имеет положительную, а вторая пара – отрицательную вещественную часть. Система неустойчива.

С увеличением $H(B)$ вещественная часть характеристических показателей уменьшается и при $H_* = 2\sqrt{k}$ обращается в нуль (рис. 15а).

При $H \geq 2\sqrt{k}$ или

$$B \geq 4 \sqrt{\frac{m}{4\pi\epsilon_0 l^3}}$$

система консервативно устойчива (рис. 15б) (критический случай по Ляпунову).

К чему приведет учет малой диссипации? Теорема Томсона утверждает, что диссипативные силы с полной диссипацией разрушают гироскопическую стабилизацию. Удостоверимся в этом.

Система уравнений динамики тела в плоскости Oxy :

$$\ddot{x} - kx + H\dot{y} + h\dot{x} = 0,$$

$$\ddot{y} - ky - H\dot{x} + h\dot{y} = 0,$$

$$\ddot{z} + 2kz + h\dot{z} = 0.$$

Заметим, что по Oz система асимптотически устойчива:

$$z = C e^{-\frac{h}{2}t} \cos(\sqrt{2k}t + \alpha).$$

Первые два уравнения в спрессованном виде:

$$\ddot{s} - ks - iH\dot{s} + h\dot{s} = 0.$$

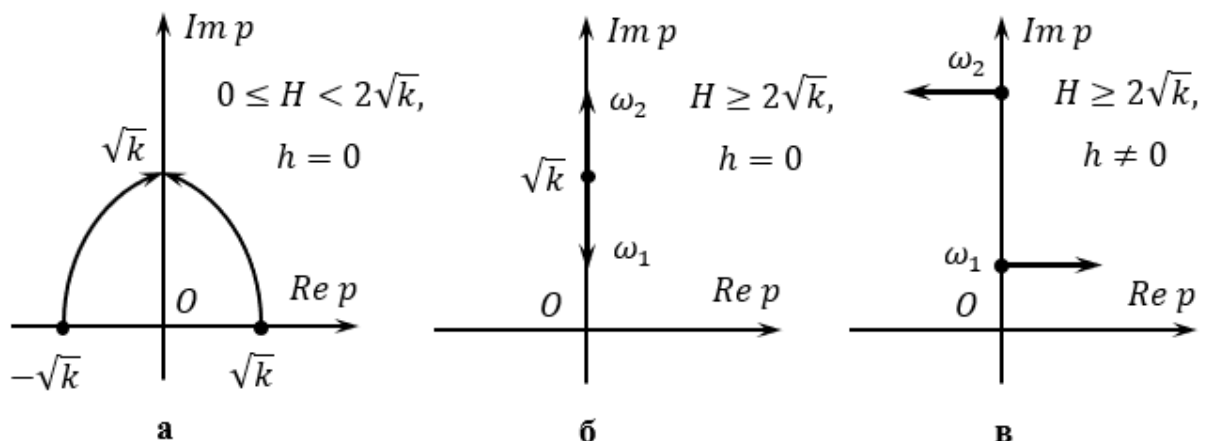


Рис. 15. Перемещение характеристических показателей в комплексной плоскости

Характеристическое уравнение принимает вид:

$$p^2 - k - iHp + hp = 0.$$

Предполагая коэффициент диссипации h малым, будем искать p в виде $p = i\omega + \delta$, где $\omega = \omega_1, \omega_2$. Из характеристического уравнения находим, что

$$\delta = -\frac{2\omega}{2\omega - H}.$$

После подстановки в это выражение

$$\omega_1 = \frac{H}{2} - \sqrt{\frac{H^2}{4} - k}, \quad \omega_2 = \frac{H}{2} + \sqrt{\frac{H^2}{4} - k}$$

получим $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$.

Равновесие точечного заряда, вывешенного в электростатическом и магнитном полях, при учете диссипации неустойчиво (рис. 15в).

Естественно, напрашивается вывод о безнадёжности попыток использовать электростатическое поле для решения проблемы левитации. Однако выход из этой ситуации существует. Обеспечить устойчивость левитации можно с помощью системы управления.

Но сначала укажем иной способ достижения асимптотической устойчивости, представляющий собой пассивную стабилизацию системы. Обратимся к уравнению движения заряженной материальной точки при учете диссипации в спрессованном виде:

$$\ddot{s} - ks - iH\dot{s} + h\dot{s} = 0.$$

Запишем это уравнение во вращающейся с угловой скоростью ω_0 системе координат. Для этого проведем замену $s = we_0^{i\omega t}$.

Уравнение для w :

$$\ddot{w} + i(2\omega_0 - H - ih)\dot{w} + (-\omega_0^2 + H\omega_0 - k - ih\omega_0)w = 0$$

или после перехода к переменным x, y и разделения на вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases} \ddot{x} + (-\omega_0^2 + H\omega_0 - k)x - (2\omega_0 - H)\dot{y} + h\dot{x} + h\omega_0 y = 0, \\ \ddot{y} + (-\omega_0^2 + H\omega_0 - k)y + (2\omega_0 - H)\dot{x} + h\dot{y} - h\omega_0 x = 0. \end{cases}$$

I

В матричной форме эта система имеет следующий вид:

$$\ddot{u} + Cu + G\dot{u} + B\dot{u} + Pu = 0,$$

где $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 + H\omega_0 - k & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 + H\omega_0 - k \end{pmatrix}$ – матрица потенциальных сил, потенциальная энергия:

$$\Pi = f(\omega_0)(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(-\omega_0^2 + H\omega_0 - k)(x^2 + y^2),$$

$G = \begin{pmatrix} 0 & -2\omega_0 + H \\ 2\omega_0 - H & 0 \end{pmatrix}$ – матрица гироскопических сил,

$B = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ – матрица диссипативных сил с полной диссипацией,

$P = \begin{pmatrix} 0 & h\omega_0 \\ -h\omega_0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица псевдогироскопических (циркуляционных) сил.

Вращение привело к изменению гироскопических и потенциальных сил, а также к появлению псевдогироскопических сил с матрицей P .

Система I консервативная система под действием потенциальных сил $\Pi = f(\omega_0)(x^2 + y^2)$. Рассмотрим функцию:

$$f(\omega_0) = \frac{1}{2}(-\omega_0^2 + H\omega_0 - k)(x^2 + y^2).$$

Нули функции $f(\omega_0)$:

$$\omega_{01,02} = \frac{H}{2} \mp \sqrt{\frac{H^2}{4} - k}.$$

Во вращающейся системе в случае $\omega_{01} < \omega_0 < \omega_{02}$ коэффициент при $x^2 + y^2$ становится положительным (рис. 16), т.е. в состоянии равновесия при этих ω_0 потенциальная энергия минимальна. Следовательно, при одних потенциальных силах имеет место устойчивость.

Значит, по теореме Томсона введение гироскопических сил и диссипации в этой вращающейся системе координат доставит объекту асимптотическую устойчивость.

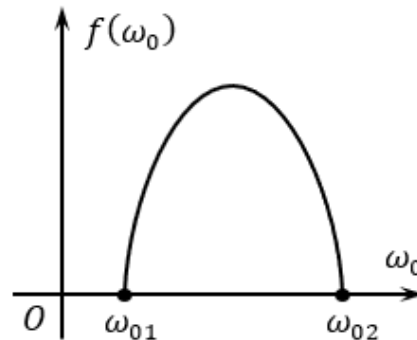


Рис. 16. График функции $f(\omega_0)$

На практике это можно осуществить, поместив систему зарядов в закрытый вращающийся цилиндрический кожух. Угловая скорость должна удовлетворять условию $\omega_{01} < \omega_0 < \omega_{02}$. Этот интервал весьма широк и достижим.

Другой способ стабилизации тела в электростатическом поле основан на идеях автоматического регулирования.

Представим, что мы с помощью специальных датчиков можем измерять местоположение тела вблизи некоторого неустойчивого положения равновесия. Когда датчик «увидит», что твердое тело удаляется от желаемого положения равновесия, он подаст сигнал в специальное устройство, которое изменит электрическое поле так, чтобы заставить тело вернуться в исходное положение.

Таким образом, использование идеи обратной связи позволяет решить проблему собственной неустойчивости электростатического подвеса.

2.1.3. Принцип работы неконтактных подвесов

Неконтактные подвесы можно разделить на три категории: электростатические, электромагнитные и криогенные. Эти типы подвесов определяют три направления, по которым наука и техника решают проблему левитации.

Масса тел, успешно подвешиваемых в электростатических подвесах, не превышает сотни грамм. Это связано с проблемой пробоя электрического поля, устанавливающей предел его напряженности.

Для подвеса больших тел, масса которых измеряется тоннами, применяют магнитные подвесы. Они подразделяются на электродинамические и электромагнитные.

Электродинамические подвесы основаны на явлении электромагнитной индукции. Если тело, содержащее контур с переменным током, перемещать над проводящей полосой, то по закону индукции в полосе появятся вихревые токи со своим собственным электромагнитным полем. Это поле, взаимодействуя с первичным контуром, создает подъемную силу. Электродинамический подвес может обеспечить вывешивание тела только после достижения им некоторой пороговой скорости.

Электромагнитный подвес основан на свойстве магнита (или электромагнита) притягиваться к железному (ферромагнитному) сердечнику. Чтобы парировать неустойчивость электромагнитного подвеса, необходимо динамическое регулирование магнитным полем в зависимости от зазора между левитирующим телом и магнитами системы. При зазорах 10-15 мм затраты

мощности на подвешивание составляют 1-3 кВт на 1 тонну левитирующего тела. Недостатком магнитных подвесов являются неизбежные потери из-за вихревых токов, возникающих при движении твердого тела в магнитном поле. Исключения составляют магнитные подвесы диамагнитных тел.

Магнитные свойства различных веществ весьма разнообразны. Все магнетики делятся на три класса:

- **парамагнетики** – вещества, которые слабо намагничиваются в магнитном поле, результирующее поле в них сильнее, чем в вакууме, магнитная проницаемость $\mu > 1$ (алюминий, кислород и др.),
- **диамагнетики** – вещества, слабо намагничивающиеся против поля, магнитная проницаемость $\mu < 1$ (медь, висмут, графит, вода, азот и др., человек в магнитном поле ведет себя как диамагнетик),
- **ферромагнетики** – вещества, сильно намагничивающиеся в магнитном поле, магнитная проницаемость $\mu \gg 1$ (железо, кобальт, никель, некоторые сплавы).

Диамагнетик выталкивается из магнитного поля. Это позволяет создать такую конфигурацию магнитного поля, при которой твердое тело находится в положении устойчивого равновесия в «потенциальной яме». Неконтактный подвес диамагнитных тел не требует затрат энергии.

Известен достаточно широко распространенный опыт с левитирующей лягушкой. Животное аккуратно помещают над магнитом, который создает магнитную индукцию больше 16 Тл и лягушка, демонстрируя диамагнитные свойства, фактически зависает в воздухе на небольшом расстоянии от магнита.

Среди магнитных подвесов весьма важное место занимают криогенные подвесы, в которых используются сверхпроводники. Одно из свойств сверхпроводника — выталкивание из объема проводника магнитного поля при его переходе в сверхпроводящую фазу (эффект Мейснера, 1933 г.).

Например, пластинку из оксида иттрия-бария-меди охлаждают до температуры жидкого азота. В этих условиях она становится сверхпроводником. Положим неодимовый магнит на подставку над пластиной, а затем вытащим подставку из-под магнита. Магнит зависнет в воздухе, т.е. будет левитировать.

Сверхпроводник выталкивает магнитное поле из области сверхпроводящей фазы. Отталкиваясь от неподвижного сверхпроводника, магнит «всплывает» сам и продолжает «парить» до тех пор, пока внешние условия не выведут сверхпроводник из сверхпроводящей фазы. В результате эффекта Мейснера магнит, приближающийся к сверхпроводнику, «видит» магнит одинаковой полярности и точно такого же размера, — что и вызывает левитацию.

2.2. «Классический» флаттер

На упрощенной линейной модели выясним природу флаттера – одного из наиболее опасных аэроупругих явлений, которое было бичом авиации в 30-е годы прошлого столетия. Галлай М.Л., знаменитый летчик-испытатель, писал о нем в своих мемуарах:

«С появлением новых скоростных самолетов в авиации едва ли не всех передовых стран мира прокатилась волна таинственных необъяснимых катастроф.

Случайные очевидцы, наблюдавшие эти катастрофы с земли, видели во всех случаях почти одинаковую картину: самолет летел совершенно нормально, ничто не внушало ни малейших опасений, как вдруг внезапно какая-то неведомая сила, будто взрывом разрушала машину – и вот уже падают на землю изуродованные обломки: крылья, оперение, фюзеляж. ...

Все очевидцы, не сговариваясь между собой, применяли выражение «взрыв», так как не представляли себе других возможных причин столь молниеносного и полного разрушения. Однако осмотр упавших обломков не подтверждал этой версии: никаких следов взрыва – копоти или ожогов – на них не оказалось»

Модель крыла самолета – однородная пластинка длины l и массы m , закрепленная на концах на двух пружинах с коэффициентами упругости c_1 и c_2 (рис. 17). Пластинка обдувается воздухом, за счет чего на неё действует подъемная сила $F = kv^2\varphi$, где φ – угол наклона пластинки, v – скорость воздуха, k – коэффициент пропорциональности.

Пусть ось x направлена вверх, начало координат в центре пластины при нерастянутых пружинах. На пластину действуют три силы: силы упругости пружин:

$$F_1 = c_1 \left(x + \frac{l}{2} \sin \varphi \right), \quad F_2 = c_2 \left(x - \frac{l}{2} \sin \varphi \right),$$

приложенные к краям пластины и подъемная сила F , которую считаем приложенной в центре инерции. Силу тяжести в расчет не принимаем.

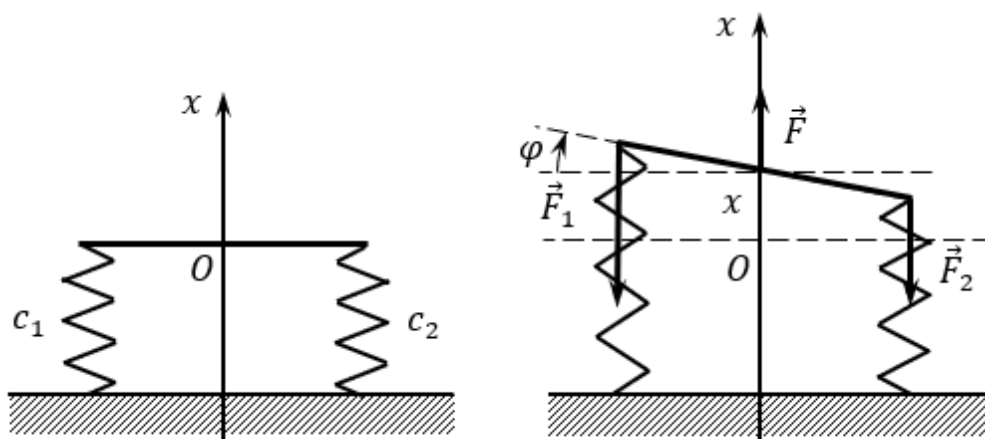


Рис. 17. Модель крыла самолета

Запишем уравнения поступательного и вращательного движений пластины:

$$m\ddot{x} = F - F_1 - F_2, \quad \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = (-F_1 + F_2)\frac{l}{2}\cos\varphi.$$

После подстановки выражений для сил они принимают вид:

$$m\ddot{x} = kv^2\varphi - c_1\left(x + \frac{l}{2}\sin\varphi\right) - c_2\left(x - \frac{l}{2}\sin\varphi\right),$$

$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = \left[-c_1\left(x + \frac{l}{2}\sin\varphi\right) + c_2\left(x - \frac{l}{2}\sin\varphi\right)\right]\frac{l}{2}\cos\varphi.$$

Остановимся на линейном приближении, которое справедливо при малости угла φ . В этом случае уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{m}x - \left(\frac{c_2 - c_1}{2m} + \frac{kv^2}{ml}\right)l\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi}l - \frac{6(c_2 - c_1)}{m}x + \frac{3(c_1 + c_2)}{m}l\varphi = 0.$$

Введем переменную $y = l\varphi$ и параметры:

$$b_{11} = \frac{c_1 + c_2}{m}, \quad b_{22} = \frac{3(c_1 + c_2)}{m},$$

$$b_{12} = \frac{c_1 - c_2}{2m} - \frac{kv^2}{ml}, \quad b_{21} = \frac{6(c_1 - c_2)}{m},$$

тогда система уравнений запишется в виде:

$$\ddot{x} + b_{11}x + b_{12}y = 0, \quad \ddot{y} + b_{21}x + b_{22}y = 0.$$

После подстановки в эти уравнения

$$x = Ae^{pt}, \quad y = Be^{pt}$$

приходим к системе однородных алгебраических уравнений:

$$A(p^2 + b_{11}) + Bb_{12} = 0,$$

$$Ab_{21} + B(p^2 + b_{22}) = 0.$$

Условие нетривиальности решения этой системы дает характеристическое уравнение:

$$p^4 + p^2(b_{11} + b_{22}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0.$$

Отсюда

$$p^2 = -\frac{b_{11} + b_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_{11} + b_{22}}{2}\right)^2 - (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}$$

или

$$p = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{-2(c_1 + c_2) \pm \sqrt{4(c_1^2 + c_2^2 - c_1c_2) + \frac{6kv^2(c_2 - c_1)}{l}}}$$

или

$$p = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{-2(c_1 + c_2) \pm \sqrt{G}}.$$

Характер динамики пластины определяется этим выражением для четырех характеристических показателей.

Рассмотрим два случая.

- Если $c_2 > c_1$, то выражение под внутренним корнем

$$G = 4(c_1^2 + c_2^2 - c_1c_2) + \frac{6kv^2(c_2 - c_1)}{l}$$

всегда положительно, следовательно, выражение под внешним корнем

$$Q = -2(c_1 + c_2) \pm \sqrt{4(c_1^2 + c_2^2 - c_1c_2) + \frac{6kv^2(c_2 - c_1)}{l}}$$

будет всегда действительным.

Величина Q отрицательна для знака минус ($Q = -2(c_1 + c_2) - \sqrt{G}$), т.е. два характеристических показателя являются чисто мнимыми. Им отвечают колебания постоянной амплитуды.

Когда же перед внутренним корнем стоит плюс ($Q = -2(c_1 + c_2) + \sqrt{G}$), знак выражения Q может быть различным.

При достаточно малом параметре kv^2 :

$$-2(c_1 + c_2) \pm \sqrt{4(c_1^2 + c_2^2 - c_1c_2) + \frac{6kv^2(c_2 - c_1)}{l}} < 0,$$

$$\frac{kv^2}{l} < \frac{3c_1c_2}{c_2 - c_1} \quad (15)$$

обе пары корней p чисто мнимые.

Если же неравенство для (15) не выполняется, то вторая пара корней характеристического уравнения будет действительной, причем разных знаков.

Граница области устойчивости

$$v_* = \sqrt{\frac{3lc_1c_2}{k(c_2 - c_1)}}$$

определяется из условия $p = 0$ – статическое нарушение устойчивости.

• В случае $c_2 < c_1$ знак выражения под внутренним корнем G зависит от kv^2 , если

$$\frac{kv^2}{l} < \frac{2(c_1^2 + c_2^2 - c_1c_2)}{3(c_1 - c_2)}, \quad (16)$$

то выражение под внешним корнем Q отрицательно и все значения p мнимые.

Если же неравенство (16) не выполняется, то мнимой величина будет \sqrt{G} .

Выражение под внешним корнем Q – комплексно-сопряженные числа с отрицательной действительной частью. При знаке плюс в Q аргумент этого комплексного числа лежит между $\pi/2$ и π . Следовательно, аргумент $p \sim \sqrt{Q}$ меньше $\pi/2$, т.е. действительная часть p будет положительной. Значит, пластина колеблется с нарастающей амплитудой.

Таким образом, при выполнении условия (16) пластина колеблется с постоянной амплитудой, а при смене знака неравенства (16) наблюдается динамическое нарушение устойчивости – флаттер.

Критическая скорость флаттера:

$$v_{**} = \sqrt{\frac{2l(c_1^2 + c_2^2 - c_1c_2)}{3k(c_1 - c_2)}}.$$

Из проведенного рассмотрения следует, что **для исключения флаттера задняя пружина должна быть жестче передней**. Для крыла самолета это означает, что **центр жесткости крыла должен лежать позади центра тяжести**.

Центр жесткости – такая точка, что сила, приложенная к ней, сдвигает крыло поступательно, но не поворачивает его.

Когда возникло понимание этого факта, с флаттером было покончено. (см. более подробно о флаттере и многом другом в книге [4]).

2.3. Динамика двойного маятника. Влияние диссипации на устойчивость

Рассмотрим колебания двойного маятника, состоящего из двух безмассовых жестких стержней равной длины l , несущих на концах точечные массы m (рис. 18). Стержни связаны упругими шарнирами между собой и с основанием, c – жесткость ленточных пружин в шарнирах.

Маятник нагружен на конце силой \vec{F} .

Составим уравнения малых колебаний двойного маятника около вертикального положения равновесия.

Введем систему координат Oxy . Через φ_1 и φ_2 обозначим углы отклонения стержней; $\alpha\varphi_2$ – угол, который образует сила \vec{F} с вертикалью.

Случай $\alpha = 0$ соответствует так называемой «мертвой» нагрузке. Сила \vec{F} действует вертикально.

При $\alpha = 1$ сила \vec{F} действует вдоль верхнего стержня. Направление нагрузки меняется в зависимости от изменения конфигурации системы. Такие нагрузки называются «*следающими*».

2.3.1. Устойчивость малых колебаний без учета диссипативных сил

Координаты материальных точек, образующих систему:

$$x_1 = l \sin \varphi_1, \quad x_2 = l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2,$$

$$y_1 = l \cos \varphi_1, \quad y_2 = l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2,$$

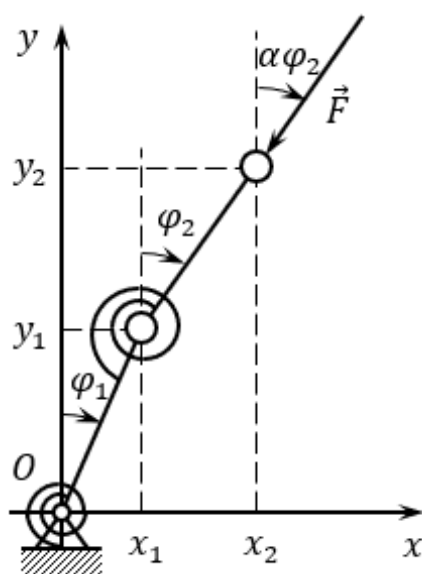


Рис. 18. Двойной маятник со «следающей» нагрузкой

их скорости:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1, & \dot{x}_2 &= l \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + l \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2, \\ \dot{y}_1 &= -l \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1, & \dot{y}_2 &= -l \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - l \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2.\end{aligned}$$

Полагая $\varphi_1 \ll 1$ и $\varphi_2 \ll 1$ (рассматриваем малые колебания), получим:

$$v_1^2 = l^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad v_2^2 = l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Выражение для кинетической энергии имеет вид:

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2.$$

Потенциальная энергия пружин:

$$\Pi = \frac{c}{2} \varphi_1^2 + \frac{c}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Найдем обобщенные силы Q_1 и Q_2 . К верхней точечной массе приложена сила $\vec{F} = -F \sin \alpha \varphi_2 \vec{i} - F \cos \alpha \varphi_2 \vec{j}$, виртуальное перемещение точки приложения силы:

$$\delta \vec{r} = (l \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + l \cos \varphi_2 \delta \varphi_2) \vec{i} - (l \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 + l \sin \varphi_2 \delta \varphi_2) \vec{j}.$$

Виртуальная работа с учетом малости φ_1, φ_2 равна:

$$\delta A = -Fl \alpha \varphi_2 (\delta \varphi_1 + \delta \varphi_2) + Fl (\varphi_1 \delta \varphi_1 + \varphi_2 \delta \varphi_2).$$

Отсюда $Q_1 = Fl(\varphi_1 - \alpha \varphi_2)$, $Q_2 = Fl\varphi_2(1 - \alpha)$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad i = 1, 2$$

принимают вид:

$$m\ddot{\varphi}_1 + m(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + c\varphi_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = Fl(\varphi_1 - \alpha\varphi_2),$$

$$m\ddot{\varphi}_1 + m\ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) = Fl\varphi_2(1 - \alpha).$$

В этих уравнениях перейдем к безразмерным времени и параметру f

$$2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2\varphi_1 - \varphi_2 - f(\varphi_1 - \alpha\varphi_2) = 0, \tag{17}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - \varphi_1 + \varphi_2 - f\varphi_2(1 - \alpha) = 0,$$

где

$$t_*^2 = \frac{m}{c}, \quad \frac{Fl t_*^2}{m} = \frac{Fl}{c} = f.$$

В матричной форме уравнения приобретают вид:

$$A\ddot{\varphi} + C\varphi = 0, \quad (18)$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2-f & -1 + \frac{\alpha f}{2} \\ -1 + \frac{\alpha f}{2} & 1 - f(1-\alpha) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha f \\ -\alpha f & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае «мертвой» нагрузки ($\alpha = 0$) матрица $P = 0$, а симметричная матрица $C = \begin{pmatrix} 2-f & -1 \\ -1 & 1-f \end{pmatrix}$, т.е. в этом случае действующая на систему внешняя сила является потенциальной, и ей отвечает

$$P_{\text{нагр}} = -\frac{f}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Для заключения об устойчивости системы достаточно воспользоваться теоремой Лагранжа.

Потенциальная функция сил, действующих на систему:

$$\begin{aligned} P_{\Sigma} &= \frac{1}{2} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \frac{f}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} [(2-f)\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + (1-f)\varphi_2^2]. \end{aligned}$$

Для устойчивости системы, чтобы в состоянии равновесия $(0,0)$ функция P_{Σ} имела минимум. Необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} 2-f > 0, \\ (2-f)(1-f) - 1 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f < 2, \\ \left[\begin{array}{l} f < \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ f > \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Таким образом, под действием «мертвой» нагрузки система устойчива при

$$0 < f < \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Запишем уравнение частот.

Подставив в систему (17) $\varphi_1 = Ae^{i\omega t}$, $\varphi_2 = Be^{i\omega t}$, получим систему алгебраических однородных уравнений для A, B , условием нетривиальности решений которой является равенство нулю определителя:

$$\omega^4 + \omega^2(-6 + 3f - \alpha f) + f^2(1 - \alpha) + f(-3 + 3\alpha) + 1 = 0. \quad (19)$$

Отсюда находим, что $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$, $\omega_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$,

$$t_{1,2} = \frac{-(-6 + 3f - \alpha f) \pm \sqrt{D}}{2},$$

где $D = (-6 + 3f - \alpha f)^2 - (f^2(1 - \alpha) + f(-3 + 3\alpha) + 1)$.

Положим $f = 0$ и найдём значения частот свободного маятника:

$$\omega^4 - 6\omega^2 + 1 = 0,$$

$$\omega_1 = 0,41, \quad \omega_2 = 2,41, \quad \omega_{3,4} < 0.$$

Затем положим в характеристическом уравнении (19) $\omega = 0$ и найдём различные значения f в зависимости от коэффициента α , при которых частота обращается в нуль:

$$f^2(1 - \alpha) + f(-3 + 3\alpha) + 1 = 0.$$

- В случае «мертвой нагрузки» ($\alpha = 0$): $f^2 - 3f + 1 = 0$,

$$f_1 = 0,38, \quad f_2 = 2,62.$$

Изменение частот маятника с увеличением нагрузки f показано на рис. 19.

Нижняя частота обращается в нуль при $f_1 = 0,38$. При дальнейшем увеличении нагрузки ω_1^2 становится отрицательным.

Иначе, один из характеристических показателей становится вещественным положительным. Маятник при f_1 теряет устойчивость на нижней форме колебаний.

Переход характеристических показателей в правую полуплоскость комплексной плоскости через ноль означает, что **устойчивость нарушается статически** (иногда такой переход в механике называют дивергенцией). «Статически» означает, что при f_1 колебания отсутствуют. На второй форме колебаний статическая потеря устойчивости наблюдается при нагрузке $f_2 = 2,62$.

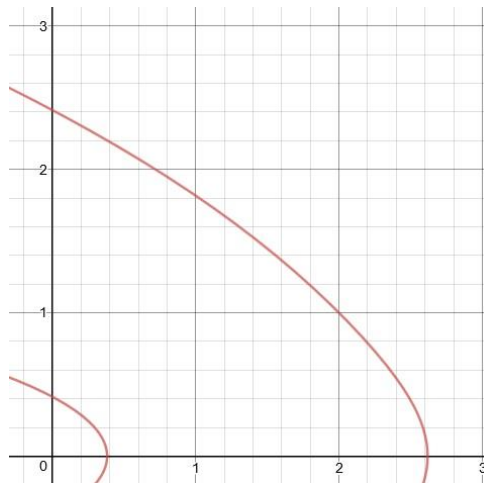


Рис. 19. Характеристические показатели на комплексной плоскости в зависимости от нагрузки f в случае $\alpha = 0$

По теореме Томсона учет диссипации упрочняет устойчивость на интервале $0 \leq f < 0,38$ до асимптотической.

- Остановимся на случае «следящей» силы ($\alpha = 1$). Сила направлена по верхнему стержню. В отличие от случая $\alpha = 0$ система не является консервативной. Наряду с потенциальной силой с матрицей C имеется непотенциальная позиционная сила (циркуляционная сила) с матрицей P .

Уравнение частот (19) принимает вид:

$$\omega^4 + 2\omega^2(f - 3) + 1 = 0. \quad (20)$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_{1,2}^2 = 3 - f \pm \sqrt{(f - 4)(f - 2)}.$$

Поведение частот в зависимости от нагрузки качественно отличается от рассмотренного ранее случая $\alpha = 0$. С увеличением f от 0 до 2 нижняя частота увеличивается, а верхняя уменьшается, и при $f = 2$ частоты сливаются: $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Затем при $f > 2$ характеристические показатели расходятся, при этом один из них приобретает положительную вещественную часть.

$\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1$ при $f = f_* = 2$, то есть при $f = f_*$ существуют две пары равных корней, действительные части которых равны нулю; при $f < f_*$ все корни характеристического уравнения различные и чисто мнимые, а при $f > f_*$ имеются корни с положительной действительной частью. Качественная картина зависимости квадратов собственных частот от нагрузки представлена на рис. 20.

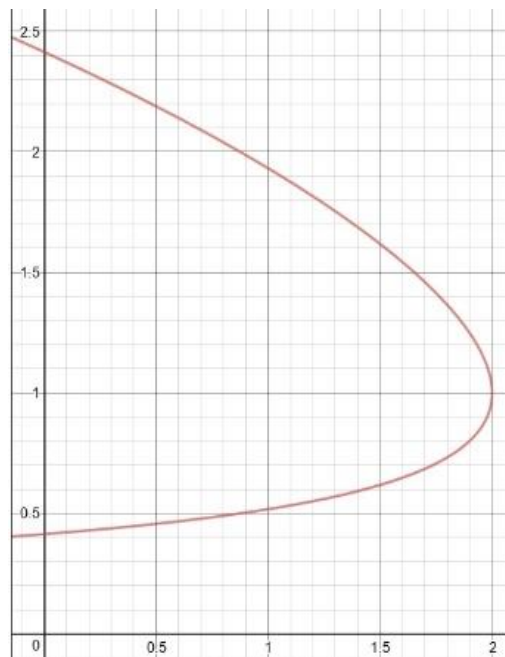


Рис. 20. Характеристические показатели на комплексной плоскости в зависимости от нагрузки f в случае $\alpha = 1$

Подведем итог.

В случае «мертвой» нагрузки теорема Томсона позволила разрешить критический случай по Ляпунову, не проводя дополнительные расчеты, сам факт учета диссипации позволил сделать вывод об асимптотической устойчивости системы при $0 \leq f < 0,38$.

При $\alpha = 1$ (следящая сила) система неконсервативная (матрица P). Можно утверждать, что при $f > 2$ система неустойчива, т.к. есть характеристические показатели с положительной вещественной частью.

Однако, если $0 < f < 2$, характеристические показатели мнимые – критический случай по Ляпунову. Теоремы, аналогичной теореме Томсона, для этого случая нет. Необходимо ввести в рассмотрение диссипацию и выяснить, как она сказывается на характеристических показателях.

2.3.2. Влияние малой диссипации на устойчивость

Учтем малую диссипацию в шарнирах. Введем в правые части уравнений (18) силы $Q_1^{\text{коп}} = h_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - h_1\dot{\varphi}_1$, $Q_2^{\text{коп}} = -h_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$ и положим $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2\varphi_1 - \varphi_2 - f(\varphi_1 - \varphi_2) &= h_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - h_1\dot{\varphi}_1, \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - \varphi_1 + \varphi_2 &= -h_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), \end{aligned}$$

После подстановки в эту систему $\varphi_1 = Ae^{pt}$, $\varphi_2 = Be^{pt}$ запишем характеристическое уравнение:

$$p^4 + 2p^2(3 - f) + 1 + ph_1(p^2 + 1) + ph_2(5p^2 + 1) = 0. \quad (21)$$

Здесь принято, что $h_1 \ll 1$, $h_2 \ll 1$, и исключены члены, пропорциональные h_i^2 , $i = 1, 2$.

Подставив в характеристическое уравнение $p = i\omega + \delta$, где δ – малая поправка к ω_1 , ω_2 , принимая во внимание уравнение (20), получим выражение для обусловленного учетом диссипации малого приращения характеристического показателя δ :

$$\delta = \frac{h_1(\omega^2 - 1) + h_2(5\omega^2 - 1)}{4(3 - f - \omega^2)}. \quad (22)$$

Знаменатель этого выражения для нижней частоты маятника ω_1 равен $4\sqrt{(f - 2)(f - 4)}$ и для f из интервала $(0, 2)$ является положительным.

Следовательно, условие устойчивости системы на нижней форме колебаний $\delta_1 < 0$ определяется числителем выражения (22):

$$h_1(\omega_1^2 - 1) + h_2(5\omega_1^2 - 1) < 0.$$

Расчет по приведенной выше зависимости $\omega_1(f)$ показывает, что выражение $\omega_1^2 - 1$ отрицательно при $0 < f < 2$.

Иначе обстоит дело с выражением $5\omega_1^2 - 1$. Оно отрицательно для $0 < f < 0,39$ и положительно при $0,39 < f < 2$.

Отсюда следует, что

- при $h_1 \neq 0, h_2 = 0$: $\delta_1 < 0$, т.е. двойной маятник устойчив вплоть до слияния частот (на интервале изменения f от 0 до 2);
- при $h_1 = 0, h_2 \neq 0$: $\delta_1 < 0$ при $0 < f < 0,39$ – устойчивость, а при $0,39 < f < 2$ $\delta_1 > 0$ т.е. система неустойчива;
- при $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0$ граница области устойчивости f_* в зависимости от соотношения между коэффициентами h_1 и h_2 располагается в некоторой точке интервала $(0,39; 2)$:

$$(\omega_1^2 - 1) + \frac{h_2}{h_1}(5\omega_1^2 - 1) < 0.$$

При $h_2 = 0$ область устойчивости двойного маятника $0 \leq f < 2$. С увеличением h_2 при постоянном h_1 верхняя граница области устойчивости сдвигается влево и при $h_2 \gg h_1$ $f_* \approx 0,39$. Трение в верхнем шарнире дестабилизирует систему.

С увеличением h_1 при фиксированном h_2 граница области устойчивости f_* смещается вправо, т.е. трение в нижнем шарнире стабилизирует систему.

В литературе можно встретить понятие «*дестабилизация трением*». Однако часто оно употребляется некорректно. В рассмотренной задаче положение границы области устойчивости определяется отношением коэффициентов трения h_2/h_1 , причем увеличение h_2 при заданном h_1 уменьшает область устойчивости. Это и есть подлинная дестабилизация трением. Подобное положение ранее наблюдали с внутренним трением в задаче об устойчивости гибкого вала с регулируемым числом оборотов.

Иначе обстоит дело в ряде задач (например, волчок Лагранжа), когда характеристические показатели располагаются на мнимой оси комплексной плоскости, и для того, чтобы разрешить критический по Ляпунову случай, вводится трение. Здесь интерпретировать обретение одним или несколькими характеристическими показателями положительной вещественной части как «дестабилизацию трением» не следует.

Переход маятника в неустойчивое состояние в случае следящей нагрузки ($\alpha = 1$) кардинально отличается от случая «мертвой» нагрузки.

Следящая сила при $f > f_*$ вызывает колебания двойного маятника с нарастающей со временем амплитудой. Говорят, **динамическое нарушение устойчивости**. Иногда употребляют термин «**флаттер**» (от англ. flutter – вибрация, дрожание). Однако этот термин многозначный и лучше его относить к автоколебаниям упругих пластин (или других упругих двумерных элементов машин) в потоке газа (жидкости).

2.4. О динамике транспортной машины

Рассматриваемая система служит упрощенной моделью транспортной машины. Ее образуют кузов массы M , подрессоренный пружиной жесткости k_1 , и деформированное колесо, представленное жестким ободом радиуса R массы m_1 с моментом инерции I и ступицей колеса массы m_2 . Массы m_1 и m_2 сочленены пружиной жесткости k . Предполагая движение кузова машины равномерным и учитывая свойства рессоры, можно считать, что в связанной с кузовом системе координат масса m_2 движется только вертикально, а масса m_1 в силу жесткости обода – только горизонтально (рис. 21).

В отличие от известных моделей здесь исследуется более сложная двухмассовая модель колеса, в которой учитываются не только упругие свойства, но и потери в материале колеса при изменяющемся во времени его деформировании. Данная механическая система относится к классу систем, в которых возможна потеря устойчивости из-за диссипации.

Кинетическая энергия системы, определяемая поступательным движением масс M , m_1 , m_2 и вращательным движением обода, в соответствии с рис. 21, запишется в виде:

$$T = \frac{M}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \dot{y}^2 + \frac{I}{2} \omega_0^2 = \frac{M}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{I}{R^2} \right) \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \dot{y}^2.$$

Здесь предполагается, что отсутствует проскальзывание колеса относительно дороги, т.е. $\omega_0 R = \dot{x}$ (ω_0 – угловая скорость обода, R – его радиус). В дальнейшем сосредоточимся на изучении частного случая

$$m_1 + I/R^2 = m_2 = m,$$

что упрощает рассмотрение, но не влияет принципиально на цель исследования. При изучении конкретной системы это ограничение можно не вводить.

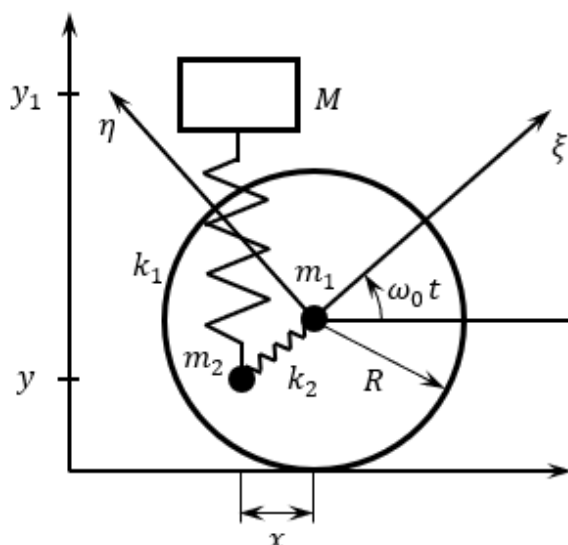


Рис. 21. Модель транспортной машины

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = Mgy_1 + mgy + \frac{k_1}{2}(y_1 - y)^2 + \frac{k}{2}[x^2 + (R - y)^2],$$

где g – ускорение свободного падения.

Сила трения, связанная с относительным движением масс M и m_2 , характеризуется параметром h_1 , ее величина $-h_1(\dot{y}_1 - \dot{y})$. При вращении колеса вектор $\vec{r} = -x\vec{e}_x + (R - y)\vec{e}_y$, показывающий взаимное положение масс m_1 и m_2 , поворачивается. Для того, чтобы ввести трение в колесе, необходимо перейти в связанную с ободом систему координат $O\xi\eta$, в которой $\vec{r} = \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta$, а трение в колесе определяется выражением $\vec{F} = -h(\dot{\xi}\vec{e}_\xi + \dot{\eta}\vec{e}_\eta)$. В результате обратного преобразования к координатам x, y оно принимает вид:

$$\vec{F} = -h[(-\dot{x} + \omega_0 y)\vec{e}_x + (\dot{y} + \omega_0 x)\vec{e}_y], \quad h = const.$$

Уравнения движения системы в отклонениях от положения равновесия после перехода к масштабу времени $t_* = \sqrt{m/k_1}$ запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \gamma(y_1 - y) + \gamma\mu_1(\dot{y}_1 - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} + (1 + \delta)y - y_1 + \mu_1(\dot{y} - \dot{y}_1) + \mu(\dot{y} + \Omega x) &= 0, \\ \ddot{x} + \delta x + \mu(\dot{x} - \Omega y) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\gamma = \frac{m}{M}, \quad \delta = \frac{k}{k_1}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{m}{k_1}}\omega_0, \quad \mu = \frac{h}{\sqrt{mk_1}}, \quad \mu_1 = \frac{h_1}{\sqrt{mk}}.$$

В дальнейшем исходим из того, что $\gamma \ll 1$ и $\delta \ll 1$. Известно, что собственные частоты колебаний кузова и колеса существенно различаются. Этот факт позволяет в рассматриваемой модели принять, что для $\omega_1 = \sqrt{k_1/M}$ и $\omega_2 = \sqrt{k/m}$ выполняется неравенство $\omega_1 \ll \omega_2$, которое приводится к виду $\gamma/\delta \ll 1$.

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & p\gamma\mu_1 + \gamma & p^2 + p\gamma\mu_1 + \gamma \\ \mu\Omega & p^2 + p(\mu_1 + \mu) + (1 + \delta) & -p\mu_1 - 1 \\ p^2 + \mu p + \delta & -\mu\Omega & 0 \end{vmatrix} = \quad (24)$$

$$= (p^2 + \mu p + \delta)\{[p^2 + p(\mu_1 + \mu) + (1 + \delta)](p^2 + p\gamma\mu_1 + \gamma) - \gamma(p\mu_1 + 1)^2\} + \mu^2\Omega^2(p^2 + p\gamma\mu_1 + \gamma) = 0.$$

Соотношения между входящими в него параметрами γ , δ , μ_1 , μ и Ω зависящие от масс, жесткостей, коэффициентов трения и угловой скорости вращения, определяют условия устойчивости системы.

Для выяснения влияния указанных параметров и сравнения результатов с известными данными по изучению динамики колеса рассмотрим сначала частный случай очень большой массы кузова M ($\gamma = 0$). Тогда в исходных уравнениях (23) можно положить $y_1 = 0$, и последние два из них дадут упрощенное характеристическое уравнение:

$$[p^2 + p(\mu_1 + \mu) + 1 + \delta](p^2 + \mu p + \delta) + \mu^2 \Omega^2 = 0,$$

которое следует из (24) при $\gamma = 0$.

Условие устойчивости легко получить методом Гурвица. Оно имеет вид:

$$\mu^2 \Omega^2 \left(\frac{h_1}{h} + 2 \right)^2 < \left(\frac{h_1}{h} + 1 \right) \left[1 + \mu^2 \left(\frac{h_1}{h} + 2 \right) + \delta \mu^2 \left(\frac{h_1}{h} + 2 \right)^2 \right]$$

или в размерных переменных:

$$m\omega^2 h(s+2)^2 < (s+1)[mk_1^2 + h^2 k_1(s+2) + h^2 k(s+2)^2], \quad (25)$$

где $s = h_1/h$ – отношение коэффициентов внешнего и внутреннего трения.

При равенстве нулю жесткости рессор ($k_1 = 0$) это выражение сильно упрощается, и условие устойчивости (25) становится прозрачным:

$$\omega < \sqrt{1 + \frac{h_1}{h}} \sqrt{m/k}.$$

Оно при $h_1 = 0$ (отсутствует внешнее трение) полностью совпадает с условием потери устойчивости из-за сил внутреннего трения в гибком вращающемся вале при его закритическом ($\omega_0 > \omega_c = \sqrt{m/k}$) состоянии. Учет внешнего трения ($h_1 \neq 0$) отдаляет границу неустойчивости, но, по сравнению с гибким валом, не столь эффективно: $\sqrt{s+2}$ вместо $s+1$. Это объясняется тем, что в данной системе внешнее (стабилизирующее) трение учтено только по одной координате y , а в гибком вале – по двум.

Как видно из неравенства (25), устойчивость состояния системы с учетом жесткости рессор k_1 существенно упрочняется. Но главное состоит в том, что при достаточно большой угловой скорости вращения колеса наступает неустойчивость, обусловленная трением в его материале.

Исследование устойчивости модели с учетом влияния массы кузова является более сложной задачей. Для ее решения воспользуемся методом Д-разбиения и ограничимся учетом лишь внутреннего трения в колесе.

Характеристическое уравнение запишем в виде:

$$(p^2 + \gamma)u + (p^2 + \mu p + \delta)[p^4 + \mu p^3 + (1 + \delta + \gamma)p^2 + \mu \gamma p + \gamma \delta] = 0,$$

где $u = \mu^2 \Omega^2$.

Запишем u в виде:

$$u = -\frac{S(p)}{Q(p)},$$

где

$$S(p) = (p^2 + \mu p + \delta)[p^4 + \mu p^3 + (1 + \delta + \gamma)p^2 + \mu \gamma p + \gamma \delta],$$

$$Q(p) = p^2 + \gamma,$$

Отвлекаясь на время от физического существа задачи, будем считать u комплексным параметром. Чтобы построить границы области устойчивости, полагаем $p = i\omega$, $i = \sqrt{-1}$, $-\infty < \omega < +\infty$. В результате получим кривую $u(\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$, разделяющую комплексную плоскость u на области с различным числом характеристических показателей с положительной вещественной частью. Граница D-разбиения показана на рис. 22.

Система устойчива при вещественном положительном u , принадлежащем области, в которой $Re(p) < 0$. Из проведенного рассмотрения следует, что условием устойчивости является неравенство $\mu\Omega < \delta$ или $h\omega_0 < k$ в размерном виде. Сравнение с аналогичным неравенством, полученным для случая $\gamma = 0$, $h_1 = 0$: $h\omega_0 < k_1/2$, показывает, что влияние массы M проявляется в смещении границы области устойчивости в область меньших $h\omega_0$.

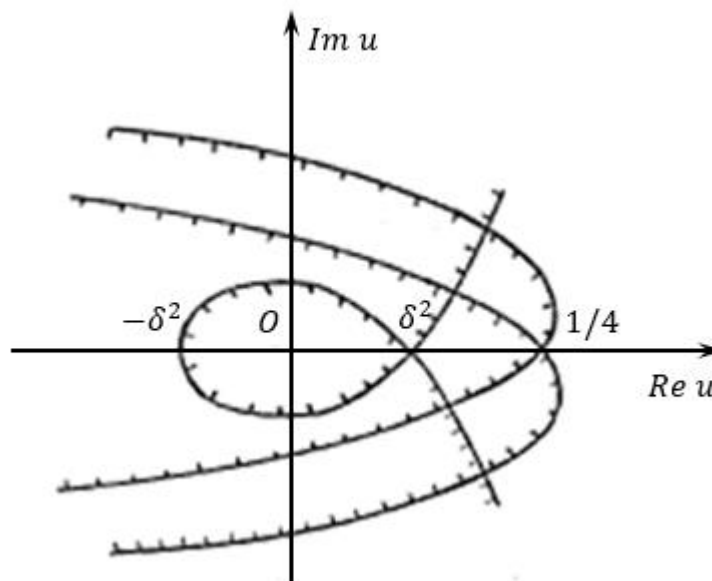


Рис. 22. Граница D-разбиения

2.5. Устойчивость параллельных течений жидкости

Рассмотрим тангенциальный разрыв в виде плоской границы раздела двух жидкостей, одна из которых движется относительно другой со скоростью u_0 (для определенности верхняя). Без учета вязкости такое движение является абсолютно неустойчивым.

Влияние вязкости жидкости на устойчивость гидродинамических течений давно и неоднократно обсуждалось. С одной стороны, при малых скоростях невозмущенных течений вязкость, несомненно, является стабилизирующим фактором, с другой, при достаточно больших скоростях она выступает как причина неустойчивости. Однако к такому заключению привели, в основном, исследования, опирающиеся на численный расчет решаемых задач.

Введение в рассмотрение вязкости исключает появление тангенциальных разрывов. Однако можно рассматривать случаи, когда из двух только одна жидкость обладает вязкостью или когда обе жидкости вязкие при наличии между ними пленки идеальной жидкости. В этих случаях разрыв в профиле скоростей существует, задача становится математически корректной.

Покажем существенное и нетривиальное влияние вязкости на условия устойчивости и выясним физический механизм потери устойчивости течения. Проведем аналогию полученных результатов с результатами ранее рассмотренной задачи о колебаниях гибкого вала с регулируемым числом оборотов.

2.5.1. Математическая модель тангенциального разрыва двух жидкостей

Уравнения гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости при наличии силы тяжести записываются в виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \vec{v} = \vec{g},$$
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Первое из них – уравнение Навье-Стокса, второе – уравнение неразрывности. Здесь \vec{v} – скорость жидкости, p – давление, ρ – плотность, \vec{g} – ускорение силы тяжести, $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость (η – коэффициент динамической вязкости).

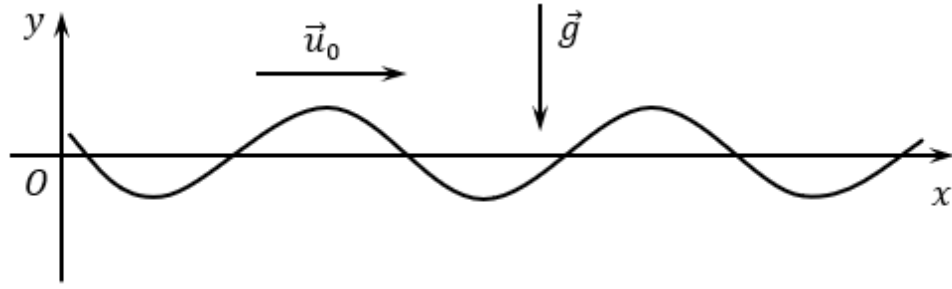


Рис. 23. Поверхность тангенциального разрыва в поле силы тяжести

Рассмотрим устойчивость поверхности тангенциального разрыва в поле силы тяжести с учетом поверхностного натяжения (рис. 23). Жидкости по обе стороны разрыва различны. Плоскость $y = 0$ является плоскостью раздела при невозмущенном движении жидкостей.

Решения для \vec{v} и p ищем в виде плоских волн, бегущих вдоль горизонтальной оси x , зависящих от вертикальной координаты y . Скорость и давление верхней и нижней жидкостей имеют вид:

$$\vec{v}' = (u_0 + u')\vec{i} + v'\vec{j}, \quad P' = p_0 + p' - \rho'gy,$$

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}, \quad P = p_0 + p - \rho gy,$$

где u_0 – стационарная скорость верхней жидкости относительно нижней, штрих относится к величинам, характеризующим верхнюю жидкость, u', v', p', u, v, p – малые отклонения от стационарных значений, зависящие от x, y, t .

Уравнения возмущенного движения верхней и нижней жидкостей запишутся следующим образом:

$$u'_t + u_0 u'_x + \frac{1}{\rho'} p'_x = v' (u'_{xx} + u'_{yy}),$$

$$v'_t + u_0 v'_y + \frac{1}{\rho'} p'_y = v' (v'_{xx} + v'_{yy}),$$

$$u'_x + v'_y = 0,$$

$$u_t + \frac{1}{\rho} p_x = v (u_{xx} + u_{yy}),$$

$$v_t + \frac{1}{\rho} p_y = v (v_{xx} + v_{yy}),$$

$$u_x + v_y = 0.$$

Будем искать решение в виде плоской волны, бегущей вдоль направления x , вида:

$$\begin{aligned}v' &= A'e^{i\omega t - ikx + ry}, & p' &= B'e^{i\omega t - ikx + ry}, \\v &= Ae^{i\omega t - ikx + ry}, & p &= Be^{i\omega t - ikx + ry}.\end{aligned}$$

После подстановки в уравнения движения запишем условия нетривиальности их решения:

$$\begin{aligned}(k^2 - r'^2)[i\omega' + v'(k^2 - r'^2)] &= 0, \\(k^2 - r^2)[i\omega + v(k^2 - r^2)] &= 0,\end{aligned}$$

где $\omega' = \omega - u_0 k$.

Для верхней жидкости, решениям, убывающим при $y \rightarrow +\infty$, соответствуют значения

$$r'_1 = -k, \quad r'_2 = -\sqrt{k^2 + \frac{i\omega'}{v'}},$$

а для нижней жидкости – решениям, убывающим при $y \rightarrow -\infty$,

$$r_1 = k, \quad r_2 = \sqrt{k^2 + \frac{i\omega}{v}}.$$

Эти решения имеют следующий вид:

для верхней жидкости:

$$\begin{aligned}u' &= e^{-ik\xi} \left(A'e^{-ky} - \frac{ir'_2}{k} B'e^{r'_2 y} \right), & v' &= e^{-ik\xi} (-iA'e^{-ky} + B'e^{r'_2 y}), \\p' &= \frac{\rho' \omega'}{k} A'e^{-ik\xi - ky},\end{aligned}$$

для нижней жидкости

$$\begin{aligned}u &= e^{-ik\xi} \left(Ae^{ky} - \frac{ir_2}{k} Be^{r_2 y} \right), & v &= e^{-ik\xi} (iAe^{ky} + Be^{r_2 y}), \\p &= \frac{\rho \omega}{k} A e^{-ik\xi + ky}.\end{aligned}$$

Отметим, что в решениях для давления представлен лишь один корень $r'_1 = -k, r_1 = k$. Эти решения записаны в системе координат $\xi = x - \frac{\omega}{k}t, y$, в которой граница раздела между жидкостями, представляющая собой гармоническую волну, которая неподвижна и имеет вид $\eta(\xi) = \eta_0 e^{-ik\xi}$.

Решения для верхней и нижней жидкостей должны удовлетворять следующим условиям на границе раздела $\Phi(\xi, y) = y - \eta_0 e^{-ik\xi} = 0$:

1. Равенство нулю нормальных составляющих скорости жидкости:

$$(\vec{v}', \vec{n}) = 0, \quad (\vec{v}, \vec{n}) = 0,$$

где в рамках первого приближения $\vec{n} \approx \text{grad } \Phi = ik\eta_0 \vec{i} + \vec{j}$. Получаем следующие соотношения между амплитудами:

$$\begin{aligned} -i\omega'\eta_0 + iA' + B' &= 0, \\ -i\omega\eta_0 + iA + B &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

2. Равенство нулю тангенциальных усилий, которые выражаются через тензор плотности потока импульса:

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ik} - v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = 1, 2.$$

Сила, действующая на единицу площади поверхности, вычисляется по формулам: $F_i = \Pi_{ik} n_k$.

Условиям $F'_\tau = 0, F_\tau = 0$ соответствуют:

$$F'_1 \cdot n_2 - F'_2 \cdot n_1 = 0, \quad F_1 \cdot n_2 - F_2 \cdot n_1 = 0.$$

Учитывая, что в рассматриваемой системе координат

$$\vec{v}' = \left(u_0 + u' - \frac{\omega}{k} \right) \vec{i} + v' \vec{j}, \quad \vec{v} = \left(u - \frac{\omega}{k} \right) \vec{i} + v \vec{j},$$

произведя вычисления и оставаясь в рамках первого приближения, получим:

$$\begin{aligned} F'_\tau &= -\eta' (u'_y + u'_\xi) = 0, & F_\tau &= -\eta (u_y + u_\xi) = 0, \\ \eta' &= v' \rho', & \eta &= v \rho \end{aligned}$$

и соответственно:

$$\begin{aligned} \eta' 2k^2 A' + (\eta' 2k^2 i - \rho' \omega') B' &= 0, \\ \eta 2k^2 A + (-\eta 2k^2 i - \rho \omega) B &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

3. Разница нормальных удельных усилий по разные стороны поверхности раздела должна быть равна усилию поверхностного натяжения, характеризуемого коэффициентом α . В первом приближении это условие запишется так:

$$\begin{aligned} &\Pi'_{22} - \Pi_{22} - \alpha \eta_{\xi\xi} = \\ &= p' - p + g(\rho - \rho') \eta_0 e^{-ik\xi} - 2\eta' v'_y + 2\eta v_y + \alpha k^2 \eta_0 e^{-ik\xi} = 0 \end{aligned}$$

и соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\rho' \omega'}{k} A' - \frac{\rho \omega}{k} A + (\rho - \rho') g \eta_0 + \alpha k^2 \eta_0 - 2\eta' (kiA' + r'_2 B') + \\ + 2\eta (kiA + r_2 B) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Следует заметить, что при записи условий $F'_\tau = F_\tau = 0$ использовались скорости и зависящие от них Π_{ik} не только возмущенные, но и стационарные (конечные), однако, они не вошли в F'_τ и F_τ . Так и должно быть, потому что в случае идеальных жидкостей ($\eta' = 0, \eta = 0$) тангенциальные усилия исчезают. Эти условия показывают, что при $\eta' \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ стремятся к нулю B', B – коэффициенты, характеризующие в решениях быстроспадающие пограничные слои, вносящие наибольший вклад в F'_τ и F_τ .

В дальнейшем рассмотрение будет вестись при малых η' и η для выяснения принципиальной необходимости учета вязкости жидкостей при исследовании устойчивости разрывного течения. В этом случае условие нетривиальности решения системы (26) – (28) для амплитуд A, A', B, B' , в котором сохранены лишь члены первого порядка малости по η', η , запишется следующим образом:

$$\rho' \omega'^2 + \rho \omega^2 - gk(\rho - \rho') - \alpha k^3 - 4ik^2(\eta\omega + \eta'\omega') = 0.$$

Преобразуем это уравнение к более удобному для исследования устойчивости виду. После замены $\lambda = i\omega$ и учета соотношения $\omega' = \omega - u_0 k$ будем иметь:

$$(\rho' + \rho)\lambda^2 + (-2ik\rho'u_0 + 4k^2\eta + 4k^2\eta')\lambda + gk(\rho - \rho') + \alpha k^3 - \rho'k^2u_0^2 - 4ik^3\eta'u_0 = 0. \quad (29)$$

2.5.2. Условия устойчивости

Приведем сначала известные случаи неустойчивости идеальных жидкостей ($\eta = \eta' = 0$):

- при $u_0 = 0$ и в отсутствие вязкости неустойчивость возникает при $\rho < \rho'$,
- в отсутствие силы тяжести и вязкости ($g = 0, \eta = 0$) неустойчивость при любых u_0 – неустойчивость Гельмгольца,
- при $\rho = \rho'$ и $\alpha = 0$ – неустойчивость при любых u_0 (гравитационные эффекты возникают только при различных плотностях),
- условие устойчивости в общем случае двух идеальных жидкостей, получающееся из требования чисто мнимых корней λ в уравнении (29), имеет вид:

$$u_0^2 \leq \frac{\rho + \rho'}{\rho\rho'} \sqrt{\frac{g}{k}(\rho - \rho') + \alpha k}, \quad (30)$$

непосредственно следует неустойчивость для достаточно коротких волн ($\lambda = 2\pi/k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$) в отсутствии поверхностного натяжения $\alpha = 0$.

При $\alpha \neq 0$ устойчивость обеспечивается при всех возможных k . Для получения этого условия устойчивости надо минимизировать (30) по k . В результате имеем:

$$u_0^2 \leq \frac{2(\rho + \rho')}{\rho\rho'} \sqrt{\alpha g(\rho - \rho')}. \quad (31)$$

При этом равенству отвечает возмущение с волновым вектором $k^2 = g(\rho - \rho')/\alpha$.

Подчеркнем, что, чем легче верхняя жидкость, тем устойчивее рассматриваемая система. Условие устойчивости в общем случае уравнения (29) приводится к следующему виду:

$$u_0^2 \leq \frac{2(\eta + \eta')^2}{\rho\eta'^2 + \rho'\eta^2} \sqrt{\alpha g(\rho - \rho')}. \quad (32)$$

Это условие получено методом Гурвица, для чего характеристическое уравнение умножили на комплексно-сопряженное с корнями, комплексно-сопряженными корням исходного уравнения. Полученное в результате уравнение четвертого порядка имеет действительные коэффициенты, и условие устойчивости (32) есть наиболее сильное из неравенств Гурвица.

Рассмотрим частные случаи:

- $\eta \neq 0$. Пусть только верхняя жидкость идеальна ($\eta' = 0$), тогда тангенциальные напряжения на поверхности раздела равны нулю, несмотря на наличие вязкости у нижней жидкости, и возможен разрыв в профиле скорости невозмущенного течения. Задача в этом случае математически корректна. Условие устойчивости будет следующим:

$$u_0^2 \leq \frac{2}{\rho'} \sqrt{\alpha g(\rho - \rho')}. \quad (33)$$

Учет вязкости в нижней жидкости привел к изменению условий устойчивости, сколь бы ни была мала сама вязкость. Значение скорости u_0 , при которой возникает неустойчивость, оказалось меньше, чем в консервативном случае. Этому результату следует отдать предпочтение по сравнению с известным условием устойчивости (30) для идеальных жидкостей (т.е. критическим по Ляпунову случаю). Отметим, что при достижении u_0 значения (31) возбуждаются колебания с нулевой частотой ($\lambda = i\omega = 0$), что соответствует нулевой фазовой скорости относительно системы координат, связанной с нижней жидкостью.

- $\eta' \neq 0$. Пусть теперь только $\eta = 0$. Как и в предыдущем случае, разрыв в профиле скорости стационарного течения возможен. Условие устойчивости будет:

$$u_0^2 \leq \frac{2}{\rho} \sqrt{\alpha g (\rho - \rho')}. \quad (34)$$

Очевидно, что оно отличается от случая идеальных жидкостей и от (33), в особенности при $\rho' \rightarrow 0$. Так, если в предыдущем случае скорость u_0 относительного течения, вызывающая неустойчивость, при $\rho' \rightarrow 0$ стремится к бесконечности, то в данном случае неустойчивость возникает, если скорость u_0 превзойдет наименьшую фазовую скорость волн, распространяющихся в нижней жидкости в отсутствии верхней. Сравнив эти случаи, приходим к заключению, что если вязкость нижней жидкости ($\eta \neq 0, \eta' = 0$) приводит к устойчивости, то вязкость верхней ($\eta' \neq 0, \eta = 0$) является, как и наличие ρ' , причиной неустойчивости.

- $\eta \neq 0, \eta' \neq 0$. Наличие вязкости у обеих жидкостей исключает стационарные решения с разрывом в профиле скоростей. Однако, для общности, рассмотрим гипотетический случай, когда между жидкостями существует некая тонкая прослойка, обеспечивающая отсутствие тангенциальных напряжений. Тогда также возможен разрыв в профиле скорости, и становятся верными уравнение (29) и условие устойчивости (32). Рассмотрим его в частном случае $\rho' = 0$ и запишем в виде:

$$u_0^2 < \left(1 + \frac{\eta}{\eta'}\right)^2 \cdot v_{\phi \min}^2, \quad v_{\phi \min} = 2 \sqrt{\frac{g\alpha}{\rho}},$$

где $v_{\phi \min}$ – минимальная фазовая скорость распространения волн в нижней жидкости. Отсюда видно, что условие устойчивости существенно зависит от вязкости верхней и нижней жидкостей, причем не от самих величин η и η' , сколь бы малы они ни были, а от их отношения. Заметим, что в отсутствие вязкости нижней жидкости ($\eta = 0$) неустойчивость возникает, как только u_0 превзойдет минимальную фазовую скорость, а при существенном отношении η/η' величина критической скорости сильно возрастает. Отметим полную аналогию данных результатов с результатами исследования устойчивости гибкого вращающегося вала, где отношению η/η' соответствует отношение трения вала о внешнюю среду к его внутреннему трению h_e/h_i , являющемуся причиной неустойчивости.

В задаче с валом ограничивающее условие на угловую скорость вращения вала будет выглядеть следующим образом:

$$\Omega < \omega \left(1 + \frac{h_e}{h_i} \right).$$

Видно, что при $h_e/h_i \gg 1$, т.е. когда, либо $h_i \approx 0$ или $h_e \gg h_i$ значение Ω превосходит критическое значение $\Omega = \omega$ потери устойчивости вала, найденное с учетом только внутреннего трения. Таким, образом, в данном случае диссипативные силы, отвечающие внешнему трению, введенному во вращающейся системе координат, стабилизируют систему.

2.5.3. Механизм возникновения неустойчивости

Для выяснения физического смысла механизма возникновения неустойчивости рассмотрим задачу с иной точки зрения. Характеристическому уравнению (29) поставим в соответствие линейную систему с обобщенными координатами $z_1, z_2, (z_1 + iz_2 = z)$, описываемую двумя сопряженными уравнениями:

$$\begin{aligned} (\rho + \rho')\ddot{z}_1 &= -2ku_0\rho'\dot{z}_2 - 4k^2(\eta + \eta')\dot{z}_1 - s(k, u_0)z_1 - 4k^3u_0\eta'z_2, \\ (\rho + \rho')\ddot{z}_2 &= 2ku_0\rho'\dot{z}_1 - 4k^2(\eta + \eta')\dot{z}_2 - s(k, u_0)z_2 - 4k^3u_0\eta'z_1. \end{aligned}$$

где

$$s(k, u_0) = gk(\rho - \rho') + \alpha k^3 - \rho'k^2u_0^2.$$

Состояние равновесия этой системы $z_1 = z_2 = 0$, потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{1}{2}s(k, u_0)(z_1^2 + z_2^2).$$

Формально, эту систему можно рассматривать как некоторую механическую систему, находящуюся под действием гироскопических, диссипативных, потенциальных и циркуляционных сил – соответственно, первые, вторые, третьи и четвертые члены правых частей уравнений. Отметим сходную структуру матриц сил данной системы со структурой матриц в задаче с вращающимся валом. Роль угловой скорости вращения, определяющей величину гироскопических сил и центробежных сил инерции, играет параметр ku_0 . Такой вид описания системы позволяет просто исследовать её устойчивость в отсутствии циркуляционных сил (т.е. в случае $\eta' = 0$), опираясь лишь на общие утверждения теории устойчивости – теоремы Томсона. Так, если к системе, находящейся под действием гироскопических и потенциальных сил с минимумом потенциальной энергии в состоянии равновесия ($s(k, u_0) > 0$) добавляются силы диссипации, то состояние равновесия становится асимптотически устойчивым, если же $s(k, u_0) < 0$, то

диссипативные силы разрушают устойчивость, если она была возможна за счет гироскопических сил. Таким образом, неустойчивость возникает с ростом u_0 при $s(k, u_0) = 0$ и обусловлена наличием вязкости η . Условия асимптотической устойчивости:

$$\rho' u_0^2 < \frac{g}{k}(\rho - \rho') + \alpha k,$$

$$u_{0_{min}}^2 < \frac{2}{\rho'} \sqrt{\alpha g(\rho - \rho')}.$$

Следует отметить, что уравнение (29) было получено с использованием соотношения $\omega' = \omega - ku_0$ и содержит только ω ($\lambda = i\omega$) – частоту колебаний возмущения относительно системы координат, связанной с нижней жидкостью. Если же связать систему координат с верхней жидкостью и обозначить $\lambda' = i\omega'$, то будем иметь:

$$(\rho + \rho')\lambda'^2 + 2ku_0\rho\lambda' + 4k^2(\eta + \eta')\lambda' + \alpha k^3 - k^2u_0^2\rho + 4ik^3u_0\eta = 0.$$

В этой системе уже нижняя жидкость имеет постоянную составляющую u_0 скорости движения, и поэтому, в гироскопическую и центробежную силу входит плотность ρ нижней жидкости, а в циркуляционную – её вязкость. Теперь также просто найти условия устойчивости, но уже при $\eta = 0$. Они будут такими:

$$\rho u_0^2 < \frac{g}{k}(\rho - \rho') + \alpha k,$$

$$u_{0_{min}}^2 < \frac{2}{\rho} \sqrt{\alpha g(\rho - \rho')}.$$

Условия устойчивости, полученные разными способами, совпали.

Таким образом, физический смысл условий устойчивости поверхности, разделяющей две жидкости (газ-жидкость) состоит в самом факте наличия вязкости жидкостей. Условия устойчивости получены в линейной постановке задачи. Это простое объяснение возбуждения ветровых волн, предложенное Г.Г. Денисовым [1,2], существенно отличается от принятых в настоящее время [3] сложных нелинейных механизмов нарушения устойчивости поверхности, разделяющей жидкости.

2.6. О влиянии диссипации на устойчивость ограниченных систем

На примере натянутой струны, находящейся в движущейся среде, покажем, что условия устойчивости безграничной и ограниченной систем принципиально различны, а при определенных условиях обнаруживается противоречие между формальной устойчивостью рассматриваемой системы по Ляпунову и практической устойчивостью.

Рассмотрим поперечные движения безгранично протяженной натянутой струны, находящейся в движущейся со скоростью v вязкой среде. В системе координат, связанной со струной, уравнение для её отклонений от равновесного положения $u(x, t)$ имеет вид:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + h(u_t + v u_x) = 0. \quad (35)$$

Параметр a^2 характеризует скорость распространения поперечных волн и равен натяжению струны, отнесенному к её плотности. Стоящее при h выражение отвечает силе диссипации, введенной в связанной с движущейся средой системе координат, в которой она имеет вид $-h u_t(\xi, t)$, где $\xi = x + vt$.

Решение уравнения (35) представляется бегущей вдоль x волной вида:

$$u(x, t) = A e^{\gamma t} \sin(kx - \omega t).$$

После подстановки $u(x, t)$ в (35) приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \omega^2 + a^2 k^2 + \gamma h &= 0, \\ -2\gamma\omega - h\omega + hvk &= 0. \end{aligned}$$

Полагая диссипацию h и параметр γ малыми, находим:

$$\omega = \pm ak, \quad \gamma = \frac{h}{2} \left(\frac{v}{a} - 1 \right).$$

Таким образом, при $v < a$ система асимптотически устойчива, а при движении вязкой среды в сторону распространения волны со скоростью, большей скорости волны a , система из-за наличия вязкой среды неустойчива при сколь угодно малом k .

Смысл этого результата просто понять с помощью общих теорем теории устойчивости, подобно тому, как ранее рассматривалась устойчивость ряда систем. В системе координат, связанной с вязкой средой, уравнение (35) принимает вид:

$$u_{tt} - 2u_{t\xi} + (v^2 - a^2)u_{\xi\xi} + hu_t = 0.$$

Отыскивая его решение в виде волны $u(x, t) = \varphi(t) e^{ikx}$ получим комплексное уравнение в обыкновенных производных:

$$\ddot{\varphi} - 2ik\dot{\varphi} + (a^2 - v^2)\varphi + h\varphi = 0.$$

Оно соответствует двум действительным уравнениям, где вторые члены можно интерпретировать как гироскопические, третьи – потенциальные, четвертые – диссипативные силы.

При $v > a$ потенциальная энергия струны в этой системе координат перестает быть минимальной. В силу теорем Томсона, гироскопические силы в этом случае при $h = 0$ стабилизируют струну, но её устойчивость разрушается введением диссипативных сил. Неустойчивость проявляется в виде волн, бегущих в направлении движения вязкой среды.

Отметим, что исследование устойчивости с применением теорем Томсона обладает большей общностью, в частности, не требует малости h и конкретных вычислений.

Кроме возмущений в виде безграничных синусоидальных волн e^{ikx} , представляют интерес локализованные в ограниченной области начальные возмущения. Заметим, что при $h \ll 1$ уравнение (35) допускает решение в виде бегущей волны произвольного профиля, умноженной на экспоненциальную функцию. Для того, чтобы убедиться в этом [5] представим $u(x, t)$ в виде:

$$u = f(x - at) \exp\left[-\frac{h}{2}t + \frac{hv}{2a^2}x\right]$$

и подставим в (35).

С точностью до величины $\sim h^2$ имеем:

$$f_{tt} - a^2 f_{xx} = 0,$$

что и доказывает справедливость сделанного утверждения. В частности, $u(x, t)$ может быть изолированной волной. Переход в связанную с ней систему координат выполняется заменой x на $x_b + at$:

$$u(x_b, t) = f(x_b) \exp\left[\frac{hv}{2a^2}x_b + \frac{h}{2}\left(\frac{v}{a} - 1\right)t\right].$$

Отсюда следует, что при $v < a$ изолированная волна затухает, но при движении среды со скоростями, большими скорости a , возмущение, перемещаясь по струне, экспоненциально возрастает. Отметим, что рост возмущения происходит лишь в изолированной области, занятой движущейся волной. Такой вид неустойчивости называют *сдвиговой или конвективной неустойчивостью*.

Сказанное имеет отношение и к ограниченным системам. Возмущение рассмотренного вида, возникающее у одной из границ системы, возрастает, перемещаясь в направлении движения вязкой среды, вплоть до момента отражения от другой границы, и это происходит независимо от вида граничных условий. Отраженная изолированная волна, как видно из показателя экспоненты при $v < 0$, затухает существенно интенсивнее, чем нарастает прямая волна. В результате возникающее начальное возмущение затухает и, следовательно, можно говорить об устойчивости по Ляпунову рассмотренной ограниченной системы, несмотря на первоначальный рост возмущения при его движении вправо. Но при достаточно большой длине струны l и скорости «ветра» v возрастание возмущения по отношению к начальному при движении прямой волны будет весьма большим:

$$\sim \exp \left[\frac{h(v - a)l}{2a^2} \right].$$

В соответствии с понятием устойчивости по Ляпунову эта величина определяет отношение допустимого (при любом t) отклонения ε к начальному отклонению δ (очень малого). При большом l реальные случайные возмущения в системе могут приводить к отклонениям, большим δ . В этом случае при формальном выполнении условий устойчивости по Ляпунову следует утверждать о *практической неустойчивости*.

Несколько усложним систему (35) и рассмотрим её устойчивость с иной точки зрения. Свяжем струну со сплошным однородным линейно упругим основанием, что выразится дополнительным слагаемым в (35) αu , где α – коэффициент упругости основания. Концы струны закреплены так, что

$$u = 0 \text{ при } x = 0, x = l. \quad (36)$$

Отыскивая поперечные отклонения струны в виде $u \sim \exp(pt + \lambda x)$, получим из уравнения её движения:

$$p^2 - a^2\lambda^2 + hv\lambda + hp + \alpha = 0. \quad (37)$$

Нетрудно убедиться, что решение задачи, удовлетворяющее условиям (36) в точке $x = 0$, имеет вид:

$$u = A[\exp(\lambda_1 x) - \exp(\lambda_2 x)]\exp(pt). \quad (38)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{hv}{2a^2} \pm \sqrt{\frac{h^2v^2}{4a^4} + \frac{p^2 + hp + \alpha}{a^2}}.$$

При жестком закреплении и второго конца струны для $u(l, t)$, должно выполняться условие $(\lambda_1 - \lambda_2)l = 2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots$), из которого следует характеристическое уравнение:

$$p^2 + hp + \alpha + \frac{h^2 v^2}{4a^2} + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 = 0.$$

Отсюда заключаем, что при любой длине струны l вязкость движущейся среды h обеспечивает асимптотическую устойчивость системы, что находится в соответствии с полученным ранее результатом.

Подчеркнем, что устойчивость безграничных и ограниченных систем принципиально отличаются. Так, при движении вязкой среды со скоростью v вдоль безграничной струны неустойчивость возникает, как только v превзойдет скорость распространения волн. В случае же конечной длины струны l наличие вязкой среды приводит к асимптотической устойчивости при сколь угодно больших l и v .

Обратим внимание на то, как сильно поведение системы зависит от вида начальных возмущений, среди которых есть растущие до бесконечности в безграничных системах и до очень больших в ограниченных. В силу сказанного, в ограниченных, но большой протяженности, системах возникает противоречие в трактовке их устойчивости. Формальная устойчивость по Ляпунову этих систем налагает на начальные условия столь жесткие ограничения, что они не могут быть обеспечены практически.

Естественно, что рассмотренная система является не единственным примером противоречия между понятиями формальной и практической устойчивости. Например, в работе Денисова Г.Г. «О вращении твердых тел в сопротивляющейся среде» [6] показано, что формально устойчивым при некоторых условиях оказалось вращение твердого тела в сопротивляющейся среде вокруг оси со средним моментом инерции.

Литература

1. Денисов Г.Г. К вопросу об устойчивости поверхности тангенциального разрыва между жидкостями // Механика жидкости и газа. 2001. №1. С. 182-184.
2. Денисов Г.Г. Применение теоремы Кельвина к исследованию устойчивости параллельных течений жидкости // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2(21). С. 44-51.
3. Физическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1988. Т.1. 704 с.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем // М.: Наука. 1979. 394 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
6. Денисов Г.Г. О вращении твердых тел в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. 1989. №4. С.37-43.
7. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике: Учеб. пособие: Для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 400 с.
8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. – 36-е изд., исправл. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 448 с.
9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 2003, 304 с.
10. Денисов Г.Г., Новиков В.В. К задаче о влиянии диссипации на устойчивость ограниченных упругих систем // Вестник ННГУ. Механика. 2002. Вып. 1 (4). С. 5-9.
11. Денисов Г.Г., Новиков В.В. К задаче о динамике транспортной машины // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 1(20). С. 30-34.
12. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О влиянии диссипации на устойчивость механических систем // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 2 (24). С. 34-53.
13. Денисов Г.Г., Новиков В.В. Малые факторы и динамика механических систем // Вестник ННГУ. Механика. 2001. Вып. 1 (3). С.13-16.
14. Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е., Тамасян Г.Ш. Стабилизация программных движений при полной и неполной обратной связи: Учебное пособие. – 3-е изд., стер., - СПб.: Издательство «Лань», 2017. 128 с.

15. Жабко А.П., Котина Е.Д., Чижова О.Н. Дифференциальные уравнения и устойчивость: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 320 с.
16. Любимов В.В. Математическая теория устойчивости с приложениями: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань». 2018. – 180 с.
17. Александров А.Ю., Александрова Е.Б., Екимов А.В., Смирнов Н.В. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости: Учебное пособие. – 3-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 160 с.

Валерий Вячеславович **Новиков**
Любовь Николаевна **Февральских**

СТРУКТУРА СИЛ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.