МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.В. Кувыкина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Часть 1

Практикум

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 39.03.01 «Социология»

Нижний Новгород
2022

УДК 519.21
ББК В171
К88

К88 Кувыкина Е.В. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА». Часть 1. Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 26 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **В.И. Ерофеев**

Приведены основные теоретические сведения, примеры решения задач и рекомендации к решению задач по темам: «Пространство элементарных исходов. Случайные события» и «Классическое определение вероятности». Практикум содержит также задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для студентов факультета социальных наук ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 39.03.01 «Социология».

УДК 519.21
ББК В171

Оглавление

Введение

Данное пособие соответствует учебной программе дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов факультета социальных наук ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 39.03.01 «Социология». Оно представляет собой сборник задач по темам: «Пространство элементарных исходов. Случайные события», «Классический подход к определению вероятности», усвоение которых представляет значительную трудность для студентов. Практикум содержит основные теоретические сведения, примеры решения типовых задач, методические рекомендации для решения задач, а также задачи для самостоятельного решения по указанным темам.

1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ, СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Основные понятия и определения

Простой неразложимый результат эксперимента называется элементарным исходом и обозначается ω. Элементарные исходы обладают следующими свойствами:

- эксперимент заканчивается наступлением какого-либо элементарного исхода;

- никакие два элементарных исхода не могут произойти одновременно.

Совокупность всех элементарных исходов образует пространство Ω элементарных исходов.

Случайные события, изучаемые в рамках данного эксперимента, обозначаются латинскими буквами A, B, C,… и представляют собой подмножества пространства элементарных исходов. Элементарный исход, при наступлении которого происходит событие A, называется благоприятствующим данному случайному событию. Пространство Ω также можно рассматривать как случайное событие. Ему благоприятствуют все элементарные исходы, следовательно, оно всегда наступает при проведении эксперимента и называется достоверным.

Говорят, что событие A влечет B (A   B), если B происходит всегда, когда происходит A.

Если A   B и B   A, то A=B.

Событие $\bar{A}$ называется противоположным событию A, если $\bar{A}$ происходит всегда, когда не происходит A. Событие противоположное Ω называется невозможным и обозначается   , т.е. . $\overline{\Omega} =$. Достоверное событие Ω всегда наступает при проведении эксперимента, следовательно, невозможное событие никогда не наступает и нет элементарных исходов, благоприятствующих .

Определим основные теоретико-множественные операции для случайных событий.

Событие C называется объединением событий A и B ($C= AUB$), если C происходит всегда, когда происходят события A или B, или A и B одновременно. Если A B, то $AUB=B$

Событие C называется пересечением событий A и B ($C= A\cap B$), если C происходит только тогда, когда события A и B происходят одновременно. Если A B, то $A\cap B=A$.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.

Из колоды в 36 карт наудачу выбирают 2 карты. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={ обе карты тузы}, B={только одна из карт туз}, $A\cap B$, AUB.

Решение.

Перенумеруем карты в колоде так, что номера 1 - 4 будут иметь тузы, 5 - 8 короли и т.д. Тогда результатом каждого эксперимента будут два числа из множества $\{1,2,...,36\}$ и, следовательно, $\omega_i=\{x,y\}$, где $x,y \in\{1,2,...,36\}$, $x\neq y$. Легко убедиться, что ω_i удовлетворяют требованиям, предъявляемым к элементарным исходам. Таких элементарных исходов конечное число и они могут быть пронумерованы. Заметим, что в данной задаче не важно в какой последовательности извлекаются карты. Пространство элементарных исходов будет иметь вид

$$\Omega=\{\omega_i=\{x,y\} : x,y\in\{1,2,...,36\},\ x\neq y,\ i \in \{1,2,..., C_{36}^{2}\}\}.$$

Запишем искомые события как подмножества Ω

$A=\{\omega_i \in \Omega : x,y \in\{1,2,3,4\}\}$,

$B=\{\omega_i \in \Omega : x \in\{1,2,3,4\},\ y \in\{5,6,..,36\}\}$,

$A\cap B=$ - невозможное событие,

$AUB=\{\omega_i \in \Omega : x \in\{1,2,3,4\},\ y \in\{1,2,..,36\}\}=\{$хоты бы одна карта туз $\}$.

Задача 2.

Из шестизначных телефонных номеров, не содержащих одинаковых цифр, наудачу выбирается один. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={цифры следуют в порядке возрастания}, B={первая цифра меньше последней}, $A\cap B$, AUB.

Решение.

Элементарным исходом данного эксперимента будет являться конкретный телефонный номер, не содержащий одинаковых цифр, т.е.

$\omega_i=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, где $x_j \in\{0,1,2,...,9\}$, $x_j \neq x_k$, при $j \neq k$, $j,k \in\{1,2,...,6\}$. Заметим, что в телефонном номере последовательность цифр важна, это надо учитывать при вычислении количества элементарных исходов. Нетрудно видеть, что ω_i удовлетворяют требованиям, предъявляемым к элементарным исходам. Тогда

$$\Omega=\{\omega_i=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}: x_j \in\{0,1,2,...,9\},\ x_j \neq x_k, \text{ при } j \neq k,\ j,k \in\{1,2,...,6\},$$

$$i \in\{1,2,..., A_{10}^6\}\}.$$

Запишем искомые события как подмножества пространства Ω элементарных исходов

$A=\{\omega_i \in \Omega : x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6\}$,

$B=\{\omega_i \in \Omega : \ x_1<x_6 \}$,

нетрудно видеть, что $A \quad B$,и, следовательно,

$$A \cap B = A = \{\omega_i \in \Omega : x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6 \}$$

$$A \cup B = B = \{\omega_i \in \Omega : \ x_1<x_6 \}.$$

Задача 3.

В лифт семиэтажного дома входят два человека, которые могут выйти на любом этаже, начиная со второго. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={первый пассажир выйдет на пятом этаже}, B={оба пассажира выйдут на одном этаже}, $A \cap B$, $A \cup B$.

Решение.

В качестве элементарного исхода данного эксперимента выберем $\omega_i=\{x_1,x_2\}$, где x_j - номер этажа, на котором выйдет j-ый пассажир, $x_j \in \{2,...,7\}$, $j=1,2$. Числа x_1,x_2 представляют собой упорядоченный набор, т.к. это требуется для записи события А. Легко убедиться, что ω_i удовлетворяют требованиям, предъявляемым к элементарным исходам. Пространство Ω элементарных исходов будет иметь вид

$$\Omega=\{\omega_i=\{x_1,x_2\}: x_j \in \{2,...,7\}, j=1,2, i \in \{1,2,...,36\}\}.$$

Представим искомые события как подмножества пространства элементарных исходов

$A=\{\omega_i \in \Omega : x_1=5 \}$,

$B=\{\omega_i \in \Omega : \ x_1=x_2 \}$,

$A \cap B = \{\omega_i \in \Omega : x_1=x_2=5 \} = \{\{5,5\}\}$

$A \cup B = \{\omega_i \in \Omega : \ (x_1=5) \text{ или } (x_1=x_2) \}.$

Задача 4.

Монету подбрасывают до появления первого «Герба». Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={произведено не более 6 бросков}, B={произведено четное число бросков}, A∩B, AUB.

Решение.

Рассмотрим возможные результаты эксперимента: если при первом броске выпал «Герб», то эксперимент закончен и был произведен только один бросок, если при первом броске выпала «Цифра», производят следующий бросок. Если при втором броске выпал «Герб», то эксперимент закончен за 2 броска и т.д. Таким образом, определив элементарный исход как число произведенных бросков, можно полностью восстановить ход эксперимента. Ситуации, когда эксперимент не заканчивается за конечное число бросков, поставим в соответствие элементарный исход ω^*. Очевидно, что требованиям к элементарным исходам в данном случае будут выполняться. Теперь

$\Omega=\{\omega_i=i : i \geq 1, \omega^*\}$.

Отметим, что, в отличие от предыдущих задач, пространство Ω содержит счетное число элементов.

Запишем искомые события как подмножества Ω

$A=\{\omega_i \in \Omega : i \leq 6 \}$,

$B=\{\omega_i \in \Omega : i=2k, k\geq 1\}$,

$A\cap B = \{\omega_i \in \Omega : i \in \{2,4,6\}\}$

$AUB = \{\omega_i \in \Omega : (i \leq 6)$ или $(i=2k, k\geq 4) \}$.

1.3. Задачи с рекомендациями к решению

Задача 1.

Игральную кость подбрасывают 2 раза. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={при первом броске выпало четное число очков}, B={при обоих бросках выпало одинаковое число очков}, A∩B, AUB.

Рекомендации

В качестве результата эксперимента можно рассматривать число очков, выпавших на верхней грани кубика при каждом броске. Тогда $\omega_i=\{x_1,x_2\}$, где $x_j \in\{1,...,6\}$, j=1,2 и x_j - число очков, выпавших при j-ом броске. Заметим, что множество $\{x_1,x_2\}$ является упорядоченным, т.к. это необходимо для описания события А. Убедитесь, что ω_i, $i \in\{1,...,36\}$ удовлетворяют требованиям к элементарным исходам.

Задача 2.

Четыре человека сдали в гардероб свои шляпы, а гардеробщица перепутала номерки и повесила шляпы в случайном порядке. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={каждый получит свою шляпу}, B={ровно три человека получат свои шляпы}, $A\cap B$, $A\cup B$.

Рекомендации

Результатом эксперимента на содержательном уровне можно считать конкретное распределение шляп среди людей. Перенумеруем людей и соответствующие им шляпы цифрами 1,2,3,4. Тогда элементарный исход ω_i можно представить в виде $\omega_i=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $x_j \in\{1,2,3,4\}$, где x_j - номер шляпы, которую получил человек с номером j . Количество шляп соответствует количеству людей и каждый человек получает одну шляпу, поэтому $x_j \neq x_k$, при $j \neq k$, $j,k \in\{1,2,3,4\}$. Каждый исход $\omega_i = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ представляет собой упорядоченное множество. Заметим, что событие B никогда не может произойти при проведении эксперимента, т.к. , если три человека получили свои шляпы, то и четвертый с необходимостью тоже получит свою. Следовательно, B= .

Задача 3.

Из урны, содержащей 5шаров, с номерами от 1 до 5, по схеме случайного выбора с возвращением 5 раз извлекают шар. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={при четных извлечениях достали шары с четными номерами}, B={первым достали шар с номером 1}, A∩B, AUB.

Рекомендации

В результате проведения эксперимента получим последовательность из пяти цифр, которые принадлежат множеству {1,2,3,4,5}. Таким образом, $\omega_i = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $x_j \in \{1,2,3,4,5\}$, где x_j - номер шара при j-ом извлечении, $j \in \{1,2,3,4,5\}$. Следует рассматривать упорядоченные наборы $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, чтобы можно было описать искомые события.

Задача 4.

Из урны, содержащей 5 шаров, с номерами от 1 до 5, последовательно достают все шары. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={номера шаров идут в порядке убывания}, B={первым извлечен шар с номером 5}, A∩B, AUB.

Рекомендации

Данная задача аналогична задаче 2. Результатом проведения эксперимента будет последовательность из пяти цифр из множества {1,2,3,4,5}, причем, результаты двух разных экспериментов могут отличаться лишь порядком, в котором цифры расположены. Следовательно, $\omega_i = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $x_j \in \{1,2,3,4,5\}$,$x_j \neq x_k$, при $j \neq k$, $j,k \in \{1,2,3,4,5\}$ где x_j - номер шара при j-ом извлечении.

Задача 5.

В школьной библиотеке имеется четырехтомник Д.Лондона. Библиотеку посещают 3 ученика 6-ого класса.. Построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать события A={все три ученика прочитают том с одним и тем же номером}, B={ все три ученика прочитают том с номером 2}, A∩B, AUB.

Рекомендации

Перенумеруем тома произведений Д.Лондона цифрами 1,2,3,4 и учеников цифрами 1,2,3. Теперь результат эксперимента на содержательном уровне можно представить как набор из трех цифр, которые обозначают номера томов, прочитанных первым, вторым и третьим учениками соответственно. Таким образом, элементарный исход $\omega_i = \{x_1,x_2,x_3\}$, $x_j \in \{1,2,3,4\}$, где x_j - номер тома, прочитанного j-ым учеником, $j \in \{1,2,3\}$. Эта модель предполагает, что наборы $\{x_1,x_2,x_3\}$ являются упорядоченными. В данной задаче можно рассмотреть неупорядоченные наборы $\{x_1,x_2,x_3\}$, при этом изменится смысл переменных x_j, $j \in \{1,2,3\}$.

1.4. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1-25 построить пространство Ω элементарных исходов для данного эксперимента и записать указанные события события.

1. Из колоды в 36 карт по схеме выбора с возвращением наудачу выбирают 3 карты. События A={ три раза извлекли бубновый туз}, B={все три карты тузы}, A∩B, AUB.

2. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набирает их наудачу, помня только, что они четные и разные. События A={ номер набран верно}, B={только одна из цифр набрана верно}, A∩B, AUB.

3. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набирает их наудачу, помня только, что они одинаковые. События A={ номер

набран верно}, B={номер набран неверно}, A∩B, AUB.

4. Три игральные кости подбрасывают один раз. События A={сумма выпавших очков равна 12}, B={на всех костях выпали грани с четными номерами}, A∩B, AUB.

5. Из колоды в 36 карт без возвращения извлекают две карты. События A={среди выбранных карт есть хотя бы один туз}, B={среди выбранных есть хотя бы одна карта бубновой масти}, A∩B, AUB.

6. Три письма раскладывают по трем конвертам. События A={все письма попадут в свои конверты}, B={только одно письмо попадет в свой конверт}, A∩B, AUB.

7. Четыре письма раскладывают по четырем конвертам. События A={ни одно письмо не попадет в свой конверт}, B={не более двух писем попадут в свои конверты}, $A \cap B$, $A \cup B$.

8. Четыре человека сдали в гардероб свои шляпы, а гардеробщица перепутала номерки и повесила шляпы в случайном порядке. События A={никто не получит свою шляпу}, B={только первый человек получит свою шляпу}, $A \cap B$, $A \cup B$.

9. Из урны, содержащей 10 шаров с номерами от 1 до 10, по схеме выбора с возвращением извлекают 3 шара. События A={три раза достали шар с одним и тем же номером}, B={первый шар имеет нечетный номер}, $A \cap B$, $A \cup B$.

10. Из урны, содержащей 10 шаров с номерами от 1 до 10, последовательно извлекают все шары. События A={последним извлечен шар с четным номером}, B={четные и нечетные номера шаров чередуются}, $A \cap B$, $A \cup B$.

11. Из урны, содержащей 3 шара, с номерами от 1 до 3, по схеме случайного выбора с возвращением 5 раз извлекают шар. События A={ни разу не достали шар с номером 1}, B={ни разу не достали шар с номером 3}, $A \cap B$, $A \cup B$.

12. Из урны, содержащей 5шаров, с номерами от 1 до 5, по схеме случайного выбора с возвращением 3 раза извлекают шар. События A={номера шаров идут в порядке возрастания}, B={номера всех шаров различны}, $A \cap B$, $A \cup B$.

13. Три человека входят в лифт девятиэтажного дома. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. События A={все выйдут на разных этажах}, B={все выйдут на четных этажах}, $A \cap B$, $A \cup B$.

14. Три человека входят в лифт семиэтажного дома. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная с третьего. События A={все выйдут на одном этаже}, B={все выйдут на нечетных этажах}, $A \cap B$, $A \cup B$.

15. Из урны, содержащей 10 шаров, с номерами от 1 до 10, по схеме случайного выбора без возвращения извлекают 5 шаров. События A={все шары имеют нечетные номера}, B={последним извлечен шар с номером 5}, $A \cap B$, $A \cup B$.

16. Три друга, имеющие обувь одного размера и фасона, обуваются в темноте. События A={каждому достанется его пара ботинок}, B={каждому достанется один левый и один правый ботинок}, $A \cap B$, $A \cup B$.

17. Стрелок производит 4 выстрела по мишени. События A={стрелок поразил мишень хотя бы один раз}, B={ имеется ровно 2 попадания}, $A \cap B$, $A \cup B$.

18. При неограниченном запасе боеприпасов стреляют в цель до первого попадания. События A={потребовалось не более пяти выстрелов}, B={цель поражена при четвертом выстреле}, $A \cap B$, $A \cup B$.

19. Подбрасывают игральный кубик 3 раза. События A={единица выпала при двух бросках}, B={выпали все нечетные грани}, $A \cap B$, $A \cup B$.

20. На полке в случайном порядке расставлено 10 книг, среди которых имеется трехтомник Чехова. События A={тома Чехова стоят рядом}, B=

={тома Чехова стоят рядом в порядке возрастания номера тома}, $A \cap B$, $A \cup B$.

21. Два человека входят в лифт девятиэтажного дома. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная с третьего. События A={пассажиры выйдут на разных этажах}, B={пассажиры выйдут на четных этажах}, $A \cap B$, $A \cup B$.

22. Четыре человека входят в лифт семиэтажного дома. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. События A={все выйдут на одном и том же этаже}, B={все выйдут на этажах с нечетными номерами}, $A \cap B$, $A \cup B$.

23. Производятся последовательные испытания 6-ти приборов на надежность. Каждый последующий прибор испытывают только в том случае, если предыдущий исправен. События A={испытано 4 прибора}, B={испытано четное число приборов}, $A \cap B$, $A \cup B$.

24. Подбрасывают игральную кость, если выпало нечетное число очков, то эксперимент закончен, если выпало четное число очков, то подбрасывают монету. События A={выпал «Герб»}, B={выпало не менее 4-х очков}, $A \cap B$, $A \cup B$.

25. Среди 30 экзаменационных вопросов 20 «хороших». Билет содержит 3 вопроса. События A={студент знает не менее 2-х вопросов}, B={студент знает ровно 2 вопроса}, $A \cap B$, $A \cup B$.

2. КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТИ

2.1. Классическое определение вероятности

Пусть выполняются следующие постулаты:

- пространство элементарных исходов Ω конечно (постулат конечности);

- все элементарные исходы имеют равные шансы произойти (постулат равновозможности),

тогда вероятность события А определяется по формуле

$$P(A)=|A|/|\Omega|,$$

где $|\Omega|$ - общее число элементарных исходов, $|A|$ - число исходов, благоприятствующих событию А.

Любому статистически устойчивому эксперименту с конечным пространством Ω элементарных исходов можно поставить в соответствие урновую схему, т.е. заменить реальный эксперимент процессом извлечения предметов из урны. При этом выбор может осуществляться с возвращением и без возвращения. Порядок, в котором извлекаются предметы, может быть важен или не важен. Используем урновые схемы для вычисления $|\Omega|$.

Пусть M – общее число объектов в урне, n – объем выборки.

Порядок\Выбор	С возвращением	Без возвращения
Порядок важен	M^n	A_M^n
Порядок не важен	Больше шансов считать равновероятными упорядоченные исходы	C_M^n

Замечание: если выбор производится с возвращением, то равновозможными будут только упорядоченные исходы.

2.2. Гипергеометрическая схема

Среди задач, решаемых с помощью классического подхода, важную роль играют задачи на гипергеометрическую формулу. Общая постановка такой задачи имеет вид: из N объектов, среди которых M объектов обладают качеством, по схеме выбора без возвращения выбирается n штук. Пусть случайное событие A заключается в том, что ровно m элементов выборки обладают качеством, тогда

$$P(A)=C_M^m \quad C_{N-M}^{n-m} / C_N^n$$

2.3. Примеры решения задач

Задача 1.

Из урны, содержащей 10 шаров с номерами от 1 до 10, по схеме выбора с возвращением извлекают 3 шара. События A={три раза достали шар с одним и тем же номером}

Решение

Использование классического определения вероятности предполагает построение пространства Ω элементарных исходов и представление случайного события как подмножества Ω. В качестве элементарного исхода $\omega_i=\{x_1,x_2,x_3\}$, $x_j \in\{1,...,10\}$, где x_j - номер шара при j-ом извлечении, $j \in \{1,2,3\}$. В дальнейшем для удобства решения задач, будем использовать следующие обозначения: $\omega_i=(x_1,x_2,x_3)$, если порядок важен, и $\omega_i=[x_1,x_2,x_3]$, если не важен. В данной задаче порядок важен и , следовательно, Ω запишется в виде

$$\Omega=\{\omega_i=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6): x_j \in\{1,...,10\}, i \in\{1,2,...,10^3\}\}.$$

Тогда $A=\{\omega_i \in \Omega : x_1=x_2= x_3\}$.

Получаем, что $|\Omega|=10^3$, $|A|=10$.

Следовательно, $P(A)=|A|/|\Omega|=0{,}01$.

Задача 2.

Среди 15 изделий 3 бракованные. Наудачу отбирают 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них будет по крайней мере одно бракованное.

Решение

В данной задаче общее количество изделий N=15, число объектов, обладающих качеством (они бракованные), M=3, по схеме выбора без возвращения отбирают n=5 штук, порядок, в котором отбираются изделия не важен. Таким образом, данная задача является задачей на гипергеометрическую формулу с параметрами N=15, M=3, n=5, $m \geq 1$. Параметр m задан в виде неравенства, поэтому для вычисления P(A) применим формулу

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}),$$

где $\overline{A}$ - событие противоположное A, $\overline{A}$={бракованных изделий среди выбранных нет}. Вероятность P($\overline{A}$) найдем по гипергеометрической формуле с параметрами N=15, M=3, n=5, m = 0

$P(\overline{A}) = C_M^m \quad C_{N-M}^{n-m} / C_N^n = C_3^0 \quad C_{12}^5 / C_{15}^5$=(12!   5!   10!)/(5!   7!   15!)

Задача 3.

Среди 25 экзаменационных билетов 5 «счастливые». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятности следующих событий A={первый студент взял «счастливый» билет}, B={второй студент взял «счастливый» билет}. Одинаковы ли у студентов шансы взять «счастливый» билет? Проверьте свою интуицию.

Решение

В данной задаче все билеты можно разделить на две группы: счастливые и нет, выбор производится без возвращения, но гипергеометрическая формула в данном случае не применима, т.к. порядок, в котором извлекаются билеты важен. Поэтому для вычисления вероятностей событий построим пространство Ω элементарных исходов.

Перенумеруем билеты так, что номера 1 - 5 будут иметь «счастливые» билеты, а номера 6 - 25 остальные. Элементарным исходом ω_i эксперимента будет упорядоченная пара (x_1,x_2), где x_j - номер билета, доставшегося j-ому студенту, j= 1,2 и

$\Omega=\{\omega_i=(x_1,x_2): x_1,x_2 \in\{1,2,...,25\}, x_1 \neq x_2, i \in\{1,2,...,25 \quad 24\}\} \quad \rightarrow \quad |\Omega| = 25 \quad 24$

Запишем события, вероятности которых надо вычислить, как подмножества Ω

$A=\{\omega_i \in \Omega : x_1 \in \{1,...,5\}\}$ $\rightarrow$ $|A| = 5\ \ 24$

$B=\{\omega_i \in \Omega : x_2 \in \{1,...,5\}\}$ $\rightarrow$ $|B| = 5\ \ 4+20\ \ 5=5\ \ 24$

Найдем искомые вероятности

$P(A) = |A| / |\Omega| =5\ \ 24/25\ \ 24=0{,}2$

$P(B) = |B| / |\Omega| =5\ \ 24/25\ \ 24=0{,}2$

Задача 4.

На полке в случайном порядке расставлено 10 книг, среди которых имеется трехтомник А.П.Чехова. Найти вероятность события A={тома Чехова стоят в порядке возрастания номера тома, не обязательно рядом}.

Решение

Перенумеруем места, на которых стоят книги числами от 1 до 10. В качестве элементарного исхода ω_i рассмотрим номера мест на полке, на которых стоят тома Чехова, т.е. $\omega_i=(x_1,x_2,x_3)$, здесь x_j - номер места на полке, где стоит том с номером j, $j= 1,2,3$. Наборы (x_1,x_2,x_3) упорядочены, т.к. этого требует описание события A. Положение остальных книг на полке не влияет на A. Пространство Ω будет иметь вид

$\Omega=\{\omega_i =(x_1,x_2,x_3),\ x_j \in\{1,...,10\}, x_j \neq x_k,$ при $j \neq k,\ j,k \in\{1,2,3\},\ i \in\{1,2,..., A_{10}^3\}\}$,

$|\Omega| = A_{10}^3$.

Тогда

$A=\{\omega_i \in \Omega : x_1<x_2< x_3\}$.

Для того, чтобы вычислить $|A|$ достаточно найти число способов выбора трехэлементного неупорядоченного подмножества из $\{1,...,10\}$, упорядочить тома на выбранных местах так, чтобы они стояли в порядке возрастания номера тома, можно единственным образом. Следовательно, $|A| = C_{10}^3$. Вероятность

$P(A)=|A| / |\Omega| = C_{10}^3 / A_{10}^3 =10!\ \ 7!/10!\ \ 3!\ \ 7!=1/6$

2.4. Задачи с рекомендациями к решению

Задача 1.

Двадцать два игрока, среди которых 5 мастеров спорта, делятся на две команды по 11 человек в каждой. Найти вероятность того, что в каждой из команд будет по крайней мере по одному мастеру спорта.

Рекомендации

Распределение группы объектов на две равные подгруппы можно интерпретировать как выбор без возвращения половины объектов. При этом объекты, попавшие в выборку, образуют первую подгруппу, что полностью определяет состав второй подгруппы. Поэтому состав первой подгруппы может быть принят за элементарный исход ω_i эксперимента, порядок, в котором отбираются игроки не имеет значения. Итак, выбор производится без возвращения, порядок не важен. Все игроки условно могут быть разделены на две группы: обладающие качеством (мастера спорта) , и остальные спортсмены. Таким образом, данная задача является задачей на гипергеометрическую формулу с параметрами $N=22$, $M=5$, $n=11$, $1 \leq m \leq 4$.

Параметр m задан в виде неравенства, следовательно, надо проверить не решается ли эта задача проще через вероятность противоположного события.

Задача 2.

При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набирает их наудачу, помня только, что они разные. Найти вероятность события A={ номер набран верно}.

Рекомендации

В данной задаче эксперимент заключается в случайном наборе двух последних цифр телефонного номера, поэтому элементарный исход $\omega_i=(x_1,x_2)$, где

x_1,x_2 - предпоследняя и последняя цифры соответственно, порядок важен, $x_1,x_2 \in \{0,...,9\}$, $x_1 \neq x_2$. Верные цифры номера обозначим (x_1^*,x_2^*).

Задача 3.

Игральный кубик подбрасывают 2 раза. Найти вероятность события A={при обоих бросках выпало одинаковое число очков}.

Рекомендации

Перенумеруем кубики и в качестве результата эксперимента рассмотрим число очков, выпавших на их верхних гранях. Тогда $\omega_i=(x_1,x_2)$, здесь x_j - число очков, выпавшее на j -ом кубике, $x_j \in \{1,...,6\}$, $j= 1,2$. Обратите внимание, что наборы (x_1,x_2) являются упорядоченными. Это обусловлено классическим определением вероятности P(A). Данный эксперимент соответствует схеме выбора с возвращением, следовательно, только упорядоченные исходы будут равновозможными.

Задача 4.

В лифт семиэтажного дома входят три человека, которые могут выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность события A={один пассажир выйдет на пятом этаже}.

Рекомендации

Отметим, что данная задача аналогична задаче 3. Перенумеруем пассажиров лифта. В качестве элементарного исхода рассмотрим совокупность номеров этажей, на которых выходят пассажиры.Тогда $\omega_i=(x_1,x_2,x_3)$, здесь x_j - номер этажа, на котором выйдет человек с номером j, $x_j \in \{2,...,7\}$, $j= 1,2,3$. Наборы (x_1,x_2,x_3) упорядочены, т.к. этого требует классический способ подсчета вероятности P(A), т.к.данному эксперименту поставлена в соответствие урновая схема выбора с возвращением.

Задача 5.1

Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д случайным образом по схеме выбора без возвращения выбираются три. Найти вероятность того, что из них можно составить слово «ДВА».

Рекомендации

В качестве элементарного исхода следует взять три конкретные буквы, которые были извлечены, т.е. $\omega_i=[x_1,x_2,x_3]$, здесь x_1,x_2,x_3 - конкретные буквы, попавшие в выборку, $x_j \in \{А,Б,В,Г,Д\}$, $x_j \neq x_k$, при $j \neq k$, $j,k= 1,2,3$. Обратите внимание, что наборы $[x_1,x_2,x_3]$ не упорядочены,т.к. важно только достать подходящие буквы, а слово мы составляем сами.

Задача 5.2

Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д случайным образом по схеме выбора без возвращения выбираются три и раскладываются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «ДВА».

Рекомендации

Обратите внимание, что эксперимент отличается от эксперимента в задаче 5.1 и предусматривает, что наборы (x_1,x_2,x_3) будут упорядоченными.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Четыре человека сдали в гардероб свои шляпы, а гардеробщица перепутала номерки и повесила шляпы в случайном порядке. Найти вероятности событий $A=\{$никто не получит свою шляпу$\}$, $B=\{$только первый человек получит свою шляпу$\}$.

2. Среди 10 книг, стоящих на полке, 3 учебника по теории вероятностей. Найти вероятность того, что среди 4-х выбранных наудачу книг окажется хотя бы один учебник по теории вероятностей.

3. На пяти одинаковых карточках написаны буквы А, И, К, С, Т. Карточки случайным образом раскладываются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «ТАКСИ».

4. В партии из 20 деталей 5 изготовлены на станке марки А и 15 – на станке марки В. Для контроля качества отбирают 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них изготовлена на станке марки А.

5. В лифт семиэтажного дома входят два человека, которые могут выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности событий А={первый пассажир выйдет на пятом этаже}, В={оба пассажира выйдут на одном этаже}.

6. Из полного набора костей домино (28 штук) наудачу выбирают 7 штук. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы один дубль.

7. Из 5 мужчин и 6 женщин по табельным номерам отбирают 5 человек. Найти вероятность того, что среди выбранных будет по крайней мере одна женщина.

8. На пяти одинаковых карточках написаны буквы А, И, К, С, Т. Карточки случайным образом раскладываются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что на первом месте окажется буква Т, а на последнем С.

9. Шестнадцать человек, среди которых двое не умеют плавать, садятся в 2 лодки по 8 человек в каждой. Найти вероятность того, что лица, не умеющие плавать окажутся в разных лодках.

10. Восемнадцать игроков, среди которых 4 мастера спорта, разбиваются на две команды по 9 человек. Найти вероятность того, что в каждую команду попадет по два мастера спорта.

11. Из урны, содержащей 3 шара, с номерами от 1 до 3, по схеме случайного выбора с возвращением 5 раз извлекают шар. Найти вероятности событий А={ни разу не достали шар с номером 1}, В={при всех извлечениях достали шар с номером 3}

12. В команде среди 10 игроков 4 мастера спорта. Для проверки на допинг отбирают троих. Найти вероятность того, что среди выбранных есть хотя бы один мастер спорта.

13. На пяти одинаковых карточках написаны буквы А, И, К, С, Т. Случайным образом по схеме выбора без возвращения отбирается 4 карточки. Найти вероятность того, что из них можно составить слово «АИСТ».

14. Из полного набора костей домино (28 штук) наудачу отбирают 5. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы один дубль.

15. Из урны, содержащей 5 шаров, с номерами от 1 до 5, по схеме случайного выбора с возвращением 3 раза извлекают шар. Найти вероятности событий A={номера шаров идут в порядке возрастания}, B={номера всех шаров различны}

16. Три человека входят в лифт семиэтажного дома. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная с третьего. Найти вероятности событий A={все вышли на одном этаже}, B={все вышли на нечетных этажах}

17. Среди 12 книг, стоящих на полке, 3 по теории вероятностей. Для выставки отбирают наудачу 3 книги. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из них по теории вероятностей.

18. В школьной библиотеке имеется четырехтомник Д.Лондона. Библиотеку посещают 3 ученика 6-ого класса. Найти вероятности событий A={все три ученика прочитают том с одним и тем же номером}, B={ все три ученика прочитают том с номером 2}.

19. У туристов 12 одинаковых на вид банок с консервами без этикеток (8 с мясными консервами и 4 – с рыбными). Наудачу выбирают 3 банки. Найти вероятность того, что по крайней мере в одной банке мясо.

20. Среди 5 юношей и 7 девушек разыгрываются по жребию 4 билета на концерт. Найти вероятность того, что хотя бы один билет достанется юноше.

21. Среди 25 экзаменационных билетов 20 «хороших». Билет содержит 3 вопроса, выбранных наудачу. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого надо ответить по крайней мере на 2 вопроса.

22. В урне находится 10 шаров с номерами от 1 до10. Наудачу выбирают 3 шара. Найти вероятность того, что хотя бы один из них имеет четный номер.

23. В маршрутном такси едет 15 пассажиров, среди которых 3 девушки. На остановке выходит 3 человека. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна девушка.

24. Из первых 9-ти букв русского алфавита наудачу составляют новый алфавит из 5-ти букв. Найти вероятность того, что он будет содержать хотя бы одну гласную букву.

25. Спортлото 6 из 49. Найти вероятность хоть какого-нибудь выигрыша.

Список литературы

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Уч. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1994. – 112 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М., Радио и связь. 1983. – 416 с.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М. ЮНИТИ-ДАНА. 2000. – 543 с.
4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 632 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3.Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов. – М. Наука. 1990. – 428 с.
6. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. – М.: Высшая школа. 2006. – 368 с.

Елена Вадимовна **Кувыкина**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Часть 1

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.