

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
“Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского”

**А.В. Якимов**

**ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ШУМОВ**

Учебное пособие

Рекомендовано Учёным советом радиофизического факультета  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки  
03.03.03 и 03.04.03 “Радиофизика” (бакалавриат и магистратура),  
02.03.02 “Фундаментальная информатика  
и информационные технологии” (бакалавриат),  
а также специальности 10.05.02 “Информационная безопасность  
телекоммуникационных систем”

2-е издание, переработанное и дополненное

Нижегород  
2022

УДК 621.391.822  
ББК 32.841  
Я45

Рецензенты: д.ф.-м.н., доцент **А.А. Дубков**, д.т.н., профессор **В.Р. Фидельман**.

Я45 Якимов А.В. ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ШУМОВ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: ННГУ, 2022. – 103 с.

Целью учебного пособия является ознакомление с физическими механизмами возникновения, методами учёта и описания электрических шумов и флуктуаций параметров в радиоэлектронных приборах (в основном, твердотельных).

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 и 03.04.03 “Радиофизика” (бакалавриат и магистратура), 02.03.02 “Фундаментальная информатика и информационные технологии” (бакалавриат), а также специальности 10.05.02 “Информационная безопасность телекоммуникационных систем”. Оно также будет полезно для студентов ВУЗов, изучающих физику полупроводниковых приборов. В основу пособия легли курсы лекций, читавшиеся автором студентам старших курсов радиофизического факультета ННГУ на протяжении более 25 лет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, Программа стратегического академического лидерства “Приоритет 2030”; приоритетное направление развития науки, технологий и техники в Российской Федерации “Информационно-телекоммуникационные системы”; основное научное направление ННГУ “4. Радиофизика и электроника. Физическая электроника и квантовая электроника. Радиофизические измерения. Статистическая радиофизика и обработка сигналов”.

Ответственный за выпуск:

заместитель председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**.

УДК 621.391.822  
ББК 32.841

© **А.В. Якимов, 2022**  
© **Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2022**

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	5
1. Классификация и описание шумов.....	7
1.1. Классификация шумов.....	7
1.2. Функция корреляции и спектры .....	9
1.3. Мощность шума в полосе частот.....	10
2. Тепловой шум .....	13
2.1. Формула Найквиста .....	13
2.2. Учёт квантовомеханических эффектов.....	15
2.3. Шум комплексного двухполосника.....	16
2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка.....	17
2.3.2. Последовательная RC–цепочка .....	21
2.3.3. Колебательный контур .....	24
3. Дробовой шум.....	28
3.1. Дробовой шум как пуассоновский случайный процесс .....	29
3.2. Формула Шотки для спектра дробового шума .....	32
3.2.1. Эффект депрессии дробового шума.....	32
3.2.2. Учёт конечности времени пролёта носителей .....	32
3.2.3. Нестационарный дробовой шум.....	34
4. Генерационно–рекомбинационный шум .....	37
4.1. Общие сведения.....	37
4.2. Уравнение Ланжевена для ГРШ .....	38
4.3. Спектр генерационно–рекомбинационного шума.....	39
4.4. Мультипликативный характер ГРШ .....	42
4.5. Вывод уравнения Ланжевена .....	44
5. Шум лавинообразования .....	47
5.1. Введение.....	47
5.2. Спектр стационарного шума. Формула А.С. Тагера .....	50
5.3. Статистический анализ процесса лавинообразования .....	52
5.3.1. Элементы теории “горячих” носителей тока .....	52
5.3.2. Шум развитого лавинного пробоя.....	53
5.3.3. Шум частичного лавинного пробоя .....	55
6. Взрывной шум .....	57
7. Фликкерный шум.....	60
7.1. Введение.....	60
7.2. Форма спектра фликкерного шума.....	61
7.3. Спектрально-корреляционный анализ фликкерного шума .....	63
7.4. Нестационарность фликкерного шума.....	66
7.5. Мультипликативность фликкерного шума.....	67
7.5.1. Эксперимент 1 .....	67

7.5.2. Эксперимент 2 .....	68
8. Основные модели фликкерного шума.....	71
8.1. Модель Дю Пре – Ван дер Зила.....	71
8.1.1. Спектр фликкерного шума как суперпозиция лоренцевых спектров .....	71
8.1.2. Термоактивированные процессы, как причина фликкерного шума .....	74
8.2. Модель Мак Уортера – Ван дер Зила.....	76
8.3. Фликкерные импульсные последовательности.....	77
8.3.1. Общий подход .....	77
8.3.2. Модель Шенфельда – Малахова.....	79
8.3.3. Модель Халфорда.....	81
8.3.4. Фликкерный шум как суперпозиция случайных процессов телеграфного типа.....	82
8.4. Модель двухуровневых систем.....	84
8.5. Эмпирическая формула Хоухе – Клайнпеннина – Фандамме.....	85
9. Методы эквивалентного представления шумов.....	87
9.1. Коэффициент шума двухполюсника.....	88
9.2. Эквивалентная шумовая температура.....	89
9.3. Эквивалентное шумовое сопротивление .....	90
9.4. Эквивалентная шумовая проводимость.....	91
9.5. Взаимосвязь шумовых параметров формулы Найквиста .....	91
9.6. Эквивалентный шумовой ток (насыщенного диода).....	93
9.7. Взаимосвязь описаний по Найквисту и Шотки .....	94
Контрольные вопросы.....	95
Список литературы.....	101

## Введение

Цель учебного пособия – ознакомление с физическими механизмами шумообразования, методами учета и описания шумов и флуктуаций параметров в радиоэлектронных приборах (в основном, твердотельных).

В основу излагаемого пособия легло учебное пособие автора [1], изданное на основе ранее разработанных оригинальных курсов.

Термины “шум” и “флуктуации” можно рассматривать как синонимы. Однако, как правило, под шумами подразумеваются электрические шумы, например, шумы напряжения и тока. Термин “флуктуации” ассоциируется с флуктуациями параметров, например, сопротивления, либо ёмкости радиоэлектронного элемента.

Шумы являются фактором, ограничивающим функциональные возможности практически всех радиоэлектронных устройств. В качестве примера можно привести следующие важные для нас приложения:

- радиосвязь;
- измерительные устройства (прецизионные);
- стандарты частоты и времени.

Рассмотрим, например, радиосвязь, условная структура которой приведена на Рис. В.1.

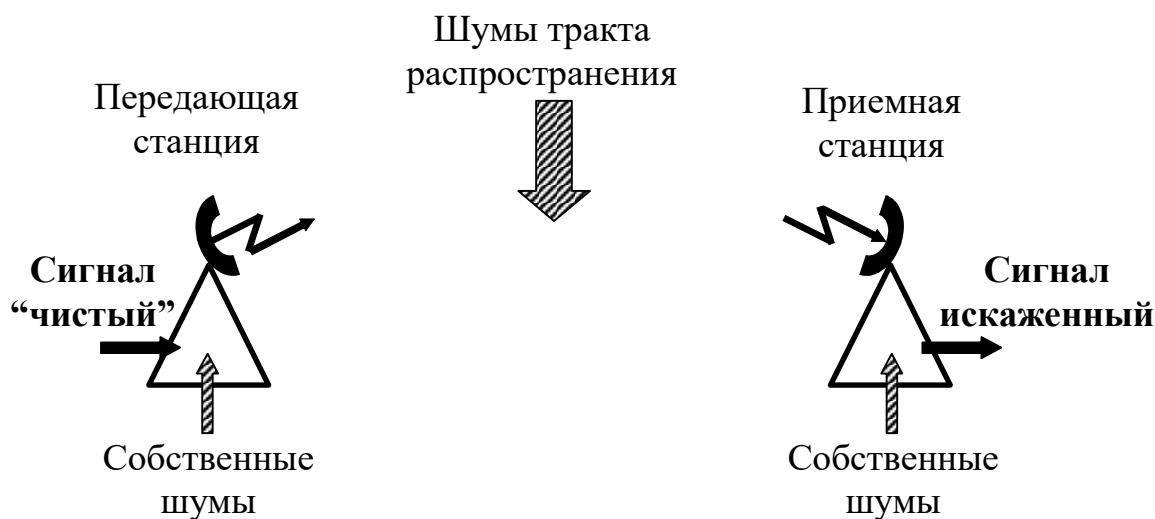


Рис. В.1. Условная структура системы радиосвязи с выделенными источниками шумов

На рисунке выделены источники шумов, которые присутствуют в передающей и приёмной станциях, а также в тракте распространения сигнала (например, радиоволны). Эти шумы (а также флуктуации параметров) ограничивают как дальность, так и надёжность передачи полезного сигнала.

**Другим примером** являются шумы и флуктуации параметров в стандартах частоты и времени.

На сегодняшний день долговременная относительная стабильность частоты стандарта, составляющая  $\delta f = 10^{-14}$ , является пройденным этапом. Не вдаваясь в детали приведённого термина, отметим, что точность хода часов, основанных на таком стандарте, составляет 1 мкс за 3 года (примерно  $10^8$  с).

Однако для ряда задач такая точность не является достаточной.

В частности, для проверки основных положений общей теории относительности требуется стабильность частоты порядка  $10^{-15}$  (см., например, [2], разд. 8), кстати, уже достигнутая.

Заметим, что шумы могут нести полезную информацию. Например, объектом исследования в радиоастрономии является шумовое излучение планет и звёзд. Радиоастрономы, изучая спектр излучения нашего Солнца, в 1868 открыли новое вещество. Его назвали гелий, от древнегреческого “Солнце”. Спустя 27 лет, в 1895 году, гелий был обнаружен на Земле. Теперь его производство осуществляется в промышленных масштабах.

Однако эта тема выходит за рамки настоящего учебного пособия.

## 1. Классификация и описание шумов

Этот раздел носит условный характер. Поскольку шумы существуют, их надо классифицировать.

### 1.1. Классификация шумов

Существуют разные, сложившиеся исторически, методы классификации шумов:

- естественные и технические;
- аддитивные и мультипликативные.

**Естественными** называют шумы, вызванные фундаментальными физическими причинами, например,

- диссипацией энергии, характеризующейся постоянной Больцмана  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  Дж/К;
- дискретностью заряда электрона,  $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$  Кл.

К **техническим** относят шумы, вызванные несовершенством технологии изготовления прибора. Исторически техническим называли фликкерный шум – весьма специфический тип шума, о котором, как и об остальных шумах, речь пойдёт ниже. В настоящее время термин “технический шум” практически не используется.

**Аддитивным** называют шум, обычно в токе, либо напряжении, статистические характеристики которого не зависят ни от напряжения, приложенного к прибору, ни от протекающего через прибор тока.

Например, аддитивным является тепловой шум, выделяющийся на резисторе, см. Рис. 1.1.

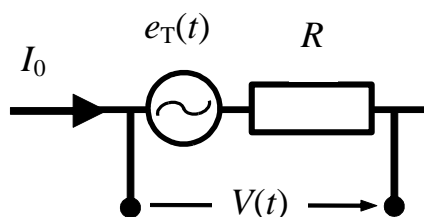


Рис. 1.1. Резистор с учетом эдс теплового шума

Полное напряжение  $V$ , выделяющееся на резисторе, содержит две компоненты:  $V(t) = V_0 + e_T(t)$ . Здесь  $V_0 = I_0 R$  – падение напряжения на резисторе,  $e_T(t)$  – эдс теплового шума, генерируемого резистором.

Тепловой шум моделируется на представленном рисунке эквивалентным генератором напряжения. Этот шум всегда присутствует на выводах резистора. Его статистические характеристики не зависят от величины тока  $I_0$ , протекаю-

щего через резистор (разумеется, при достаточно малом токе, не приводящем к заметному нагреву резистора).

Под **мультипликативным** понимается шум, вызванный флуктуациями параметров элемента и проявляющийся при приложении напряжения к этому элементу, либо пропускании через него электрического тока.

Например, мультипликативную природу имеет шум  $v(t)$ , выделяющийся на резисторе, обладающем флуктуациями сопротивления, см. Рис. 1.2.

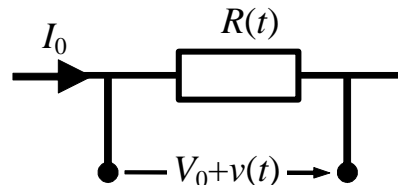


Рис. 1.2. Резистор, обладающий флуктуациями сопротивления

Допустим, что сопротивление  $R$  резистора подвержено флуктуациям:

$$R = R(t) = R_0 + \Delta R = R_0 \times (1 + \delta R) .$$

Здесь  $R_0$  – невозмущённое сопротивление резистора,  $\Delta R = \Delta R(t)$  – абсолютные флуктуации,  $\delta R = \delta R(t) = \Delta R(t)/R_0$  – относительные флуктуации сопротивления.

При пропускании через резистор фиксированного тока  $I_0$  на его выводах выделяется напряжение

$$V(t) = V_0 + v(t) .$$

Здесь  $V_0 = I_0 \times R_0$  – невозмущенное значение падения напряжения на резисторе. Шумовое напряжение  $v(t)$  обусловлено наличием флуктуаций сопротивления:

$$v(t) = I_0 \Delta R(t) = V_0 \delta R(t) .$$

Видим, что шумовое напряжение является лишь отображением флуктуаций сопротивления резистора. В данном примере эти флуктуации являются первичным источником. Они имеют мультипликативный характер. То есть для наблюдения флуктуаций сопротивления необходимо пропустить через резистор электрический ток, либо приложить напряжение.

При этом подразумевается, что статистические характеристики флуктуаций сопротивления не зависят ни от приложенного напряжения  $V_0$ , ни от протекающего тока  $I_0$ .

Перейдём к описанию статистических характеристик случайных процессов (см. например, [3–6]).



## 1.2. Функция корреляции и спектры

Функция корреляции  $\Phi_x(\tau)$ , если она существует, определяется для случайного процесса  $x(t)$  следующим образом:

$$\Phi_x(\tau) = \overline{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle}^t. \quad (1.1)$$

Здесь угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по полному ансамблю реализаций, а черта сверху – усреднение по времени. Из приведенного определения, в частности, следует, что полная мощность случайного процесса  $x(t)$  определяется значением функции корреляции при нулевом аргументе:

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle}^t = \Phi_x(0). \quad (1.2)$$

Перейдем к спектрам.

В теоретическом анализе удобно использовать понятие **математического** (двухстороннего) спектра  $S_x(\omega)$ , определенного для отрицательных и положительных угловых частот  $\omega \in (-\infty; +\infty)$ , имеющих размерность [рад/с], или, проще говоря, [с<sup>-1</sup>]. Этот спектр и функция корреляции  $\Phi_x(\tau)$  являются парой Фурье–сопряжённых функций:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \\ \Phi_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(j\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Соотношения (1.3) известны как формулы Винера–Хинчина, см., например, [4, 7]. Обе эти функции обладают свойством чётности:

$$\begin{aligned} S_x(-\omega) &= S_x(\omega), \\ \Phi_x(-\tau) &= \Phi_x(\tau). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Примем во втором соотношении системы (1.3)  $\tau = 0$  и учтём, что  $\exp(0) = 1$ . Затем воспользуемся определением полной мощности случайного процесса через функцию корреляции, представленное соотношением (1.2). В результате получим соотношение, разъясняющее смысл спектра процесса:

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle}^t = \int_0^{\infty} 2S_x(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.5)$$

То есть спектр есть разложение полной мощности случайного процесса по частоте. Здесь учтено свойство чётности спектра, позволившее перейти к интегрированию только по положительным частотам.

В измерениях используется так называемый **физический спектр**  $\langle x^2 \rangle_f$ . Он является односторонним и определён для циклической частоты  $f = \omega / (2\pi)$ ,  $f \geq 0$ , имеющей размерность [Гц]. Учитывая смысл спектра, представленный соотношением (1.5), для физического спектра имеем:

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle}^t = \int_0^{\infty} \langle x^2 \rangle_f df. \quad (1.6)$$

Сравним разложения (1.5) и (1.6) для разложения полной мощности процесса по частоте. Отсюда найдём связь между физическим (односторонним) и математическим (двухсторонним) спектрами:

$$\langle x^2 \rangle_f = 2S_x(2\pi f), f \geq 0. \quad (1.7)$$

То есть физический спектр равен удвоенному математическому спектру на той же частоте анализа  $f = \omega / (2\pi)$ .

### 1.3. Мощность шума в полосе частот

В соответствии со смыслом спектра, как разложения полной мощности, определим мощность  $\langle x^2(\Delta f) \rangle$  случайного процесса  $x(t)$ , сосредоточенную в диапазоне частот  $[f_1; f_2]$ :

$$\langle x^2(\Delta f) \rangle = \int_{f_1}^{f_2} \langle x^2 \rangle_f df, \Delta f = f_2 - f_1. \quad (1.8)$$

#### Примечание

Здесь в обозначении мощности опущена черта сверху, означающая усреднение по времени. Это усреднение, если оно было необходимо, уже выполнено при определении спектра  $\langle x^2 \rangle_f$  анализируемого процесса  $x(t)$ .

Если шум является белым, либо полоса анализируемых частот достаточно мала, так что  $\langle x^2 \rangle_f = \text{const}$  при  $f \in [f_1; f_2]$ , то

$$\langle x^2(\Delta f) \rangle = \langle x^2 \rangle_f \Delta f. \quad (1.9)$$

В данном случае мощность шума (случайного процесса) равна произведению его спектра на ширину диапазона анализируемых частот.

Из соотношения (1.9) можно получить **формулу анализатора спектра**. Для этого преобразуем указанное соотношение следующим образом:

$$\langle x^2 \rangle_f = \frac{\langle x^2(\Delta f) \rangle}{\Delta f}. \quad (1.9a)$$

Для измерения спектра анализируемый процесс  $x(t)$  пропускается через узкополосный фильтр, обладающий полосой пропускания  $\Delta f$  в окрестности ча-

стоты анализа  $f$ . Измеряется мощность  $\langle x^2(\Delta f) \rangle$  на выходе фильтра. Затем, согласно (1.9а), вычисляется спектр  $\langle x^2 \rangle_f$ . Разумеется, чем меньше полоса пропускания фильтра, тем точнее измеряется спектр.

Определим понятие **эффективного значения** шума  $x_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в заданной полосе анализируемых частот  $\Delta f = f_2 - f_1$ . Под этой величиной принято понимать квадратный корень из мощности шума:

$$x_{\text{эфф}}(\Delta f) = \sqrt{\langle x^2(\Delta f) \rangle}. \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) иногда используются для описания источников шумов в радиоэлектронных схемах, см., например, [6], а также Рис. 1.3.

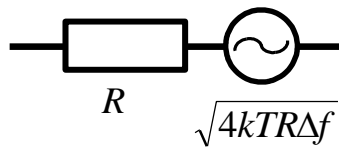


Рис. 1.3. Резистор с источником теплового шума

На рисунке изображён резистор и источник напряжения генерируемого им теплового шума. Надпись рядом с генератором напряжения, моделирующим тепловой шум, характеризует эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}$  в полосе  $\Delta f$ .

Определим **размерность спектра**. Воспользуемся соотношением (1.9а). Отсюда получим выражение для определения размерности спектра:

$$[\langle x^2 \rangle_f] = \frac{[x]^2}{[f]} = \frac{[x]^2}{\text{Гц}}. \quad (1.11)$$

Например, для спектра шумового напряжения,  $[x] = \text{В}$ , получим

$$[\langle x^2 \rangle_f] = \text{В}^2/\text{Гц}. \quad (1.12)$$

Если же в роли процесса  $x(t)$  рассматриваются флуктуации частоты какого-либо сигнала (например, стандарта частоты и времени), то для спектра получаем размерность  $[\text{Гц}^2/\text{Гц}]$ . Здесь “сокращать” герцы не рекомендуется, иначе может сложиться впечатление, что речь идёт о частоте, а не спектре.

### Пример 1.1

Имеется белый шум  $v(t)$  со спектром  $\langle v^2 \rangle_f = 2 \times 10^{-20} \text{ В}^2/\text{Гц}$ . Надо найти эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе частот усилителя низкой частоты (УНЧ),  $0 \div 20 \text{ кГц}$ .

### Решение

Используя соотношение (1.9), найдём выражение для мощности шума в заданной полосе частот:

$$\langle v^2(\Delta f) \rangle = \int_0^{f_B} \langle v^2 \rangle_f df = \langle v^2 \rangle_f f_B. \quad (1.13)$$

Здесь ширина диапазона анализируемых частот совпадает с верхней частотой анализа,  $\Delta f = f_B = 20 \text{ кГц} = 2 \times 10^4 \text{ Гц}$ . Для полной мощности шума имеем:

$$\langle v^2(20 \text{ кГц}) \rangle = 2 \times 10^{-20} [\text{В}^2/\text{Гц}] \times 2 \times 10^4 [\text{Гц}] = 4 \times 10^{-16} \text{ В}^2. \quad (1.14)$$

Отсюда, согласно (1.10), находим эффективное напряжение шума:

$$v_{\text{эфф}}(20 \text{ кГц}) = \sqrt{\langle v^2(20 \text{ кГц}) \rangle} = 2 \times 10^{-8} \text{ В} = 20 \text{ нВ}. \quad (1.15)$$

В этом примере рассмотрен тепловой шум резистора с сопротивлением  $R = 1 \text{ Ом}$  при абсолютной температуре  $T = 300 \text{ К}$ .

Если  $R = 10^6 \text{ Ом} = 1 \text{ МОм}$ , то  $v_{\text{эфф}}(20 \text{ кГц}) = 20 \text{ мкВ}$ .

Иногда встречается описание эффективного напряжения шума  $v_f$  на заданной частоте анализа  $f$  с указанием размерности  $[\text{В}/\sqrt{\text{Гц}}]$ . Эта величина определяет эффективное напряжение, действующее в полосе  $1 \text{ Гц}$ .

Если вернуться к примеру, приведённому выше, то вместо спектра  $\langle v^2 \rangle_f = 2 \times 10^{-20} \text{ В}^2/\text{Гц}$  следует привести значение

$$v_f = \sqrt{\langle v^2 \rangle_f} = \sqrt{2 \times 10^{-20} [\text{В}^2/\text{Гц}]} \approx 1.4 \times 10^{-10} \text{ В}/\sqrt{\text{Гц}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, в полосе  $\Delta f = 1 \text{ Гц}$  эффективное напряжение шума есть

$$v_{\text{эфф}}(1 \text{ Гц}) = v_f \sqrt{\Delta f} \approx 1.4 \times 10^{-10} [\text{В}/\sqrt{\text{Гц}}] \times \sqrt{1 [\text{Гц}]} = 1.4 \times 10^{-10} \text{ В}. \quad (1.17)$$

Соответственно, в полосе  $\Delta f = 20 \text{ кГц}$  получим:

$$v_{\text{эфф}}(20 \text{ кГц}) = 1.4 \times 10^{-10} [\text{В}/\sqrt{\text{Гц}}] \times \sqrt{2 \times 10^4 [\text{Гц}]} = 2 \times 10^{-8} \text{ В}. \quad (1.18)$$

Аналогичное описание встречается и в описании токового шума, но с использованием размерности  $[\text{А}/\sqrt{\text{Гц}}]$ .

## 2. Тепловой шум

Англоязычное название теплового шума – thermal noise.

Условием существования шума является наличие диссипации энергии.

Рассмотрим идеальный резистор (Рис. 2.1), имеющий сопротивление  $R$  и находящийся в термостате при абсолютной температуре  $T$ . Иначе говоря, резистор находится в **термодинамическом равновесии** с окружающей средой.

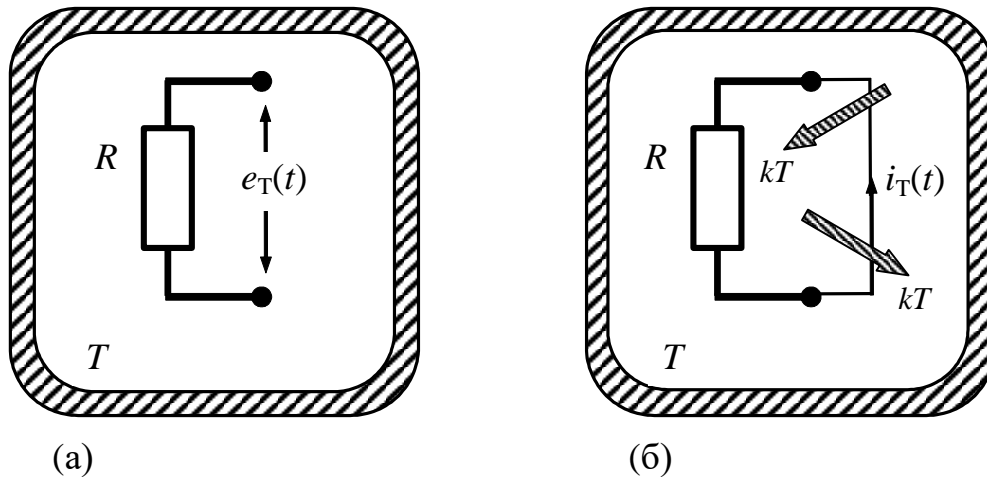


Рис. 2.1. Идеальный резистор в термостате:  
(а) разомкнутые выводы; (б) короткозамкнутые выводы

На выводах разомкнутого резистора, Рис. 2.1(а), проявляется эдс теплового шума  $e_T(t)$ , возникающая из-за хаотического (теплового) движения носителей тока внутри его. При замыкании выводов резистора, Рис. 2.1(б), образуется контур, через который протекает случайный ток  $i_T(t)$ .

### 2.1. Формула Найквиста

Для определения спектра теплового шума обратимся к теореме Кирхгофа. Согласно этой теореме **излучательная** способность тела на определённой частоте прямо пропорциональна его **поглощательной** способности на той же частоте.

Излучательная способность резистора определяется его абсолютной температурой  $T$ . Соответственно, по определению, поглощательная способность определяется сопротивлением  $R$ .

Таким образом, спектр теплового шума должен быть пропорционален произведению температуры и сопротивления,  $\langle e_T^2 \rangle_f \sim TR$ . Кроме того, в выражение для спектра теплового шума должна входить постоянная Больцмана  $k$ .

Спектр теплового шума определяется формулой Найквиста, которая в используемой здесь системе единиц СИ имеет вид:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kTR, \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (2.1)$$

При замыкании выводов резистора, Рис. 2.1(б), как уже отмечалось выше, через переключку потечёт шумовой ток  $i_T(t)$ . Этот ток обусловлен тепловым движением носителей в резисторе. Можно также считать, что ток  $i_T(t)$  обусловлен обменом квантами энергии между короткозамкнутым резистором и термостатом. Энергия отдельного кванта составляет  $kT/2$ , где  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Именно такой подход используется в ФДТ (флуктуационно–диссипационной теореме). Формула Найквиста для спектра тока теплового шума выглядит следующим образом:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kTG, \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (2.2)$$

Здесь  $G = 1/R$  – проводимость резистора, выражаемая в Сименсах [См].

Приведем две эквивалентные схемы идеального резистора, Рис. 2.2(а, б), в которых тепловой шум учитывается либо генератором напряжения  $e_T(t)$ , либо генератором тока  $i_T(t)$ .

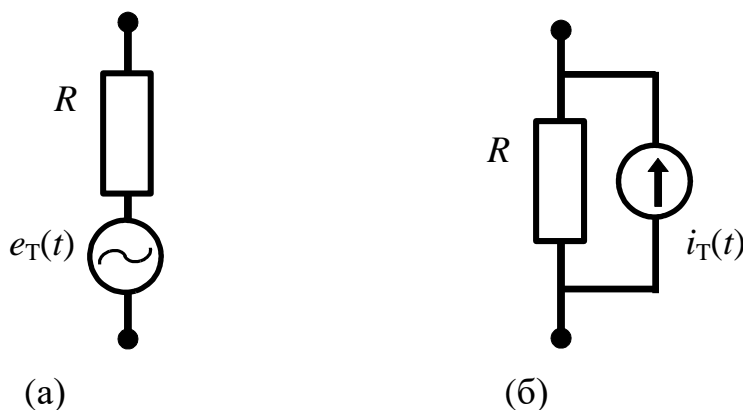


Рис. 2.2. Эквивалентные схемы для учета теплового шума:  
(а) генератором напряжения; (б) генератором тока

Представленные схемы равнозначны друг другу. Напомним, что внутреннее сопротивление идеального генератора напряжения равно нулю,  $R_{eT} = 0$ , а идеального генератора тока – бесконечности,  $R_{iT} = \infty$ .

Если резистор **разомкнут**, на его выводах действует эдс теплового шума  $e_T(t)$ . При **коротком замыкании** резистор, согласно закону Ома, “отдает” во внешнюю цепь ток  $i_T(t) = e_T(t)/R$ . Спектр этого тока равен

$$\langle i_T^2 \rangle_f = \langle e_T^2 \rangle_f / R^2 = 4kTR/R^2 = 4kTG.$$

Таким образом, мы пришли к соотношению (2.2).

Вышеприведенные варианты формулы Найквиста получены в рамках “классической” ФДТ, не учитывающей квантовомеханические эффекты. Именно поэтому полученный спектр не зависит от частоты, то есть тепловой шум имеет характер белого шума. Этот результат, разумеется, не верен.

## 2.2. Учёт квантовомеханических эффектов

При неограниченном увеличении частоты анализа,  $f \rightarrow \infty$ , спектр должен достаточно быстро стремиться к нулю, так, чтобы на высоких частотах не было неинтегрируемой особенности:

$$\langle e_T^2 \rangle = \int_0^{\infty} \langle e_T^2 \rangle_f df < \infty.$$

Иначе говоря, тепловой шум должен иметь конечную мощность, удовлетворяя требованию недопустимости так называемой “ультрафиолетовой катастрофы”. Учет квантовомеханических эффектов приводит к следующей модификации формулы Найквиста для спектра эдс теплового шума:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kTR \frac{(hf/kT)}{\exp(hf/kT) - 1}, \text{В}^2 / \text{Гц}. \quad (2.3)$$

Здесь  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Дж/Гц – постоянная Планка.

Вид спектра, полученного в рамках квантовой ФДТ, приведён на Рис. 2.3.

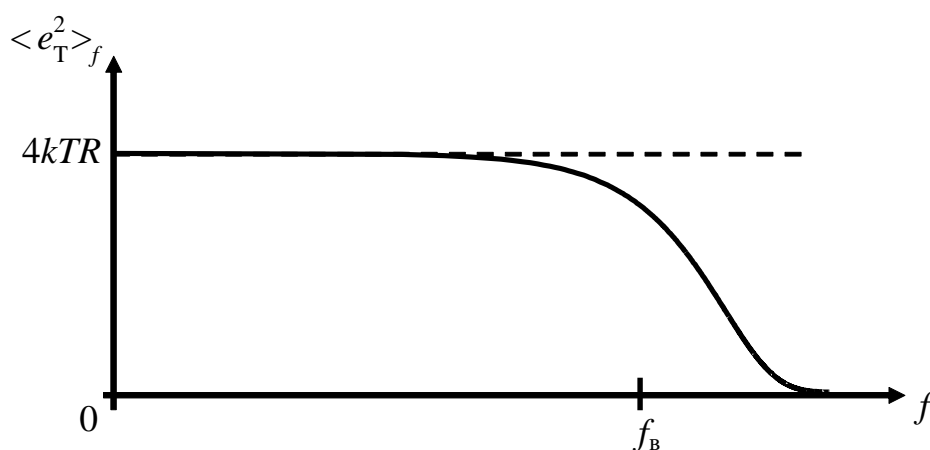


Рис. 2.3. Спектр эдс теплового шума согласно квантовой ФДТ

На относительно низких частотах величина спектра определяется “классической” ФДТ, то есть составляет  $4kTR$ . При неограниченном увеличении частоты анализа спектр быстро стремится к нулю.

Характерная частота  $f_B$  этого спектра, называемая частотой среза, равна

$$f_B = kT/h. \quad (2.4)$$

При  $T = 300$  К имеем  $f_B = 6.2 \times 10^{12}$  Гц = 6.2 ТГц. Это соответствует длине волны, составляющей 0.05 мм. Таким образом, вплоть до миллиметрового диапазона длин волн тепловой шум можно считать “белым”, то есть не учитывать зависимость его спектра от частоты. Однако для криогенной радиотехники (радиотехники сверхнизких температур), а также в диапазоне терагерц и выше зависимость спектра теплового шума от частоты может оказаться существенной.

Заметим, что в рамках квантовой ФДТ мощность теплового шума имеет конечное значение. Эту мощность можно оценить как произведение высоты спектра (на нулевой частоте) и частоты среза (2.4):

$$\langle e_T^2 \rangle \approx \langle e_T^2 \rangle_{f=0} f_B = 4(kT)^2 R/h.$$

Точное вычисление мощности теплового шума путём интегрирования его спектра (2.3) в пределах от нуля до бесконечности даёт результат примерно в полтора раза больше. Однако данные оценки представляют только теоретический интерес. В природе идеальных резисторов не существует. Все резистивные элементы обладают инерционностью, которая приводит к трансформации спектра теплового шума.

### 2.3. Шум комплексного двухполюсника

Формула Найквиста (2.1) справедлива только для **идеального резистора**. Реальные резисторы обладают инерционностью. Поэтому её следует модифицировать для комплексного линейного двухполюсника, импеданс  $Z$  которого зависит от частоты и состоит из вещественной и мнимой компонент:

$$Z(2\pi f) = R(2\pi f) + jX(2\pi f).$$

Здесь  $R(2\pi f) = \text{Re}[Z(2\pi f)]$  – активное сопротивление двухполюсника, характеризующее диссипацию энергии, ответственную за возникновение теплового шума. Мнимая компонента,  $X(2\pi f) = \text{Im}[Z(2\pi f)]$ , не приводит к диссипации энергии, но может влиять на вид спектра теплового шума.

Заметим, что понятие импеданса, называемого также комплексным сопротивлением, ввёл **Хевисайд** (Oliver Heaviside) в 1888 году.

Таким образом, формула Найквиста (2.1) для спектра эдс теплового шума, характеризующего напряжение на выводах **разомкнутого** двухполюсника, принимает следующий вид:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kT \text{Re}[Z(2\pi f)], \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (2.5)$$

Для спектра тока теплового шума **короткозамкнутого** двухполюсника, соответственно, имеем:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \text{Re}[Y(2\pi f)], \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (2.6)$$

Здесь  $Y(2\pi f)$  – комплексная проводимость (адмитанс) двухполюсника. Она состоит из активной компоненты,  $G(2\pi f) = \text{Re}[Y(2\pi f)]$ , и мнимой компоненты,  $B(2\pi f) = \text{Im}[Y(2\pi f)]$ . Связь **активных** компонент проводимости и импеданса имеет следующий вид:

$$G = R / |Z|^2, \quad R = G / |Y|^2.$$

В случае идеального резистора получаем известную связь:  $G = 1/R$ .



### 2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка

#### Задание 1. Шумовое напряжение

Рассмотрим эдс  $e_T(t)$ , описывающую тепловой шум на **разомкнутых** выводах интегрирующей RC – цепочки, см. Рис. 2.4. Найдём спектр  $\langle e_T^2 \rangle_f$  и полную мощность  $\langle e_T^2 \rangle$  этого шума.

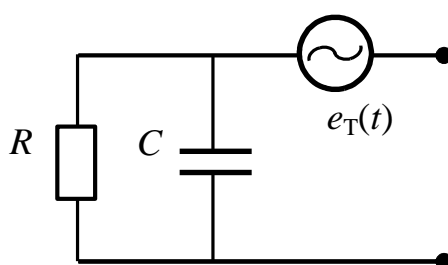


Рис. 2.4. Эквивалентная схема интегрирующей RC – цепочки с генератором напряжения (эдс) теплового шума

#### Решение для спектра

Согласно (2.5) спектр определяется вещественной частью импеданса цепочки:  $\langle e_T^2 \rangle_f = 4kT \operatorname{Re}[Z(2\pi f)]$ , В<sup>2</sup>/Гц. Вычислим сначала комплексную проводимость (адмиттанс)  $Y$  цепочки как сумму проводимостей резистора и конденсатора:

$$Y = R^{-1} + j\omega C, \quad \omega = 2\pi f. \quad (2.7)$$

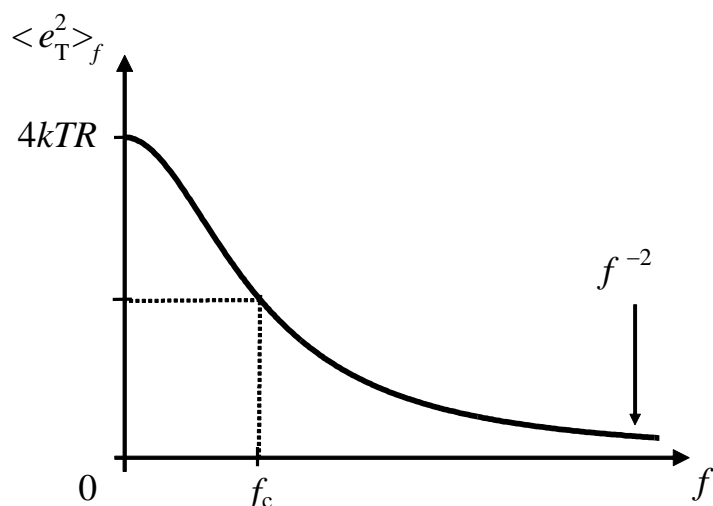
Учтём, что импеданс и адмиттанс связаны обратно пропорциональной зависимостью,  $Z=Y^{-1}$ . Отсюда находим вещественную часть импеданса:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[Z] &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{R^{-1} + j\omega C}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{R}{1 + j\omega CR} \frac{1 - j\omega CR}{1 - j\omega CR}\right] \\ &= \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} \operatorname{Re}[1 - j\omega CR] = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}. \end{aligned}$$

Затем, в соответствии с (2.5), определяем спектр эдс теплового шума:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = \frac{4kTR}{1 + (f/f_c)^2}, \quad \text{В}^2/\text{Гц}. \quad (2.8)$$

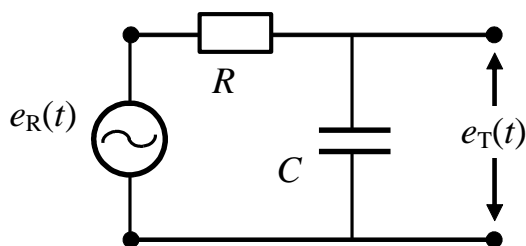
Здесь  $f_c = 1/(2\pi\tau_c)$  – частота среза, определяемая постоянной времени цепочки  $\tau_c = RC$ . Спектр, имеющий подобную зависимость от частоты, называется **лоренцевым**; его вид изображен на Рис. 2.5.

Рис. 2.5. Спектр эдс теплового шума интегрирующей  $RC$  – цепочки

На нулевой частоте,  $f = 0$ , высота спектра максимальна и составляет  $4kTR$ , как у идеального резистора. Действительно, тепловой шум генерируется резистором  $R$ , а шунтирующее влияние конденсатора на этой частоте не проявляется. При повышении частоты анализа  $f$  начинает проявляться шунтирующее влияние конденсатора  $C$ . В результате, при  $f \rightarrow \infty$  спектр убывает по закону  $f^{-2}$ .

### Обсуждение

Учтём, что в рассматриваемой цепочке источником теплового шума является резистор. Для этого преобразуем схему, изображённую на Рис. 2.4, в схему, содержащую эквивалентный генератор напряжения  $e_R(t)$ , моделирующий тепловой шум резистора  $R$ , см. Рис. 2.6.

Рис. 2.6. Интегрирующая  $RC$  – цепочка как линейный четырёхполюсник

Рассматриваемая цепочка представляет собой линейный четырёхполюсник. Её комплексный коэффициент передачи  $K_{и}(f)$  определяется следующим соотношением:

$$K_{и}(f) = \frac{1/(j2\pi fC)}{R + 1/(j2\pi fC)} = \frac{1}{1 + j(f/f_c)}. \quad (2.9)$$

К входу цепочки приложено шумовое напряжение  $e_R(t)$ . Спектр  $\langle e_R^2 \rangle_f$  этого напряжения определяется формулой Найквиста (2.1):

$$\langle e_R^2 \rangle_f = 4kTR, \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (2.10)$$

На выходе наблюдается шумовое напряжение  $e_T(t)$ . Связь между спектрами входного и выходного шумов определяется известным соотношением, см., например, Раздел 1.5 в монографии [7]:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = |K_H(f)|^2 \langle e_R^2 \rangle_f. \quad (2.11)$$

#### Примечание

В соотношениях типа (2.11), определяющих преобразование спектра линейной системой, следует использовать  $|K_H(f)|^2$ , но не  $|K_H^2(f)|$ . Входящий сюда модуль коэффициента передачи  $|K_H(f)|$  имеет смысл амплитудно-частотной характеристики системы. Использование в (2.11) модуля квадрата коэффициента передачи  $|K_H^2(f)|$  даст тот же правильный результат, но без пояснения его физического смысла.

Вычисляем, согласно (2.9), квадрат модуля коэффициента передачи:

$$|K_H(f)|^2 = \frac{|Z_C|^2}{R^2 + |Z_C|^2} = \frac{1}{1 + (f/f_c)^2}.$$

Здесь  $|Z_C| = 1/(2\pi fC)$  – модуль импеданса конденсатора.

Затем учитываем выражение (2.10) для спектра входного шума. В результате обнаружим, что соотношение (2.11) трансформируется в найденное выше выражение (2.8) для спектра теплового шума на выходе цепочки.

На низких частотах,  $f \ll f_c$ , импеданс конденсатора достаточно велик,  $|Z_C| \gg R$ . Поэтому конденсатор не шунтирует шум на выходе цепочки. При увеличении частоты анализа импеданс конденсатора убывает пропорционально частоте. Поэтому на высоких частотах, при  $f \gg f_c$ , конденсатор шунтирует выход цепочки. В результате при росте частоты анализа спектр выходного шума  $\langle e_T^2 \rangle_f$  начинает убывать как  $f^{-2}$ .

Из полученного результата следует важный вывод. Тепловой шум генерируется только **диссипативными** элементами. Выражения (2.5) и (2.6) просто описывают линейное преобразование спектров первичных источников шума на выход рассматриваемого двухполюсника.

#### Решение для полной мощности

Вычислим полную мощность  $\langle e_T^2 \rangle$  шума на выходе  $RC$  – цепочки. Для этого, согласно (1.6), надо выполнить интегрирование найденного спектра (2.8) по всем частотам, то есть найти площадь под графиком спектра:

$$\langle e_T^2 \rangle = \int_0^{\infty} \langle e_T^2 \rangle_f df = 4kTR \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (f/2\pi\tau_c)^2}.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменной:  $x = f2\pi\tau_c$ . Затем используем табличный несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (2.12)$$

В результате получаем удивительный результат:

$$\langle e_T^2 \rangle = kT/C. \quad (2.13)$$

Видим, что полная мощность шума не зависит от сопротивления  $R$ , а определяется только величиной ёмкости  $C$ . Качественно этот результат можно объяснить следующим образом.

Высота спектра,  $\langle e_T^2 \rangle_{f=0} = 4kTR$ , пропорциональна  $R^1$ , сопротивлению в первой степени. Характерная ширина спектра,  $f_c = 1/(2\pi RC)$ , обратно пропорциональна сопротивлению  $R$ . В результате, полная мощность шума, определяемая площадью под графиком его спектра, не зависит от сопротивления  $R$ .

Данное объяснение, однако, не проясняет физической сути полученного результата, имеющего **фундаментальный характер**.

Действительно, устремим сопротивление к нулю,  $R \rightarrow 0$ . Обнаружим, что диссипация, как необходимое условие существования теплового шума, исчезла, а полная мощность шума осталась прежней.

**Вопрос.** В чём допущена ошибка, либо в чём заключается фундаментальность полученного результата?

**Ответ.** Преобразуем результат (2.13) для полной мощности теплового шума, производя домножение его обеих частей на  $(C/2)$ :

$$\frac{C \langle e_T^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (2.14)$$

Здесь в левой части представлена средняя энергия, накопленная конденсатором. Правая часть – энергия, приходящаяся на одну степень свободы. Таким образом, мы нашли энергию, которой конденсатор обменивается с термостатом.

### **Задание 2. Шумовой ток**

Найдём спектр  $\langle i_T^2 \rangle_f$  тока  $i_T(t)$ , описывающего тепловой шум **короткозамкнутой** интегрирующей  $RC$  – цепочки, см. Рис. 2.7.

#### **Решение**

Спектр указанного тока описывается соотношением (2.6):

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \operatorname{Re}[Y(2\pi f)], \text{ A}^2/\text{Гц}.$$

Комплексная проводимость  $Y$  определена соотношением (2.7):

$$Y = R^{-1} + j\omega C, \quad \omega = 2\pi f.$$

Учитывая эти два соотношения, сразу находим требуемый спектр:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kTR^{-1}, \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (2.15)$$

Видим, что в выражение для спектра тока теплового шума интегрирующей  $RC$  – цепочки не входит ёмкость  $C$ . Ничего удивительного в этом нет.

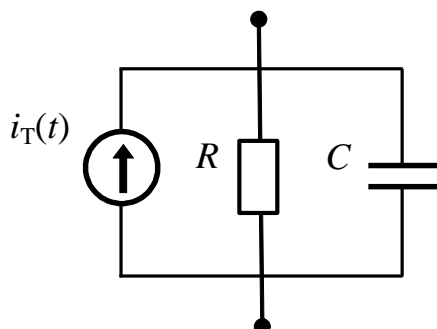


Рис. 2.7. Эквивалентная схема интегрирующей  $RC$  – цепочки с генератором тока теплового шума

### Обсуждение

Генератор тока  $i_T(t)$  описывает тепловой шум **короткозамкнутой** цепочки. То есть конденсатор  $C$  оказывается замкнутым накоротко, поэтому он не влияет на спектр токового шума. Для понимания этого результата снова обратимся к анализу цепочки как линейного четырёхполюсника (см. выше Раздел “Задание 1. Шумовое напряжение”). Теперь вместо Рис. 2.7 получаем эквивалентную схему, изображённую на Рис. 2.8. Из представленной схемы видно, что конденсатор зашунтирован перемычкой. Поэтому, согласно закону Ома, токовый шум на выходе цепочки определяется только эдс теплового шума резистора и сопротивлением этого резистора,  $i_T = e_R/R$ .

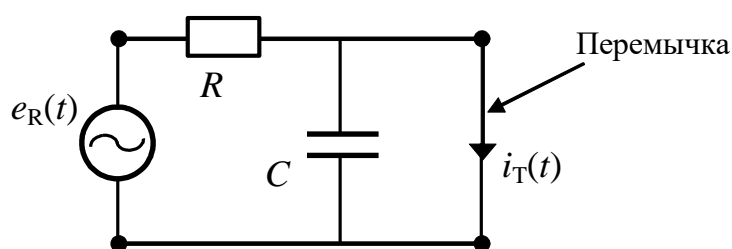


Рис. 2.8. Короткозамкнутая интегрирующая  $RC$  – цепочка

### 2.3.2. Последовательная $RC$ –цепочка

#### Задание 1. Шумовое напряжение

Найдём спектр  $\langle e_T^2 \rangle_f$  эдс  $e_T(t)$ , описывающей тепловой шум на **разомкнутых** выводах последовательной  $RC$  – цепочки, см. Рис. 2.9.

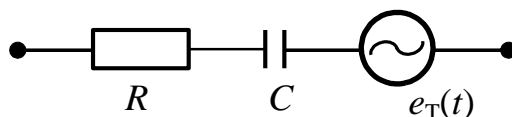


Рис. 2.9. Эквивалентная схема последовательной  $RC$  – цепочки с генератором напряжения теплового шума

### Решение

Согласно (2.5) спектр определяется вещественной частью импеданса  $Z(2\pi f)$  цепочки:  $\langle e_T^2 \rangle_f = 4kT \operatorname{Re}[Z(2\pi f)]$ , В<sup>2</sup>/Гц. Комплексный импеданс цепочки есть сумма сопротивления резистора и (чисто мнимого) импеданса конденсатора:

$$Z(2\pi f) = R - \frac{j}{2\pi f C}. \quad (2.16)$$

Отсюда находим спектр эдс теплового шума, проявляющегося на **разомкнутых** выводах цепочки:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kTR, \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (2.17)$$

Видим, что последовательно включенный конденсатор не влияет на спектр шума. Так как цепочка **разомкнута**, ток, протекающий через конденсатор, **равен нулю**; поэтому падение напряжения на нём тоже равно нулю.

### Задание 2. Шумовой ток

Найдём спектр  $\langle i_T^2 \rangle_f$  тока  $i_T(t)$ , описывающего тепловой шум **короткозамкнутой** последовательной  $RC$  – цепочки, см. Рис. 2.10.

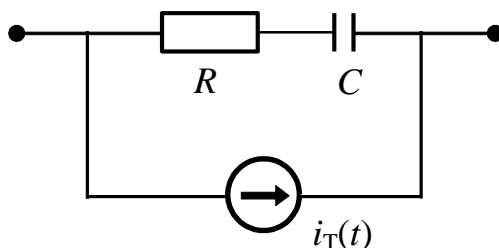


Рис. 2.10. Эквивалентная схема последовательной  $RC$  – цепочки с генератором тока теплового шума

### Решение

Спектр указанного тока описывается соотношением (2.6):

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \operatorname{Re}[Y(2\pi f)], \text{ А}^2/\text{Гц}.$$

Для вычисления входящей сюда комплексной проводимости  $Y$  воспользуемся модифицированным соотношением (2.16) для импеданса цепочки:

$$Z = R - \frac{j}{2\pi f C} = \left(1 - \frac{j}{2\pi f RC}\right)R.$$

Здесь сопротивление резистора  $R$  вынесено за скобки. В результате получим:

$$Y(2\pi f) = Z^{-1} = \frac{(2\pi f RC + j)2\pi f RC}{1 + (2\pi f RC)^2} \frac{1}{R}. \quad (2.18)$$

Выделяя вещественную часть проводимости находим требуемый спектр:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = \frac{4kT}{R} \frac{(f/f_c)^2}{1 + (f/f_c)^2}, \text{ А}^2 / \text{Гц}. \quad (2.19)$$

Здесь  $f_c = 1/(2\pi \tau_c)$  – характерная частота, определяемая постоянной времени цепочки  $\tau_c = RC$ . Найденный спектр изображён на Рис. 2.11.

Из рисунка видим, что в области низких частот,  $f \ll f_c$ , спектр нарастает из нуля пропорционально квадрату частоты. При увеличении частоты,  $f \rightarrow \infty$ , высота спектра стремится к значению  $4kT/R$ , как у идеального резистора.

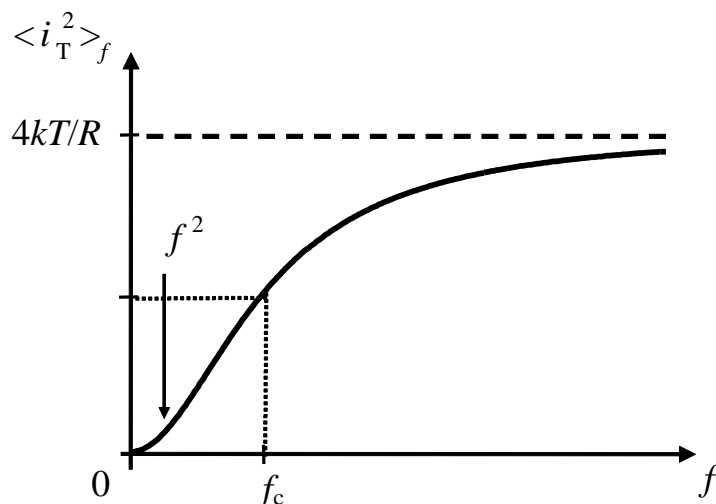


Рис. 2.11. Спектр теплового шума тока последовательной  $RC$  – цепочки

### Обсуждение

Указанный спектр описывает токовый шум **короткозамкнутой** цепочки.

Как и в Разделе “2.3.1. Интегрирующая  $RC$  – цепочка” учтём, что источником теплового шума является резистор. Поэтому преобразуем схему, изображённую на Рис. 2.10, в схему, содержащую эквивалентный генератор напряжения  $e_R(t)$ , моделирующий тепловой шум резистора  $R$ , см. Рис. 2.12.

Рассматриваемая цепочка представляет собой линейный четырёхполюсник. На её входе действует напряжение  $e_R(t)$ , выходной переменной является ток  $i_T(t)$ . То есть, согласно закону Ома,  $i_T = Y \cdot e_R$ . Поэтому коэффициент передачи цепочки имеет смысл её комплексной проводимости, см. также (2.18):

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + Z_C}.$$

Здесь  $Z_C = -j/(2\pi fC)$  – импеданс конденсатора.

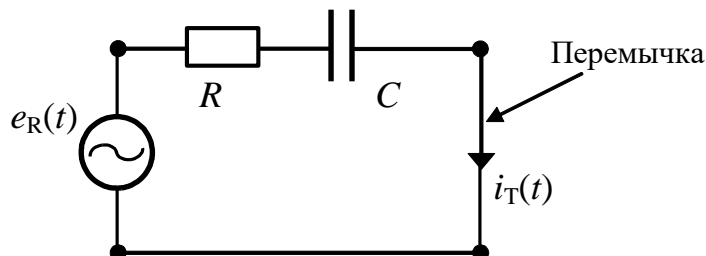


Рис. 2.12. Короткозамкнутая последовательная  $RC$  – цепочка

Связь между спектрами входного и выходного шумов определяется соотношением, аналогичным (2.11):  $\langle i_T^2 \rangle_f = |Y(2\pi f)|^2 \langle e_R^2 \rangle_f$ . Для модуля комплексной проводимости цепочки, имеющей смысл коэффициента передачи, имеем

$$|Y(2\pi f)|^2 = \frac{1}{R^2 + |Z_C|^2}.$$

Здесь  $|Z_C| = 1/(2\pi fC)$  – модуль импеданса конденсатора.

При стремлении частоты анализа к нулю,  $f \rightarrow 0$ , модуль импеданса конденсатора стремится к бесконечности,  $|Z_C| \rightarrow \infty$ . Соответственно, ток через цепочку стремится к нулю. Поэтому спектр  $\langle i_T^2 \rangle_f$  на низких частотах,  $f \ll f_c$ , имеет вид  $\langle i_T^2 \rangle_f \sim f^2$ . На высоких частотах,  $f \gg f_c$ , модуль импеданса конденсатора стремится к нулю,  $|Z_C| \rightarrow 0$ . Поэтому значение спектра  $\langle i_T^2 \rangle_f$  стремится к значению, определяемому тепловым шумом резистора  $R$ :  $\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT/R$ ,  $A^2/Гц$ , см. соотношение (2.2).

### 2.3.3. Колебательный контур

Рассмотрим колебательный контур, содержащий ёмкость  $C$ , индуктивность  $L$  и сопротивление потерь  $R$ , см. Рис. 2.13. Найдём спектр  $\langle e_T^2 \rangle_f$  и полную мощность  $\langle e_T^2 \rangle$  эдс  $e_T(t)$ , описывающей тепловой шум на **разомкнутых** выводах контура.

#### Эквивалентные параметры

Вместо “первичных” трёх параметров ( $L$ ,  $C$ ,  $R$ ) часто используются параметры, описывающие селективные свойства колебательного контура:

а) резонансная частота:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \tag{2.20}$$



б) добротность:

$$Q = \frac{2\pi f_1 L}{R}; \quad (2.21)$$

в) полуполоса пропускания:

$$B = \frac{f_1}{2Q}. \quad (2.22)$$

Для колебательного контура также используются параметры:

г) волновое сопротивление:

$$\rho = 2\pi f_1 L = 1 / (2\pi f_1 C); \quad (2.23)$$

д) резонансное сопротивление:

$$R_{\text{oe}} = Q^2 R. \quad (2.24)$$

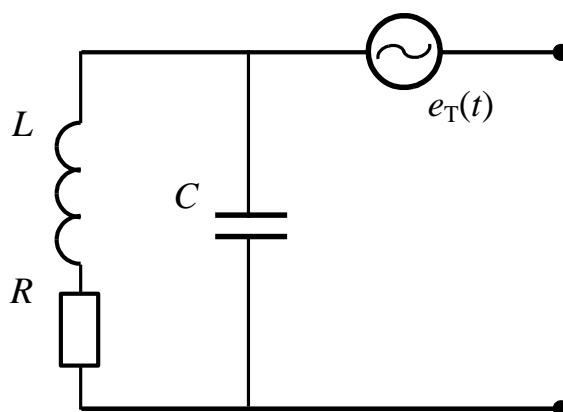


Рис. 2.13. Эквивалентная схема колебательного контура с генератором напряжения теплового шума

### Решение для спектра

Для определения спектра  $\langle e_T^2 \rangle_f$  теплового шума надо проанализировать выражение для комплексного импеданса контура:

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C + 1/(R + j\omega L)}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (2.25)$$

Этот импеданс, отражая селективные свойства контура, имеет максимальное (вещественное) значение на резонансной частоте,  $Z(2\pi f_1) = R_{\text{oe}}$ . При отстройке от резонанса наблюдается быстрое убывание модуля импеданса.

Полагая для простоты, что контур имеет **высокую добротность**,  $Q \gg 1$ , получим следующее выражение для спектра эдс теплового шума:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = \frac{4kTR_{\text{оe}}}{1 + (F/B)^2}, F = f - f_1. \quad (2.26)$$

Здесь  $F$  – частота отстройки от резонанса. Вид спектра приведен на Рис. 2.14.

На резонансной частоте  $f_1$  контур “шумит” как идеальный резистор, обладающий резонансным сопротивлением  $R_{\text{оe}}$ . Форма спектра повторяет резонансную кривую контура, характеризующуюся шириной (на уровне 0.5), равной  $2B$  – удвоенной полуполосе пропускания.

### Решение для полной мощности

Определим полную мощность  $\langle e_T^2 \rangle$  эдс теплового шума как площадь под графиком его спектра. Проводя необходимое интегрирование и осуществляя ряд преобразований, получим уже знакомый результат:

$$\langle e_T^2 \rangle = kT/C. \quad (2.27)$$

Эта мощность не зависит от величины сопротивления потерь  $R$  даже при  $R \rightarrow 0$  (идеальный осциллятор). Она имеет то же значение, что и для интегрирующей  $RC$  – цепочки, рассмотренной в Разделе 2.3.1, см. соотношение (2.13).

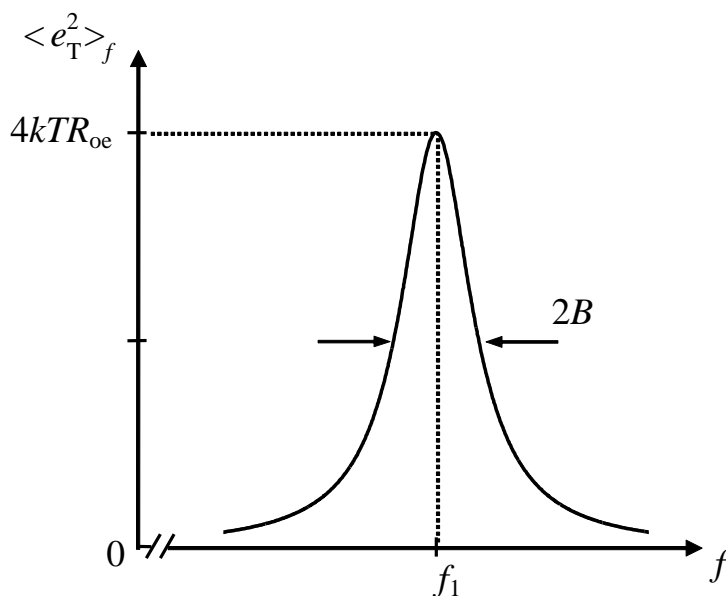


Рис. 2.14. Спектр эдс теплового шума высокодобротного колебательного контура

Качественно результат (2.27) можно объяснить так же, как и в случае интегрирующей  $RC$  – цепочки. Высота спектра,  $\langle e_T^2 \rangle_{f=f_1} = 4kTR_{\text{оe}}$ , пропорциональна  $R^{-1}$ , сопротивлению потерь в минус первой степени. То есть, с уменьшением сопротивления высота спектра **увеличивается**. Ширина спектра  $2B$  пропорциональна сопротивлению  $R$ . То есть с уменьшением сопротивления ширина спектра **уменьшается**. В результате, мощность шума, определяемая полной площадью под графиком спектра, не зависит от величины сопротивления  $R$ .

Данное объяснение, однако, не проясняет физической сути полученного результата, имеющего **фундаментальный характер**.

Действительно, устремим сопротивление к нулю,  $R \rightarrow 0$ . Обнаружим, что диссипация, как необходимое условие существования теплового шума, исчезла, а полная мощность шума осталась прежней.

Вопрос. В чём заключается фундаментальность полученного результата?

Ответ. Ситуация идентична рассмотренной в Разделе 2.3.1. Интегрирующая  $RC$  – цепочка (Задание 1. Шумовое напряжение), но со спецификой.

При стремлении сопротивления потерь к нулю,  $R \rightarrow 0$ , колебательный контур превращается в идеальный осциллятор. При этом спектр (2.26) трансформируется в дельта-функцию на частоте  $f_1$  (см. Рис. 2.15).

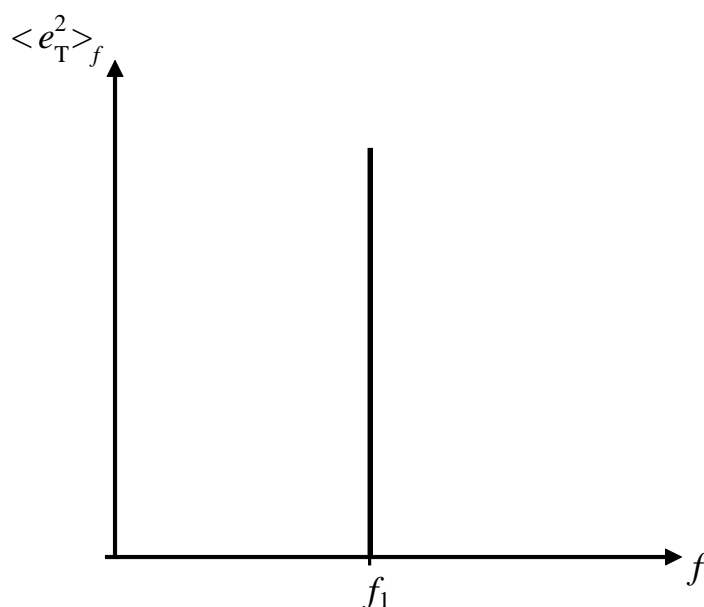


Рис. 2.15. Спектр эдс теплового шума идеального осциллятора

Как и в случае с интегрирующей  $RC$  – цепочкой преобразуем результат (2.27) для полной мощности теплового шума колебательного контура:

$$\frac{C \langle e_T^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (2.28)$$

Здесь в левой части представлена средняя энергия, накопленная конденсатором идеального осциллятора. Правая часть – энергия, приходящаяся на одну степень свободы. Таким образом, мы получили энергию, которой осциллятор обменивается с термостатом.

### 3. Дробовой шум

Англоязычное название дробового шума – shot noise.

Условия существования дробового шума: (1) дискретность заряда электрона,  $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$  Кл; (2) наличие выделенного направления движения электронов, то есть скорость  $\vec{v}$  у каждого электрона имеет среднее значение, отличное от нуля,  $\langle \vec{v} \rangle \neq 0$ ; (3) стохастичность моментов инжекции электронов в выделенном направлении.

Первое условие означает, что электроны, переносящие дискретные заряды, играют роль “дробин”. По поводу второго условия заметим, что при отсутствии выделенного направления движения генерируется тепловой шум. Среднее значение тепловой компоненты  $\vec{v}_T$  скорости электрона всегда равно нулю,  $\langle \vec{v}_T \rangle = 0$ . Третье условие легче понять от противного. Пусть электроны инжектируются через равные промежутки времени. В этом случае они возбуждают электрический ток, имеющий периодический характер, не имеющий случайности, присущей шумовым процессам.

Рассмотрим, для начала, достаточно простой вопрос: **почему дробовой шум не наблюдается в металлах?**

Электрон имеет две компоненты скорости,  $\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_d$ . Здесь  $\vec{v}_T$  – тепловая компонента, обусловленная взаимодействием электрона с тепловыми колебаниями решётки; она не имеет выделенного направления,  $\langle \vec{v}_T \rangle = 0$ . Через  $\vec{v}_d$  обозначена скорость дрейфа, имеющая направление, определяемое внешним электрическим полем, см. Рис. 3.1.

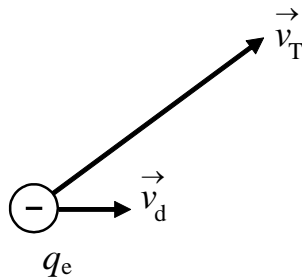


Рис. 3.1. Компоненты скорости электрона во внешнем электрическом поле

Дробовой шум проявляется, когда скорость дрейфа сравнима со среднеквадратической тепловой скоростью,  $v_d \sim v_T$ . При комнатной температуре имеем  $v_T \sim 70$  км/с. В металлических проводниках дробовой шум не виден, так как в них дрейфовая скорость относительно мала,  $v_d \ll v_T$ . Отметим, что при  $v_d \sim 1$  см/с любой металлический проводник расплавится. В полупроводниках дробовой шум может быть виден. В них величина дрейфовой скорости  $v_d$  принимает существенно бóльшие значения из-за того, что соударения носителей с решеткой относительно редки. В инжекционных приборах (электривакуумных

приборах, полупроводниковых диодах и биполярных транзисторах) дробовой шум есть всегда.

Чтобы понять, как проявляется дробовой шум, рассмотрим гипотетический инжекционный прибор, изображённый на Рис. 3.2.

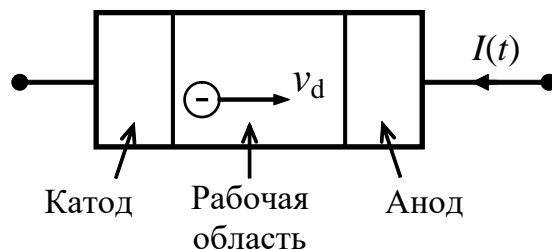


Рис. 3.2. Условное изображение инжекционного прибора

Здесь условно выделены три области: “Катод” (эмиттер) – область, из которой инжектируются носители тока; “Рабочая область”, в которой происходит взаимодействие носителей тока с внешним с электрическим полем; “Анод” (коллектор) – область сбора носителей тока.

В рабочей области всегда есть объёмный заряд  $Q_{vol}$  инжектированных носителей тока. Пусть этот заряд мал настолько, что его влиянием на движение носителей можно пренебречь. Тогда все носители тока пролетают через рабочую область **независимо** друг от друга. При этом каждый носитель наводит во внешней цепи импульс тока  $i_k(t)$ , где  $k$  – номер носителя тока, пролетевшего через рабочую область прибора. Длительность  $\tau_{пр}$  этого импульса равна времени пролёта носителя тока через рабочую область.

Полный ток  $I(t)$ , наводимый во внешней цепи, имеет случайный характер, обусловленный случайностью времён возникновения отдельных импульсов тока. Его можно разделить на две компоненты:

$$I(t) = I_0 + i_{др}(t). \quad (3.1)$$

Здесь  $I_0 = \langle I(t) \rangle$  – среднее (по полному ансамблю реализаций) значение тока, считается, что оно не зависит от времени;  $i_{др}(t)$  – дробовой шум. Среднее значение дробового шума равно нулю,  $\langle i_{др}(t) \rangle = 0$ . Для определения тока  $I_0$  и спектра  $\langle i_{др}^2 \rangle_f$  шума воспользуемся теорией пуассоновских случайных процессов.

### 3.1. Дробовой шум как пуассоновский случайный процесс

Общая теория пуассоновских случайных процессов хорошо развита, см., например, [3–5]. Рассмотрим полный ток  $I(t)$ , наводимый во внешней цепи, как пуассоновскую последовательность отдельных импульсов тока:

$$I(t) = \sum_k i_k(t - t_k). \quad (3.2)$$

Здесь  $t_k$  – момент возникновения импульса с номером  $k$ . Все импульсы возникают независимо друг от друга, однако моменты их возникновения распределе-

ны равномерно по всей оси времени  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Каждый импульс тока  $i_k(t)$  имеет длительность  $\tau_{\text{пр}}$ , равную времени пролёта носителя тока через рабочую область прибора. Эта длительность может различаться от импульса к импульсу, то есть быть случайной. **Средняя частота** появления импульсов равна  $\nu$ .

Вычислим **среднее значение** тока  $I_0$ , наводимого во внешней цепи.

Каждый носитель, вне зависимости от момента  $t_k$  его инжекции в рабочую область, а также длительности  $\tau_{\text{пр}}$  и формы  $i_k(t)$  соответствующего импульса тока, переносит заряд  $q_e$ . То есть выполняется следующее условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_k(t - t_k) dt = q_e. \quad (3.3)$$

Это означает, что площадь под каждым импульсом равна заряду электрона. Геометрическая трактовка приведённого условия приведена на Рис. 3.3.

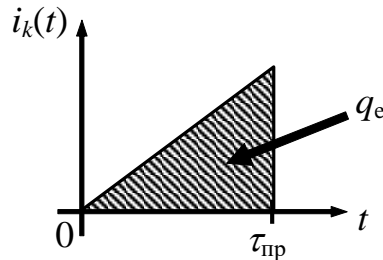


Рис. 3.3. Возможный вид импульса тока и его площадь

За единицу времени через внешнюю цепь, в среднем, проходит  $\nu$  импульсов, каждый из них переносит заряд  $q_e$ . Отсюда получаем очевидное выражение для среднего тока:

$$I_0 = \nu q_e. \quad (3.4)$$

Это есть заряд, переносимый, в среднем, за единицу времени.

Перейдём к вычислению **спектра дробового шума**  $\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f$ .

Сначала определим **спектр энергии**  $E(\omega)$  отдельного импульса тока:

$$E(\omega) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} i_k(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \right\rangle, \quad \omega = 2\pi f. \quad (3.5)$$

Этот спектр представляет собой среднее значение от фурье-образа импульса тока, взятого по модулю и возведённому во вторую степень.

Модуль фурье-образа имеет смысл **амплитудного** спектра импульса. Возведение этого модуля во вторую степень даёт спектр **энергии**, то есть распределение энергии импульса тока по частоте.

Как правило, импульсы тока характеризуются случайными параметрами, например, длительностью  $\tau_{\text{пр}}$ . Поэтому полученный спектр энергии надо усред-

нить по всем случайным параметрам, характеризующим отдельные импульсы тока  $i_k(t)$ .

Сначала, для упрощения анализа, найдём  $E(0)$  – значение спектра энергии на нулевой частоте,  $\omega = 0$ . Для этого учтём соотношение (3.3), согласно которому площадь под каждым импульсом тока равна заряду электрона  $q_e$ . В результате получим (здесь учтено, что  $\exp(0) = 1$ ):

$$E(0) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} i_k(t) dt \right|^2 = q_e^2. \quad (3.6)$$

Теперь выражение для спектра энергии можно представить в виде, явно учитывающем его зависимость от частоты:

$$E(\omega) = q_e^2 M(\theta). \quad (3.7)$$

В этом выражении введён нормированный спектр энергии импульса тока, равный единице при нулевом аргументе,  $M(\theta=0) = 1$ :

$$M(\theta) = \frac{1}{q_e^2} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} i_k(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \right\rangle. \quad (3.8)$$

Величина  $\theta$  есть угол пролета носителя тока через рабочую область прибора:

$$\theta = \omega \tau_{\text{пр}} = 2\pi f \tau_{\text{пр}}. \quad (3.9)$$

За единицу времени через внешнюю цепь, в среднем, проходит  $\nu$  импульсов тока. В результате находим выражение для **математического** (двухстороннего) спектра дробового шума:

$$S_{\text{др}}(\omega) = \nu E(\omega). \quad (3.10)$$

Это соотношение представляет собой модифицированную теорему Карсона (см., например, [6]). Его смысл достаточно прост. Мощность процесса есть энергия, выделяющаяся за единицу времени, даже если речь идёт о спектральном разложении. Использование соотношения (3.7) для спектра энергии отдельного импульса даёт:

$$S_{\text{др}}(\omega) = \nu q_e^2 M(\theta). \quad (3.11)$$

Учтём теперь выражение (3.4) для среднего тока,  $I_0 = \nu q_e$ . В результате получим следующее выражение для **математического** (двухстороннего) спектра дробового шума:

$$S_{\text{др}}(\omega) = q_e I_0 M(\theta). \quad (3.12)$$

Определим теперь, согласно (1.7), **физический** (односторонний) спектр  $\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f$ ; в результате получим:

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2S_{\text{др}}(2\pi f) = 2q_e I_0 M(\theta), \quad \theta = 2\pi f \tau_{\text{пр}}. \quad (3.13)$$

Перейдём к анализу спектра (3.13) дробового шума и его модификаций (см., например, [3–6, 8]).

### 3.2. Формула Шотки для спектра дробового шума

Для простоты сначала ограничимся низкими частотами анализа,  $f \ll 1/(2\pi\tau_{\text{пр}})$ , то есть примем  $M(\theta) = 1$ . В этом случае получим известную формулу Шотки, описывающую спектр **недепрессированного** дробового шума:

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2q_e I_0, \quad \text{А}^2/\text{Гц}. \quad (3.14)$$

Уточним условия применимости формулы Шотки.

1. Все носители тока в рабочей области считаются независимыми, то есть влиянием объёмного заряда  $Q_{\text{vol}}$  можно пренебречь.
2. Время пролёта носителей через рабочую область считается пренебрежимо малым по сравнению с обратной частотой анализа,  $\tau_{\text{пр}} \ll 1/(2\pi f)$ .
3. Дробовой шум считается стационарным, то есть средний ток через прибор не модулирован,  $I_0 = \text{const}$ .

Определим, к чему приводит нарушение вышеприведённых условий.

#### 3.2.1. Эффект депрессии дробового шума

Рассмотрим результат нарушения условия 1 применимости формулы Шотки.

Если объёмный заряд  $Q_{\text{vol}}$  заметно влияет на пролёт носителей тока через рабочую область, то происходит депрессия (сглаживание) дробового шума:

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2q_e I_0 \Gamma^2, \quad \text{А}^2/\text{Гц}. \quad (3.15)$$

Здесь  $\Gamma^2 = 0.01 \div 1.0$  – коэффициент депрессии. Чем больше объёмный заряд, тем сильнее депрессия дробового шума.

Эффект депрессии может целенаправленно использоваться для снижения дробового шума. Например, в электровакуумных приборах для усиления этого эффекта используется режим микротоков. Этот режим характеризуется тем, что ток анода имеет величину, существенно меньшую, чем эмиссионная способность катода. В результате происходит накопление большого объёмного заряда в рабочей области прибора, приводящего к депрессии дробового шума.

#### 3.2.2. Учёт конечности времени пролёта носителей

Рассмотрим теперь следствие нарушения Условия 2, то есть учтём конечность времени пролёта носителей тока через рабочую область прибора.

Соотношения (3.14) и (3.15) верны на относительно низких частотах:

$$f \ll f_b = 1/(2\pi\tau_{\text{пр}}). \quad (3.16)$$



Здесь  $f_v$  – верхняя частота среза, определяемая временем  $\tau_{пр}$  пролёта носителей через рабочую область. Для типичных полупроводниковых приборов  $f_v \sim 10^4 \div 10^{10}$  Гц; для типичных электровакуумных ламп  $f_v \sim 10^{10} \div 10^{12}$  Гц.

Вид спектра дробового шума определяется формой фурье–образа импульса тока  $i_k(t)$ , наводимого во внешней цепи отдельным носителем, пролетающим через рабочую область. Для учёта частотной зависимости спектра дробового шума возвращаемся к соотношению (3.13):

$$\langle i_{др}^2 \rangle_f = 2q_e I_0 M(\theta), \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (3.17)$$

Здесь  $M(\theta)$  – нормированный спектр энергии импульса тока (3.8);  $\theta = 2\pi f \tau_{пр}$  – угол пролета носителя через рабочую область прибора, см. (3.9).

На Рис. 3.4, в качестве примера, изображен вид функции  $M(\theta)$  для элементарного импульса, имеющего треугольную форму, см., например, § 3.2 в [4]. Вид импульса тока  $i_k(t)$  изображен на врезке к рисунку (см. также Рис. 3.3). Заштрихованная площадь под импульсом, представляющая его фурье–образ на нулевой частоте,  $f = 0$ , равна заряду электрона  $q_e$ .

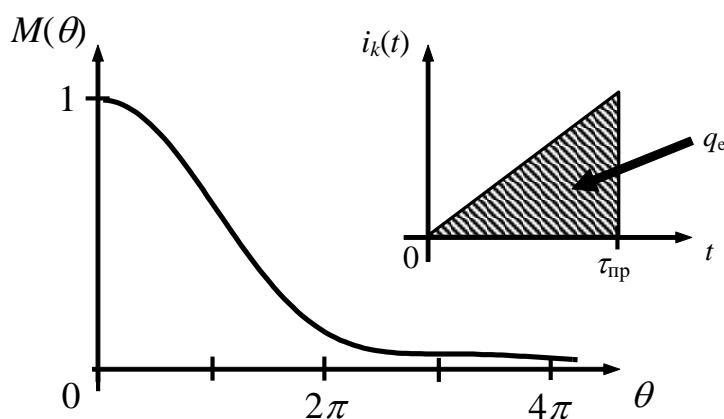


Рис. 3.4. Пример нормированного спектра энергии  $M(\theta)$  треугольного импульса тока  $i_k(t)$ , приведённого на врезке к рисунку

### Пример 3.1

Оценим эффективное напряжение  $v_{эфф}(\Delta f)$ , обусловленное дробовым шумом, выделяющимся на резисторе анодной нагрузки  $R_a$  электровакуумной лампы (см. Рис. 3.5).

Полосу анализируемых частот примем равной  $\Delta f = 20$  кГц; анодный ток  $I_{a0} = 10$  мА; коэффициент депрессии дробового шума  $\Gamma^2 = 0.1$ ; сопротивление анодной нагрузки  $R_a = 10$  кОм.

### Решение

Полный ток анода содержит постоянную составляющую и дробовой шум:  $I_a = I_{a0} + i_{др}(t)$ . В соответствии с (3.15) вычисляем спектр дробового шума:

$$\langle i_{др}^2 \rangle_f = 2q_e I_{a0} \Gamma^2 = 3.2 \times 10^{-19} [\text{Кл}] \times 0.01 [\text{А}] \times 0.1 = 3.2 \times 10^{-22} \text{ А}^2/\text{Гц}.$$

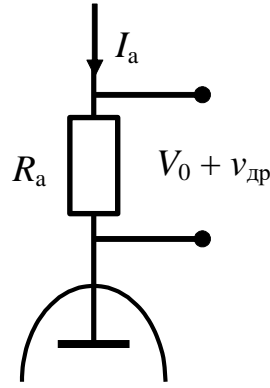


Рис. 3.5. Анодная цепь электровакуумной лампы

Таким образом, согласно соотношению (1.9), мощность дробового шума в полосе  $\Delta f = 2 \times 10^4$  Гц составляет  $\langle i_{др}^2(\Delta f) \rangle = \langle i_{др}^2 \rangle_f \Delta f = 6.4 \times 10^{-18} \text{ А}^2$ .

Извлекая, согласно (1.10), квадратный корень из полученного результата, находим эффективное значение шумового тока:  $i_{эфф}(\Delta f) \approx 2.5 \times 10^{-9} \text{ А} = 2.5 \text{ нА}$ .

Напряжение, обусловленное указанным током, выделяется, согласно закону Ома, на резисторе анодной нагрузки,  $v_{эфф} = R_a i_{эфф}$ . Отсюда находим:

$$v_{эфф}(\Delta f) = 25 \text{ мкВ}.$$

Это и есть эффективное напряжение, которое обусловлено дробовым шумом, выделяющимся на резисторе анодной нагрузки.

### 3.2.3. Нестационарный дробовой шум

Рассмотрим следствие нарушения Условия 3, то есть учтём возможную нестационарность дробового шума.

Приведённые выше соотношения для спектра дробового шума справедливы, когда ток через прибор не модулируется сигналом, либо модуляция ничтожно мала, то есть  $I_0 = \text{const}$ . Во многих радиоэлектронных приборах это не так, то есть  $I_0 = \langle I(t) \rangle = I_0(t)$ . В этом случае (без учета эффекта депрессии) следует использовать флуктуационное уравнение дробового шума [24]:

$$i_{др}(t) = \sqrt{2q_e \langle I(t) \rangle} \zeta_s(t). \quad (3.18)$$

Здесь  $\zeta_s(t)$  – стационарный случайный процесс, нормированный по спектру при  $f = 0$  к единице:

$$\langle \zeta_s^2 \rangle_{f=0} = 1 \text{ Гц/Гц} . \quad (3.19)$$

Заметим, что этот процесс имеет размерность  $[\zeta_s] = \text{Гц}^{1/2}$ .

Спектр  $\langle \zeta_s^2 \rangle_f$  по форме повторяет спектр стационарного дробового шума. Точнее говоря,  $\langle \zeta_s^2 \rangle_f = M(\theta)$ , см. соотношение (3.8).

**Пример 3.2**

Найдем спектр дробового шума, обладающего слабой периодической нестационарностью. Это означает, что ток через прибор содержит малую сигнальную (гармоническую) компоненту:

$$\langle I(t) \rangle = I_0 + I_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0), \quad I_1 \ll I_0. \quad (3.20)$$

Здесь  $I_0$  – постоянная составляющая тока;  $I_1, f_1, \varphi_0$  – амплитуда, частота и начальная фаза сигнальной компоненты.

**Решение**

Для упрощения задачи пренебрежем эффектом депрессии шума. Кроме того, считаем, что шум является белым, то есть дельта-коррелированным.

Введем глубину модуляции тока сигнальной компонентой:

$$m = I_1/I_0, \quad m \ll 1. \quad (3.21)$$

Сначала вычислим функцию корреляции (1.1) периодически нестационарного дробового шума. Опуская громоздкие выкладки, получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{др}(\tau) &= \overline{\langle i_{др}(t) i_{др}(t+\tau) \rangle} = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{4} m^2 \cos(2\pi f_1 \tau) \right) 2q_e I_0 \Phi_{\zeta_s}(\tau). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь  $\Phi_{\zeta_s}(\tau)$  – корреляционная функция процесса  $\zeta_s(t)$ .

Преобразуя полученный результат по Фурье, найдем

$$\langle i_{др}^2 \rangle_f = (1 + m^2/4) 2q_e I_0. \quad (3.23)$$

Видим, что поправка, вызванная слабой сигнальной компонентой, мала. Но если  $I_1 \sim I_0$ , либо  $I_1 > I_0$ , то наличие сигнала существенно влияет на спектральные характеристики дробового шума.

Периодическая нестационарность шума может целенаправленно использоваться в системах генерации и обработки прецизионных сигналов для уменьшения шумовой модуляции фазы (частоты). Качественная иллюстрация проявления периодической нестационарности дробового шума приведена на Рис. 3.6.

На представленном рисунке качественно изображены две осциллограммы тока через прибор с учётом дробового шума. Эти осциллограммы получены с использованием флуктуационного уравнения (3.18). Интенсивность шума, для наглядности, сильно увеличена. Осциллограмма “1” соответствует слабой модуляции тока. Видим, что дисперсия шума практически не зависит от времени, как было обнаружено выше, в примере 3.2. Осциллограмма “2” соответствует сильной модуляции тока. Представлен режим, когда прибор работает в режиме отсечки тока. Видно, что дробовой шум сильнее всего проявляется в области

максимального тока. В окрестности нулевого тока шум практически отсутствует. Отсюда следует важный вывод.

Сильная нестационарность шума приводит к усилению его влияния на амплитуду сигнала на выходе прибора. При этом влияние шума на фазу выходного сигнала ослабляется. Действительно, фаза сигнала определяется двумя факторами. Первый – моменты пересечения выходного сигнала с нулевой осью, то есть расположением “нулей” сигнала на оси времени. Однако здесь дробовой шум практически не проявляется. Вторым фактор – нарушение симметрии импульсов выходного сигнала. Здесь дробовой шум присутствует, но, как показывает анализ, он проявляется слабее, чем в случае слабой модуляции тока.

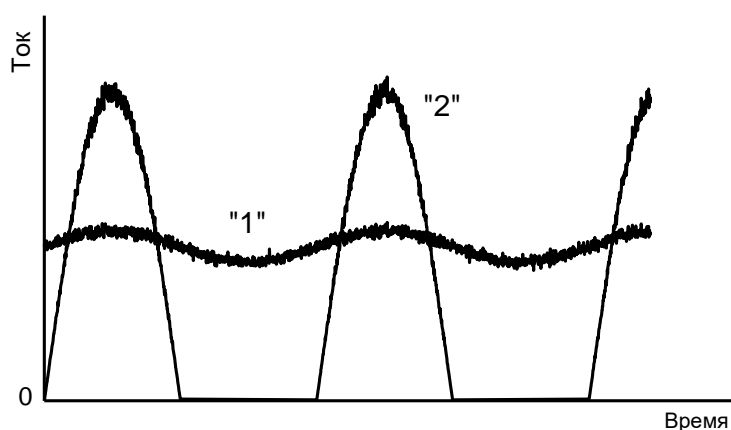


Рис. 3.6. Проявление дробового шума: “1” – слабый сигнал; “2” – сильный сигнал

Таким образом, использование режима сильной модуляции тока приводит к уменьшению влияния дробового шума на фазу выходного сигнала и, следовательно, к уменьшению шумовой модуляции его частоты.

## 4. Генерационно–рекомбинационный шум

### 4.1. Общие сведения

Сокращённое название – ГРШ. Англоязычное название – generation-recombination noise (сокращённо – GRN).

Генерационно–рекомбинационный шум наблюдается в полупроводниках и обусловлен случайностью процессов рождения (либо генерации) и рекомбинации (либо захвата на ловушки) носителей тока. Схемы генерационно–рекомбинационных (ГР) процессов изображены на Рис. 4.1(а, б).



Рис. 4.1. Генерационно–рекомбинационные процессы: (а) одноступенчатая (прямая) генерация–рекомбинация; (б) процесс с участием ловушки.

На Рис. 4.1(а) показана одноступенчатая генерация–рекомбинация. Здесь  $e$  – электрон,  $h$  – дырка. Электрон и дырка могут рекомбинировать (Р), образуя нейтральный атом NA. Вследствие термической (или иной) ионизации нейтральный атом генерирует (Г) электронно–дырочную пару. На Рис. 4.1(б) представлены процессы захвата и освобождения носителя тока ловушкой. Здесь  $c$  – носитель (электрон или дырка, carrier – англ.), Tr – ловушка (trap – англ.), то есть примесный атом, который может захватывать электрон или дырку.

**Зонная диаграмма** генерационно–рекомбинационных (ГР) процессов условно изображена на Рис. 4.2. Здесь указаны следующие энергетические уровни:

- $E_{\sigma}$  – дно зоны проводимости,
- $E_{\nu}$  – потолок валентной зоны,
- $E_{te}$  – уровень ловушки для электронов,
- $E_{th}$  – уровень ловушки для дырок.

В левой части диаграммы показаны процессы, соответствующие одноступенчатой (прямой) генерации–рекомбинации. Правая часть диаграммы соответствует процессам с участием ловушек. На зонной диаграмме ловушки представлены разрешёнными уровнями, находящимися внутри запрещённой энергетической зоны полупроводника. Уровни  $E_{te}$ , находящиеся вблизи дна зоны проводимости  $E_{\sigma}$ , являются ловушками для электронов. Уровни  $E_{th}$ , находящиеся вблизи потолка валентной зоны  $E_{\nu}$ , являются ловушками для дырок.

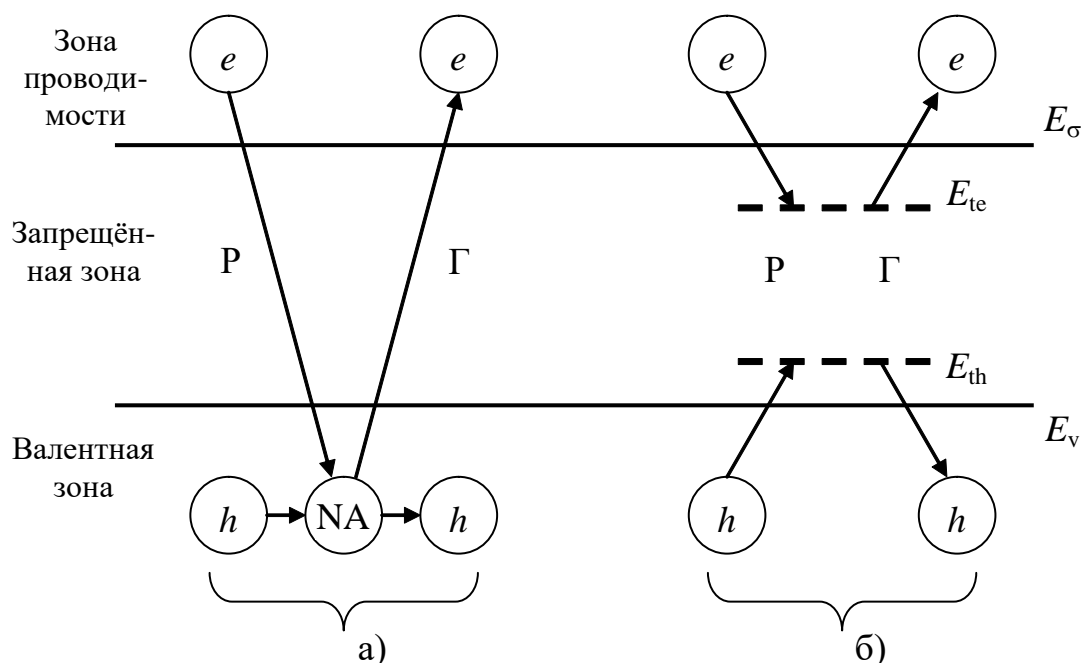


Рис. 4.2. Зонная диаграмма генерационно–рекомбинационных процессов

Таким образом, ГР процессы приводят к случайному изменению полного числа носителей тока в полупроводниковом образце  $N=N(t)$ .

#### 4.2. Уравнение Ланжевена для ГРШ

Рассмотрим стационарный генерационно–рекомбинационный шум. Это означает, что в образце установилась равновесное число носителей тока:

$$\langle N(t) \rangle = N_0. \quad (4.1)$$

Введем в рассмотрение относительные флуктуации числа носителей тока  $\delta N = \delta N(t)$ :

$$N = (1 + \delta N) N_0. \quad (4.2)$$

Полагаем флуктуации достаточно малыми, то есть

$$\langle \delta N^2 \rangle \ll 1. \quad (4.3)$$

Для определения спектра ГРШ воспользуемся **методом Ланжевена**, широко используемым при анализе флуктуационных процессов. Допустим, что имеется некоторая переменная, описываемая дифференциальным уравнением первого порядка, разумеется, без учёта случайных процессов. В рассматриваемом анализе такой переменной является  $N$  – число носителей тока в образце.

При малом отклонении от равновесного значения  $N_0$  относительное возмущение числа носителей  $\delta N$  описывается известным уравнением:

$$\frac{d}{dt} \delta N = -\frac{1}{\tau_0} \delta N. \quad (4.4)$$

Здесь  $\tau_0$  – время жизни носителей тока. Решение этого уравнения показывает, что начальное возмущение числа носителей тока  $(\delta N)_0 = \delta N(t=0)$  затухает по экспоненциальному закону:

$$\delta N(t) = (\delta N)_0 \exp(-t/\tau_0), \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

Вид соответствующей зависимости изображен на Рис. 4.3.

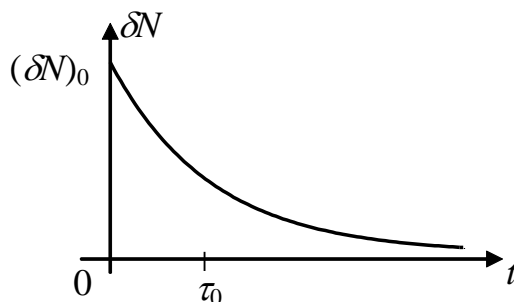


Рис. 4.3. Релаксация начального возмущения числа носителей тока

**Суть метода Ланжевена** заключается в следующем (см., например, раздел 2.3 в [6]).

Берется “динамическое”, то есть без учета шумов, уравнение типа (4.4).

Для учёта флуктуаций в правую часть уравнения добавляется дельта–коррелированный шумовой источник:

$$\frac{d}{dt} \delta N = -\frac{1}{\tau_0} \delta N + \sqrt{A_N} \zeta(t). \quad (4.6)$$

Здесь  $A_N$  – параметр, характеризующий мощность шумового источника;  $\zeta(t)$  – стационарный случайный процесс, обладающий единичным спектром,

$$\langle \zeta^2 \rangle_f = 1 \text{ Гц/Гц}. \quad (4.7)$$

Соотношение (4.6) позволяет вычислить спектр генерационно–рекомбинационного шума.

### 4.3. Спектр генерационно–рекомбинационного шума

Вычислим спектр ГРШ с помощью так называемого “операторного метода”.

Для этого преобразуем соотношение (4.6) по Фурье. Следует иметь в виду, что фурье–образы случайных процессов, входящих в данное уравнение, существуют только в классе обобщённых функций. Однако эта проблема уже решена в рамках современной статистической радиофизики.

Суть преобразования по Фурье состоит во введении следующих замен:

$$d/dt \rightarrow j\omega, \quad \delta N(t) \rightarrow \delta N, \quad \zeta(t) \rightarrow \zeta. \quad (4.8)$$

То есть оператор дифференцирования заменяется операторным множителем  $j\omega$ , а случайные процессы – их (обобщенными) фурье–образами.

В результате из соотношения (4.6) получаем:

$$(1 + j\omega\tau_0)\delta N = \tau_0\sqrt{A_N}\zeta. \quad (4.9)$$

Переводя это соотношение на язык преобразования случайного процесса линейной системой, получим:

$$\delta N = K(\omega)\zeta. \quad (4.10)$$

Здесь введён комплексный коэффициент преобразования “первичного” шумового источника  $\zeta$  в относительные флуктуации числа носителей:

$$K(\omega) = \frac{\tau_0\sqrt{A_N}}{1 + j\omega\tau_0} \quad (4.11)$$

Отсюда, используя теорию линейных систем, найдём связь между спектрами рассматриваемых случайных процессов:

$$\langle \delta N^2 \rangle_f = |K(2\pi f)|^2 \langle \zeta^2 \rangle_f. \quad (4.12)$$

Это соотношение имеет следующий смысл.

Модуль  $|K(2\pi f)|$  комплексного коэффициента преобразования представляет амплитудно–частотную характеристику (АЧХ) рассматриваемой линейной системы. Эта характеристика описывает преобразование **амплитудного спектра** процесса. Выражение для АЧХ возведённое во вторую степень,  $|K(2\pi f)|^2$ , описывает преобразование **спектра мощности** процесса, называемого здесь просто спектром.

Примечание

Отметим, что подобный подход для вычисления спектра “выходной” переменной уже использовался нами в Разделе “2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка“. С его помощью было получено выражение (2.11) для спектра теплового шума на выходе цепочки.

Учитывая соотношение (4.11), найдём требуемую характеристику:

$$|K(\omega)|^2 = \frac{\tau_0^2 A_N}{1 + (\omega\tau_0)^2}, \quad \omega = 2\pi f.$$

Дополнительно учтём соотношение (4.7), согласно которому спектр  $\langle \zeta^2 \rangle_f$  шумового источника равен единице. В итоге получим выражение для спектра относительных флуктуаций числа носителей тока:

$$\langle \delta N^2 \rangle_f = \frac{\tau_0^2 A_N}{1 + (2\pi f\tau_0)^2}. \quad (4.13)$$



Определим параметр  $A_N$ , входящий в соотношение (4.13) и характеризующий мощность шума. Для этого, согласно (1.6), сначала вычислим полную мощность ГРШ, как интеграл от спектра по всем частотам:

$$\langle \delta N^2 \rangle = \int_0^{\infty} \langle \delta N^2 \rangle_f df = \frac{1}{4} A_N \tau_0. \quad (4.14)$$

Найдём теперь эту мощность, анализируя механизм генерационно–рекомбинационного процесса.

В случае действия только одного механизма: “а” (прямая генерация–рекомбинация), либо “б” (процесс с участием ловушки), см. Рис. 4.1, имеем

$$\langle \delta N^2 \rangle = 1/N. \quad (4.15)$$

Если одновременно действуют оба механизма (“а” и “б”), получим

$$\langle \delta N^2 \rangle = \alpha_T/N, \quad 0 < \alpha_T \leq 1. \quad (4.16)$$

Таким образом, величину  $\langle \delta N^2 \rangle$  можно считать известной. Она не зависит от значения времени жизни носителей тока  $\tau_0$ .

В результате, учитывая (4.13), найдём окончательное выражение для спектра относительных флуктуаций числа носителей тока в образце:

$$\langle \delta N^2 \rangle_f = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \langle \delta N^2 \rangle. \quad (4.17)$$

Исследуем зависимость формы спектра от величины времени жизни носителей тока  $\tau_0$ . При этом полагаем, что мощность шума является фиксированной,  $\langle \delta N^2 \rangle = \text{const}$ . Соответствующая иллюстрация приведена на Рис. 4.4 для двух значений времени жизни носителей тока:  $\tau_0^{(1)} > \tau_0^{(2)}$ . Здесь, для наглядности, выбран следующий масштаб осей.

По вертикали отложены значения  $Y$ , имеющие размерность времени:

$$Y = \langle \delta N^2 \rangle_f / (4 \langle \delta N^2 \rangle) = \frac{\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2}.$$

На нулевой частоте анализа,  $f=0$ , они совпадают с временем жизни носителей тока  $Y(0) = \tau_0$ . По горизонтальной оси отложена угловая частота  $\omega = 2\pi f$ , имеющая размерность обратного времени.

Из рисунка видно, что при росте  $\tau_0$  высота спектра растет пропорционально  $\tau_0$ , а ширина убывает как  $\tau_0^{-1}$ . Полная площадь, определяемая мощностью шума  $\langle \delta N^2 \rangle$ , остается постоянной. То есть получен очевидный результат. Увеличение времени жизни носителей тока  $\tau_0$  приводит к усилению низкочастотных компонент ГРШ и ослаблению его высокочастотных компонент.

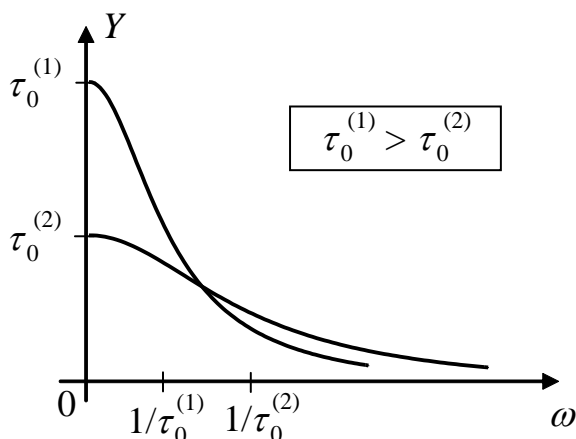


Рис. 4.4. Зависимость формы спектра ГРШ от величины времени жизни носителей тока

Напомним, что спектр, имеющий зависимость от частоты, представленную соотношением (4.17), называется лоренцевым. Такой же вид имеет спектр (2.8) эдс теплового шума интегрирующей  $RC$  – цепочки, см. Рис. 2.5.

Для лоренцева спектра вводится понятие частоты среза:

$$f_c = 1/(2\pi\tau_0). \quad (4.18)$$

Это – частота, на которой величина спектра убывает вдвое по сравнению с его высотой (на нулевой частоте).

#### 4.4. Мультипликативный характер ГРШ

Покажем, что генерационно–рекомбинационный шум имеет мультипликативный характер. Этот шум, в частности, проявляется через флуктуации сопротивления полупроводникового образца.

Выше уже отмечалось, что ГРШ представляет собой флуктуации полного числа носителей тока в образце, см. соотношение (4.2):

$$N=(1+\delta N) N_0.$$

Здесь  $\delta N = \delta N(t)$  – относительные флуктуации числа носителей.

Рассмотрим полупроводниковый образец, обладающий длиной  $l$  и сечением  $A_0$ , изображённый на Рис. 4.5.

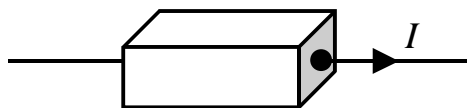


Рис. 4.5. Полупроводниковый образец, через который пропускается электрический ток  $I$

Через образец пропускается фиксированный ток,  $I = \text{const}$ . Для расчёта флуктуаций  $u(t)$  полного напряжения  $U = IR$ , выделяющегося на образце,

найдем относительные флуктуации  $\delta R = \delta R(t)$  полного сопротивления  $R$  образца:

$$R = (1 + \delta R) R_0. \quad (4.19)$$

С этой целью воспользуемся известной связью между сопротивлением и полным числом носителей тока в образце:

$$R = \frac{l^2}{q_e \mu N}. \quad (4.20)$$

Здесь  $\mu$  – подвижность носителей тока. Она определяется из характеристики “скорость – поле”, то есть зависимости скорости дрейфа  $v_d$  носителей от приложенного электрического поля  $E$ . Эта характеристика имеет вид:  $v_d = \mu E$  (см., например, [9]).

Подставляя в (4.20) невозмущенное число носителей  $N_0$ , найдем невозмущенное сопротивление образца:

$$R_0 = \frac{l^2}{q_e \mu N_0}. \quad (4.20a)$$

Линеаризуем соотношение (4.20) в окрестности  $N_0$ :

$$(1 + \delta R) R_0 = \frac{l^2}{(1 + \delta N) q_e \mu N_0} = \frac{1}{(1 + \delta N)} R_0. \quad (4.20б)$$

Здесь учтено выражение (4.20a) для невозмущенного сопротивления  $R_0$ . После сокращения на  $R_0$  в левой и правой частях соотношения (4.20б) получим:

$$1 + \delta R = \frac{1}{1 + \delta N} = 1 - \delta N. \quad (4.20в)$$

Здесь использовано условие (4.3) малости относительных флуктуаций числа носителей тока,  $\langle \delta N^2 \rangle \ll 1$ .

В результате находим следующую связь между относительными флуктуациями сопротивления и числа носителей:

$$\delta R(t) = -\delta N(t). \quad (4.21)$$

Эти флуктуации различаются только знаком. Следовательно, они обладают одинаковыми спектрами. Таким образом, спектр относительных флуктуаций сопротивления образца совпадает со спектром ГРШ (4.17):

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \langle \delta N^2 \rangle. \quad (4.22)$$

Перейдем к определению спектра  $\langle u^2 \rangle_f$  шумового напряжения, обусловленного флуктуациями сопротивления образца. Для этого обратимся к электрической схеме, изображенной на Рис. 4.6. Здесь изображен резистор, обладающий флуктуациями сопротивления. Его роль играет рассматриваемый полупроводниковый образец.

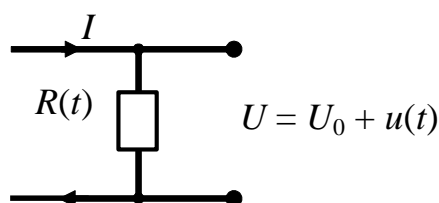


Рис. 4.6. Резистор, обладающий флуктуациями сопротивления, через который пропускается электрический ток

Через резистор пропускается фиксированный ток  $I = \text{const}$ . Поскольку сопротивление резистора подвержено флуктуациям,  $R = R(t)$ , полное падение напряжения на резисторе  $U$  содержит шумовую компоненту  $u(t)$ .

Используя закон Ома, найдем невозмущённое напряжение на образце:  $U_0 = I R_0$ . Кроме того, вычислим шумовую компоненту напряжения:

$$u(t) = I R_0 \delta R(t) = U_0 \delta R(t). \quad (4.23)$$

Найдём спектр этого шумового напряжения:

$$\langle u^2 \rangle_f = (I R_0)^2 \langle \delta R^2 \rangle_f = U_0^2 \langle \delta R^2 \rangle_f. \quad (4.24)$$

Учтём, что, согласно (4.22), спектр относительных флуктуаций сопротивления не зависит ни от напряжения  $U_0$ , ни от тока  $I$ . В результате видим, что величина спектра шумового напряжения пропорциональна квадрату падения напряжения на образце  $U_0^2$ , либо квадрату протекающего тока  $I^2$ .

#### Примечание

Такие квадратичные зависимости типичны для всех линейных резисторов, обладающих флуктуациями сопротивления. При этом форма спектра флуктуаций сопротивления не играет никакой роли, она лишь определяет форму спектра шумового напряжения.

### 4.5. Вывод уравнения Ланжевена

Осуществим вывод уравнения Ланжевена (4.6) для ГРШ. За основу возьмём подход, предложенный А. Ван дер Зилом [6]. Обозначим через  $P(N, t)$  вероятность застать  $N$  носителей тока в момент времени  $t$ .

В течение малого интервала времени  $dt$  рассматриваемая вероятность может измениться на величину  $d_t P$  вследствие следующих переходов:

$$\begin{aligned} N &\xrightarrow{g} (N+1); N \xrightarrow{r} (N-1); \\ (N-1) &\xrightarrow{g} N; (N+1) \xrightarrow{r} N. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Переходы, указанные в первой строке, приводят к уменьшению вероятности,  $d_t P < 0$ . Оставшиеся два перехода дают  $d_t P > 0$ . Символом “g” над стрелкой отмечены переходы, вызванные генерацией носителя тока; соответственно, символ “r” означает рекомбинацию носителя. Указанные переходы характеризуются скоростями генерации  $g$  и рекомбинации  $r$  носителей тока. Эти скорости определяют вероятность генерации  $g dt$  и рекомбинации  $r dt$  одного носителя тока за сколь угодно малое время  $dt$ . Анализ переходов (4.25) приводит к следующему дифференциально–разностному уравнению для вероятности  $P(N, t)$ :

$$d_t P = -P(N, t) g(N) dt - P(N, t) r(N) dt + \\ + P(N-1, t) g(N-1) dt + P(N+1, t) r(N+1) dt . \quad (4.26)$$

Проанализируем полученное уравнение, воспользовавшись методами статистической радиофизики (см., например, Гл.1 в [4]). Прежде всего, отметим, что  $N = N(t)$  – случайный марковский процесс, поскольку изменение вероятности определяется состоянием лишь в рассматриваемый момент времени  $t$ .

Обсудим теперь зависимость вероятности  $P(N, t)$  от числа  $N$  носителей в образце. Из (4.26) видим, что изменение вероятности определяется значениями лишь в трех соседних точках:  $(N-1)$ ,  $N$ ,  $(N+1)$ . При этом следует иметь в виду, что переменная  $N$  является дискретной. Полагая  $N \gg 1$ , можно рассматривать изменение  $(+1)$  как дифференциал  $dN = 1$ . Таким образом, рассматриваемые три соседние точки есть:  $(N - dN)$ ,  $N$ ,  $(N + dN)$ . На языке дифференциального исчисления данное обстоятельство означает, что в правую часть соотношения (4.26) входят производные по переменной  $N$  до 2-го порядка включительно. Это даёт возможность использовать разложение для последних двух членов правой части в степенной ряд (в окрестности точки  $N$ ) с учетом слагаемых, содержащих производные не выше второго порядка:

$$P(N-1, t) g(N-1) = \\ = P(N, t) g(N) + [P(N, t) g(N)]'_N (-1) + (1/2)[P(N, t) g(N)]''_{NN} (-1)^2, \\ P(N+1, t) r(N+1) = \\ = P(N, t) r(N) + [P(N, t) r(N)]'_N (+1) + (1/2)[P(N, t) r(N)]''_{NN} (+1)^2. \quad (4.27)$$

Используя полученные разложения для преобразования соотношения (4.26), получим известное уравнение Эйнштейна – Фоккера – Планка (ЭФП) для вероятности  $P(N, t)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} [K_1(N) P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} [K_2(N) P]. \quad (4.28)$$

Входящие сюда кинетические коэффициенты  $K_1(N)$  и  $K_2(N)$  определяются через скорости генерации и рекомбинации носителей тока:

$$K_1(N) = g(N) - r(N), \quad K_2(N) = g(N) + r(N). \quad (4.29)$$

Уравнение (4.28) позволяет найти все статистические характеристики флуктуаций полного числа  $N(t)$  носителей в образце. Однако здесь будет использована иная трактовка этого уравнения. Уравнению ЭФП соответствует, как можно показать [4], следующее уравнение для флуктуаций  $N(t)$ :

$$\frac{dN}{dt} = K_1(N) + \sqrt{K_2(N)} \zeta(t). \quad (4.30)$$

Здесь использован стационарный источник  $\zeta(t)$ , обладающий, как отмечено в соотношении (4.7), единичным спектром  $\langle \zeta^2 \rangle_f = 1$  Гц/Гц.

Уравнение (4.30) применимо ко всем флуктуационным процессам, для которых можно определить скорости генерации и рекомбинации носителей тока, необходимые для определения кинетических коэффициентов (4.29).

Ограничимся анализом стационарного генерационно–рекомбинационного шума. Условие стационарности ГРШ можно представить следующим образом:

$$K_1(N_0) = 0. \quad (4.31)$$

Это означает, что в образце установилось стационарное (среднее) число носителей тока  $\langle N(t) \rangle = N_0$ , определяемое, согласно первому соотношению в (4.29), равенством скоростей их генерации и рекомбинации:

$$g(N_0) = r(N_0). \quad (4.32)$$

Воспользуемся соотношениями (4.2) и (4.3), где введены в рассмотрение малые относительные флуктуации числа носителей тока:

$$N = (1 + \delta N) N_0; \quad \delta N = \delta N(t); \quad \langle \delta N^2 \rangle \ll 1.$$

Преобразуем правую часть соотношения (4.30). Для этого линеаризуем первый член в окрестности  $N_0$ , а в предшумовом множителе второго слагаемого ограничимся нулевым приближением, то есть примем  $N = N_0$ .

В результате получим уравнение (4.6) для относительных флуктуаций числа носителей тока. Время релаксации  $\tau_0$  определяется через производную от разности скоростей рекомбинации и генерации, взятую в точке  $N_0$ :

$$\tau_0 = \left[ \frac{d(r-g)}{dN} \Big|_{N_0} \right]^{-1}. \quad (4.33)$$

Параметр  $A_N$ , характеризующий мощность шумового источника в соотношении (4.6), определяется следующим образом:

$$A_N = 2g(N_0)/N_0^2. \quad (4.34)$$

Напомним, что уравнение (4.6) относится к классу уравнений Ланжевена.

## 5. Шум лавинообразования

### 5.1. Введение

Англоязычное название шума лавинообразования – avalanche noise.

Впервые явление лавинного размножения тока нашло применение в специально разработанных электровакуумных приборах – **фотоэлектронных умножителях** (ФЭУ). Схематическое устройство ФЭУ изображено на Рис. 5.1.

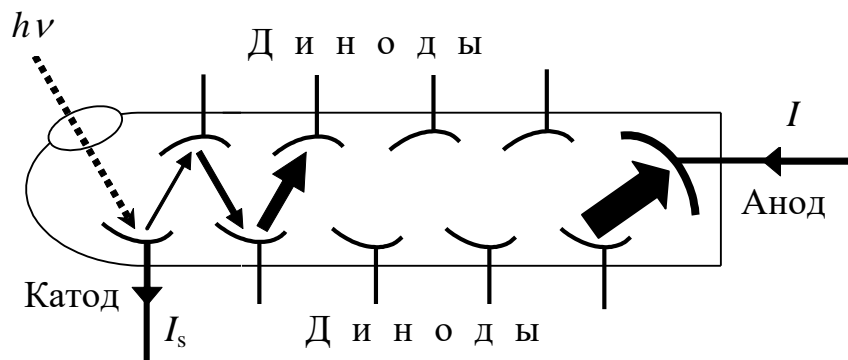


Рис. 5.1. Фотоэлектронный умножитель

Луч света, попадая на катод, приводит к эмиссии фотоэлектронов. Эти электроны, под действием электрического поля, устремляются к первому диноду (промежуточному аноду). Величина поля достаточно велика для того, чтобы электрон, достигнув динода, выбил из него дополнительные (вторичные) электроны. Увеличившийся поток электронов направляется к следующему диноду, из которого также выбиваются вторичные электроны. В конечном итоге, поток электронов достигает анода.

Обозначим через  $I_s$  ток катода,  $I$  – ток анода. В этом случае имеем:

$$I = M I_s. \quad (5.1)$$

Здесь  $M$  – коэффициент размножения электронов, характеризующий эффективность работы ФЭУ. Его величина может достигать  $10^5 \div 10^6$ . В результате, возникает возможность работы ФЭУ в “режиме счёта фотонов”. Однако выявить единичный фотон не удаётся. Этому мешает шум лавинообразования, обусловленный случайным характером эмиссии и размножения электронов.

Шум лавинообразования  $i_{л}(t)$  проявляется аналогично дробовому шуму  $i_{др}(t)$ , рассмотренному в Разделе 3, см. соотношение (3.1):

$$I(t) = \langle I(t) \rangle + i_{л}(t). \quad (5.2)$$

Этот шум присутствует и в других электронных приборах, в которых имеет место лавинное размножение носителей тока. С учётом шума лавинообразования соотношение (5.1), определяющее коэффициент лавинного размно-

жения носителей, определяется токами, усреднёнными по ансамблю реализаций:

$$M = \langle I(t) \rangle / \langle I_s(t) \rangle . \quad (5.3)$$

Здесь ток  $I_s$  надо рассматривать как ток инжекции носителей в рабочую область прибора. Этот ток подвержен влиянию дробового шума.

Рассмотрим кратко некоторые приборы, работа которых основана на эффекте лавинного размножения носителей тока.

**Стабилитрон** (стабилизаторный диод) – диод с  $p-n$  переходом, смещённым в обратном направлении. При определённом (обратном) напряжении  $V_{пр}$  возникает лавинный пробой  $p-n$  перехода. В результате, ток через диод контролируется только внешней цепью, а напряжение  $V$  на диоде остаётся практически неизменным,  $V \approx V_{пр}$ . Это явление используется в стабилизаторах напряжения. Упрощенная схема стабилизатора изображена на Рис. 5.2.

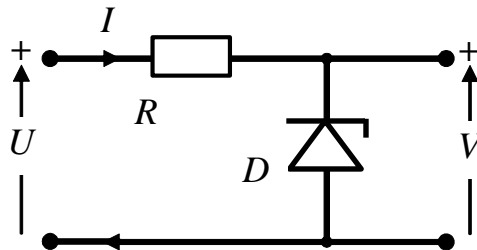


Рис. 5.2. Упрощенная схема стабилизатора напряжения

Схема содержит два основных элемента: балластный резистор  $R$  и стабилитрон  $D$ . На вход подаётся напряжение  $U$ . С выхода снимается стабилизированное напряжение  $V$ . Ток  $I$  течёт через стабилитрон в обратном направлении. В идеальном случае сопротивление нагрузки на выходе стабилизатора напряжения равно бесконечности.

На Рис. 5.3 поясняется принцип работы стабилизатора. Здесь изображена обратная ветвь вольтамперной характеристики стабилитрона. Выделено напряжение пробоя  $V_{пр}$ , при приближении к которому ток  $I$  через стабилитрон неограниченно нарастает. Кроме того, приведена так называемая “нагрузочная” прямая, определяемая, в соответствии с Рис. 5.2, уравнением

$$I = (U - V) / R .$$

Эта прямая определяется двумя характерными точками на координатных осях ( $V$ ;  $I$ ): ось  $V$  (то есть  $I = 0$ ), характерная точка  $V = U$ ; ось  $I$  (то есть  $V = 0$ ), характерная точка  $I = U/R$ .

Напряжение  $V$  на выходе стабилизатора напряжения определяется точкой пересечения ВАХ стабилитрона и нагрузочной прямой (рабочей точкой).

Изменение  $\Delta U$  входного напряжения приводит к смещению нагрузочной прямой (наклонная штриховая линия на рисунке). Из-за лавинного пробоя ВАХ



стабилитрона имеет сильно нарастающий характер. Поэтому смещение  $\Delta V$  рабочей точки по оси напряжения относительно мало.

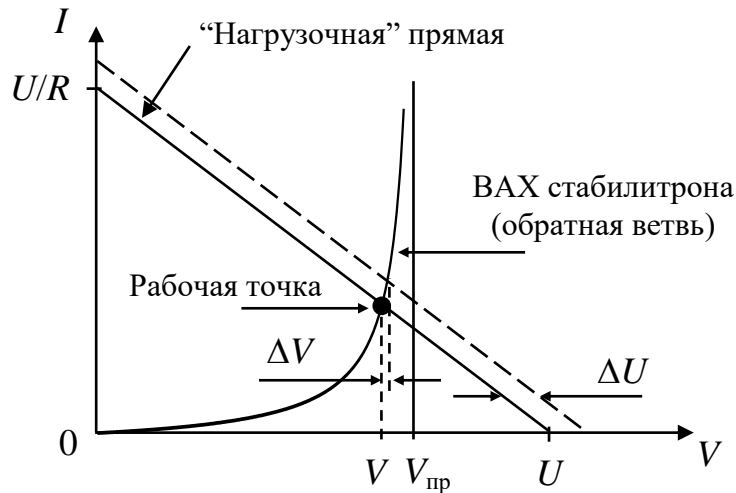


Рис. 5.3. Обратная ветвь ВАХ стабилитрона и “нагрузочная” прямая

Иначе говоря, происходит стабилизация выходного напряжения  $V$ .

**Лавинно-пролётный диод (ЛПД)** – диод с обратнo–смещённым переходом (например, типа  $p-n$ ). Возможная структура ЛПД приведена на Рис. 5.4.

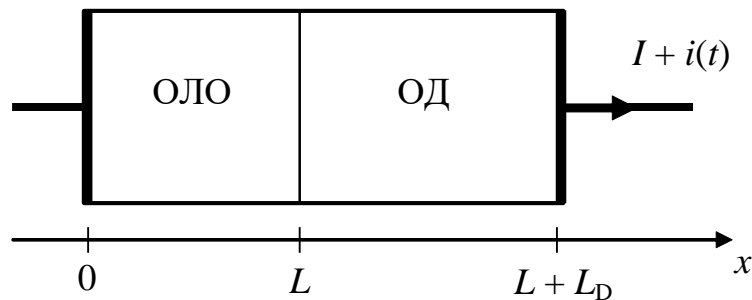


Рис. 5.4. Упрощенная структура ЛПД с выделенными областями лавинообразования (ОЛО) и дрейфа (ОД)

На рисунке через  $L$  обозначена ширина области лавинообразования (ОЛО). Область дрейфа (ОД) имеет ширину  $L_D$ . Ток  $I$  через диод задаётся внешним постоянным напряжением, приложенным к диоду в обратном направлении. Малосигнальная компонента  $i(t)$  полного тока обусловлена малосигнальным напряжением, приложенным к диоду, либо выделяющимся на диоде за счёт внешней цепи обратной связи.

В области лавинообразования напряжённость электрического поля весьма велика. Здесь происходит лавинное размножение носителей тока. Процесс лавинообразования имеет индуктивный характер, поскольку лавинное размножение носителей тока нарастает с течением времени. Иначе говоря, между малосигнальной компонентой напряжения, приложенной к области, и малосигнальной компонентой тока лавины возникает сдвиг фазы  $\varphi_{\pi} = \pi/2$ . В области дрейфа

напряжённость электрического поля несколько ниже. Здесь лавинное размножение отсутствует. Однако носители тока преодолевают область дрейфа за конечное время  $\tau_d$ . Из-за этого возникает дополнительный сдвиг фазы между малосигнальными компонентами тока и напряжения. В результате на достаточно высоких частотах ЛПД имеет отрицательное динамическое сопротивление. Это явление используется для создания усилителей и генераторов сигналов СВЧ.

Примечание.

Возможность создания лавинно-пролётного диода теоретически показана в 1958 году Ридом [10]. Была предложена специальная структура, названная диодом Рида. Экспериментально, практически одновременно и независимо от Рида, ЛПД был реализован Александром Семёновичем Тагером с соавторами [11].

Явление лавинного размножения (пробоя) используется и в других полупроводниковых приборах: варакторах (параметрических диодах), фотодиодах, а также в транзисторах.

**5.2. Спектр стационарного шума. Формула А.С. Тагера**

Рассмотрим стационарный шум неполного лавинного пробоя. Это означает, что коэффициент лавинного размножения (5.3) имеет ограниченное фиксированное значение,  $M = \text{const}$ . Введем в анализ характерную частоту лавинообразования

$$f_l = 1/[2\pi(M-1)\tau_l]. \quad (5.4)$$

Здесь  $\tau_l = \tau_{пр}/2$  – характерное время лавинообразования,  $\tau_{пр}$  – время пролёта носителей тока через область лавинообразования. В результате элементарного акта лавинообразования рождаются два носителя (электрон и дырка), дрейфующие в разные стороны. Поэтому характерное время лавинообразования составляет, в среднем, половину времени пролёта носителей тока через область лавинообразования. Спектр шума лавинообразования определяется **формулой А.С. Тагера** (см. гл. 6 в [12]):

$$\langle i_l^2 \rangle_f = \frac{2q_e M^2 I}{1 + (f / f_l)^2}. \quad (5.5)$$

Исследуем зависимость формы спектра (5.5) от величины коэффициента лавинного размножения  $M$ , приняв  $I = \text{const}$ .

На Рис. 5.5 изображен исследуемый спектр  $\langle i_l^2 \rangle_f$ , нормированный на спектр дробового шума, соответствующего тому же току  $I$ . По горизонтальной оси отложена частота, нормированная на величину  $f_1 = 1/(2\pi\tau_l)$ .

Из рисунка видим, что при  $M \gg 1$  спадающая часть спектра имеет вид  $1/f^2$  и не зависит от величины коэффициента размножения носителей.

В предельном случае, при  $M \rightarrow \infty$ , спектр зависит от частоты по закону  $1/f^2$ , типичному для броуновского движения (прямая линия на рисунке). Одна-

ко шум лавинообразования отличается от броуновского движения. Соответствующая иллюстрация представлена на Рис. 5.6(а, б).

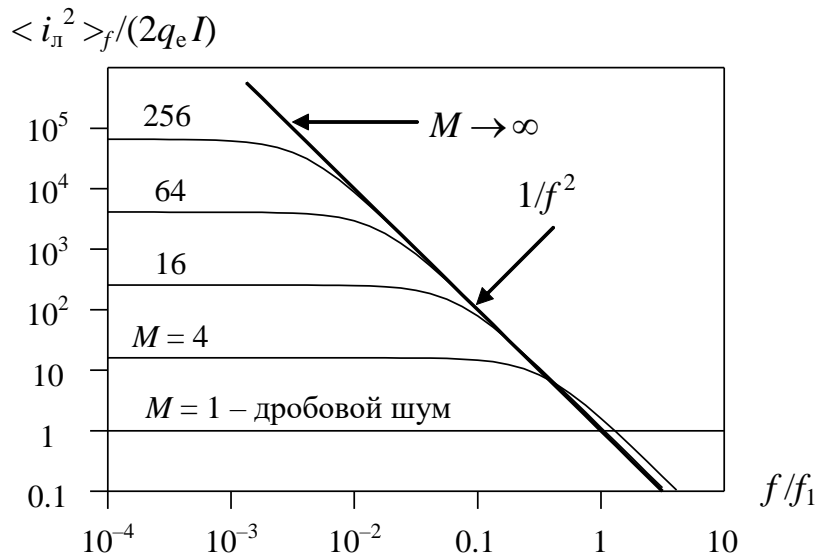
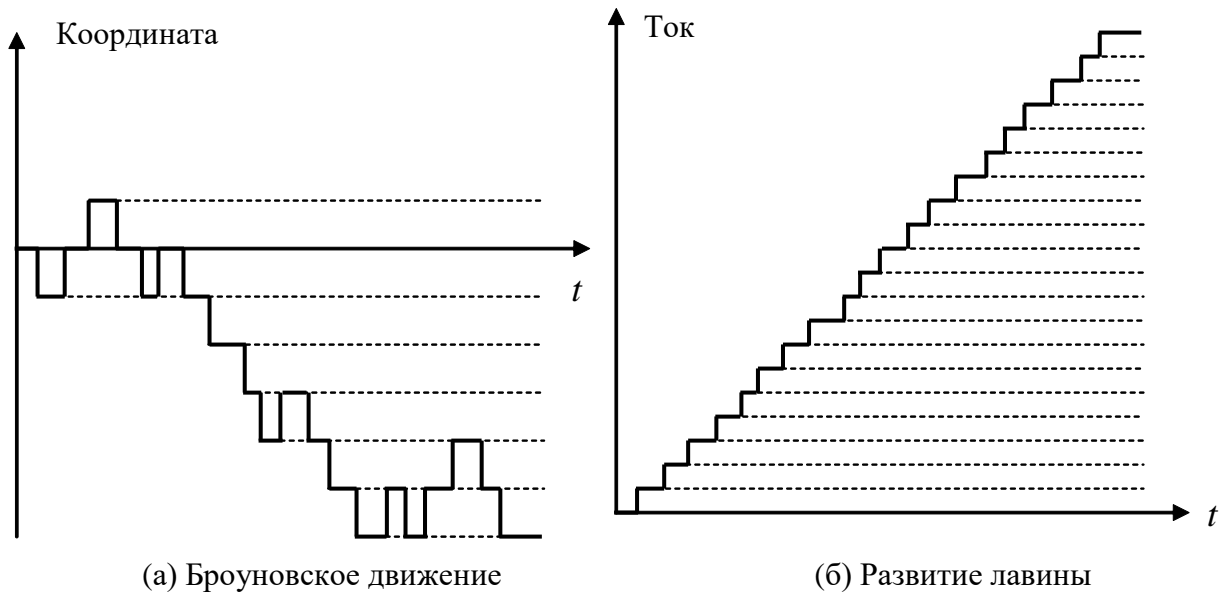


Рис. 5.5. Нормированный спектр шума лавинообразования



(а) Броуновское движение

(б) Развитие лавины

Рис. 5.6. Примеры реализаций случайных процессов

Броуновское движение можно представить суперпозицией импульсов–ступенек с нулевой средней амплитудой, Рис. 5.6(а). То есть направление каждого последующего шага не зависит от направления предыдущего шага.

Шум развитого лавинного пробоя тоже можно представить суперпозицией импульсов–ступенек. Каждый импульс соответствует единичному акту ионизационного размножения носителей. Поэтому, в отличие от броуновского движения, все импульсы являются однополярными, что приводит к неограниченному росту тока лавины во времени, Рис. 5.6(б).

### 5.3. Статистический анализ процесса лавинообразования

#### 5.3.1. Элементы теории “горячих” носителей тока

Для правильного понимания механизма ударной ионизации в полупроводниках рассмотрим некоторые элементы теории “горячих” носителей тока.

Дрейфовая скорость  $v_d$  носителей тока в электрическом поле  $E$ , описывается уравнением:  $v_d = \mu E$ . Множитель  $\mu$  называется подвижностью носителей. При больших электрических полях носители успевают между соударениями с решёткой существенно увеличить свою кинетическую энергию. В результате соударения теряют упругий характер, а решётка становится своего рода термостатом для носителей тока. Этот эффект приводит к насыщению скорости,  $v_d \rightarrow v_s$  при росте поля  $E$ . Для насыщенной скорости электронов в кремнии имеем  $v_s \approx 7 \times 10^6$  см/с. На Рис. 5.7 изображена зависимость скорости электронов в кремнии (Si) от величины приложенного поля. Видно, что эффект насыщения скорости проявляется при полях, превышающих 10 кВ/см.

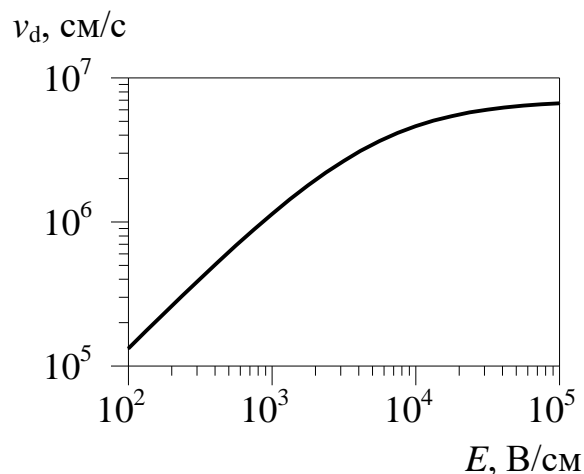


Рис. 5.7. Характеристика “скорость – поле” для кремния

Столь большие поля, помимо насыщения скорости, приводят к **ударной ионизации** атомов решётки носителями тока. Рассмотрим последний эффект подробнее. Обозначим через  $\alpha$  коэффициент ионизации. Этот коэффициент определяет среднее количество носителей  $dN$ , генерируемых при пролёте отдельным носителем бесконечно малого расстояния  $dx$ . То есть  $dN = \alpha dx$ . Коэффициенты ионизации электронов и дырок имеют разные значения. Однако в настоящем рассмотрении это различие учитываться не будет.

Допустим, что имеется однородный полупроводниковый образец длиной  $L$ , к которому приложено достаточно большое напряжение (см. Рис. 5.8).

Инжектированный носитель тока, например дырка, дрейфуя через образец, приводит к генерации  $\alpha L$  электронно-дырочных пар. Каждый новый электрон и дырка начинают дрейфовать в разные стороны, проходя общий путь  $L$  и генерируя, в свою очередь, дополнительно  $\alpha L$  пар. Иначе говоря, происходит

лавинное размножение носителей тока, в результате которого один носитель, инжектированный в образец, порождает  $M$  новых носителей тока. Параметр  $M$  называется коэффициентом лавинного размножения. Для его нахождения опишем вышеприведенный процесс в виде геометрической прогрессии:

$$M = 1 + \alpha L(1 + \alpha L(1 + \alpha L(1 + \dots))) = \frac{1}{1 - \alpha L}. \quad (5.6)$$

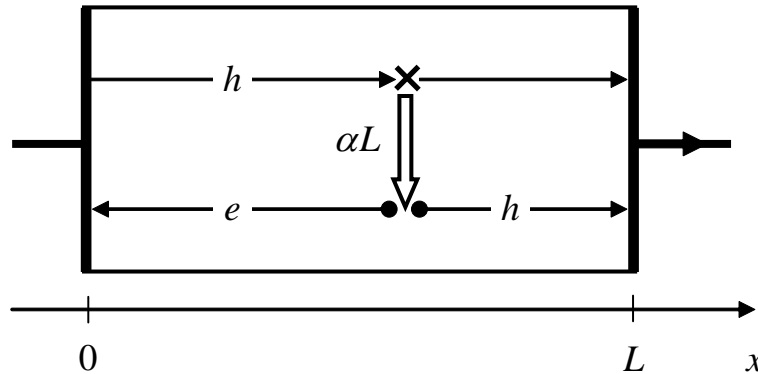


Рис. 5.8. Иллюстрация к единичному акту размножения носителей тока в однородном образце

Из соотношения (5.6) видим, что при  $\alpha L < 1$  лавинное размножение является ограниченным,  $1 \leq M < \infty$ . При  $\alpha L \rightarrow 1$  имеем  $M \rightarrow \infty$ , происходит полный пробой образца; в этом режиме ток контролируется только внешней цепью.

### 5.3.2. Шум развитого лавинного пробоя

Проведём анализ стохастических процессов, сопровождающих лавинное размножение носителей тока в полупроводнике.

На Рис. 5.9 приведены распределения концентраций (на единицу длины) дырок  $p$  и электронов  $n$  в однородной области лавинообразования длиной  $L$ , к которой приложено достаточно большое электрическое поле  $E$ . Индексом “o” отмечены концентрации электронов и дырок на выходе из области, “s” – те же концентрации на входе. Для простоты принято, что электроны и дырки обладают одинаковым коэффициентом ионизации  $\alpha$  и двигаются с насыщенной скоростью  $v_s$ . Поскольку электроны и дырки генерируются парами, градиенты их концентрации различаются только знаком. Из-за линейного характера изменения концентраций, обусловленного однородностью рассматриваемой области, сумма концентраций электронов и дырок фиксирована в любой точке  $x$ :

$$n(x) + p(x) = n_o + p_s = n_s + p_o = N/L. \quad (5.7)$$

Здесь  $N$  – полное число носителей тока в области лавинообразования, определяющее значение тока  $I$  через прибор:

$$I = q_e v_s N/L. \quad (5.8)$$

Определим также число  $N_s$  инжектированных носителей

$$N_s = (n_s + p_s)L . \quad (5.9)$$

При этом инжектированный ток равен

$$I_s = q_e v_s N_s / L . \quad (5.10)$$

Соотношения (5.8) и (5.10) позволяют нагляднее представить смысл коэффициента лавинного размножения (5.1):

$$M = I / I_s . \quad (5.11)$$

Воспользуемся теперь методом уравнения Эйнштейна – Фоккера – Планка (ЭФП), с помощью которого в Разделе 4.5 выполнен анализ генерационно–рекомбинационного шума. Вычислим скорости генерации  $g$  и рекомбинации  $r$  (точнее, удаления) носителей.

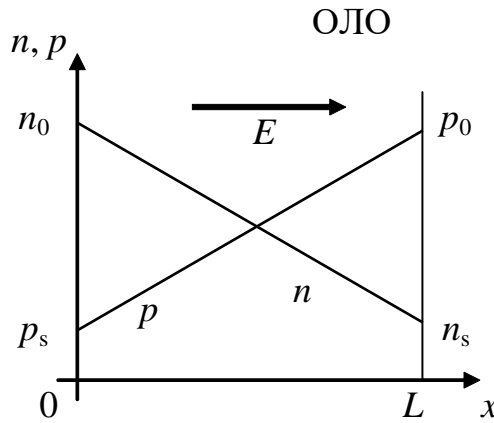


Рис. 5.9. Распределение концентраций дырок и электронов

Скорость генерация определяется механизмом лавинного размножения:

$$g = [2\alpha LN] / \tau_1 . \quad (5.12)$$

Здесь учтено, что каждый носитель тока пребывает в области лавинообразования в течение времени пролета  $\tau_1 = L/v_s$ . Кроме того, каждый акт ионизации приводит к появлению двух носителей – электрона и дырки.

Рекомбинация (удаление) носителей происходит за счёт пересечения границ области дрейфующими носителями. Этот механизм даёт:

$$r = (n_0 + p_0) v_s = [(n_0 + p_s) + (p_0 + n_s) - (p_s + n_s)] v_s .$$

Учитывая соотношения (5.7) и (5.9), придём к следующему выражению для скорости рекомбинации:  $r = (2N - N_s) / \tau_1$ . Здесь член  $N_s$  учитывает дробовой эффект тока инжекции, уже опущенный выше из рассмотрения. Поэтому при учёте шумов лавины им следует пренебречь. В результате получим:

$$r = 2N / \tau_1 . \quad (5.13)$$

Таким образом, кинетические коэффициенты для уравнения Эйнштейна – Фоккера – Планка (4.28) есть:

$$\begin{aligned} K_1(N) &= g - r = \frac{2}{\tau_1}(\alpha L - 1)N, \\ K_2(N) &= g + r = \frac{2}{\tau_1}(\alpha L + 1)N. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Данные коэффициенты позволяют, по аналогии с (4.30), найти уравнение для флуктуаций тока через образец. Учёт соотношения (5.8), определяющего связь между полным числом  $N$  носителей тока в образце и током  $I$ , приводит к следующему результату:

$$\tau_{\text{л}} \frac{dI}{dt} = (\alpha L - 1)I + \sqrt{(\alpha L + 1)q_{\text{л}}I} \zeta_{\text{л}}(t). \quad (5.15)$$

Здесь, как уже отмечалось выше,  $\tau_{\text{л}} = \tau_1/2$  – характерное время лавинообразования, сомножитель “1/2” обусловлен рождением во время ионизационного акта сразу двух носителей – электрона и дырки. Случайный источник  $\zeta_{\text{л}}(t)$  обладает спектрально–корреляционными характеристиками, аналогичными источнику  $\zeta_{\text{s}}(t)$  во флуктуационном уравнении (3.18) для дробового шума.

При выводе уравнения (5.15) не принимался во внимание ток инжекции  $I_{\text{s}}$ , то есть оно справедливо только для развитой лавины, при условии  $\alpha L \approx 1$ . Поэтому представим уравнение в следующем окончательном виде:

$$\tau_{\text{л}} \frac{dI}{dt} = (\alpha L - 1)I + \sqrt{2q_{\text{e}}I} \zeta_{\text{л}}(t). \quad (5.16)$$

Это есть известное **уравнение Рида**, дополненное учётом шума лавинообразования (последнее слагаемое в правой части).

### 5.3.3. Шум частичного лавинного пробоя

Преобразуем соотношение (5.16) с целью его обобщения на случай частичного лавинного пробоя. Учтём, что при отсутствии лавинного размножения носителей,  $\alpha L = 0$ , оно должно перейти в уже известный результат, определённый соотношением (3.18) для дробового шума:

$$I = \langle I_{\text{s}} \rangle + \sqrt{2q_{\text{e}} \langle I_{\text{s}} \rangle} \zeta_{\text{s}}(t).$$

Здесь под знаком радикала использован оператор статистического усреднения  $\langle \dots \rangle$ , который отсутствовал в вышеприведённых соотношениях для шума лавинообразования. Строго говоря, этот оператор в сомножителях, стоящих перед шумовым источником, не является обязательным. Учёт флуктуаций в таких сомножителях приводит к эффектам высшего порядка малости, которыми во флуктуационном анализе принято пренебрегать. Другими словами, пусть пер-

вичный флуктуационный источник входит в какое-либо соотношение вместе с сомножителем, зависящим от динамической переменной. Иначе говоря, величина “предшумового” сомножителя описывается состоянием рассматриваемой системы. В этом случае оператор статистического усреднения в таком сомножителе будет опускаться, как, например, это было сделано в уравнении (5.16).

Возвратимся к уравнению для развитого лавинного пробоя (5.16). Отметим, что производная в его левой части характеризует эффект лавинного размножения носителей. При отсутствии ударной ионизации эта производная исчезает. Поскольку интенсивность ионизации описывается сомножителем  $\alpha L$ , дополним этим сомножителем левую часть уравнения. Кроме того, в правую часть добавим слагаемое  $\langle I_s \rangle$ , необходимое для корректного учёта дробового шума и несущественное для шума лавинообразования. В результате получим следующее флуктуационное уравнение для тока через образец:

$$\alpha L \tau_n \frac{dI}{dt} = (\alpha L - 1) I + \langle I_s \rangle + \sqrt{2q_e I} \zeta(t). \quad (5.17)$$

Сюда входит стационарный случайный источник  $\zeta(t)$ , представляющий собой суперпозицию источников  $\zeta_n(t)$  и  $\zeta_s(t)$ , обладающий теми же спектрально-корреляционными характеристиками. Уравнение (5.17) справедливо для любой степени развития лавинного пробоя. Его можно использовать для анализа нестационарных шумов лавинообразования, то есть в случае, когда полный ток через образец модулируется внешним сигналом.

Вернёмся к Разделу 5.2, где рассмотрен спектр стационарного шума неполного лавинного пробоя  $i_n(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$ . Напомним, что коэффициент лавинного размножения (5.3) имеет фиксированное значение. Учитывая определение данного коэффициента, приведённое в соотношении (5.6),  $M = 1/(1 - \alpha L)$ , преобразуем флуктуационное уравнение (5.17) к следующему виду:

$$(M - 1) \tau_n \frac{di_n}{dt} + i_n = \sqrt{2q_e M^2 I} \zeta(t). \quad (5.18)$$

Вычислим спектр  $\langle i_n^2 \rangle_f$  шумового тока через образец. Имея целью анализ эффекта лавинообразования, пренебрежем частотной зависимостью спектра первичного шумового источника, то есть примем  $\langle \zeta^2 \rangle_f = 1$  Гц/Гц. Введём в анализ  $f_n = 1/[2\pi(M-1)\tau_n]$  – характерную частоту лавинообразования, см. соотношение (5.4). В результате получим следующее выражение для спектра шумового тока:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = \frac{2q_e M^2 I}{1 + (f / f_n)^2}.$$

Таким образом, мы пришли к формуле А.С. Тагера (5.5).



## 6. Взрывной шум

В англоязычной литературе этот шум называется “burst noise”.

Взрывной шум наблюдается чаще всего в мощных приборах с  $p-n$  переходами. Он вызывается локальными обратимыми микропробоями в областях, где присутствуют дефекты структуры. Обычно взрывной шум имеет характер дихотомического случайного процесса, говоря проще, – случайного телеграфного процесса (СТП). Однако иногда встречается и “многоуровневый” взрывной шум, который считается суперпозицией нескольких СТП.

На Рис. 6.1 приведён пример реализации взрывного шума, наблюдающегося в светодиодах на квантовых точках [13]. Отсюда видна отличительная особенность этого шума, как случайного телеграфного процесса. Он отчётливо проявляется на фоне других шумов, действующих в приборе.

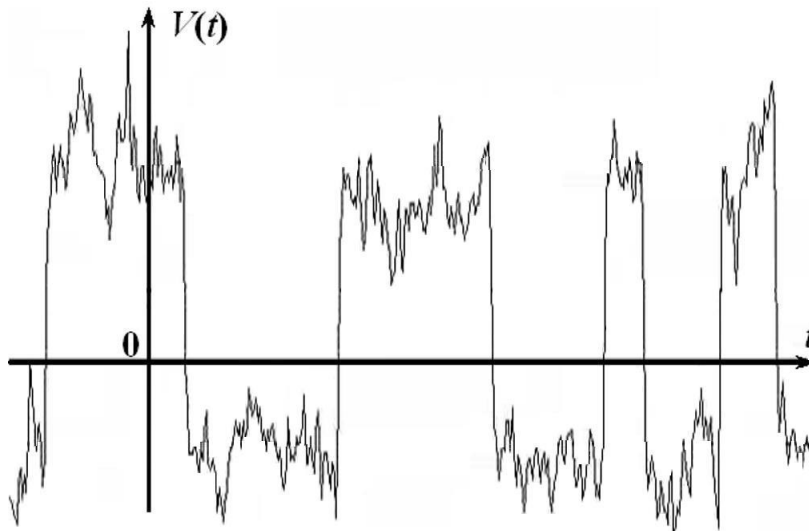


Рис. 6.1. Осциллограмма взрывного шума на фоне других шумов

Взрывной шум можно описать эквивалентной электрической схемой, содержащей два резистора,  $R_1$  и  $R_2$ , и ключ “КЛ”, см. Рис. 6.2.

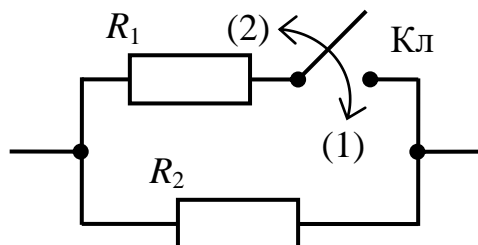


Рис. 6.2. Двухрезисторная модель взрывного шума

Ключ замыкает, состояние “(1)”, и размыкает, состояние “(2)”, цепь в случайные моменты времени. В результате, полное сопротивление цепи представляет собой случайный телеграфный процесс.

При разомкнутом ключе, характеризующимся состоянием “(2)”, сопротивление цепи определяется нижним резистором  $R_2$ :

$$R^{(2)} = R_2.$$

При замыкании ключа, состояние “(1)”, сопротивление цепи равно

$$R^{(1)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом, размах СТП, имеющий смысл изменения  $r$  величины сопротивления, равен

$$r = R^{(2)} - R^{(1)} = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}. \quad (6.1)$$

Обозначим через  $\tau_1$  и  $\tau_2$  средние время пребывания ключа в замкнутом “(1)” и разомкнутом “(2)” состояниях. Тогда вероятности времён пребывания ключа в этих состояниях ( $p$  – замкнуто,  $q$  – разомкнуто) есть:

$$p = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}, \quad q = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 1 - p. \quad (6.2)$$

Это позволяет определить среднее значение  $\langle R \rangle$  и дисперсию  $\langle \Delta R^2 \rangle$  абсолютных флуктуаций сопротивления:

$$\langle R \rangle = R_2 - pr. \quad (6.3)$$

$$\langle \Delta R^2 \rangle = \langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2 = pqr^2. \quad (6.4)$$

Для определения спектра взрывного шума, как спектра флуктуаций сопротивления цепочки, надо знать статистику времён пребывания процесса в каждом (из двух возможных) состоянии. Допустим для простоты, что эти времена определяются законом Больцмана, то есть их плотности вероятности имеют следующий вид:

$$W_{1,2}(\tau) = \frac{1}{\tau_{1,2}} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{1,2}}\right), \quad \tau \geq 0. \quad (6.5)$$

В этом случае спектр абсолютных флуктуаций сопротивления, моделирующих взрывной шум, имеет лоренцев вид:

$$\langle \Delta R^2 \rangle_f = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \langle \Delta R^2 \rangle. \quad (6.6)$$

Здесь введено время релаксации  $\tau_0$  взрывного шума, как случайного телеграфного процесса.

$$\tau_0 = (\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1})^{-1}. \quad (6.7)$$

Отметим, что спектр (6.6) взрывного шума совпадает, с точностью до обозначений, со спектром (4.22) генерационно–рекомбинационного шума. Это совпадение не случайно.

Генерационно–рекомбинационный шум  $N(t)$  представляет собой суперпозицию большого числа случайных телеграфных процессов  $\xi_i(t)$ :

$$N(t) = \sum_i \xi_i(t), \quad i = \overline{1, N_{\text{tot}}}. \quad (6.8)$$

Здесь  $N_{\text{tot}}$  – полное число носителей тока в образце.

Каждому носителю ставится в соответствие процесс  $\xi_i(t)$ , принимающий два значения: ноль и единица. Значение  $\xi_i(t) = 1$  означает, что носитель с номером  $i$  свободен, то есть он находится в зоне проводимости;  $\xi_i(t) = 0$  означает, что носитель захвачен, например, ловушкой.

Число носителей тока в образце очень велико,  $N_{\text{tot}} \gg 1$ . Поэтому эффект от случайного телеграфного процесса, генерируемого отдельным носителем, в осциллограмме ГРШ не заметен.

## 7. Фликкерный шум

### 7.1. Введение

Фликкерный шум обнаружен Джонсоном в 1925 году [14] при исследовании дробового шума электровакуумных ламп.

Примерная схема эксперимента изображена на Рис. 7.1.

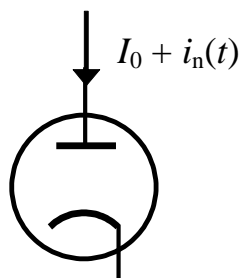


Рис. 7.1. Схема эксперимента по обнаружению фликкерного шума

Измерялся спектр  $\langle i_n^2 \rangle_f$  шумового тока  $i_n(t)$ , возникающего в лампе. Предполагалось, что этот спектр будет описываться формулой Шотки (3.14) для дробового шума. Действительно, на частотах порядка 10 кГц и выше измеренный спектр совпал с ожидаемым значением, см. Рис. 7.2. Однако при понижении частоты анализа спектр начал практически неограниченно нарастать.

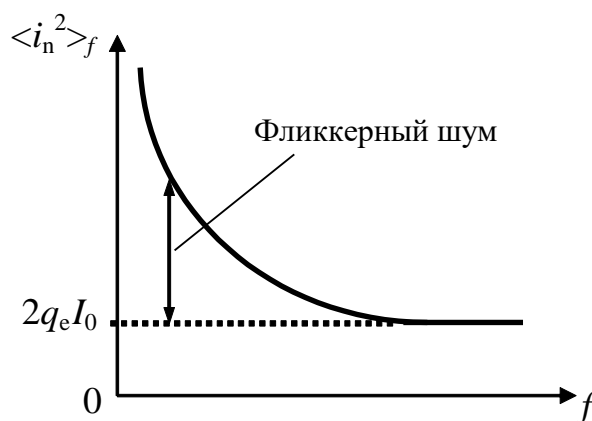


Рис. 7.2. Спектр измеренного шума

Первую теорию, равно как и название шума, предложил Шотки в 1926 году [15]. Было замечено, что причиной этого шума является “мерцательное” изменение эмиссионной способности отдельных областей катода. Отсюда и возникло название “фликкерный шум” (flicker – мерцание, англ.).

#### Примечание.

Среди многочисленных исследователей фликкерного шума следует особо отметить Аскольда Николаевича Малахова (см., например, [4]), создателя и первого заведующего ка-

федрой “Бионика” радиофизического факультета ННГУ, переименованной при нём же в кафедру “Бионика и статистическая радиофизика”. Теперь эта кафедра называется “Статистическая радиофизика и мобильные системы связи”.

Из отечественных исследователей, внесших существенный вклад в понимание физических механизмов возникновения фликкерного шума, отметим московского физика Шулима Мееровича Когана (см., например, [16]).

Отличительной чертой фликкерного шума является форма его спектра.

Обозначим, для общности, через  $x(t)$  фликкерный случайный процесс. Многочисленные экспериментальные исследования приводят к следующему (эмпирическому) выражению для спектра этого процесса:

$$\langle x^2 \rangle_f = A/f^\gamma. \quad (7.1)$$

Параметр  $A$  в этом выражении специального названия не имеет. Обычно говорят, что он численно равен высоте спектра на частоте 1 Гц.

Параметр  $\gamma$  называется “параметром формы спектра” (на английском языке – exponent, не путать с exponential function – экспоненциальной функцией). Обычно его величина близка к единице,  $\gamma \sim 1$ , однако встречаются значения из более широкого диапазона,  $\gamma \in (0.6; 2)$ . Из-за того, что параметр формы спектра часто принимает значения, близкие к единице, то есть спектр (7.1) имеет частотную зависимость вида  $1/f$ , фликкерный шум иногда называют “ $1/f$  шумом”.

Последующие исследования привели к выявлению фликкерного шума во всех без исключения радиоэлектронных приборах. Фликкерные флуктуации также обнаружены в длительности периода обращения Земли вокруг своей оси, в колебаниях уровня рек (в частности, реки Нил), в электрическом потенциале нервных волокон, во многих других явлениях природы. Обнаружено, что акустические колебания, производимые наиболее приятной для нашего слуха музыкой, тоже имеют фликкерный характер с параметром формы спектра, близким к единице.

При всём многообразии проявления фликкерного шума его природа до сих пор окончательно не выявлена. Поэтому ограничимся здесь анализом фликкерных шумов только в радиоэлектронных приборах, отделяя хорошо изученные аспекты от моделей и гипотез.

## 7.2. Форма спектра фликкерного шума

Рассмотрим гипотетическую форму спектра фликкерного шума  $\langle x^2 \rangle_f$ , изображённую на Рис. 7.3. Здесь использован двойной логарифмический масштаб, благодаря чему степенные зависимости типа (7.1) трансформируются в линейные зависимости.

Фликкерный шум всегда наблюдается на фоне других шумов прибора. На рисунке условно изображён спектр естественных шумов прибора, предположительно, имеющих характер белого шума (горизонтальная штриховая линия).

Здесь же введены частоты, характеризующие спектр шума.

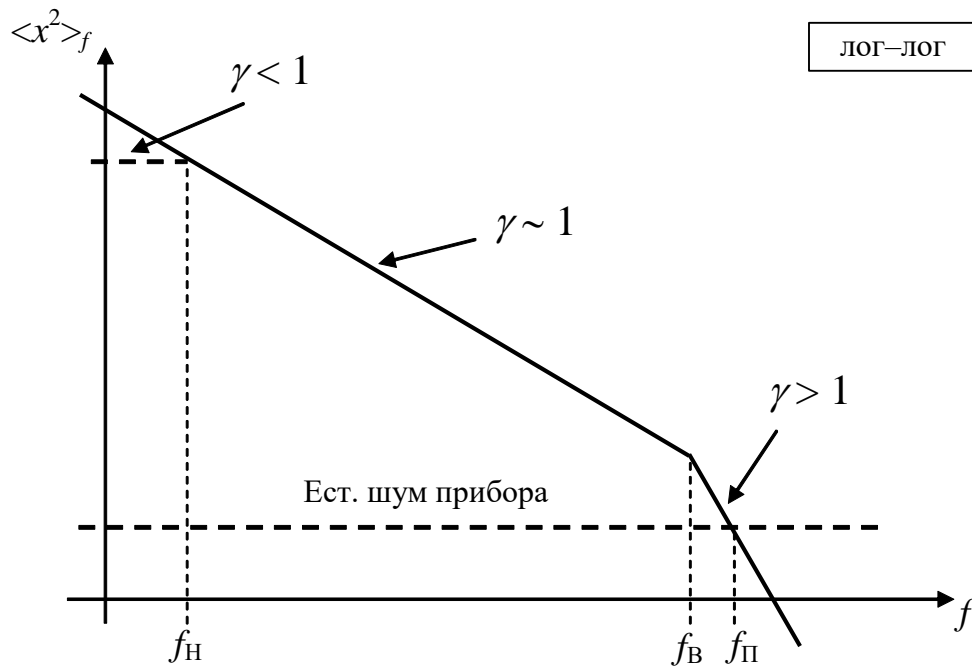


Рис. 7.3. Спектр фликкерного шума

**Нижняя частота перегиба (НЧП)  $f_N$ .** Предполагается, что на более низких частотах,  $f < f_N$ , параметр формы спектра принимает значение меньше единицы,  $\gamma < 1$ , например, спектр переходит в плато,  $\gamma = 0$ .

**Верхняя частота перегиба (ВЧП)  $f_B$ .** На более высоких частотах,  $f > f_B$ , параметр  $\gamma$  принимает значение больше единицы,  $\gamma > 1$ , например,  $\gamma = 2$ .

**Частота перегиба  $f_{\Pi}$ .** Эту частоту также называют “угловой частотой” и “частотой фликкерного спектра”. На более высоких частотах,  $f > f_{\Pi}$ , фликкерный шум маскируется естественными шумами прибора. Возможна ситуация, когда  $f_{\Pi} < f_B$ . В этом случае высокочастотный “перегиб” спектра фликкерного шума выявить не удаётся из-за маскирующего влияния естественных шумов.

Обсудим детальнее смысл верхней и нижней частот перегиба.

Введение верхней частоты перегиба  $f_B$  означает запрет на ультрафиолетовую катастрофу. Это означает, что в области сколь угодно высоких частот,  $f \rightarrow \infty$ , спектр не должен иметь неинтегрируемую особенность. То есть, при  $f > f_B$ , параметр формы спектра должен превышать единицу,  $\gamma > 1$ . В разных приборах верхняя частота перегиба принимает значения от сотен герц до нескольких сотен килогерц.

Нижняя частота перегиба  $f_N$  имеет гипотетический характер. Её введение обусловлено предположением об ограниченности полной мощности фликкерного шума. Это требование означает запрет на инфракрасную катастрофу. Иначе говоря, спектр не должен иметь неинтегрируемой расходимости в окрестности нулевой частоты анализа, то есть при  $f \rightarrow 0$ .

Поясним эту проблему примером, полагая  $\gamma = 1$  и  $f_H = 0$ . В этом случае спектр фликкерного шума принято описывать следующим соотношением [4]:

$$\langle x^2 \rangle_f = \frac{f_B}{f_B + f} \frac{A}{f}. \quad (7.2)$$

На достаточно высоких частотах,  $f \gg f_B$ , этот спектр убывает как  $1/f^2$ . То есть здесь неинтегрируемая особенность отсутствует. При  $f \rightarrow 0$ , то есть  $f \ll f_B$ , спектр (7.2) имеет вид  $1/f$ . Определим, в соответствии с соотношением (1.6), полную мощность шума, учитывая расходимость спектра (7.2) в окрестности нулевой частоты. Для этого надо вычислить несобственный интеграл:

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{F \rightarrow 0} \int_F^{\infty} \langle x^2 \rangle_f df = A \lim_{F \rightarrow 0} [\ln(1 + f_B/F)] = \infty. \quad (7.3)$$

Видим, что при стремлении нижней границы  $F$  диапазона анализируемых частот к нулю наблюдается логарифмическая расходимость мощности шума. Однако эта расходимость имеет лишь **математический** характер. В эксперименте нельзя достичь нулевой частоты анализа. Точно также недостижима и бесконечно большая частота. Для достижения  $F = 0$  необходимо бесконечно большое время измерения,  $T_{\text{изм}} = \infty$ . Все эксперименты выполняются конечное время. На сегодняшний день нижнюю частоту перегиба  $f_H$  обнаружить не удалось. В этой связи возможны **два варианта** анализа фликкерного шума, обладающего неинтегрируемым спектром в окрестности нулевой частоты, то есть параметром формы  $\gamma \geq 1$ .

В основе **первого варианта** стоит предположение о стационарности шума. Это означает наличие нижней частоты перегиба. Можно, например, выбрать значение  $f_H$  равным обратному времени существования Вселенной, либо, что более реально, равным обратному времени жизни исследуемого прибора.

Во **втором варианте** гипотеза о существовании нижней частоты перегиба не используется. При  $\gamma \geq 1$  такой подход приводит к нестационарности исследуемого фликкерного шума. В этом случае для анализа спектрально-корреляционных характеристик шума требуется специальный математический аппарат, который рассматривается ниже.

### 7.3. Спектрально-корреляционный анализ фликкерного шума

В случае, когда параметр формы спектра меньше единицы,  $\gamma < 1$ , фликкерный шум может быть стационарным и, как следствие, обладать функцией корреляции  $\Phi_x(\tau)$ , определённой соотношением (1.1).

Если  $\gamma \geq 1$  и нижняя частота перегиба отсутствует,  $f_H = 0$ , фликкерный шум нестационарен. Однако, при  $\gamma < 3$ , шум может обладать стационарными приращениями  $\Delta x(t, \tau)$ , которые определяются следующим образом:

$$\Delta x(t, \tau) = x(t + \tau) - x(t) . \quad (7.4)$$

Смысл рассматриваемых приращений иллюстрируется на Рис. 7.4.

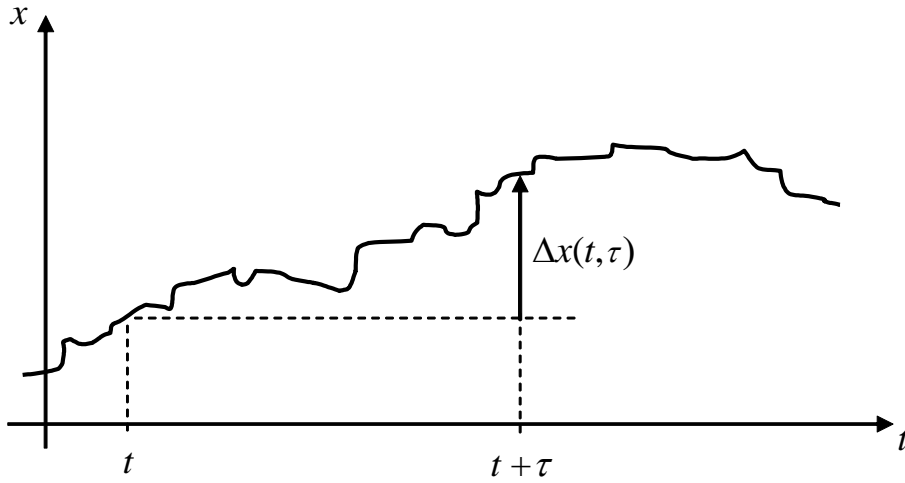


Рис. 7.4. Пример реализации  $x(t)$  фликкерного шума

Приращения являются стационарными, если их статистические характеристики зависят только от интервала наблюдения  $\tau$ , но не зависят от текущего времени  $t$ . Полагая, что приращения стационарны, введём в рассмотрение структурную функцию процесса  $x(t)$ :

$$D_x[\tau] = \langle [x(t + \tau) - x(t)]^2 \rangle . \quad (7.5)$$

Эта функция представляет собой дисперсию приращений случайного процесса, она обладает следующими свойствами [4].

1.  $D_x[0] = 0$  – дисперсия приращений на нулевом интервале равна нулю.
2.  $D_x[-\tau] = D_x[+\tau]$  – свойство чётности.
3. Если  $|\tau_2| > |\tau_1|$ , то  $D_x[\tau_2] \geq D_x[\tau_1]$  – дисперсия приращений не убывает при увеличении интервала наблюдения.
4. Если известен математический (двухсторонний) спектр  $S_x(\omega)$ , то структурная функция (7.5) есть

$$D_x[\tau] = 4 \int_0^{\infty} S_x(\omega) [1 - \cos(\omega\tau)] \frac{d\omega}{2\pi} . \quad (7.6)$$

Примечание. Поясним смысл соотношения (7.6).

Допустим, что процесс  $x(t)$  является стационарным и обладает функцией корреляции  $\Phi_x(\tau)$ , определённой соотношением (1.1). В этом случае, учитывая соотношение (1.2), структурную функцию (7.5) можно представить в следующем виде:

$$D_x[\tau] = 2\langle x^2 \rangle - 2\langle x(t+\tau)x(t) \rangle = 2[\Phi_x(0) + \Phi_x(\tau)] . \quad (7.6a)$$

Выразим входящие сюда функции корреляции через спектры, учитывая второе соотношение в паре Фурье–сопряжённых функций (1.3). В результате получим:



$$D_x[\tau] = 2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(j\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi} \right]. \quad (7.6б)$$

Воспользуемся формулой Эйлера для экспоненциальной функции с мнимым аргументом,  $\exp(j\omega\tau) = \cos(\omega\tau) + j \sin(\omega\tau)$ . Учтём, что мнимая компонента этой экспоненты,  $\sin(\omega\tau)$ , является нечётной функцией частоты  $\omega$ . При этом имеем в виду, что спектр  $S_x(\omega)$  есть чётная функция, см. соотношение (1.4). Интегралы в (7.6б) берутся в симметричных пределах. Поэтому во втором интеграле вклад нечётной (мнимой) компоненты экспоненциальной функции обращается в ноль. В результате получаем:

$$D_x[\tau] = 2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos(\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi} \right]. \quad (7.6в)$$

Здесь обе подинтегральные функции являются чётными. Поэтому переходим к удвоенным интегралам по неотрицательным частотам. На основании свойства аддитивности определённого интеграла объединяем оба интеграла в один. В результате приходим к соотношению (7.6). Отметим, что представленный анализ выполнен в предположении стационарности исследуемого процесса  $x(t)$ . Однако полученный результат справедлив и для процессов со стационарными приращениями. Действительно, допустим, что исследуемый процесс имеет фликкерный характер, а его спектр в окрестности нулевой частоты имеет вид  $S_x(\omega) \sim \omega^{-\gamma}$ , при этом  $1 \leq \gamma < 3$ . То есть этот спектр обладает неинтегрируемой особенностью в окрестности нулевой частоты. Для вычисления структурной функции такого процесса надо вычислить интеграл (7.6). В него входит “весовая” функция  $[1 - \cos(\omega\tau)]$ . На нулевой частоте,  $\omega=0$ , эта функция обращается в ноль. В окрестности нулевой частоты она имеет вид  $\omega^2$ . Таким образом, в окрестности нулевой частоты подинтегральная функция в (7.6) имеет вид  $\omega^{-\chi}$ , где  $\chi = \gamma - 2$ . Если параметр формы спектра изменяется в пределах  $1 \leq \gamma < 3$ , то параметр формы подинтегральной функции принимает значения  $-1 \leq \chi < 1$ . Это означает, что неинтегрируемая особенность подинтегральной функции в окрестности нулевой частоты отсутствует.

Перейдём к анализу структурных функций фликкерных шумов, характеризующихся различными значениями параметра формы спектра  $\gamma$ .

В случае  $\gamma = 1$  спектр моделируется соотношением (7.2), где  $f_B$  – верхняя частота перегиба:

$$\langle x^2 \rangle_f = \frac{f_B}{f_B + f} \frac{A}{f}.$$

Опуская несущественные детали, структурную функцию такого шума можно представить в следующем виде:

$$D_x[\tau] = 2A \ln(1 + 2\pi f_B |\tau|). \quad (7.7)$$

То есть дисперсия приращений нарастает по логарифмическому закону.

При  $\gamma > 1$  спектр шума можно представить в виде (7.1),  $\langle x^2 \rangle_f = A/f^\gamma$ , не учитывающем существование верхней частоты перегиба  $f_B$ . Если при этом  $\gamma < 3$ ,

то можно считать, что шум обладает стационарными приращениями. Структурная функция имеет степенную зависимость от длительности интервала наблюдения  $\tau$ :

$$D_x[\tau] = B |\tau|^{\gamma-1}, \quad 1 < \gamma < 3, \quad (7.8)$$

$$B = \frac{(2\pi)^\gamma A}{2\Gamma(\gamma) \sin\left[\frac{\pi}{2}(\gamma-1)\right]}. \quad (7.9)$$

Здесь  $\Gamma(\dots)$  – гамма-функция. В частном случае  $\gamma = 2$  имеем дело с броуновским случайным процессом, спектр которого имеет вид:

$$\langle x^2 \rangle_f = A/f^2. \quad (7.10)$$

Структурная функция броуновского случайного процесса пропорциональна длительности интервала наблюдения в первой степени:

$$D_x[\tau] = 2\pi A |\tau|. \quad (7.11)$$

Соответствующий график изображён на Рис. 7.5.

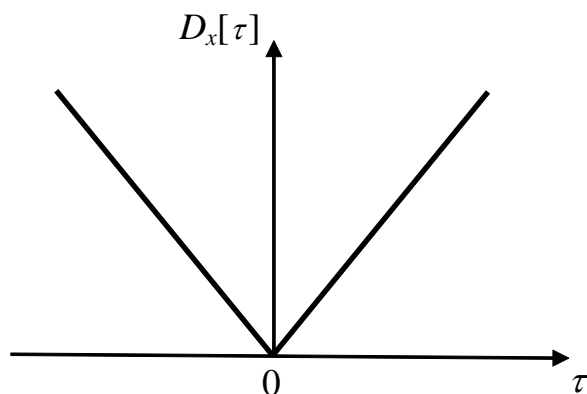


Рис. 7.5. Структурная функция броуновского случайного процесса

Эта структурная функция представляет известный закон диффузии броуновской частицы.

#### 7.4. Нестационарность фликкерного шума

Обсудим подробнее проблему нестационарности фликкерного шума, положив, для конкретности,  $\gamma = 1$ , то есть приняв спектр (7.2).

Допустим, что флуктуирует сопротивление резистора, спектр относительных флуктуаций которого равен:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{f_B}{f_B + f} \frac{A_R}{f}, \quad 1/\Gamma_{\text{ц}}. \quad (7.12)$$

В качестве типовых значений примем  $A_R = 10^{-10}$ ,  $f_B = 10$  кГц. Отметим, что резистор, обладающий такими флуктуациями, считается “сильно шумящим”. В современных резисторах фликкерный шум проявляется гораздо слабее.

Определим, согласно (7.5) и (7.7), дисперсию приращения относительных флуктуаций сопротивления за время наблюдения  $\tau$ :

$$D_{\delta R}[\tau] = \langle [\delta R(t + \tau) - \delta R(t)]^2 \rangle = 2A_R \ln(1 + 2\pi f_B |\tau|). \quad (7.13)$$

Ниже приводятся отдельные численные значения.

При  $\tau = 0$  имеем  $D_{\delta R} = 0$ .

При  $\tau = 100$  с —  $D_{\delta R} \approx 30 \times 10^{-10}$ .

При  $\tau = 10^4$  с  $\approx 3$  часа —  $D_{\delta R} \approx 40 \times 10^{-10}$ .

При  $\tau = 10^6$  с  $\approx 11$  суток —  $D_{\delta R} \approx 50 \times 10^{-10}$ .

При  $\tau = 10^8$  с  $\approx 3$  года —  $D_{\delta R} \approx 60 \times 10^{-10}$ .

При  $\tau = 10^{10}$  с  $\approx 320$  лет —  $D_{\delta R} \approx 68 \times 10^{-10}$ .

Видим, что дисперсия нарастает очень медленно. Экспериментально такой рост выявить очень трудно. Поэтому до сих пор не ясно, стационарен фликкерный шум или нет.

### 7.5. Мультипликативность фликкерного шума

Обсудим теперь мультипликативность фликкерного шума. Для этого спланируем серию экспериментов и исследуем, насколько они подтверждают гипотезу о мультипликативности фликкерного шума.

#### 7.5.1. Эксперимент 1

Рассмотрим флуктуирующий резистор,  $R = R(t)$ , через который пропускается фиксированный ток  $I = I_0$ , см. Рис. 7.6.

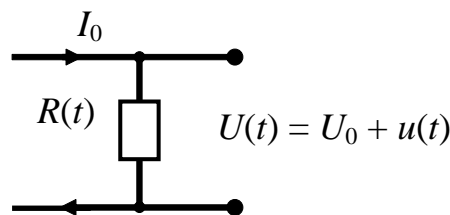


Рис. 7.6. Резистор, обладающий флуктуациями сопротивления, через который пропускается электрический ток

Как и в случае с генерационно–рекомбинационным шумом, см. (4.19), выделим относительные флуктуации  $\delta R = \delta R(t)$  сопротивления резистора:

$$R = (1 + \delta R) R_0. \quad (7.14)$$

В результате найдем:  $U_0 = I_0 R_0$  — невозмущенное напряжение на резисторе,  $u(t) = U_0 \delta R(t)$  — шумовое напряжение на резисторе.

Спектр шумового напряжения равен

$$\langle u^2 \rangle_f = (I_0 R_0)^2 \times \langle \delta R^2 \rangle_f = U_0^2 \times \langle \delta R^2 \rangle_f, \quad (7.15)$$

см. также (4.24). Но теперь, в отличие от генерационно–рекомбинационного шума, спектр имеет фликкерный характер, так как рассматриваются фликкерные флуктуации сопротивления. Тем не менее, квадратичные зависимости величины этого спектра от тока  $I_0$  и напряжения  $U_0$  остаются в силе.

Именно такие зависимости наблюдаются в эксперименте. То есть гипотеза о мультипликативности фликкерного шума подтверждается. Дополнительное подтверждение этой гипотезы даёт следующий эксперимент.

### 7.5.2. Эксперимент 2

Пусть ток через образец содержит гармоническую компоненту:

$$I = I_0 + I_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0). \quad (7.16)$$

Здесь  $I_0$  – постоянная составляющая тока;  $I_1$ ,  $f_1$  и  $\varphi_0$  – амплитуда, частота и начальная фаза гармонической компоненты.

Используя закон Ома обнаружим, что соответствующие компоненты полного напряжения  $U(t)$ , выделяющегося на резисторе, подвержены флуктуациям:

$$U(t) = U_0 + u(t) + V_0 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0) + v(t) \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0). \quad (7.17)$$

Здесь  $U_0$  и  $u(t)$  имеют прежний смысл, но появились дополнительные компоненты:  $V_0 = I_1 R_0$  – амплитуда гармонической компоненты напряжения и флуктуации амплитуды этой компоненты  $v(t) = V_0 \delta R(t)$ .

Спектр  $\langle U^2 \rangle_f$  полного напряжения  $U(t)$  имеет вид, изображённый на Рис. 7.7 в линейном масштабе. Здесь отмечены компоненты, соответствующие четырём слагаемым в правой части соотношения (7.17).

- 1 – постоянная составляющая, имеющая спектр  $U_0^2 \times \delta(f)$ , то есть описываемая дельта–функцией Дирака на нулевой частоте; на экране анализатора спектра эта составляющая не видна.
- 2 – НЧ пьедестал, он же “1/f шум”, соответствующий шуму  $u(t)$ ; его спектр описывается соотношением (7.15).
- 3 – монохроматическая линия,  $(V_0^2/2) \times \delta(f - f_1)$ , представляющая спектр невозмущённой гармонической компоненты напряжения, описываемый дельта–функцией Дирака на частоте  $f_1$ .
- 4 – АМ шум, называемый также “1/Δf шумом”, представляющий спектр флуктуаций амплитуды гармонической компоненты напряжения.

Таким образом, спектр полного напряжения  $U(t)$ , выделяющегося на резисторе, равен:

$$\langle U^2 \rangle_f = U_0^2 \delta(f) + \langle u^2 \rangle_f + (V_0^2/2) \delta(f - f_1) + (1/4) \langle v^2 \rangle_F. \quad (7.18)$$

Здесь  $F = |f - f_1|$  – модуль частоты отстройки от “несущей”  $f_1$ .

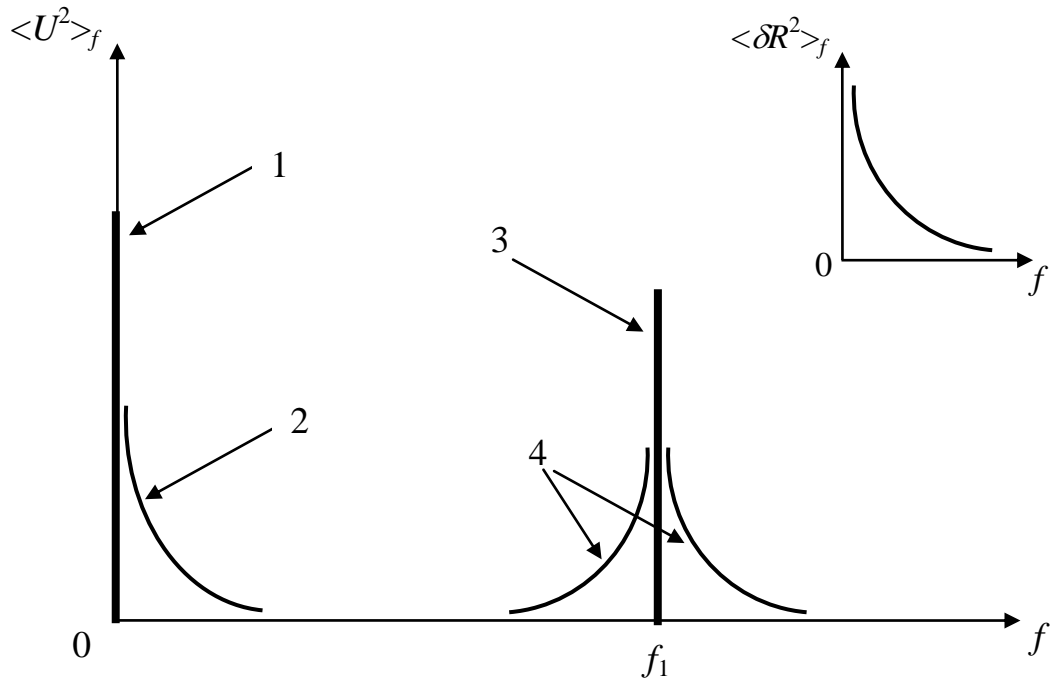


Рис. 7.7. Спектр полного напряжения, выделяющегося на флуктуирующем резисторе, ток через который содержит постоянную составляющую и гармоническую компоненту. На врезке изображён вид спектра флуктуаций сопротивления резистора.

Сомножитель  $(1/4)$  в последнем слагаемом правой части спектра (7.18) получается из двух сомножителей. Один сомножитель  $(1/2)$  представляет мощность функции  $\cos(\dots)$ , представляющей гармоническую компоненту. Этот же сомножитель присутствует в 3-м слагаемом (монохроматическая линия). Дополнительный сомножитель  $(1/2)$  обусловлен тем, что спектр АМ шума распределяется симметрично относительно “несущей” частоты  $f_1$ .

Возникает вопрос: как по данному спектру проверить мультипликативный характер фликкерного шума?

#### Способ первый

Отметим, что  $1/\Delta f$  шум  $v(t)$  определяется амплитудой  $V_0 = I_1 R_0$  гармонической составляющей напряжения  $v(t) = V_0 \delta R(t)$ . Поэтому его спектр пропорционален квадрату амплитуды напряжения  $V_0$ , либо тока  $I_1$ , независимо от величины постоянных составляющих напряжения  $U_0$  и тока  $I_0$ :

$$\langle v^2 \rangle_f = I_1^2 R_0^2 \langle \delta R^2 \rangle_f = V_0^2 \langle \delta R^2 \rangle_f. \quad (7.19)$$

С другой стороны, спектр  $1/f$  шума, см. соотношение (7.15), пропорционален квадрату постоянных составляющих напряжения  $U_0$  и постоянного тока  $I_0$ , но не зависит от амплитуды напряжения  $V_0$ , либо тока  $I_1$ .

Таким образом, имеется возможность изменять независимо величину как  $1/f$  шума, так и  $1/\Delta f$  шума, варьируя постоянную и переменную составляющие тока, пропускаемого через флуктуирующий резистор.

Эксперименты дают именно такой результат.

Способ второй

Проведём двухканальную обработку флуктуаций полного напряжения  $U(t)$ , используя схему, изображённую на Рис. 7.8.

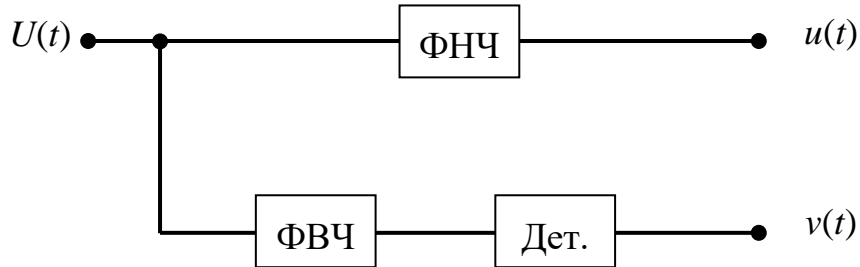


Рис. 7.8. Блок-схема установки для исследования корреляции между  $1/f$  и  $1/\Delta f$  шумами

Здесь первый канал представлен фильтром низких частот (ФНЧ). На его выходе выделяется низкочастотная компонента ( $1/f$  шум)  $u(t)$ , причиной появления которой, согласно нашей гипотезе, являются флуктуации сопротивления:

$$u(t) = U_0 \delta R(t).$$

Второй канал содержит фильтр высоких частот (ФВЧ) и детектор (Дет.). Здесь выделяется напряжение  $v(t)$ , модулирующее амплитуду переменной составляющей ( $1/\Delta f$  шум). Это напряжение, согласно принятой гипотезе, также обусловлено флуктуациями сопротивления:

$$v(t) = V_0 \delta R(t).$$

Отсюда следует, что  $1/f$  шум и  $1/\Delta f$  шум должны быть полностью коррелированы, как обусловленные общим источником – флуктуациями сопротивления резистора. Именно такой результат и наблюдается в эксперименте, разумеется, в пределах допустимой погрешности.

Аналогичным образом мультипликативность фликкерного шума доказана и для других радиоэлектронных элементов: электровакуумных ламп, полупроводниковых приборов, и проч.

Таким образом, фликкерный шум есть следствие фликкерных флуктуаций параметров, проявляющихся при пропускании через прибор электрического тока, либо приложении напряжения.

## 8. Основные модели фликкерного шума

Поскольку природа фликкерного шума до сих пор окончательно не выяснена, здесь будут рассмотрены только некоторые модели.

### 8.1. Модель Дю Пре – Ван дер Зила

#### 8.1.1. Спектр фликкерного шума как суперпозиция лоренцевых спектров

Рассматриваемая модель предложена в 1950 году Дю Пре [17] и А. Ван дер Зилом [18] практически одновременно. Идея модели состоит в следующем.

Спектр вида  $1/f$  в ограниченном (хотя и сколь угодно широком) диапазоне частот,  $f \in [f_H, f_B]$ , есть суперпозиция спектров лоренцева типа, см., например, (4.22), различающихся временем релаксации  $\tau_0$  и, как следствие, частотой среза  $f_c = 1/(2\pi\tau_0)$ , см. (4.18). Вид такой суперпозиции качественно изображён на Рис. 8.1. Здесь использован двойной логарифмический масштаб, переводящий степенные зависимости в линейные.

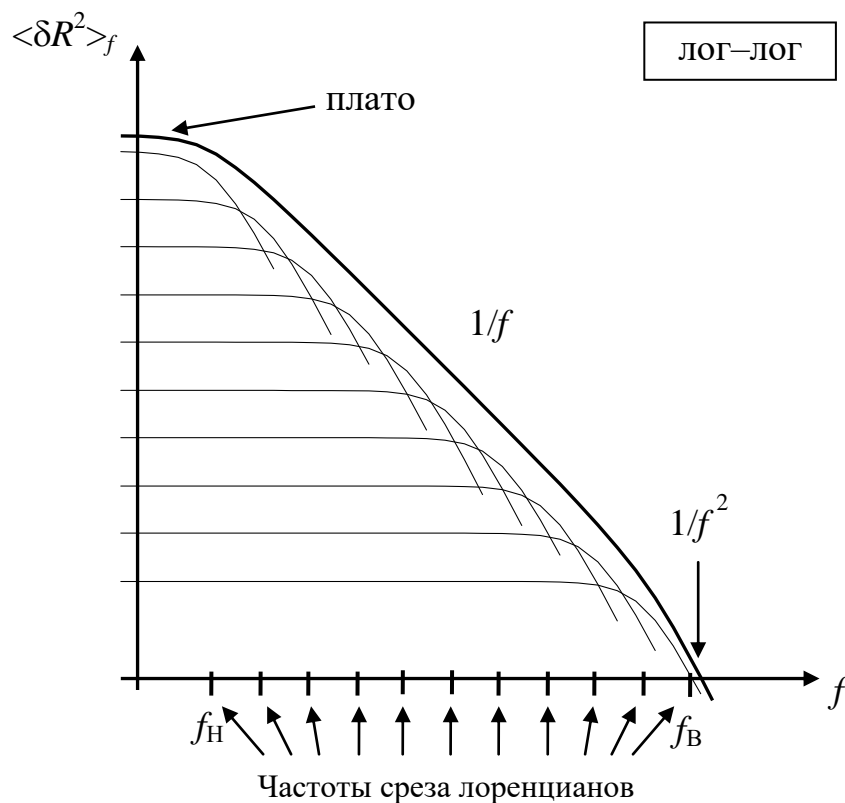


Рис. 8.1. Синтез спектра  $1/f$  шума в модели Дю Пре – Ван дер Зила

Рассмотрим спектр (4.22) относительных флуктуаций сопротивления образца, вызванных некоторым гипотетическим процессом генерационно-рекомбинационного типа, который теперь представим в следующем виде:

$$\langle \delta R_i^2 \rangle_f = \frac{4\tau_{0i}}{1 + (2\pi f \tau_{0i})^2} \langle \delta R_i^2 \rangle. \quad (8.1)$$

Здесь  $\langle \delta R_i^2 \rangle$  – дисперсия (полная мощность) относительных флуктуаций сопротивления, вызванных  $i$ -м процессом, имеющим временем релаксации  $\tau_{0i}$ .

Считается, что в образце действуют  $N_G$  генерационно–рекомбинационных процессов, то есть  $i \in [1, N_G]$ . Для простоты анализа допустим, что все эти процессы обладают одинаковой мощностью:

$$\langle \delta R_i^2 \rangle = \langle \delta R_1^2 \rangle, \quad i \in [2, N_G]. \quad (8.2)$$

Однако процессы различаются временами релаксации  $\tau_{0i}$  принимающими значения в хотя и ограниченном, но сколь угодно широком диапазоне:

$$\tau_{0i} \in [\tau_H, \tau_B]; \quad \tau_H \ll \tau_B. \quad (8.3)$$

Здесь  $\tau_H$  и  $\tau_B$  – нижнее (минимальное) и верхнее (максимальное) значения времён релаксации.

Найдём распределение  $W_{\tau_0}(\tau_{0i})$  времён релаксации  $\tau_{0i}$ , приводящее к спектру полных флуктуаций сопротивления  $\langle \delta R^2 \rangle_f$ , имеющему вид  $1/f$  пусть в ограниченном, но сколь угодно широком диапазоне частот  $[f_H, f_B]$ . Полагая, что все процессы являются статистически взаимно независимыми, в соответствии с правилами теории вероятностей имеем:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = N_G \int_{(\tau_0)} \langle \delta R_i^2 \rangle_f W_{\tau_0}(\tau_{0i}) d\tau_{0i}. \quad (8.4)$$

Здесь интегрирование ведётся по всем возможным значениям времён релаксации  $\tau_{0i}$ . Учёт соотношения (8.1) даёт:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = N_G \int_{(\tau_0)} \frac{4\tau_{0i} \langle \delta R_1^2 \rangle}{1 + (2\pi f \tau_{0i})^2} W_{\tau_0}(\tau_{0i}) d\tau_{0i}.$$

Производя замену переменной интегрирования,  $\tau_{0i} \rightarrow 2\pi f \tau_{0i}$ , получим:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \left[ \frac{2}{\pi} \int_a^b \tau_{0i} W_{\tau_0}(\tau_{0i}) \frac{d(2\pi f \tau_{0i})}{1 + (2\pi f \tau_{0i})^2} \right] \frac{\langle \delta R^2 \rangle}{f}. \quad (8.5)$$

Здесь используются следующие пределы интегрирования:

$$a = 2\pi f \tau_H, \quad b = 2\pi f \tau_B. \quad (8.6)$$

Также введена мощность полных относительных флуктуаций сопротивления:

$$\langle \delta R^2 \rangle = N_G \langle \delta R_1^2 \rangle. \quad (8.7)$$



Видим, что если вычисление интеграла в (8.5) приводит к некоторому фиксированному значению, то спектр имеет вид  $1/f$ . Для получения требуемого результата используем табличный несобственный интеграл (2.12):

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (8.8)$$

Таким образом, для приведения подынтегральной функции в (8.5) к виду (8.8) необходимо, чтобы распределение времён релаксации  $W_{\tau_0}(\tau_0)$  было обратно пропорционально своему аргументу  $\tau_0$ :

$$W_{\tau_0}(\tau_0) = \begin{cases} A_0/\tau_0, & \tau_0 \in [\tau_H; \tau_B] \\ 0, & \tau_0 \notin [\tau_H; \tau_B] \end{cases}; \quad A_0 = \frac{1}{\ln(\tau_B/\tau_H)}. \quad (8.9)$$

Вид распределения представлен на Рис. 8.2, см. также [17, 18].

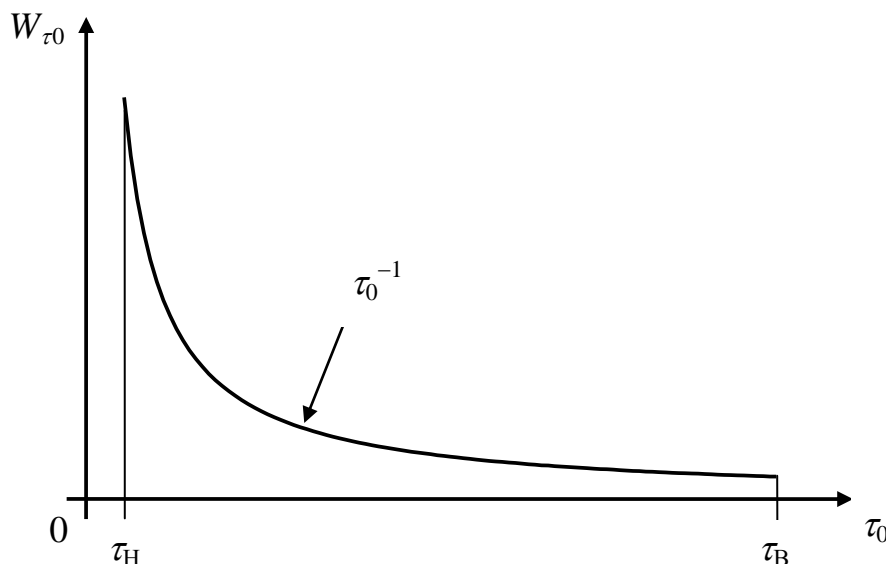


Рис. 8.2. Качественный вид распределения времён релаксации в модели Дю Пре – Ван дер Зила

На рисунке изображена степенная зависимость  $W_{\tau_0} \sim 1/\tau_0^\chi$ , где  $\chi = 1$ . Величина  $\chi$  называется параметром формы распределения. Использование распределения (8.9) приводит к следующему преобразованию соотношения (8.5) для спектра полных относительных флуктуаций сопротивления:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{\langle \delta R^2 \rangle}{\ln(\tau_B/\tau_H)} \left[ \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \right] \frac{1}{f}. \quad (8.10)$$

Примем теперь  $a \approx 0$  и  $b \gg 1$ . Это означает, что рассматриваются “промежуточные” частоты:

$$1/(2\pi\tau_B) \ll f \ll 1/(2\pi\tau_H). \quad (8.11)$$

В этом случае спектр (8.10) принимает вид  $1/f$ :

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{A}{f}; \quad A = \frac{\langle \delta R^2 \rangle}{\ln(f_B / f_H)}; \quad f_H \ll f \ll f_B. \quad (8.12)$$

Здесь, на основании (8.11), введены нижняя и верхняя частоты перегиба:

$$f_H = 1/(2\pi\tau_B), \quad f_B = 1/(2\pi\tau_H). \quad (8.13)$$

На более низких частотах (в эксперименте не выявленных),  $f \ll f_H$ , спектр переходит в плато (см. Рис. 8.1). При превышении верхней частоты перегиба,  $f \gg f_B$ , спектр начинает спадать по закону  $1/f^2$ .

Итак, согласно модели Дю Пре – Ван дер Зила, фликкерный шум есть суперпозиция случайных процессов, обладающих лоренцевой формой спектра. Чем ниже частота анализа, на которой наблюдается спектр типа  $1/f$ , тем большее значение должно принимать время релаксации процесса. Количество таких процессов должно быть обратно пропорциональным их времени релаксации  $\tau_0$ .

Используя приведённый подход, можно показать, что для синтеза спектра фликкерного шума, имеющего параметр формы  $\gamma$ , отличающийся от единицы, необходимо распределение времён релаксации  $W_{\tau_0} \sim 1/\tau_0^\chi$ , обладающее параметром формы  $\chi = 2 - \gamma$ . Например, если  $\chi < 1$ , то есть увеличен удельный вес процессов, обладающих большими временами релаксации, то  $\gamma > 1$ , скорость нарастания спектра увеличивается при стремлении частоты анализа к нулю. То есть низкочастотные компоненты фликкерного шума становятся мощнее.

Таким образом, для объяснения фликкерного шума, наблюдающегося до сколь угодно низких частот анализа, необходимо выявление случайных процессов с временами релаксации, достигающими сколь угодно больших значений.

### 8.1.2. Термоактивированные процессы, как причина фликкерного шума

Следуя Ван дер Зилу [18], для решения сформулированной выше проблемы допустим, что время релаксации  $\tau_0$  характеризует некоторый термоактивированный процесс, которому соответствует энергия активации  $E$ , то есть:

$$\tau_0 = \tau_T \exp\left(\frac{E}{kT}\right). \quad (8.14)$$

Здесь  $\tau_T$  – предэкспоненциальный множитель. Его значение определяется физическим механизмом исследуемого процесса. Требуется найти распределение  $W_E(E)$  энергий активации, приводящее к распределению (8.9) времён релаксации и, как следствие, к спектру вида  $1/f$  для исследуемых флуктуаций.

Величины  $E$  и  $\tau_0$  связаны безынерционным нелинейным соотношением (8.14). Поэтому, согласно теории вероятностей, имеем:

$$W_E(E) = W_{\tau_0}(\tau_0(E)) \left| \frac{d\tau_0(E)}{dE} \right|. \quad (8.15)$$

Учтём, что в рассматриваемой модели диапазон значений времён релаксации ограничен,  $\tau_0 \in [\tau_H, \tau_B]$ , см. соотношение (8.3). Поэтому, согласно (8.14), энергии активации могут принимать значения только из ограниченного диапазона  $E \in [E_1, E_2]$ . Граничные значения находим из соотношения (8.14):

$$\tau_H = \tau_T \exp\left(\frac{E_1}{kT}\right), \quad \tau_B = \tau_T \exp\left(\frac{E_2}{kT}\right). \quad (8.16)$$

Вычисления дают следующее распределение энергий активации:

$$W_E(E) = \frac{1}{E_2 - E_1}, \quad E \in [E_1, E_2]. \quad (8.17)$$

Видим, что энергии активации должны быть распределены равномерно в диапазоне  $[E_1, E_2]$ . Говоря иначе, приведённое в (8.3) условие сколь угодно широкого диапазона значений времён релаксации трансформируется в условие широкого набора энергий активации в масштабе  $kT$ , то есть  $(E_2 - E_1) \gg kT$ .

Вид распределения энергий активации  $W_E(E)$  приведён на Рис. 8.3.

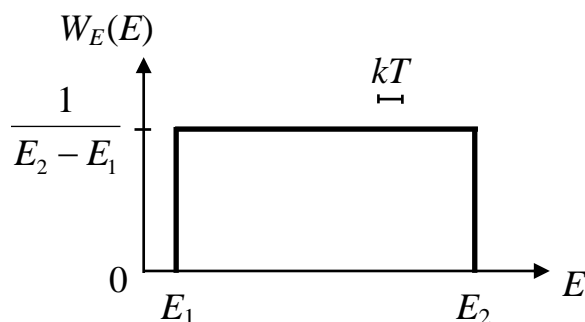


Рис. 8.3. Распределение энергий активации в модели Ван дер Зила

Таким образом, проблема выявления флуктуационных процессов, обладающих временами релаксации, достигающими сколь угодно больших значений, трансформировалась в поиск термоактивированных случайных процессов, обладающих требуемым широким набором энергий активации.

Отметим, что использование финитных распределений (8.9) и (8.17) является непринципиальным упрощением. Главная идея состоит в том, чтобы распределение времён релаксации имело вид  $W_{\tau_0} \sim 1/\tau_0$ , либо, соответственно, распределение энергий активации  $W_E$  было примерно постоянным в диапазоне многих  $kT$ . Это замечание актуально в связи с тем, что степенная зависимость у спектра фликкерного шума не наблюдается никогда. Чаще всего спектр имеет “волнистый” характер, аппроксимируемый зависимостью вида  $1/f^\gamma$ .

### 8.2. Модель Мак Уортера – Ван дер Зила

Данная модель является примером физической реализации рассмотренной выше модели Дю Пре – Ван дер Зила [6]. Рассмотрим полупроводниковый образец (Рис. 8.4), покрытый слоем окисла толщиной  $h$ .

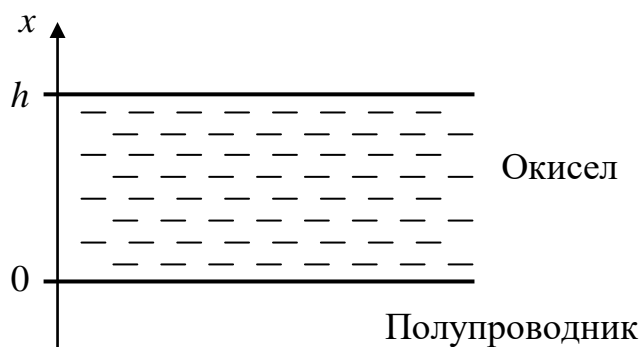


Рис. 8.4. К модели Мак Уортера – Ван дер Зила

В окисле имеется множество свободных состояний (ловушек). Эти ловушки равномерно распределены по толщине окисла. То есть для плотности вероятности  $W_x(x)$  распределения числа ловушек по глубине имеет место соотношение, аналогичное распределению (8.17) энергий активации в модели термоактивированных процессов:

$$W_x(x) = \frac{1}{h}, \quad x \in [0, h]. \quad (8.18)$$

Вид распределения  $W_x(x)$  числа ловушек по глубине окисла приведён на Рис. 8.5. Обозначим через  $\tau_H$  время жизни носителя в ловушке на границе раздела ( $x = 0$ ). Более глубокие ( $x > 0$ ) ловушки обмениваются носителями с объёмом полупроводника за счёт туннельного эффекта.

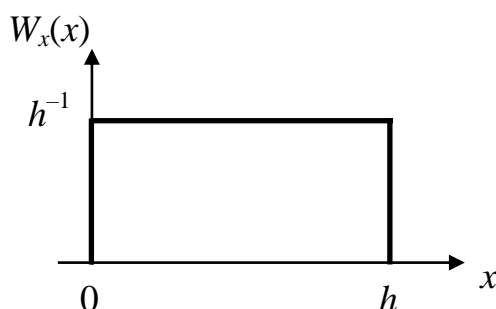


Рис. 8.5. Распределение числа ловушек по глубине окисла в модели Мак Уортера – Ван дер Зила

Захват носителей на ловушки, и их последующее освобождение, приводит к флуктуациям числа носителей в объёме полупроводника,  $N = N(t)$ , имеющим характер генерационно–рекомбинационного шума (см. Раздел 4).

Время жизни  $\tau_0$  носителей тока на ловушках, залегающих на глубине  $x$  (имеющее смысл времени релаксации соответствующего генерационно-рекомбинационного процесса), определяется следующим соотношением:

$$\tau_0 = \tau_H \exp(a_T x). \quad (8.19)$$

Здесь  $a_T$  – параметр, характеризующий туннельный эффект.

Сравним это соотношение с зависимостью (8.14) времени релаксации  $\tau_0$  от величины энергии активации  $E$ . Кроме того, отметим, что распределение  $W_x(x)$  числа ловушек по глубине окисла имеет такой же равномерный вид, как и распределение  $W_E(E)$  энергий активации, см. (8.17) и Рис. 8.3. Отсюда следует, что рассматриваемые две модели полностью идентичны друг другу. Равномерное распределение энергий активации  $E$  теперь заменилось на равномерное распределение числа ловушек по глубине окисла  $x$ .

Максимальное время релаксации определяется толщиной окисла:

$$\tau_B = \tau_H \exp(a_T h). \quad (8.20)$$

Примем, в качестве примера,  $\tau_H \sim 10^{-4}$  с. Тогда при  $h = 40 \text{ \AA}$  имеем  $\tau_B \sim 10^6$  с. То есть получаем спектр вида  $1/f$  в диапазоне частот примерно от  $10^4$  Гц до  $10^{-6}$  Гц – в пределах десяти частотных декад. Заметим, что здесь рассмотрен очень тонкий окисел, составляющий всего 8–10 молекулярных слоёв.

Приведённый механизм возникновения фликкерного шума имеет место во всех полупроводниковых приборах и, особенно, в полевых транзисторах, где окисел является обязательным конструктивным элементом. Однако фликкерный шум наблюдается и в тонких металлических плёнках, в том числе, из благородных металлов: золото (Au), серебро (Ag). Для объяснения фликкерных шумов в таких плёнках модель Мак Уортера – Ван дер Зила не применима. Поэтому требуется разработка других моделей фликкерного шума.

Для решения этой проблемы рассмотрим некоторые математические модели случайных процессов фликкерного типа.

### 8.3. Фликкерные импульсные последовательности

Идея заключается в моделировании процесса  $x(t)$  последовательностью импульсов, обладающей спектром с параметром формы, близким к единице,  $\gamma \sim 1$ .

#### 8.3.1. Общий подход

Рассмотрим пуассоновскую последовательность импульсов:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} (x)_k F(t - t_k; \tau_k). \quad (8.21)$$

Здесь  $F(t; \tau)$  – элементарный импульс,  $k$  – номер импульса,  $(x)_k$  – его амплитуда,  $t_k$  – момент возникновения,  $\tau_k$  – длительность импульса,  $K(t)$  – полное число

импульсов за время существования процесса  $t$ . Все импульсы возникают независимо друг от друга, моменты их возникновения  $t_k$  распределены равномерно по оси времени.

Примечание. Наша цель заключается в моделировании случайного процесса, который может быть нестационарным. Поэтому этот процесс надо анализировать на всём времени его существования  $[0, t]$ .

Среднее число импульсов, возникающих на отрезке времени  $[0, t]$ , определяется средней частотой их появления  $\nu$ :

$$\langle K(t) \rangle = \nu t.$$

Вычислим спектр на частотах, достаточно больших по сравнению с обратным временем существования процесса,  $f \gg 1/(2\pi t)$ .

Найдём сначала фурье-образ элементарного импульса, переходя для этого к угловым частотам  $\omega = 2\pi f$ :

$$\hat{F}(\omega; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T F(t; \tau) \exp(-j\omega t) dt. \quad (8.22)$$

Здесь использован предельный переход,  $T \rightarrow \infty$ , поскольку для моделирования процесса со спектром, расходящимся в окрестности нулевой частоты, могут потребоваться бесконечно длинные элементарные импульсы.

Вычислим теперь спектр энергии  $E_F(f)$  элементарного импульса:

$$E_F(f) = \left\langle \left| \hat{F}(2\pi f; \tau) \right|^2 \right\rangle_{\tau} = \int \left| \hat{F}(2\pi f; \tau) \right|^2 W_{\tau}(\tau) d\tau. \quad (8.23)$$

Поскольку длительность  $\tau$  элементарного импульса может быть случайной, здесь используется распределение  $W_{\tau}(\tau)$  этих длительностей. Усреднение осуществляется по всем возможным длительностям  $\tau$ . Знание спектра энергии элементарного импульса  $E_F(f)$  и средней частоты  $\nu$  их возникновения позволяет найти спектр мощности пуассоновского процесса  $x(t)$ :

$$\langle x^2 \rangle_f = \nu \langle (x)_k^2 \rangle E_F(f), f \gg 1/(2\pi t). \quad (8.24)$$

Напомним, что здесь анализируются частоты, достаточно большие по сравнению с обратным временем существования процесса. Это обусловлено тем, что мощность процесса может оказаться неограниченной из-за расходимости его спектра в окрестности нулевой частоты. Эта проблема имеет чисто математический характер, поскольку для достижения нулевой частоты анализа,  $f \rightarrow 0$ , требуется бесконечное время наблюдения. В эксперименте это условие не реализуется никогда. Измерения осуществляются на временах, достаточно малых по сравнению с временем существования исследуемого процесса.

Таким образом, как следует из соотношения (8.24), спектр моделируемого процесса имеет вид  $1/f^{\gamma}$ , если таким же видом обладает спектр энергии элемен-

тарного импульса (8.23). Поэтому идея моделирования пуассоновского фликкерного случайного процесса может быть решена двумя способами:

- поиск элементарного импульса  $F(t)$ , имеющего бесконечную длительность и обладающего спектром энергии вида  $1/f^\gamma$ ;
- использование элементарных импульсов  $F(t; \tau)$ , обладающих длительностью  $\tau$ , принимающей конечные, хотя и сколь угодно большие значения.

Подобные две модели рассматриваются ниже.

### 8.3.2. Модель Шенфельда – Малахова

Рассмотрим пуассоновскую последовательность (8.21) импульсов  $F(t)$ , убывающих по степенному закону:

$$F(t) = (t_0/t)^\chi, \quad t \geq t_0. \quad (8.25)$$

Здесь  $t_0$  – время начала импульса,  $\chi$  – параметр его формы. Импульс имеет единичную высоту, его вид изображён на Рис. 8.6.

Параметр формы импульса в этой модели может принимать значения в диапазоне:  $0 \leq \chi < 1$ . Случай  $\chi = 1/2$ , когда импульс убывает по закону  $1/\sqrt{t}$ , рассмотрен Шенфельдом. Расширение модели на более широкий диапазон значений этого параметра выполнено А.Н. Малаховым [4].

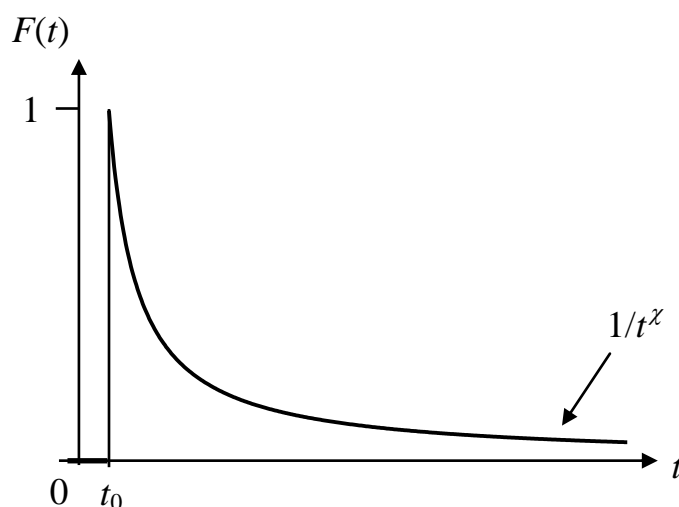


Рис. 8.6. Элементарный импульс Шенфельда – Малахова

Спектр рассматриваемого процесса на относительно низких частотах имеет вид  $1/f^\gamma$ :

$$\langle x^2 \rangle_f = \frac{2\omega_0^2 \langle (x)_k^2 \rangle \Gamma^2(\gamma/2)}{(2\pi t_0)^\gamma} \frac{1}{f^\gamma}, \quad f \ll f_B. \quad (8.26)$$

Здесь  $\Gamma(\dots)$  – Гамма-функция; верхняя частота перегиба спектра равна

$$f_B = 1/(2\pi t_0). \quad (8.27)$$

Параметр формы спектра определяется параметром формы элементарного импульса:

$$\gamma = 2(1-\chi). \quad (8.28)$$

#### Примечание

Определить параметр формы спектра, то есть вывести соотношение (8.28), можно осуществить, не вычисляя сложные интегралы, выражающиеся через специальные функции. Для этого можно воспользоваться методом размерности. Рассмотрим суть метода.

Элементарный импульс, согласно (8.25), имеет степенную зависимость от времени вида  $F(t) \sim t^{-\chi}$ . Следуя (8.22), находим качественный вид фурье-образа импульса:

$$\hat{F}(\omega) \sim \left[ \int t^{-\chi} \exp(-j\omega t) dt \right] \frac{\omega^{-\chi}}{\omega^{-\chi}} \frac{\omega}{\omega}.$$

Здесь не указаны пределы интегрирования, поскольку интересна только размерность рассматриваемых функций. В правой части (после интеграла) введены дополнительные дроби. Числители этих дробей предназначены для введения под символ интегрирования, чтобы получить интеграл по безразмерной переменной  $z = \omega t$ . Знаменатели дробей определяют частотную зависимость рассматриваемого фурье-образа:

$$\hat{F}(\omega) \sim \left[ \int z^{-\chi} \exp(-jz) dz \right] \frac{1}{\omega^{1-\chi}} \sim \frac{1}{\omega^{1-\chi}}.$$

Учитывая соотношение (8.23), определяющее спектр **энергии** импульса через квадрат модуля его фурье-образа, найдём:

$$E_F(f) \sim 1/f^{2(1-\chi)}.$$

Форма спектра **мощности** рассматриваемого процесса совпадает с формой спектра **энергии** элементарного импульса, см. соотношение (8.21). В результате приходим к соотношению (8.28), определяющему связь между параметрами формы спектра фликкерного шума и элементарного импульса в модели Шенфельда – Малахова.

Рассмотрим отдельные частные случаи для спектра (8.26).

#### Модель Шенфельда

При неограниченном нарастании времени,  $t \rightarrow \infty$ , элементарный импульс убывает пропорционально квадратному корню из времени,  $F(t) \sim 1/\sqrt{t}$ , то есть  $\chi = 1/2$ . В результате спектр процесса имеет вид  $1/f$ , параметр формы спектра равен единице,  $\gamma = 1$ . Модель Шенфельда используется в промышленных генераторах так называемого “розового” шума (pink noise – англ.). В подобных генераторах синтез шума со спектром вида  $1/f$  осуществляется путём пропускания белого шума через распределённую RC-линию. Однако эта тема не входит в рамки нашего анализа.



### Броуновское движение

Элементарный импульс имеет форму “ступеньки”,  $F(t) = 1(t)$ , то есть  $\chi = 0$ . В этом случае спектр имеет вид  $1/f^2$  во всём диапазоне частот,  $\gamma = 2$ .

Завершая анализ модели Шенфельда – Малахова, отметим, что её применимость для объяснения фликкерного шума, наблюдающегося в радиоэлектронных приборах, вызывает сомнения. Дело в том, что фликкерный шум, как и любой другой шум, является проявлением неких элементарных процессов, происходящих в приборе. Эти процессы имеют дискретную природу (например, захват и освобождение носителя тока, перемещение атома в кристаллической решётке, и т.д.). Элементарный импульс, представленный соотношением (8.25), является результатом усреднения большого количества дискретных элементарных процессов, действующих в радиоэлектронном приборе. Причём эти процессы могут быть статистически независимыми.

Для описания фликкерного шума следует анализировать дискретные элементарные процессы. Пример соответствующей модели приведён ниже.

### 8.3.3. Модель Халфорда

Возвращаемся к пуассоновской последовательности импульсов (8.21). Теперь элементарные импульсы имеют прямоугольную форму с длительностью  $\tau$ , которая может принимать сколь угодно большие значения [19]. Форма отдельного импульса изображена на Рис. 8.7.

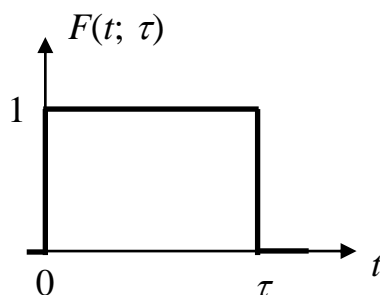


Рис. 8.7. Элементарный импульс Халфорда

Длительности импульсов имеют степенной вид распределения, которое условно можно считать обобщённым распределением Парето – Леви – Коши:

$$W_{\tau}(\tau) = (\chi - 1) t_0^{(\chi - 1)} \tau^{-\chi}, \quad \tau \geq t_0. \quad (8.29)$$

Здесь  $\chi$  – параметр формы распределения;  $\chi > 1$  из условия нормировки. При  $\chi > 2$  случайный процесс стационарен, эта ситуация здесь не рассматривается. Вид распределения изображён на Рис. 8.8.

Заметим, что подобное распределение наблюдается в широком классе явлений. Примерами являются: распределение “светимости” населённых пунктов Земли (по наблюдениям из космоса), распределение вкладов в банках.

Поиск механизмов, приводящих к появлению такого распределения в статистических свойствах электрофизических параметров радиоэлектронных приборов – самостоятельная задача, которая здесь не рассматривается.

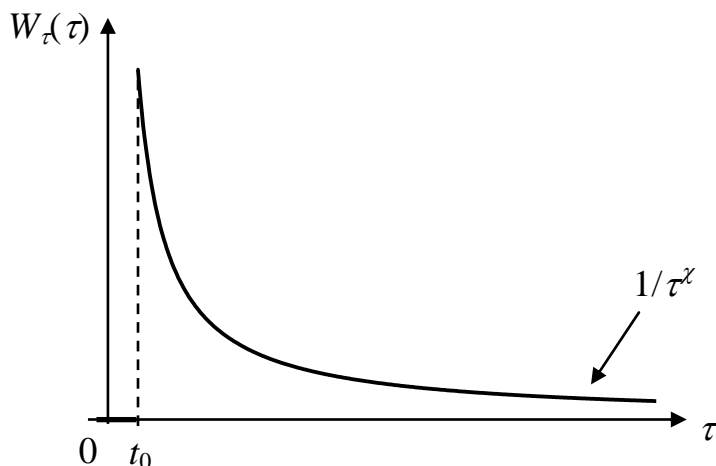


Рис. 8.8. Обобщённое распределение Парето – Леви – Коши

Пусть  $1 < \chi \leq 2$ . В этом случае для спектра процесса имеем:

$$\langle x^2 \rangle_f = \langle (x)_k^2 \rangle \nu t_0 A(\gamma) / f^\gamma, \quad f \ll f_B. \quad (8.30)$$

Здесь

$$A(\gamma) = \frac{2(2-\gamma) \cos[(1-\gamma/2)\pi]}{\Gamma(3-\gamma) \sin[(2-\gamma)\pi]} (2\pi t_0)^{1-\gamma}, \quad (8.31)$$

$$\gamma = 3 - \chi, \quad f_B = 1/(2\pi t_0).$$

В случае  $\gamma = 1$  имеем  $A(1) = 1$ . То есть спектр  $1/f$  шума есть

$$\langle x^2 \rangle_f = \langle (x)_k^2 \rangle \nu t_0 / f, \quad f \ll f_B. \quad (8.32)$$

Перейдём к анализу следующей модели фликкерного шума.

#### 8.3.4. Фликкерный шум как суперпозиция случайных процессов телеграфного типа

Рассмотрим моделирование фликкерного шума  $x(t)$  суперпозицией случайных телеграфных процессов (СТП):

$$x(t) = \sum_{k=1}^K x_k(t). \quad (8.33)$$

Здесь  $x_k(t)$  – есть  $k$ -й СТП,  $K$  – число случайных телеграфных процессов. Все процессы считаются взаимно независимыми.

Пример реализации процесса номер  $k$  изображён на Рис. 8.9.

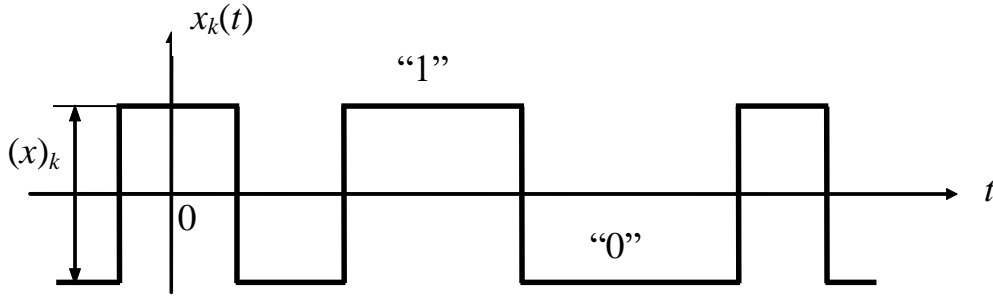


Рис. 8.9. Пример реализации случайного телеграфного процесса

Процесс состоит из прямоугольных импульсов “1”, разделённых паузами “0”. Высота импульса (размах СТП) в процессе номер  $k$  составляет  $(x)_k$ .

Для простоты предполагается, что длительности пауз и импульсов в каждом процессе распределены по закону Больцмана:

$$W_{0,1}^{(k)}(\tau) = \frac{1}{\tau_{0,1}^{(k)}} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,1}^{(k)}}\right), \tau \geq 0. \quad (8.34)$$

Здесь  $\tau_0^{(k)}$  и  $\tau_1^{(k)}$  – средние длительности пауз и импульсов.

В этом случае спектр телеграфного процесса, имеющего номер  $k$ , имеет лоренцев вид (как у генерационно–рекомбинационного шума), см., например, главу 11 монографии Б.Р. Левина [5]:

$$\langle x_k^2 \rangle_f = \frac{A_k f_k}{f_k^2 + f^2}. \quad (8.35)$$

Здесь параметр  $A_k$  характеризует мощность процесса. Этот параметр определяется высотами импульсов (размахом СТП), а также вероятностью  $[\tau_1^{(k)} / (\tau_0^{(k)} + \tau_1^{(k)})]$  появления импульсов:

$$A_k = \frac{2}{\pi} \langle (x)_k^2 \rangle \frac{\tau_1^k}{\tau_0^k + \tau_1^k}. \quad (8.36)$$

Через  $f_k$  обозначена так называемая “опорная частота” спектра:

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \left[ (\tau_0^{(k)})^{-1} + (\tau_1^{(k)})^{-1} \right]. \quad (8.37)$$

Для упрощения анализа примем, что все случайные телеграфные процессы обладают одинаковыми размахами (высотами импульсов),  $\langle (x)_k^2 \rangle = \langle (x)_1^2 \rangle$ .

Пусть средние длительности пауз и импульсов совпадают,  $\tau_0^{(k)} = \tau_1^{(k)}$ . В этом случае параметр  $A_k$  и опорная частота  $f_k$  в процессе с номером  $k$  принимают следующие значения:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \langle (x)_1^2 \rangle, \quad f_k = \frac{1}{\pi \tau_1^{(k)}}. \quad (8.38)$$

При этом, согласно теории вероятностей, суммарный спектр есть взвешенная сумма спектров всех телеграфных процессов:

$$\langle x^2 \rangle_f = K \int_{(fk)} \langle x_k^2 \rangle_f W_{fk}(f_k) df_k. \quad (8.39)$$

Здесь интегрирование ведётся по всем опорным частотам. Далее следуем модели Дю Пре – Ван дер Зила, изложенной в Разделе 8.1. Разница заключается в следующем. Теперь в выражение для спектра (8.35) вместо времени релаксации  $\tau_0$ , определявшего спектр (8.1), входит опорная частота  $f_k$ .

Таким образом, вместо распределения времён релаксации, имеющего вид (8.9), требуется следующее распределение  $W_{fk}(f_k)$  опорных частот:

$$W_{fk}(f_k) = \begin{cases} B_0 / f_k, & f_k \in [f_H; f_B] \\ 0, & f_k \notin [f_H; f_B] \end{cases}; \quad B_0 = \frac{1}{\ln(f_B / f_H)}. \quad (8.40)$$

Заметим, что в области промежуточных частот вид этого распределения совпадает с видом моделируемого спектра.

Теперь перейдём к наиболее обоснованной, как представляется на данный момент, физической модели фликкерного шума.

#### 8.4. Модель двухуровневых систем

Двухуровневые системы (ДУС) впервые были обнаружены в физических объектах при исследовании свойств, не имевших отношения к фликкерному шуму.

В рассматриваемом образце всегда существуют точечные дефекты, имеющие несколько метастабильных состояний. Дефект может переходить из одного состояния в другое (и обратно) вследствие воздействия на него тепловых колебаний решётки. Разумеется, эти переходы осуществляются в случайные моменты времени. В результате смены состояний дефекта изменяются его электрофизические параметры, определяющие параметры образца, например, сопротивление. Таким образом, наличие подобных дефектов приводит возникновению флуктуаций параметров образца.

Рассмотрим простейший случай, когда количество состояний у каждого метастабильного дефекта равно двум. То есть дефект является бистабильным. Такие дефекты формируют двухуровневые системы. Энергетическая диаграмма бистабильного дефекта, формирующего ДУС, изображена на Рис. 8.10.

Здесь указаны метастабильные состояния “0” и “1”, между которыми осуществляются переходы дефекта. Эти состояния разделены энергетическим барьером, имеющим высоту  $E$ . Величина  $E_b$  – разница глубин локальных потенциальных минимумов.

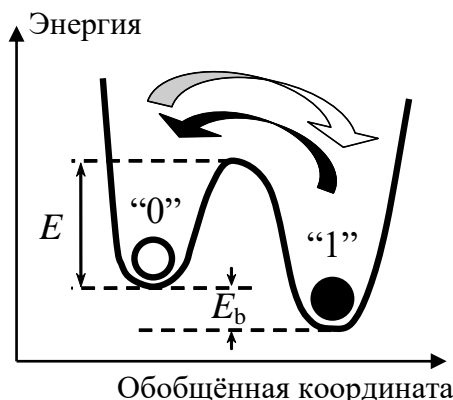


Рис. 8.10 Двухуровневая система

Термоактивированные переходы дефекта между состояниями “0” и “1” имеют характер случайного телеграфного процесса. Соответствующие изменения электрофизических параметров образца, вызванные этими переходами, тоже имеют характер СТП, см., например, Рис. 8.9. Средние времена пребывания в рассматриваемых состояниях, имеющие смысл средних длительностей “пауз” и “импульсов” СТП, определяются следующими соотношениями:

$$\tau_0 = \frac{1}{f_T} \exp\left(\frac{E}{kT}\right), \tau_1 = \tau_0 \exp\left(\frac{E_b}{kT}\right). \quad (8.41)$$

Здесь  $f_T$  – средняя частота тепловых колебаний решётки,  $f_T \approx 10^{13}$  Гц.

Далее выполняется анализ, аналогичный изложенному в Разделе 8.3.4 “Фликкерный шум как суперпозиция случайных процессов телеграфного типа”.

При этом для получения спектра вида  $1/f$ , согласно модели Дю Пре – Ван дер Зила, необходимо наличие большого количества, то есть ансамбля, двухуровневых систем. Этот ансамбль должен обладать широким набором высот  $E$  энергетических барьеров в масштабе  $kT$ , см. соотношение (8.17) и Рис. 8.3.

### 8.5. Эмпирическая формула Хоухе – Клайнпеннина – Фандамме

В 1969 году Хоухе [20] предложил эмпирическое соотношение для описания спектра вида  $1/f$  относительных флуктуаций сопротивления в однородном резистивном образце с постоянной плотностью тока:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{\alpha_H}{Nf}. \quad (8.42)$$

Здесь  $N$  – число носителей тока в образце,  $f$  – частота анализа. Параметр  $\alpha_H$  теперь принято называть феноменологическим параметром Хоухе. Типичным считается значение  $\alpha_H \sim 10^{-3}$ .

#### Примечание

Хоухе (F. N. Hooge) работал профессором в Технологическом университете г. Эйндховен, Нидерланды.

Предложенное соотношение является следствием статистической обработки большого количества экспериментальных данных. Разумеется, встречаются существенные отклонения от считающегося типичным значения параметра Хоухе,  $\alpha_H = 10^{-6} \div 1$ . Тем не менее, соотношение Хоухе является весьма полезным. Оно даёт возможность грубой оценки спектра флуктуаций сопротивления в образце, измерения  $1/f$  шума в котором пока не проводились. Кроме того, это соотношение впервые позволило сравнивать результаты измерений, полученных разными исследователями на разных приборах.

Впоследствии появилась модификация [21] соотношения (8.42), ориентированная на описание спектра относительных флуктуаций сопротивления в полупроводниках, получившая название формулы Хоухе – Клайнпеннинна – Фандамме:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \left( \frac{\mu}{\mu_L} \right)^2 \frac{\alpha_H}{N f}. \quad (8.43)$$

#### Примечание

Клайнпеннинн (T. G. M. Kleinpenning) и Фандамме (L. K. J. Vandamme) – профессора, работавшие в группе Хоухе.

Соотношение (8.43) также имеет эмпирический характер. Сюда входит полная подвижность носителей тока  $\mu$ , а также её компонента  $\mu_L$ , обусловленная рассеянием носителей тока на акустической ветви тепловых колебаний решётки (акустических фононах). Отметим, что полную подвижность можно оценить с помощью приближённого правила Маттиссена:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_N} + \frac{1}{\mu_I} + \dots \quad (8.44)$$

В правой части этого соотношения учитываются все механизмы рассеяния носителей тока: на атомах нейтральных ( $\mu_N$ ) и ионизованных ( $\mu_I$ ) примесей, и так далее. Из правила Маттиссена видно, что полная подвижность носителей тока всегда меньше компоненты, обусловленной рассеянием на акустических фононах,  $\mu < \mu_L$ .

Таким образом, формула Хоухе – Клайнпеннинна – Фандамме (8.43) свидетельствует о тенденции уменьшения спектра фликкерного шума при повышении степени легирования полупроводника, то есть при увеличении в нём количества примесей. Этот вывод верен не всегда. Однако соотношение (8.43), равно как и формула Хоухе (8.42) даёт экспериментаторам возможность для сравнения своих данных, полученных на разных проводящих образцах.

## 9. Методы эквивалентного представления шумов

В большинстве приложений достаточной характеристикой шума является его измеренный спектр; например, для шумового напряжения  $v_n(t)$  – спектр  $\langle v_n^2 \rangle_f$ , имеющий размерность  $[V^2/Гц]$ , а для шумового тока  $i_n(t)$  – спектр  $\langle i_n^2 \rangle_f$   $[A^2/Гц]$ .

Однако иногда бывает удобно выразить спектр шума объекта в эквивалентных параметрах. При этом за основу берутся две известные формулы:

- формула Найквиста для спектра теплового шума резистора;
- формула Шотки для спектра дробового шума.

Таким образом, эквивалентное описание шумов можно производить на двух “языках” – формулы Найквиста, либо формулы Шотки.

Рассмотрим сначала представления, основанные на **формуле Найквиста**, определяющей спектр теплового шума пассивного двухполюсника, обладающего импедансом  $Z(2\pi f)$  при температуре  $T$ .

Спектр эдс  $e_T(t)$  теплового шума, характеризующего напряжение на выводах **разомкнутого** двухполюсника, согласно соотношению (2.5), есть

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kT R(2\pi f), \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (9.1)$$

Здесь учитывается активная часть импеданса  $Z(2\pi f)$  двухполюсника

$$R(2\pi f) = \text{Re}[Z(2\pi f)].$$

Для спектра тока  $i_T(t)$ , описывающего тепловой шум **короткозамкнутого** двухполюсника, согласно (2.6), имеем:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT G(2\pi f), \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (9.2)$$

Здесь учитывается активная часть проводимости  $Y(2\pi f)$  двухполюсника:

$$G(2\pi f) = \text{Re}[Y(2\pi f)] = R(2\pi f) / |Z(2\pi f)|^2.$$

Из соотношений (9.1) и (9.2) видны следующие **четыре** способа эквивалентного представления шумов, основанных на языке формулы Найквиста.

- 1) В единицах спектра теплового шума.
- 2) Через эквивалентную шумовую температуру объекта.
- 3) Через эквивалентное шумовое сопротивление (для шумового напряжения).
- 4) Через эквивалентную шумовую проводимость (для шумового тока).

Рассмотрим последовательно указанные способы.

### 9.1. Коэффициент шума двухполюсника

Пусть имеется некий двухполюсник (“черный ящик” – Ч.Я.) на выходе которого наблюдается шумовое напряжение  $v_n(t)$ .

Двухполюсник обладает активным сопротивлением,  $R(2\pi f) = \text{Re}[Z(2\pi f)]$ , и находится при (абсолютной) температуре  $T$ , см. Рис. 9.1.

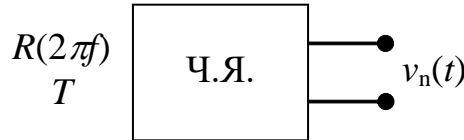


Рис. 9.1. Двухполюсник (черный ящик) с разомкнутыми выводами

Коэффициент шума  $F_n$  определяется следующим образом:

$$F_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kTR(2\pi f)}. \quad (9.3)$$

Здесь  $\langle v_n^2 \rangle_f$  – спектр шумового напряжения, измеренный заранее.

Теперь допустим, что выводы двухполюсника **закорочены**. Через них течёт шумовой ток  $i_n(t)$ , см. Рис. 9.2.

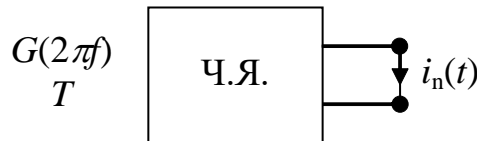


Рис. 9.2. Двухполюсник (черный ящик) с короткозамкнутыми выводами

В этом случае коэффициент шума определяется через спектр  $\langle i_n^2 \rangle_f$  шумового тока, измеренный заранее:

$$F_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kTG(2\pi f)}. \quad (9.4)$$

Здесь учитывается активная проводимость двухполюсника  $G(2\pi f) = \text{Re}[Y(2\pi f)]$ .

Анализируя соотношения (9.3) и (9.4), видим, что коэффициент шума есть **безразмерная** величина. Он определяет спектр шума двухполюсника в единицах спектра **теплового** шума пассивного элемента, имеющего на заданной частоте анализа  $f$  такое же активное сопротивление  $R(2\pi f)$ , либо активную проводимость  $G(2\pi f)$ , и находящегося при той же температуре  $T$ .

Если задан коэффициент шума двухполюсника, то можно найти спектр шумового напряжения на его **разомкнутых выводах**:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = F_n 4kTR(2\pi f), \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (9.5)$$

Если двухполюсник **закорочен**, можно найти спектр шумового тока:



$$\langle i_n^2 \rangle_f = F_n 4kTG(2\pi f), \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (9.6)$$

Коэффициент шума **пассивного** двухполюсника равен единице,  $F_n = 1$ .

Пассивный двухполюсник может состоять из любой комбинации линейных элементов – резисторов, конденсаторов, индуктивностей. Если двухполюсник содержит нелинейные элементы (диоды, транзисторы и проч.) к которым не приложено внешнее напряжение, то он тоже является пассивным.

В двухполюснике могут действовать несколько видов шумов (кроме теплового). Поэтому коэффициент шума обладает следующими свойствами.

- 1) Его величина, как правило, зависит от частоты анализа,  $F_n = F_n(f)$ .
- 2) Обычно коэффициент шума превышает единицу,  $F_n > 1$ . Однако бывают исключения, обусловленные относительно слабым проявлением теплового шума на фоне других действующих шумов.

Коэффициент шума иногда выражается в децибелах:

$$F_n [\text{дБ}] = 10 \lg (F_n [\text{отн. ед.}]) . \quad (9.7)$$

Ниже приведена таблица пересчета относительных значений в децибелы.

Таблица 9.1. Относительные единицы и децибелы

Отн. ед.	1	1.5	2	3	4	6	8	10	$10^2$	$10^3$
дБ	0	1.8	3	4.8	6	7.8	9	10	20	30

Рассмотрим другие методы эквивалентного представления шумов, основанные на формуле Найквиста.

### 9.2. Эквивалентная шумовая температура

Имеем тот же “черный ящик”, обладающий активным сопротивлением  $R = R(2\pi f)$ , либо активной проводимостью  $G = G(2\pi f)$ . В этом случае эквивалентная шумовая температура  $T_n$  определяется следующим образом:

$$T_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kR(2\pi f)}, \text{ К}; \text{ либо } T_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kG(2\pi f)}, \text{ К}. \quad (9.8)$$

Данная величина имеет смысл температуры, до которой надо нагреть **пассивный** двухполюсник, обладающий тем же сопротивлением  $R$  (либо проводимостью  $G$ ), чтобы получить ту же величину спектра шума на частоте анализа  $f$ . Если задана шумовая температура, то можно вычислить спектр шумового напряжения **на разомкнутых** выводах двухполюсника:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = 4kT_n R(2\pi f), \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (9.9)$$

Если двухполюсник **закорочен**, можно найти спектр шумового тока:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 4kT_n G(2\pi f), \text{ А}^2/\text{Гц}. \quad (9.10)$$

Шумовая температура **пассивного** двухполюсника всегда равна температуре окружающей среды,  $T_n = T$ .

В двухполюснике может действовать несколько источников шума (кроме теплового). Поэтому шумовая температура обладает следующими свойствами.

- 1) Её величина может зависеть от частоты анализа:  $T_n = T_n(f)$ .
- 2) Обычно шумовая температура превышает температуру окружающей среды,  $T_n > T$ , однако возможны исключения.

### 9.3. Эквивалентное шумовое сопротивление

В данном случае шумы на **разомкнутом** выходе “черного ящика”, Рис. 9.1, моделируются **тепловым** шумом пассивного двухполюсника, то есть вводится эквивалентное шумовое сопротивление

$$R_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kT}, \text{ Ом.} \quad (9.11)$$

То есть шумы на заданной частоте анализа  $f$  моделируются резистором, обладающим сопротивлением  $R_n$  при той же температуре окружающей среды  $T$ . Если задано шумовое сопротивление, то спектр шумового напряжения на разомкнутых выводах двухполюсника вычисляется следующим образом:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = 4kTR_n, \text{ В}^2/\text{Гц.} \quad (9.12)$$

Шумовое сопротивление **пассивного** двухполюсника всегда равно его активному сопротивлению,  $R_n = R(2\pi f)$ .

По поводу эквивалентного шумового сопротивления можно сделать те же замечания, что и для коэффициента шума и шумовой температуры.

Обычно величина шумового сопротивления зависит от частоты анализа,  $R_n = R_n(f)$ . Кроме того, величина шумового сопротивления, как правило, не может быть меньше активного сопротивления двухполюсника,  $R_n \geq R$ .

Подчеркнём, что зависимость шумового сопротивления от частоты анализа  $f$  может быть обусловлена действием **двух** факторов:

- присутствием других (кроме теплового) источников шума.
- наличием в двухполюснике инерционных элементов (конденсаторов, индуктивностей),

#### Пример 9.1

Обратимся к Разделу “2.3.1. Интегрирующая  $RC$  – цепочка”. Спектр эдс теплового шума, наблюдающегося на разомкнутых выводах, представлен соотношением (2.8). В соответствии с определением (9.11) получим следующее выражение для эквивалентного шумового сопротивления этой цепочки:

$$R_n = \frac{R}{1 + (f / f_c)^2}, \text{ Ом.}$$

Здесь зависимость шумового сопротивления цепочки от частоты анализа  $f$  обусловлена наличием в ней электрического конденсатора.

#### 9.4. Эквивалентная шумовая проводимость

Данный параметр во многом подобен рассмотренному выше шумовому сопротивлению. Разница лишь в том, что рассматривается токовый шум **короткозамкнутого** двухполюсника (Рис. 9.2). Эквивалентная шумовая проводимость  $G_n$  вводится с учетом соотношения (9.2) следующим образом:

$$G_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kT}, \text{ См.} \quad (9.13)$$

Если задана шумовая проводимость, то спектр шумового тока короткозамкнутого двухполюсника есть:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 4kTG_n, \text{ А}^2/\text{Гц.} \quad (9.14)$$

Эквивалентная шумовая проводимость **пассивного** двухполюсника всегда равна его активной проводимости,  $G_n = G(2\pi f)$ . Здесь уместно сделать те же замечания, какие были сделаны для шумового сопротивления.

Обычно  $G_n = G_n(f)$  и  $G_n \geq G$ .

Зависимость шумовой проводимости от частоты анализа  $f$  может быть обусловлена как присутствием дополнительных (к тепловому шуму) источников шума, так и наличием в двухполюснике реактивных элементов.

#### 9.5. Взаимосвязь шумовых параметров формулы Найквиста

Выше были рассмотрены методы представления шумов, основанные на языке формулы Найквиста, представленной соотношениями (9.1) и (9.2). Эта формула дает возможность описания шумов с помощью следующих четырех эквивалентных параметров:

- Коэффициент шума  $F_n$  (безразмерный),
- Шумовая температура  $T_n$  (в градусах Кельвина),
- Шумовое сопротивление  $R_n$  (в омах),
- Шумовая проводимость  $G_n$  (в сименсах).

Все указанные параметры являются равноценными. Их выбор диктуется лишь соображениями удобства решаемой задачи.

Например, пусть имеется усилитель, обладающий шумовым сопротивлением  $R_n = 100$  Ом. С помощью такого усилителя можно исследовать шумы объектов, обладающих примерно таким же активным сопротивлением  $R$ . В противном случае (если  $R \ll R_n$ ), вероятнее всего, исследуемые шумы будут замаскированы шумом усилителя.

С другой стороны, допустим, что приемник радиотелескопа имеет шумовую температуру  $T_n = 1000$  К. Это означает, что для осуществления наблюдений

с разрешающей способностью 10 К необходимо применять специальные методы обработки принимаемых сигналов.

Рассмотрим взаимосвязь между эквивалентными параметрами.

Сравним соотношения (9.5) и (9.9),  $\langle v_n^2 \rangle_f = F_n \underline{4kTR} = \underline{4kT_n R}$ , и, одновременно, соотношения (9.6) и (9.10),  $\langle i_n^2 \rangle_f = F_n \underline{4kTG} = \underline{4kT_n G}$ . Здесь подчёркнуты одинаковые величины, входящие в сравниваемые соотношения. В результате найдём связь между коэффициентом шума, эквивалентной шумовой температурой и абсолютной температурой двухполосника:

$$T_n = F_n T. \quad (9.15)$$

То есть эквивалентная шумовая температура  $T_n$  двухполосника превышает его абсолютную температуру  $T$  в  $F_n$  раз.

Сравним теперь соотношения (9.5) и (9.12), снова подчёркивая входящие в них одинаковые величины:  $\langle v_n^2 \rangle_f = F_n \underline{4kTR} = \underline{4kTR}$ . Отсюда найдём связь между коэффициентом шума, эквивалентным шумовым сопротивлением и активным сопротивлением двухполосника:

$$R_n = F_n R. \quad (9.16)$$

То есть эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$  двухполосника превышает его активное сопротивление  $R$  в  $F_n$  раз.

Теперь, аналогичным образом, сравним соотношения (9.6) и (9.14):

$$\langle i_n^2 \rangle_f = F_n \underline{4kTG} = \underline{4kTG_n}.$$

Это сравнение даёт связь между коэффициентом шума, эквивалентной шумовой проводимостью и активной проводимостью двухполосника:

$$G_n = F_n G. \quad (9.17)$$

То есть эквивалентная шумовая проводимость  $G_n$  двухполосника превышает его активную проводимость  $G$  в  $F_n$  раз.

Отдельный интерес представляет определение взаимосвязи между шумовым **сопротивлением** и шумовой **проводимостью** двухполосника.

Следует понимать, что указанные параметры характеризуют мощность шума двухполосника. Следовательно, они должны быть связаны между собой **прямой пропорцией**,  $R_n \sim G_n$ . С другой стороны, необходимо учитывать, что шумовое **сопротивление** определяет спектр шумового напряжения на выходе **разомкнутого** двухполосника, в то время как шумовая **проводимость** определяет спектр шумового тока **короткозамкнутого** двухполосника.

Для определения взаимосвязи между шумовым сопротивлением и шумовой проводимостью двухполосника обратимся к соотношениям (9.16) и (9.17):

$$R_n = F_n R; \quad G_n = F_n G.$$

Трансформируя указанные соотношения, выразим коэффициент шума  $F_n$  через интересующие нас параметры:  $F_n = R_n / R = G_n / G$ . Активные компоненты импеданса и адмитанса связаны между собой:  $G = R / |Z|^2$ ,  $R = G / |Y|^2$ . Отсюда, учитывая, что  $|Z|^2 = 1/|Y|^2$  находим необходимые взаимосвязи:

$$R_n = |Z|^2 G_n, \quad G_n = |Y|^2 R_n. \quad (9.18)$$

То есть эквивалентные шумовые сопротивление  $R_n$  и проводимость  $G_n$  пропорциональны друг другу. Коэффициентами пропорциональности являются, соответственно, квадраты модулей импеданса  $|Z|^2$ , либо комплексной проводимости  $|Y|^2$  двухполюсника.

Рассмотрим теперь возможности формулы Шотки для описания шумов короткозамкнутого двухполюсника (Рис. 9.2).

### 9.6. Эквивалентный шумовой ток (насыщенного диода)

В соответствии с формулой Шотки (3.14), спектр недепрессированного дробового шума есть

$$\langle i_{др}^2 \rangle_f = 2q_e I_0. \quad (9.19)$$

Здесь  $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$  Кл – заряд электрона,  $I_0$  – (постоянный) ток через электровакуумный диод.

Обращаясь к “черному ящику” с короткозамкнутым выходом (Рис. 9.2) и опираясь на формулу Шотки, вводим понятие эквивалентного шумового тока:

$$I_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{2q_e}, \text{ А.} \quad (9.20)$$

По сути, это есть спектр токового шума, выраженный в амперах.

Другими словами, эквивалентный шумовой ток  $I_n$  есть ток, который надо пропустить через электровакуумный диод (работающий в режиме насыщения), чтобы получить ту же величину недепрессированного дробового шума (на той же частоте анализа  $f$ ), что и у рассматриваемого короткозамкнутого двухполюсника. Зная эквивалентный шумовой ток  $I_n$  двухполюсника можно найти спектр его токового шума:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 2q_e I_n, \text{ А}^2/\text{Гц.} \quad (9.21)$$

Подчеркнём, что величина эквивалентного шумового тока может зависеть от частоты анализа,  $I_n = I_n(f)$ , по двум причинам:

- вследствие относительно большого времени пролета  $\tau_{пр}$  носителей тока через (инжекционный) прибор, входящий в состав двухполюсника (по сравнению с обратной частотой анализа  $f^{-1}$ ),
- из-за наличия иных (кроме дробового) источников шума.

### 9.7. Взаимосвязь описаний по Найквисту и Шотки

Спектр  $\langle i_n^2 \rangle_f$  токового шума двухполосника может быть описан на языке формулы Найквиста (9.14):  $\langle i_n^2 \rangle_f = 4kTG_n$ . Этот же спектр описывается формулой Шотки (9.21). Отсюда находим связь между эквивалентным шумовым током  $I_n$  и эквивалентной шумовой проводимостью  $G_n$  двухполосника:

$$I_n = 2V_T G_n. \quad (9.22)$$

Здесь  $V_T = kT/q_e$  – тепловой потенциал (примерно 25 мВ при  $T = 298$  К).

**Пример 9.2.** Найдем эквивалентный шумовой ток идеального резистора, обладающего сопротивлением  $R = 100$  Ом.

**Решение.** Используя соотношение (9.22), получим:

$$I_n = 2V_T/R = 0.05[\text{В}]/100[\text{Ом}] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ А} = 0.5 \text{ мА}.$$

Таким образом, резистор с сопротивлением 100 Ом генерирует такой же токовый шум, как электровакуумный диод (работающий в режиме без депрессии дробового шума), через который пропускается ток 0.5 мА.

**Пример 9.3.** Определим коэффициент шума полупроводникового диода, к которому приложено большое прямое напряжение  $V \gg V_T$ .

Таким образом, диод работает в режиме большого прямого тока  $I \gg I_s$ . Здесь  $I_s$  – обратный ток насыщения диода.

**Решение.** При  $I \gg I_s$  ток через диод и дифференциальная проводимость  $G$  диода определяются следующими соотношениями:

$$I = I_s \exp(V/V_T), \quad G = dI/dV = I/V_T.$$

В рассматриваемом режиме диод является источником дробового шума  $i(t)$ , см. [6], спектр которого описывается формулой Шотки:  $\langle i^2 \rangle_f = 2q_e I$ .

Вычислим коэффициент шума диода, используя определение (9.4):

$$F_n = \frac{2q_e I}{4kTG} = \frac{I}{2V_T G} = \frac{I}{2V_T} \frac{V_T}{I} = \frac{1}{2}.$$

Коэффициент шума в этом режиме  $F_n = 0.5$ , то есть меньше единицы.

Ничего парадоксального в этом результате нет. Коэффициент шума выражает спектр шума прибора в единицах спектра теплового шума идеального эквивалентного резистора. В рассматриваемом случае диод генерирует дробовой шум, а тепловой шум отсутствует.

Дополнительные сведения о методах эквивалентного представления шумов можно найти в монографиях [6, 7, 22, 23].

## Контрольные вопросы

**1(н).** Для описания теплового шума последовательной  $RC$ -цепочки (см. рис.):

(а) нарисовать эквивалентную схему с генератором напряжения;

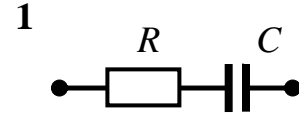
(б) вычислить спектр шумового напряжения  $\langle v^2 \rangle_f$  при  $T=300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;

(в) вычислить эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;

(г) на частоте 16 кГц вычислить коэффициент шума  $F_n$  и эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ ;

(д) объяснить физический смысл полученных результатов.

Использовать следующие параметры:  $R=1$  кОм;  $C=1$  нФ.



**1(т).** Для описания теплового шума последовательной  $RC$ -цепочки (см. рис.):

(а) нарисовать эквивалентную схему с генератором тока;

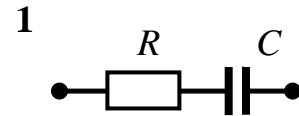
(б) вычислить спектр шумового тока  $\langle i^2 \rangle_f$  при  $T=300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;

(в) вычислить эффективный шумовой ток  $i_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;

(г) вычислить коэффициент шума  $F_n$  на частоте 16 кГц;

(д) объяснить физический смысл полученных результатов.

Использовать следующие параметры:  $R=1$  кОм;  $C=1$  нФ.



**2(н).** Для описания теплового шума параллельной  $RC$ -цепочки (см. рис.):

(а) нарисовать эквивалентную схему с генератором напряжения;

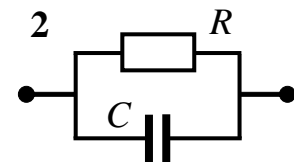
(б) вычислить спектр шумового напряжения  $\langle v^2 \rangle_f$  при  $T=300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;

(в) вычислить эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;

(г) на частоте 16 кГц вычислить коэффициент шума  $F_n$  и эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ ;

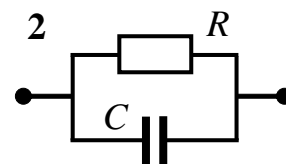
(д) объяснить физический смысл полученных результатов.

Использовать следующие параметры:  $R=1$  кОм;  $C=1$  нФ.



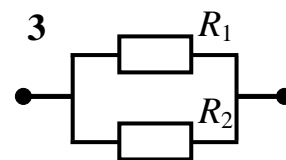
**2(т).** Для описания теплового шума параллельной  $RC$ -цепочки (см. рис.):

- (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором тока;
  - (б) вычислить спектр шумового тока  $\langle i^2 \rangle_f$  при  $T=300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;
  - (в) вычислить эффективный шумовой ток  $i_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;
  - (г) вычислить коэффициент шума  $F_n$  на частоте 16 кГц;
  - (д) объяснить физический смысл полученных результатов.
- Использовать следующие параметры:  $R=1$  кОм;  $C=1$  нФ.



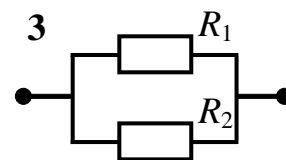
**3(н).** Для описания теплового шума параллельно соединённых резисторов (см. рис.):

- (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором напряжения;
  - (б) вычислить спектр шумового напряжения  $\langle v^2 \rangle_f$  при  $T=300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;
  - (в) вычислить эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;
  - (г) на частоте 16 кГц вычислить коэффициент шума  $F_n$  и эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ ;
  - (д) объяснить физический смысл полученных результатов.
- Использовать следующие параметры:  $R_1=900$  Ом;  $R_2=100$  Ом.



**3(т).** Для описания теплового шума параллельно соединённых резисторов (см. рис.):

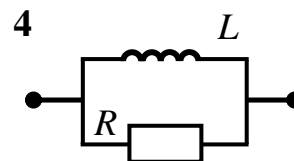
- (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором тока;
  - (б) вычислить спектр шумового тока  $\langle i^2 \rangle_f$  при  $T=300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;
  - (в) вычислить эффективный шумовой ток  $i_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;
  - (г) вычислить коэффициент шума  $F_n$  на частоте 16 кГц;
  - (д) объяснить физический смысл полученных результатов.
- Использовать следующие параметры:  $R_1=900$  Ом;  $R_2=100$  Ом.





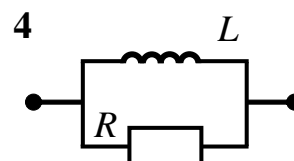
**4(н).** Для описания теплового шума параллельной  $RL$ -цепочки (см. рис.):

- (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором напряжения;
  - (б) вычислить спектр шумового напряжения  $\langle v^2 \rangle_f$  при  $T = 300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;
  - (в) вычислить эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0; 20]$  кГц;
  - (г) на частоте 16 кГц вычислить коэффициент шума  $F_n$  и эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ ;
  - (д) объяснить физический смысл полученных результатов.
- Использовать следующие параметры:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  нГн.



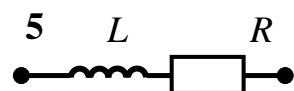
**4(т).** Для описания теплового шума параллельной  $RL$ -цепочки (см. рис.):

- (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором тока;
  - (б) вычислить спектр шумового тока  $\langle i^2 \rangle_f$  при  $T = 300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;
  - (в) вычислить эффективный шумовой ток  $i_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0; 20]$  кГц;
  - (г) вычислить коэффициент шума  $F_n$  на частоте 16 кГц;
  - (д) объяснить физический смысл полученных результатов.
- Использовать следующие параметры:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  нГн.



**5(н).** Для описания теплового шума последовательной  $RL$ -цепочки (см. рис.):

- (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором напряжения;
  - (б) вычислить спектр шумового напряжения  $\langle v^2 \rangle_f$  при  $T = 300$  К, нарисовать график его зависимости от частоты анализа, с указанием численных значений характерных параметров;
  - (в) вычислить эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0; 20]$  кГц;
  - (г) на частоте 16 кГц вычислить коэффициент шума  $F_n$  и эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ ;
  - (д) объяснить физический смысл полученных результатов.
- Использовать следующие параметры:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  нГн.



**5(г).** Для описания теплового шума последовательной  $RL$ -цепочки (см. рис.):

(а) нарисовать эквивалентную схему

с генератором тока;

(б) вычислить спектр шумового тока  $\langle i^2 \rangle_f$  при

$T=300$  К, нарисовать график его зависимо-

сти от частоты анализа, с указанием чис-

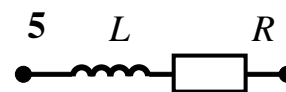
ленных значений характерных параметров;

(в) вычислить эффективный шумовой ток  $i_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;

(г) вычислить коэффициент шума  $F_n$  на частоте 16 кГц;

(д) объяснить физический смысл полученных результатов.

Использовать следующие параметры:  $R=1$  кОм;  $L=1$ нГн.



**6(н).** Для описания теплового шума последовательно соединённых резисторов (см. рис.): (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором напряжения;

(б) вычислить спектр шумового напряжения

$\langle v^2 \rangle_f$  при  $T=300$  К, нарисовать график его

зависимости от частоты анализа,

с указанием численных значений характер-

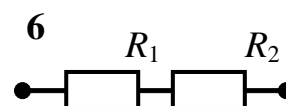
ных параметров;

(в) вычислить эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;

(г) на частоте 16 кГц вычислить коэффициент шума  $F_n$  и эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ ;

(д) объяснить физический смысл полученных результатов.

Использовать следующие параметры:  $R_1=900$  Ом;  $R_2=100$  Ом.



**6(г).** Для описания теплового шума последовательно соединённых резисторов (см. рис.): (а) нарисовать эквивалентную схему с генератором тока;

(б) вычислить спектр шумового тока  $\langle i^2 \rangle_f$  при

$T=300$  К, нарисовать график его зависимо-

сти от частоты анализа, с указанием чис-

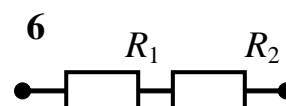
ленных значений характерных параметров;

(в) вычислить эффективный шумовой ток  $i_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц;

(г) вычислить коэффициент шума  $F_n$  на частоте 16 кГц;

(д) объяснить физический смысл полученных результатов.

Использовать следующие параметры:  $R_1=900$  Ом;  $R_2=100$  Ом.



**7.** Недепрессированный дробовой шум, соответствующий току  $I_0=1$  мА, выделяется на резисторе нагрузки  $R=10$  кОм. Вычислить: (а) эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ , соответствующее выделяемому шумовому напряжению при  $T=300$  К; (б) эффективное напряжение шума  $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$  в полосе  $[0;20]$  кГц.

**8.** Ток лавинно-пролетного диода  $I$  составляет 10 мА при коэффициенте размножения  $M=10^5$  и характерном времени лавинообразования  $\tau_{л}=10^{-9}$  с.

Найти спектр шума лавинообразования  $\langle i_{л}^2 \rangle_f$  и эффективный шумовой ток  $i_{эфф}$ , характеризующий полную  $\langle i_{л}^2 \rangle$  мощность шума. Определить эффективную глубину шумовой модуляции тока диода  $m = i_{эфф}/I$ .

**9.** Имеется полупроводниковый образец объёмом  $1 \text{ см}^3$  с концентрацией носителей  $n=10^{12} \text{ см}^{-3}$  и временем жизни носителей тока  $\tau_0=10^{-5}$  с.

Найти спектр  $\langle \delta R^2 \rangle_f$  и полную мощность  $\langle \delta R^2 \rangle$  относительных флуктуаций сопротивления образца в предположении прямой (одноступенчатой) генерации и рекомбинации носителей тока.

**10.** В обратно смещённом  $p-n$  переходе наблюдаются токовые импульсы взрывного шума  $i(t)$ . Длительности импульсов распределены по закону Больцмана. Средняя длительность импульса  $\tau_1$  совпадает со средней длительностью паузы  $\tau_2$ . Размах импульса составляет  $i_1=1$  нА, средняя частота появления импульсов  $\nu=1/(2\tau_1)=10$  кГц. Найти спектр  $\langle i^2 \rangle_f$  и полную мощность  $\langle \Delta i^2 \rangle$  шума; вычислить эквивалентный шумовой ток  $i_{эфф}$ .

**11.** Спектр напряжения на выходе генератора фликкерного (“розового”) шума есть  $\langle u^2 \rangle_f = A/f$  [В<sup>2</sup>/Гц] во всем диапазоне анализируемых частот. Найти мощность  $\langle u^2(\Delta f) \rangle$  шума в следующих частотных диапазонах: (а) [1; 100] Гц; (б) [0.1; 10] кГц; (в) [10кГц; 1МГц]. Объяснить полученные результаты.

Неплохо бы догадаться, как подобный генератор используется при измерении амплитудно–частотной характеристики усилителя низкой частоты.

**12.** Дан резистор, обладающий невозмущенным сопротивлением  $R_0$  и спектром относительных флуктуаций сопротивления, имеющим лоренцев вид,

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = A/[1+(f/f_1)^2].$$

Через резистор пропускается ток  $I$ , содержащий постоянную и гармоническую составляющие:  $I = I_0 + I_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ .

(а) Получить аналитическое выражение для шумовой компоненты  $u(t)$  полного напряжения  $U$ , выделяющегося на резисторе.

(б) Нарисовать качественно спектр  $\langle U^2 \rangle_f$  полного напряжения  $U$  при  $f_1 \ll f_0$ .

**13.** Изложить суть модели Дю Пре – Ван дер Зила, предложенной для объяснения формы спектра фликкерного шума.

Определить параметры распределения времён релаксации, необходимые для получения спектра типа  $1/f$  в диапазоне частот от  $10^{-6}$  Гц до  $10^5$  Гц.

- 14.** Показать, что пуассоновская последовательность импульсов, затухающих во времени по закону  $1/\sqrt{t}$  имеет, согласно модели Шенфельда, спектр вида  $1/f$  на достаточно низких частотах. Изложить суть модификации модели, предложенной Малаховым для объяснения фликкерного шума со спектром  $1/f^\gamma$  для  $\gamma \sim 1$ .
- 15.** Изложить суть модели фликкерного случайного процесса, основанной на использовании пуассоновской последовательности прямоугольных импульсов (Халфорда).
- 16.** Определить параметры суперпозиции случайных телеграфных процессов, дающей спектр вида  $1/f$  в заданном (сколь угодно широком) диапазоне частот  $(f_n; f_b)$ .
- 17.** Коэффициент шума  $F_n$  усилителя, обладающего входным сопротивлением  $R = 75$  Ом, составляет 3 дБ при температуре  $T = 300$  К. Найти спектр шума  $\langle v_n^2 \rangle_f$ , приведенного к входу усилителя, и эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$ .
- 18.** Эквивалентное шумовое сопротивление  $R_n$  двухполюсника составляет 3 кОм. Найти: (а) спектр шумового напряжения при температуре  $T = 300$  К; (б) коэффициент шума и эквивалентную шумовую проводимость, если дифференциальное сопротивление  $R$  двухполюсника составляет 1 кОм.
- 19.** Дан двухполюсник, находящийся при температуре  $T = 300$  К и имеющий сопротивление  $R = 1$  кОм, спектр шумового напряжения на выходе двухполюсника есть  $\langle v_n^2 \rangle_f = 3.2 \times 10^{-17}$  В<sup>2</sup>/Гц. Найти коэффициента шума  $F_n$  и эквивалентную шумовую температуру  $T_n$  двухполюсника.
- 20.** Найти эквивалентный шумовой ток  $I_n$  (насыщенного диода) для двухполюсника, имеющего при температуре  $T = 300$  К сопротивление  $R = 1$  кОм и коэффициент шума  $F_n = 13$  дБ.
- 21.** Найти эквивалентную шумовую проводимость  $G_n$ , описывающую дробовой шум тока  $I_0 = 10$  мА при коэффициенте депрессии  $\Gamma^2 = 0.1$ . Принять  $T = 300$  К.
- 22.** Найти коэффициент шума  $F_n$  электровакуумной лампы, через которую протекает ток  $I_0 = 20$  мА при коэффициенте депрессии  $\Gamma^2 = 0.05$ , если её выходное сопротивление составляет  $R = 5$  кОм. Принять  $T = 300$  К.
- 23.** Коэффициент шума двухполюсника, имеющего дифференциальное сопротивление  $R = 1$  кОм, при температуре  $T = 300$  К составляет  $F_n = 6$  дБ. Найти эквивалентные шумовые сопротивление  $R_n$  и температуру  $T_n$ .

## Список литературы

- [1] Якимов, А. В. Введение в физику шумов. Электронное учебное пособие / А. В. Якимов // Фонд образовательных электронных ресурсов. – Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет. Регистрационный номер 1237.16.04. Дата издания 29.06.2016. 107 с. [Электронный ресурс]. URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/Yakimov\\_Noise\\_Introd.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/Yakimov_Noise_Introd.pdf) (дата обращения: 05.05.2022).
- [2] Брагинский, В. Б. Удивительная гравитация (или как измеряют кривизну мира) / В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 160 с.
- [3] Стратонович, Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович – М.: Сов. радио, 1961. 559 с.
- [4] Малахов, А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах / А. Н. Малахов – М.: Наука, 1968. 660 с.
- [5] Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая / Б. Р. Левин – М.: Сов. радио, 1969. 752 с.
- [6] Ван дер Зил, А. Шум (источники, описание, измерение) / А. Ван дер Зил – М.: Сов. радио, 1973 (перевод с английского). 178 с.
- [7] Жалуд, В. Шумы в полупроводниковых устройствах / В. Жалуд, В. Н. Кулешов – М.: Сов. радио, 1977.
- [8] Шумы в электронных приборах / Пер. с англ. – М.-Л.: Энергия, 1964.
- [9] Зеегер, К. Физика полупроводников / К. Зеегер – М.: Мир, 1977 (перевод с английского).
- [10] Read, W. T. A proposed high frequency negative resistance diode / W. T. Read // Bell System Techn. J. 1958. V.37. P.401.
- [11] Тагер, А. С. Генерация и усиление радиоволн сантиметрового и миллиметрового диапазонов с помощью полупроводникового диода в области положительного наклона его статической вольтамперной характеристики / А. С. Тагер, А. И. Мельников, Г. П. Кобельков, А. М. Цебиев // Диплом на открытие №24, приоритет 27.10.1959 г.
- [12] Тагер, А. С. Лавинно-пролетные диоды и их применение в технике СВЧ / А. С. Тагер, В. М. Вальд-Перлов – М.: Сов. радио, 1968.
- [13] Беляков, А. В. Взрывной и  $1/f$ -шум в светоизлучающих диодах на квантовых точках / А. В. Беляков, М. Ю. Перов, А. В. Якимов, Л. К. Дж. Фандамме // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 2006. – Т.49. – №5. – С. 437 – 447.
- [14] Johnson, J. B. The Schottky effect in low frequency circuits / J. B. Johnson // Phys. Rev. – 1925. – Vol. 26. – P. 71.
- [15] Schottky, W. Small-shot effect and flicker effect / W. Schottky // Phys. Rev. – 1926. – V. 28. – P. 74.

- [16] Коган, Ш. М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа  $1/f$  в твердых телах / Ш. М. Коган // Успехи физических наук. – 1985. – Т.145. – № 2. – С. 285 – 328.
- [17] Du Pre, F. K. A suggestion regarding the spectral density of flicker noise / F. K. Du Pre // Physical Review. – 1950. – Vol. 78. – № 5. – P. 615.
- [18] Van der Ziel, A. On the noise spectra of semi-conductor noise and of flicker effect / A. Van der Ziel // Physica. – 1950. – Vol. 16. – № 4. – P. 359 – 372.
- [19] Халфорд, Д. Общая механическая модель шумов со спектральной плотностью  $|f|^\alpha$  и её применение к частному случаю фликкер-шума вида  $1/f$  / Д. Халфорд // ТИИЭР. – 1968. – Т. 56. – № 3. – С. 9 – 16.
- [20] Hooge, F. N.  $1/f$  noise is no surface effect / F. N. Hooge // Phys. Letters. – 1969. – V. 29A. – P. 139 – 140.
- [21] Hooge, F. N. Experimental studies on  $1/f$  noise / F. N. Hooge, T. G. M. Kleinpenning, L. K. J. Vandamme // Reports on Progress in Physics. – 1981. – V.44. – № 3. – P. 479 – 532.
- [22] Букингем, М. Шумы в электронных приборах и системах / М. Букингем – М.: Мир, 1986.
- [23] Белоусов, А. П. Коэффициент шума / А. П. Белоусов, Ю. А. Каменецкий – М.: Радио и связь, 1981.
- [24] Якимов, А. В. Анализ дробовых шумов и шумов лавинообразования в электронных приборах при больших уровнях сигнала / А. В. Якимов //Радиотехника и электроника. – 1977. – Т.22. – №10. – С. 2186 – 2189.

Аркадий Викторович **Якимов**

**ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ШУМОВ**

*Учебное пособие*

Компьютерная верстка – А.В. Якимов

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

“Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского”.

603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.