МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)

Институт Информационных Технологий, Математики и Механики

Л.Г.Афраймович, М.Х.Прилуцкий

Прикладные задачи распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по магистерской программе «Прикладная информатика в области принятия решений» направления подготовки «Прикладная информатика» 09.04.03.

Нижний Новгород
2015 год

УДК 519.874

А-94

А-94 Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Прикладные задачи распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 19с.

Рецензент: д.т.н., профессор Федосенко Ю.С.

Широкий класс прикладных задач распределения ресурсов формально относится к классу задач распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа. В учебно-методическом пособии приводятся содержательные постановки подобных прикладных задач и строятся их математические модели. Материал учебно-методического пособия используется при чтении курса лекций «Модели и методы принятия решений в детерминированных и стохастических системах» базовой части общенаучного цикла для магистров 1 курса направления подготовки «Прикладная информатика» 09.04.03, обучающихся по магистерской программе «Прикладная информатика в области принятия решений».

Прикладные задачи распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа

Широкий класс прикладных задач распределения ресурсов формально относится к классу задач распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа. В учебном пособии приводятся содержательные постановки подобных прикладных задач и строятся их математические модели. Материал учебного пособия используется при чтении курса лекций «Модели и методы принятия решений в детерминированных и стохастических системах» базовой части общенаучного цикла для магистров 1 курса направления подготовки «Прикладная информатика» 09.04.03, обучающихся по магистерской программе «Прикладная информатика в области принятия решений».

1. Транспортная задача с промежуточными пунктами

Содержательная постановка

Имеются пункты производства, промежуточные пункты и пункты потребления однородного продукта. Заданы максимально возможные объемы производства продукта каждым пунктом производства, минимально допустимые объемы потребления продукции каждым пунктом потребления, ограничения на объемы перевозки продукта от каждого пункта производства до каждого промежуточного пункта, ограничения на объемы перевозки продукта от каждого промежуточного пункта до каждого пункта потребления.

Требуется найти план перевозок, обеспечивающий эффективное функционирование системы и удовлетворяющий ограничениям пунктов на возможные производимые, потребляемые и передаваемые объемы однородного продукта.

Исходные параметры

Пусть I – множество пунктов производства, J – множество промежуточных пунктов, K – множество пунктов потребления.

Обозначим через A_i – максимальный объем производства продукта пунктом i; B_k – минимальный объем продукта, который необходимо доставить k-ому пункту потребления; D_{jk} - максимальное количество продукта, которое может быть доставлено из j – ого промежуточного пункта k-ому потребителю; E_{ij} - максимальный объем продукта, который может быть доставлен из i-ого пункта производства в j-ый промежуточный пункт, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$.

Варьируемые параметры

Обозначим через x_{ijk} – количество продукта, которое будет перевезено из пункта производства i через j-ый промежуточный пункт k-му потребителю, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$.

Ограничения математической модели

Общая математическая модель проблемы перевозки однородного продукта представляет собой следующую систему ограничений:

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \le A_i,\ i \in I, \tag{2.1}$$

(объем производства продукта каждым из пунктов производства не должен превышать максимально возможного объема);

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} \ge B_k,\ k \in K, \tag{2.2}$$

(пункты потребления должны получить объем продукта не ниже минимально допустимого объема);

$$\sum_{k \in K} x_{ijk} \le E_{ij},\ i \in I,\ j \in J, \tag{2.3}$$

(суммарный объем перевозки продукта от каждого пункта производства до каждого промежуточного пункта не должен превышать максимально допустимого объема);

$$\sum_{i \in I} x_{ijk} \le D_{jk},\ j \in J, k \in K, \tag{2.4}$$

(суммарный объем перевозки продукта от каждого промежуточного пункта до каждого пункта потребления не должен превышать максимально допустимого объема);

$$x_{ijk} \ge 0,\ i \in I, j \in J, k \in K\ . \tag{2.5}$$

(естественные ограничения на переменные).

Критерии оптимальности

Критерии оптимизации, определяющие эффективность функционирования системы, могут зависеть от различных показателей искомого плана перевозок. Так, например, если к таким показателям относятся объемы производства продукции в пунктах производства и объемы потребления продукции в пунктах потребления, то рассматриваемая задача будет заключаться в определении такого плана перевозок, для которого выполняются ограничения (2.1)-(2.5), и принимают экстремальные значения критерии $f_i(\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk}, A_i),\ i \in I,\ \ \phi_k(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk}, B_k),\ k \in K$, определяющие, соответственно, условия эффективности функционирования пунктов производства и пунктов потребления.

Каждая конкретная задача определяется выбором показателей искомого плана, определяющих эффективность функционирования системы, и выбором функций, формализующих критерии оптимальности

2. Задача о перевозке разнородных грузов

Содержательная постановка

Имеются пункты производства, промежуточные пункты и пункты потребления различных видов продукции. Продукция передается из пунктов производства в пункты потребления через промежуточные пункты посредством существующих коммуникационных связей между пунктами. Заданы максимально возможные объемы производства каждого из видов продукции каждым пунктом производства; минимально допустимые и максимально требуемые объемы потребления каждого из видов продукции каждым пунктом потребления; максимально возможные объемы перевозки каждого из видов продукции из одного пункта в другой; максимально возможный общий объем всей продукции, который каждый из пунктов потребления способен разместить.

Требуется найти план перевозок, обеспечивающий эффективное функционирование системы и удовлетворяющий ограничениям пунктов на возможные производимые, потребляемые и передаваемые объемы разнородной продукции.

Исходные параметры

Пусть I – множество пунктов производства, J – множество промежуточных пунктов, K – множество пунктов потребления, L – множество видов продукции, M – множество связей между пунктами. Таким образом, структура структура транспортной системы перевозки продукции определяется ориентированным графом $G=(I\cup J\cup K, M)$ без петель и контуров, в котором, $M\subseteq(I\cup J\cup K)^2$.

Обозначим через A_{il} – максимально возможный объем производства продукции вида l пунктом производства i, $i\in I$, $l\in L$; B_{kl}^{-}, B_{kl}^{+} – минимально допустимый и максимально требуемый объемы потребления продукции вида l пунктом потребления k, $k\in K$, $l\in L$; D_k – максимально возможный общий объем всей продукции, который способен разместить пункт потребления k, $k\in K$; E_{ijl} – максимально возможный объем перевозки продукции вида l из пункта i в пункт j, $(i, j)\in M$, $l\in L$.

Варьируемые параметры

Обозначим через x_{ijl} – объем продукции вида l, которая будет перевезена из пункта i в пункт j, $(i,j)\in M$, $l\in L$.

Ограничения математической модели

Общая математическая модель проблемы перевозки разнородной продукции представляет собой следующую систему ограничений:

$$\sum_{(i,j)\in M} x_{ijl} \le A_{il},\ i\in I, l\in L, \qquad (2.6)$$

(объем производства продукции определенного вида каждым из пунктов производства не должен превышать максимально возможного объема);

$$\sum_{(j,i)\in M} x_{jil} - \sum_{(i,j)\in M} x_{ijl} = 0,\ \ j \in J, l \in L, \tag{2.7}$$

(условия сохранения продукции при ее передачи через промежуточные пункты);

$$B_{kl}^{-} \le \sum_{(i,k)\in M} x_{ikl} \le B_{kl}^{+},\ k \in K, l \in L, \tag{2.8}$$

(объем продукции, полученный пунктами потребления, не должен быть ниже минимально допустимого и максимально требуемого объема продукции каждого из видов);

$$\sum_{(i,k)\in M} \sum_{l\in L} x_{ikl} \le D_k,\ k \in K, \tag{2.9}$$

(общий объем всей продукции, который способны разместить пункты потребления, не должен превышать максимально допустимого объема);

$$0 \le x_{ijl} \le E_{ijl},\ (i, j) \in M, l \in L, \tag{2.10}$$

(объем продукции определенного вида, перевезенные из одного пункта в другой посредством связей, не должен превышать максимально допустимого объема; естественные ограничения на переменные).

Критерии оптимальности

Критерии оптимальности могут зависеть от различных показателей искомого плана перевозок разнородной продукции, к которым относятся, например,

– объемы производства продукции каждого из видов пунктами производства;
– объемы потребления продукции каждого из видов пунктами потребления;
– объемы размещения продукции пунктами потребления.

Тогда рассматриваемая задача будет заключаться в определении такого плана перевозок, для которого выполняются ограничения (2.6)-(2.10), и принимают экстремальные значения критерии $f_{il}(\sum_{(i,j)\in M} x_{ijk}, A_{il}),\ i \in I, l \in L,$ $\phi_{kl}(\sum_{(i,k)\in M} x_{ijk}, B_{kl}^{-}, B_{kl}^{+}),\ k \in K, l \in L,$ $\varphi_k(\sum_{(i,k)\in M} \sum_{l\in L} x_{ikl}, D_k),\ k \in K,$ определяющие, условия эффективности функционирования пунктов производства и пунктов потребления.

3. Задача распределения мощностей каналов передачи данных провайдером сети ИНТЕРНЕТ

Содержательная постановка

Имеется сеть городского провайдера ИНТЕРНЕТ. Узлами сети являются центр (центральный узел провайдера), коммуникационные узлы, абоненты сети; имеются каналы связи между узлами сети. Заданы возможности центра и коммуникационных узлов в предоставлении каналов той или иной мощности; потребности абонентов сети в получении того или иного количества информации. При этом количество распределяемой информации для узлов сети может быть ограничено как сверху (например, принципиальные ограничения возможностей провайдера), так и снизу (например, минимальная потребность абонентов в получаемой информации).

Известны следующие ограничения структуры сети:

– информация распределяется от центра к абонентам через коммутационные узлы по каналам связи;
– каждый коммутационный узел сети может обслуживаться либо одним из коммутационных узлов, либо напрямую центром;
– каждый абонент сети может обслуживаться лишь одним из коммуникационных узлов.

Требуется найти распределение пропускных способностей каналов, обеспечивающее эффективное функционирование сети и удовлетворяющее ее ограничениям.

Исходные параметры

Сеть городского провайдера будем моделировать корневым ориентированным деревом. При этом центр системы соответствует корню дерева; абоненты – листьям (концевым вершинам); коммуникационные узлы – остальным вершинам; каналы связи – дугам.

Тогда рассмотрим корневое ориентированное дерево $G=(V,A)$, где $A\subseteq V^2$, V – множество вершин, разбиением которого является совокупность $\{0\}$, V_u, V_c, соответственно, корень дерева (центр), множество листьев (абоненты), множество остальных вершин (коммуникационные узлы).

Обозначим через A_i^- и A_i^+ – нижнюю и верхнюю границы допустимых значений распределяемого ресурса, которые могут быть интерпретированы как

– минимальный и максимальный объемы информации, который способен предоставить центр i, при $i=0$;
– минимальный и максимальный объемы информации, который способен обработать коммуникационный узел i, при $i\in V_c$;
– минимально допустимый и максимально требуемый абоненту i объем информации, при $i\in V_u$.

Варьируемые параметры

Обозначим через x_i – количество информации, которое поставим в соответствие узлу i, $i \in V_c \cup V_u$.

Ограничения математической модели

Общая математическая модель проблемы распределения мощностей каналов передачи данных представляет собой следующую систему ограничений:

$$A_0^- \le \sum_{(0,j)\in A} x_j \le A_0^+, \qquad (2.11)$$

(нижнее и верхнее ограничения центра);

$$A_i^- \le \sum_{(j,i)\in A} x_j \le A_i^+,\ i \in V_c \cup V_u, \qquad (2.12)$$

(нижнее и верхнее ограничения коммуникационных узлов и абонентов);

$$\sum_{(j,i)\in A} x_j - \sum_{(i,j)\in A} x_j = 0,\ i \in V_c, \tag{2.13}$$

(условие сохранения информации пре ее передачи);

$$0 \le x_i,\ i \in V_c \cup V_u, \tag{2.14}$$

(естественные ограничения на переменные).

Критерии оптимальности

Критерии оптимальности могут зависеть от различных показателей искомого распределения мощностей каналов передачи данных, к которым относятся, например,

– объемы предоставления каналов той или иной мощности центром сети;
– объемы информации, полученной абонентами сети.

Тогда рассматриваемая задача будет заключаться в определении такого распределения мощностей каналов передачи данных, для которого выполняются ограничения (2.11)-(2.14), и принимают экстремальные значения критерии $f(\sum_{(0,j)\in A} x_j, A_0^-, A_0^+,)$, $\phi_i(\sum_{(j,i)\in A} x_j, A_i^-, A_i^+),\ i \in V_u$, определяющие, условия эффективности функционирования центра и абонентов сети.

4. Задачи объемно-календарного планирования

Содержательно задачи объемно-календарного планирования формулирутся следующим образом. Требуется распределить общий план предприятия в объёмных характеристиках (нормо-часы, рубли, условные тонны) по различным показателям: группам оборудования, периодам планирования, этапам изготовления, потребляемым ресурсам, видам продукции. Показатели искомого плана делятся на «жесткие», выполнение которых обязательно, и «желательные», к выполнению которых нужно стремиться. Жесткие показатели формализуются в виде ограничений, а «желательные» - в виде критериев оптимальности. Тогда задача объёмно-календарного планирования ставится как многокритериальная задача (учет «желательных» показателей) с ограничениями (учет «жестких» показателей), которые в рассматриваемой идеализации являются линейными. В зависимости от характера производста (единичный и мелкосерийный, непрерывный) параметры задачи могут иметь более предметную интерпретацию.

4.1. Задача объёмно-календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства

Содержательная постановка

Имеются подразделения предприятия и заказы, по которым предприятию необходимо выполнить работы в течение периода планирования. Известны максимальный объем работ, который может быть выполнен предприятием в каждый из тактов планирования; минимально допустимый объем работ, который должен быть выполнен предприятием по каждому из заказов; максимальный объем работ, который может быть выполнен подразделением в каждый из тактов планирования; минимально допустимый и максимально требуемый объем работ, который должен быть выполнен подразделением по каждому из заказов.

Требуется определить на заданный период планирования программу производства для подразделений предприятия в объемных показателях (нормо-часы, рубли, условные тонны), обеспечивающую эффективное функционирование предприятия и удовлетворяющую ограничениям возможных объемов работы.

Исходные параметры

Пусть I – множество подразделений предприятия, J – множество заказов, T – множество тактов планирования.

Обозначим через A_t – максимальный суммарный объем работ, который может быть выполнен всеми предприятиями по всем заказам в такт планирования t; B_j – минимально допустимый объем работ, который должен быть выполнен предприятием по заказу j в течение всего периода планирования; C_{it} – максимальный объем работ, который может быть выполнен подразделением i в такт планирования t; D_{ij}^{-}, D_{ij}^{+} – минимально допустимый и максимально требуемый объем работ, который должен быть выполнен подразделением i по заказу j, $i \in I$, $j \in J$, $t \in T$.

Варьируемые параметры

Обозначим через x_{ijt} – объем работ, который выполнен в такт t по заказу j в подразделении i, $i \in I$, $j \in J$, $t \in T$.

Ограничения математической модели

Общая математическая модель объемно-календарного планирования представляет собой следующую систему ограничений:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijt} \le A_t, \ t \in T, \tag{2.15}$$

(общий объем работ в каждый из периодов не должен превышать максимально допустимого значения);

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijt} \ge B_j, \ j \in J, \tag{2.16}$$

(общий объем работ по каждому из заказов должен быть не ниже минимально допустимый значения);

$$\sum_{j \in J} x_{ijt} \le C_{it}, \ i \in I, t \in T; \tag{2.17}$$

(общий объем работ каждого подразделения в каждый из тактов планирования не может превышать максимально допустимого значения);

$$D_{ij}^{-} \le \sum_{t \in T} x_{ijt} \le D_{ij}^{+}, \ i \in I, \ j \in J; \tag{2.18}$$

(ограничение минимально допустимого и максимально требуемого объема работ подразделения по каждому из заказов);

$$0 \le x_{ijl},\ i \in I,\ j \in J, k \in K, \tag{2.19}$$

(естественные ограничения на переменные).

Критерии оптимальности

Критерии оптимальности могут зависеть от различных показателей искомой программы производства, к которым относятся, например,

– объемы выполненных работ по заказам предприятия;
– объемы работ подразделений предприятия.

Тогда рассматриваемая задача будет заключаться в определении такой программы производства, для которой выполняются ограничения (2.15)-(2.19), и принимают экстремальные значения критерии $f_j(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijt}, B_j),\ j \in J$, $\phi_{it}(\sum_{j\in J} x_{ijt}, C_{it}),\ i \in I, t \in T,$ определяющие, условия эффективного выполнения заказов и эффективности функционирования подразделений предприятия.

4.2. Задача объёмно-календарного планирования для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции

Содержательная постановка

Рассматривается производственная система, которая из сырья, используя различные технологические установки, производит готовую продукцию. Сырье через ёмкости поступает на технологические установки. На технологических установках, под воздействием технологических режимов, сырьё перерабатывается в продукты производства. Готовые продукты производства поступают в ёмкости для готовой продукции, а затем потребителям готовой продукции. Заданы ограничения на объёмы ёмкостей и ограничения на производительности технологических установок.

Требуется найти такой план производства готовой продукции, обеспечивающий эффективное функционирование предприятия, и который позволял бы определять:

- общий объём сырья, который должен поступать на предприятие за весь период планирования,
- сколько сырья потребуется предприятию по тактам планирования,
- как сырьё должно быть распределено по ёмкостям по тактам планирования,
- как сырьё должно поступать по тактам на технологические установки,
- как готовая продукция по тактам должна поступать в ёмкости готовой продукции,
- какие объёмы готовой продукции по тактам предприятие может отгружать потребителям.

Исходные параметры

Пусть T – множество тактов функционирования системы, I – множество ёмкостей под сырьё, J – множество технологических установок, K – множество различных видов готовой продукции, которые выпускает предприятие, S –

множество ёмкостей под готовую продукцию, P – множество потребителей готовой продукции.

Обозначим через A_i – максимальный объём сырья, который может быть помещён в ёмкость под сырьё i, $i \in I$; B_{jk}, C_{jk} – минимально и максимально возможные производительности j-той технологической установки по готовой продукции k, $j \in J$, $k \in K$; D_{ks} – максимальный объём готовой продукции k, который можно поместить в ёмкость для готовой продукции s, $k \in K$, $s \in S$; E_{kpt}, H_{kpt} – минимальный и максимальный объёмы продукции k, который требуется потребителю p в такт t, $k \in K$, $p \in P$, $t \in T$. Здесь предполагается, что $A_i \geq 0$, $0 \leq B_{jk} \leq C_{jk} < \infty$, $D_{ks} \geq 0$, $0 \leq E_{kpt} \leq H_{kpt} < \infty$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $s \in S$, $p \in P$, $t \in T$.

Варьируемые параметры

Обозначим через x_{ijkspt} – количество сырья, которое из ёмкости i поступит на установку j для изготовления продукта k, который через ёмкость s будет отправлен потребителю p в такт t, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $s \in S$, $p \in P$, $t \in T$.

Ограничения математической модели

$$x_{ijkspt} \geq 0, \quad i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, p \in P, t \in T. \qquad (1)$$

(Естественные условия на переменные.)

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} x_{ijkspt} \leq A_i, \quad i \in I, t \in T. \qquad (2)$$

(Количество сырья, поступившее из каждой ёмкости, не должно превышать объёма этой ёмкости в любой такт планирования.)

$$B_{jk} \leq \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} x_{ijkspt} \leq C_{jk}, \quad j \in J, k \in K, t \in T. \qquad (3)$$

(Количество готового продукта, полученное с каждой установки не должно быть меньше минимальной и больше максимальной производительности этой установки по этому продукту каждый такт планирования.)

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} x_{ijkspt} \leq D_{ks}, \quad k \in K, s \in S, t \in T. \qquad (4)$$

(Каждый такт планирования количество продукта, которое поступит в ёмкость готовой продукции, не должно превышать максимальный вместимости этой ёмкости.)

$$E_{kpt} \le \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \sum_{s\in S} x_{ijkspt} \le H_{kpt}, \quad k\in K, p\in P, t\in T. \qquad (5)$$

(Каждый такт планирования количество готовой продукции, которое поступит потребителю, должно быть ограничено минимальным и максимальным объёмами продукции, который ему требуется.)

Критерии оптимальности

Критерии оптимальности могут зависеть от различных показателей искомого плана и должны обеспечивать эффективное функционирование предприятия. При решении задач объёмно-календарного планирования могут учитываться, например, следующие экономические показатели:

- стоимость единицы сырья в зависимости от такта поступления;
- затраты на заполнение и извлечения сырья из ёмкостей;
- затраты на переработку сырья технологическими установками;
- затраты на отгрузку готовой продукции;
- доходы от реализации готовой продукции потребителям.

Пусть a_t – стоимость единицы сырья в такт t, $t\in T$; b_{it} – затраты на перемещение единицы сырья из ёмкости для сырья i в такт t в любую технологическую установку; c_{jkt} – затраты на переработку единицы сырья установкой j в продукт k в такт t, $j\in J$, $k\in K$, $t\in T$; d_{kspt} – затраты на отгрузку готовой продукции k потребителю p из ёмкости для готовой продукции s в такт t, $k\in K$, $s\in S$, $p\in P$, $t\in T$; e_{kpt} – доход от отгрузки в такт t единицы готовой продукции k, потребителю p, $k\in K$, $p\in P$, $t\in T$.

Тогда рассматриваемая задача будет заключаться в определении такой программы производства, для которой выполняются ограничения (1)-(5), и принимают экстремальные значения критерии:

$$F_1(X) = \sum_{k\in K} \sum_{p\in P} \sum_{t\in T} e_{kpt} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \sum_{s\in S} x_{ijkspt} \to \max. \qquad (6)$$

(Суммарный доход, который получит система от реализации готовой продукции потребителям за все время планирования)

$$F_2(X) = \sum_{k\in K} \sum_{s\in S} \sum_{p\in P} \sum_{t\in T} d_{kspt} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} x_{ijkspt} \to \min. \qquad (7)$$

(Суммарные затраты на отгрузку готовой продукции из ёмкостей потребителям по тактам планирования)

$$F_3(X) = \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} \sum_{t\in T} c_{jkt} \sum_{i\in I} \sum_{s\in S} \sum_{p\in P} x_{ijkspt} \to \min. \qquad (8)$$

(Суммарные затраты технологических установок на переработку сырья в готовую продукцию)

$$F_4(X) = \sum_{i\in I} \sum_{t\in T} b_{it} \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} \sum_{s\in S} \sum_{p\in P} x_{ijkspt} \to \min. \qquad (9)$$

(Суммарные затраты на перемещение сырья из ёмкостей для сырья в технологические установки)

$$F_5(X) = \sum_{t\in T} a_t \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} \sum_{s\in S} \sum_{p\in P} x_{ijkspt} \to \min. \qquad (10)$$

(Суммарные затраты на приобретение сырья за все время планирования)

5. Задача сбалансированной загрузки распределенной вычислительной системы

Содержательная постановка

Имеется распределенная вычислительная система, состоящая из параллельно работающих процессоров и коммуникационных связей между ними. В начальный момент каждый из процессоров обладает некоторой загрузкой, которая складывается из равномощных (с точки зрения вычислительной сложности) задач, назначенных на процессоры.

Требуется перераспределить задачи, обеспечивая сбалансированную загрузку и эффективность функционирования распределенной вычислительной системы.

Исходные параметры

Будем моделировать распределенную вычислительную систему ориентированным графом $G=(V,A)$ без петель, $A\subseteq V^2$, $|V|=n$. Множество вершин графа V – соответствует множеству процессоров, множество дуг A – множеству коммуникационных связей.

Обозначим через a_i, $a_i \geq 0$ – загрузку процессора i (т.е. количество задач назначенных на процессор i) $i\in V$. Тогда при сбалансированной загрузке каждый из процессоров должен обрабатывать (с точностью до единицы) ${}^{1}\!/\!{}_{n}\sum\limits_{j\in V} a_j$ задач.

Варьируемые параметры

Обозначим через x_{ij} – количество задач, которое будет передано по коммуникационной связи (i,j), от $(i,j)\in A$.

Ограничения математической модели

Общая математическая модель проблемы сбалансированной перевозки разнородной продукции представляет собой следующую систему ограничений:

$$\sum_{(j,i)\in A} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + a_i \geq [{}^{1}\!/\!{}_{n}\sum_{j\in V} a_j],\ i\in V, \tag{2.20}$$

(перераспределение задач должно обеспечивать сбалансированную загрузка процессоров);

$$x_{ij} \geq 0,\ (i,j)\in A, \tag{2.21}$$

(естественные ограничения на переменные).

Критерии оптимальности

Критерии оптимальности могут зависеть от различных показателей искомого перераспределения загрузки, к которым относятся, например, степень использований коммуникационных связей системы. Тогда рассматриваемая задача будет заключаться в определении такого перераспределения задач, для которого выполняются ограничения (2.20)-(2.21), и принимают экстремальные значения критерии $f_{ij}(x_{ij}),\ (i,j)\in A,$ определяющие, условия эффективного использования коммуникационных связей распределенной вычислительной системы.

6. Задача номенклатурного планирования для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции

Содержательная постановка

Рассматриваются производственные системы с непрерывным циклом изготовления основной продукции, в которых их сырья, под воздействием технологических режимов, изготавливаются продукты производства. Основными элементами рассматриваемых производственных систем являются:

- резервуарные парки, в которые поступает сырьё,
- основные технологические установки, в которых сырьё перерабатывается в полуфабрикаты или готовую продукцию,
- резервуарные парки для полуфабрикатов,
- резервуарные парки отгрузки готовой продукции,
- коммуникации (трубопроводы), соединяющие между собой ёмкости резервуарных парков с технологическими установками.

Резервуарные парки состоят из ёмкостей различных вместимостей, причем для каждой емкости заданы как ограничения сверху (максимальный объём продукции, который в эту ёмкость может быть помещен), так и снизу (остатки – обеспечивающие требуемое давление для работы насосов). Технологические установки состоят из технологических «ниток», работающих параллельно. Для каждой технологической нитки известна ее производительность, зависящая от применяемых технологических режимов. Предполагается, что каждая технологическая нитка может выпускать продукцию (или полуфабрикат) в заданных объёмах, причем, любые значения выбранных объёмов продуктов, заключенных между минимально-допустимыми и максимально-возможными, могут быть реализованы за счет использования тех или иных технологических режимов работы технологических ниток. Коммуникации (трубопроводы) характеризуются ограниченными пропускными способностями – минимально-допустимыми и максимально-возможными объёмами продукции, которые в единицу времени могут быть переданы по этим коммуникациям.

Рассматриваемые производственные системы функционируют по следующей схеме. Сырье поступает в резервуарные парки для сырья, откуда по трубопроводам в технологические нитки основных технологических установок. В технологических установках, под воздействием технологических режимов, из поступающего сырья производятся продукты производства или (и) полуфабрикаты. Полуфабрикат поступает в ёмкости резервуарного парка для полуфабрикатов, откуда по трубопроводам на установки переработки полуфабриката в продукты производства. Продукты производства по трубопроводам поступают в ёмкости резервуарного парка отгрузки готовой продукции, откуда готовая продукция отправляется потребителям.

Специфика рассматриваемых производственных систем заключается в том, что:

- не существует ни одной коммуникации, соединяющей два различных элемента системы, по которой в планируемом периоде протекают различные продукты,
- любые значения выбранных объёмов продукции, заключенных между минимально-допустимыми и максимально-возможными, могут быть реализованы за счет использования тех или иных технологических режимов работы технологических ниток основных установок.

Эти условия позволяет моделировать рассматриваемые производственные системы в виде систем распределения однородного ограниченного ресурса в многоуровневых иерархических структурах с интервальными ограничениями на объёмы распределяемого ресурса.

Рассматривается многоуровневая иерархическая система, в которой распределяется однородный ресурс. Элементы системы делятся на источники ресурса - ёмкости резервуарных парков для сырья, передающие элементы - ёмкости резервуарных парков для полуфабрикатов, технологические нитки основных установок и коммуникации, связывающие резервуарные парки с основными технологическими установками, потребители ресурса - ёмкости резервуарных парков отгрузки готовой продукции. Каждый элемент системы характеризуется минимальным и максимальным объёмом ресурса, который он распределяет (источники ресурса), передает (промежуточные передающие элементы) или потребляет (потребители ресурса). Выделяется некоторый период планирования (месяц, день, смена), для которого должна решаться задача. Минимальные и максимальные объёмы, соответствующие элементам системы, должны быть приведены к рассматриваемому периоду, т.е. предполагаются известны эти границы на месяц, день, смену - на тот период, на который решается задача. Любое значение между минимальным и максимальным объёмами для каждого элемента системы должно быть реализуемо, за счет использования тех или иных режимов работы установок основного производства.

Требуется найти такое решение задачи распределения ресурсов, при котором рассматриваемая производственная система будет функционировать эффективно.

Исходные параметры

Будем моделировать систему распределения ресурсов ориентированным графом без петель $G(V,E)$, $E\subseteq V^2$. Каждому элементу системы поставим в соответствие вершину графа. На множестве V, $|V|=N$, вершин графа зададим разбиение $V=V_s\cup V_t\cup V_u$, где

V_s – множество вершин, соответствующих источникам ресурса - ёмкостям резервуарных парков для сырья,

V_u – множество вершин, соответствующих потребителям ресурса - ёмкостям резервуарных парков отгрузки готовой продукции,

V_t – множество вершин, соответствующих элементам, передающим ресурс - ёмкостям резервуарных парков для полуфабрикатов, технологическим ниткам основных установок и коммуникациям, связывающим резервуарные парки с основными технологическими установками.

Каждой дуге поставим в соответствие величины l_{ij} и c_{ij}, соответственно, нижняя и верхняя границы сегмента допустимых значений y_{ij} (ограниченные пропускные способности системы трубопроводов, соединяющих соответствующие элементы производственной системы), $(i,j)\in E$.

Обозначим через:

$Q(i)=\{j\,|\,(i,j)\in E,\, j\in V\}$ - множество вершин графа, непосредственно следующих после вершины i, $i\in V$; $R(j)=\{i\,|\,(i,j)\in E, i\in V\}$ - множество вершин, непосредственно предшествующих вершине j, $j\in V$. Будем предполагать, что $Q(i)=\varnothing$, если $i\in V_u$, $R(j)=\varnothing$, если $j\in V_s$.

Варьируемые параметры

Пусть x_i - количество ресурса, соответствующее i-му элементу системы (количество "распределяемого" ресурса для источника, "передаваемого" ресурса для передающих элемента и "потребляемого" ресурса для потребителя ресурса) $i\in V$; y_{ij} - количество ресурса, передаваемое по дуге (i,j) (количество продукта, передаваемого по системе трубопроводов, соединяющих соответствующие элементы производственной системы) $(i,j)\in E$.

Ограничения математической модели

$0\le A_i\le x_i\le B_i<\infty,\ i\in V.$ (1)

(Исходя из природы распределяемого ресурса (минимальные и максимальные объёмы ресурса), величины x_i могут быть ограничены как сверху, так и снизу).

$0\le l_{ij}\le y_{ij}\le c_{ij}<\infty,\ (i,j)\in E.$ (2)

(Ограничения на величины ресурса, передаваемого по дугам)

$$\sum_{j\in R(i)} y_{ji}=x_i,\ i\in V\setminus V_s. \quad (3)$$

(Для вершин - потребителей ресурса и передающих элементов, количество ресурса им соответствующее, должно равняться суммарному объёму ресурса, который поступит в эти вершины).

$$x_i=\sum_{j\in Q(i)} y_{ij},\ i\in V\setminus V_u. \quad (4)$$

(Для элементов – источников ресурса и передающих элементов, количество ресурса им соответствующее, должно равняться суммарному объёму ресурса, который будет отправлен из этих элементов системы)

Критерии оптимальности

Среди элементов системы выделим "контролируемые", т.е. те элементы, которые определяют условия эффективного функционирования рассматриваемой системы. Множество «контролируемых» элементов обозначим через K, $K\subseteq V$, $|K|=k$.

Каждый из контролируемых элементов системы i, $i\in K$, определяет на заданном сегменте $[A_i,B_i]$ бинарное отношение “π”, отражающее его предпочтения относительно объёма ресурса, который он будет распределять, передавать или получать. В общем виде эти бинарные отношения могут быть заданы с помощью функций предпочтения $\chi_i(x_i)$ таких, что для двух величин $x_i^1, x_i^2 \in [A_i, B_i]$, $x_i^1 \pi x_i^2$, если $\chi_i(x_i^1) < \chi_i(x_i^2)$, $i \in K$.

Тогда задача распределения ресурсов будет заключаться в отыскании такого допустимого решения системы (1)-(4), при котором функции предпочтений принимают экстремальные значения:

$\chi_i(x_i) \to opt, \quad i \in K.$

7. Задача планирования производства при неритмичном поступлении сырья

Содержательная постановка

Для производства продукции используется сырье, объёмы поставки которого по тактам планирования известны заранее. Каждый такт планирования количество переработанного сырья, или количество выпускаемой продукции, должны быть близки. Для обеспечения производства сырьем используется склад хранения сырья, ограниченной вместимости. Каждый такт планирования на склад поступает сырьё в определенном заранее объёме и со склада забирается сырьё, для изготовления продукции. Предполагается, что план переработки сырья на весь период планирования задан. Требуется определить такие объёмы сырья, которые должны каждый такт поступать для производства продукции, которые обеспечат ритмичность производства продукции.

Исходные параметры

Пусть $T=\{1,2,\ldots,n\}$ – множество тактов планирования, A - минимально допустимое количество сырья, которое может находиться на складе, B - максимально возможное количество сырья, которое может вместить склад сырья, V_0 – количество сырья, которое находится на складе до начала планирования, V_t – количество сырья, которое поступит на склад в такт планирования t, $t \in T$, Q_0 – количество сырья, которое должно быть переработано за весь планируемый период. Обозначим через Q_t – количество сырья, поступление которого в такт t обеспечит эффективное функционирование производства, $t \in T$.

Варьируемые параметры

Пусть x_t – объём сырья, которое будет в такт t отправлено со склада для производства продукции, $t \in T$.

Ограничения математической модели

$$A \le V_0 + \sum_{i=1}^{t} V_i - \sum_{i=1}^{t} x_i \le B, \quad t = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

(Количество сырья, которое может находиться на складе, каждый такт планирования ограничено характеристиками склада по вместимости)

$$\sum_{t \in T} x_t = Q_0. \qquad (2)$$

(Условия выполнение плана по переработке сырья)

$$x_t \geq 0, \quad t \in T. \qquad (3)$$

(Естественные условия на переменные)

Критерии оптимальности

Рассматриваемая задача будет заключаться в определении количества сырья, поступающего по тактам планирования из склада для производства продукции, которое удовлетворяет условиям (1)-(3) и для которого принимают экстремальные значения критерии $f_t(\chi_t, Q_t)$, $t \in T$. В частности, если $Q_t = \frac{Q_0}{n}, t \in T,$ то критерии оптимальности могут определять условия ритмичности производства при неритмичном поступлении сырья.

Литература

1. Прилуцкий М.Х., Власов С.Е. «Многокритериальные задачи объёмного планирования. Лексикографические схемы». //Информационные технологии. 2005. №7, с.61-66

2. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах//Автоматика и телемеханика, 2006,№6, с.194-205

3. Прилуцкий М.Х. Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования.// Известия академии наук. Теория и системы управления, 2007, №1, с. 78-82

4. Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е. Потоковые модели для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции. //Информационные технологии. 2007. №10, с.47-52

5. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многопродуктовые потоки в древовидных сетях// Известия академии наук. Теория и системы управления, 2008, №.2, с.57-63

6. Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е. Оптимизационные задачи добычи газа и переработки газового конденсата//Автоматизация в промышленности. №6 , 2008, с.20-23

7. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи оптимального планирования производства //Автоматика и телемеханика, 2010,№10, с.148-155

8. Prilutskii M. Kh.,.Kostyukov V.E. Optimization Models of Gas and Gas Condensate Processing // Automation and Remote Control, 2012, vol.72, No.8, pp 345-349