МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Л.Г. Киселева, Т.Г. Смирнова

ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
010302 «Прикладная математика и информатика»,
020302 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
090303 «Прикладная информатика (в информационной сфере)»,
090304 «Программная инженерия»

Нижний Новгород
2017

УДК 519.95
ББК 22.174
К − 44

К−44 Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ: учебно-методическое пособие. – [электронный ресурс] – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 58 с.

Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ

Рецензент: канд. тех. наук, доцент **Е.А.Кумагина**

В пособии изучаются основные понятия и различные представления функций алгебры логики. Особое внимание уделяется проблеме полноты систем булевых функций. Изложение каждой темы сопровождается необходимым теоретическим материалом и примерами решения типовых задач, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров первого курса института информационных технологий, математики и механики направлений подготовки «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная информатика (в информационной сфере)», «Программная инженерия», изучающих курсы «Дискретная математика», «Математические основы информатики».

УДК 519.95
ББК 22.174

Глава 1. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1.1. Основные понятия и определения

Пусть $E=\{0,1\}$. Набор $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, где $\alpha_i \in E$, называется ***булевым*** или ***двоичным набором*** и обозначается через $\tilde{\alpha}^n$. Число n называется ***длиной набора*** $\tilde{\alpha}^n$, а число единиц в наборе $\tilde{\alpha}^n$ – ***весом набора*** $\tilde{\alpha}^n$. Каждому двоичному набору $\tilde{\alpha}^n$ можно сопоставить число $\nu(\tilde{\alpha}^n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot 2^{n-i}$ – ***номер набора*** $\tilde{\alpha}^n$. Набор $\tilde{\alpha}^n$ является двоичным разложением своего номера $\nu(\tilde{\alpha}^n)$.

E^n – множество всех двоичных наборов длины n.

Функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$, определенная на множестве E^n и принимающая значения из множества E, называется ***функцией алгебры логики*** или ***булевой функцией*** от n переменных, т.е. $f: E^n \to E$. Набор символов переменных $(x_1,x_2,...,x_n)$ будем обозначать через $\tilde{x}^n$.

Булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ при $n \ge 1$ можно задать таблицей (табл. 1.1), в которой наборы $\tilde{\alpha}^n=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ располагаются в порядке возрастания их номеров.

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)$
0	0	…	0	0	$f(0,0,...,0,0)$
0	0	…	0	1	$f(0,0,...,0,1)$
0	0	…	1	0	$f(0,0,...,1,0)$
…	…	…	…	…	…
1	1	…	1	1	$f(1,1,...,1,1)$

Табл. 1.1. Табличное задание булевой функции

Имея в виду такое ***стандартное расположение наборов***, булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ удобно задавать вектором ее значений: $f(\tilde{x}^n)=(f_0, f_1,..., f_{2^n-1})$, где координата f_i равна значению функции $f(\tilde{x}^n)$ на наборе, имеющем номер i $(i=0,1,...,2^n-1)$.

Пусть $P_2(n)$ – множество всех булевых функций от n переменных, т.е. $P_2(n)=\left\{ f\left(\tilde{x}^n\right) \middle| \; f: E^n \to E \right\}$.

Теорема 1.1.1. *Мощность* $|P_2(n)|$ *множества всех булевых функций от* n *переменных равна* 2^{2^n}.

Доказательство. Так как функцию алгебры логики от n переменных можно задать упорядоченным двоичным набором длины 2^n, то число различных функций алгебры логики от n переменных равно числу всех двоичных наборов длины 2^n, т.е. 2^{2^n}. Теорема доказана.

С ростом числа переменных таблица, задающая булеву функцию, сильно усложняется, становится громоздкой. Число функций от n переменных быстро растет: $|P_2(1)| = 4$, $|P_2(2)| = 16$, $|P_2(3)| = 256$, $|P_2(4)| = 65536$.

Рассмотрим теперь элементарные функции алгебры логики.

Имеются четыре булевы функции от одной переменной (см. табл. 1.2). Эти функции носят соответственно следующие названия:

0 – константа ***нуль***.

x – ***тождественная функция***.

$\bar{x}$ – ***отрицание*** x, читается как «не x».

1 – константа ***единица.***

x	0	x	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Табл.1.2. Функции одной переменной

x	y	$x \& y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Табл. 1.3. Элементарные функции от двух переменных

Приведенные в табл. 1.3 булевы функции от двух переменных носят следующие названия:

$x \& y$ – ***конъюнкция*** x и y, обозначается также $x \cdot y$ или xy, читается «x и y».

$x \vee y$ – ***дизъюнкция*** x и y, читается «x или y».

$x \oplus y$ – ***сложение по модулю 2*** x и y, читается «x плюс y».

$x \to y$ – ***импликация*** x и y, читается «из x следует y».

$x \leftrightarrow y$ – ***эквивалентность*** x и y, часто обозначается как $x \sim y$, читается «x эквивалентно y».

$x \mid y$ — ***штрих Шеффера*** x и y, часто эта функция называется ***антиконъюнкцией,*** читается «не x или не y».

$x \downarrow y$ — ***стрелка Пирса*** x и y, часто эта функция называется ***антидизъюнкцией***, читается «не x и не y».

Символы $\bar{\ }$, $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\mid$, $\downarrow$, участвующие в обозначениях элементарных функций, называются ***логическими связками***.

Суперпозицией булевых функций $f_1,..., f_m$ называется функция f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименования переменных.

Формулой в алгебре логики называется всякое (и только такое) выражение вида:

1) x – любая переменная из множества переменных X;

2) $(\overline{F})$, $(F_1 \circ F_2)$, где F, F_1, F_2 – произвольные формулы алгебры логики, а $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, \mid, \downarrow\}$ – логическая связка.

Обычно внешние скобки у формул не записываются. Обратим внимание, что связка отрицания сильнее, чем любая двухместная связка, а связка & – самая сильная из связок $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\mid$, $\downarrow$. Эти соглашения позволяют упрощать запись формул и не писать ряд скобок. Например, формула $(((x \vee y) \,\&\, z) \rightarrow ((x \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z)))$ записывается как $(x \vee y)z \rightarrow (xz \vee yz)$.

Всякая формула, выражающая функцию f как суперпозицию других функций, каждому набору значений аргументов ставит в соответствие значение функции. Таким образом, формула является одним из способов задания и вычисления функции.

В отличие от табличного задания представление данной функции формулой не единственно.

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***.

Рассмотрим далее некоторые эквивалентности, характеризующие свойства элементарных булевых функций.

Основные эквивалентности алгебры логики

1. Функция $x \circ y$, где $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \leftrightarrow, |, \downarrow\}$, обладает ***свойством коммутативности***: $x \circ y = y \circ x$.
2. Функция $x * y$, где $* \in \{\&, \vee, \oplus, \leftrightarrow\}$, обладает ***свойством ассоциативности***: $(x * y) * z = x * (y * z)$.
3. ***Дистрибутивные законы***:

$$(x \vee y) \,\&\, z = (x \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z);$$

$$(x \,\&\, y) \vee z = (x \vee z) \,\&\, (y \vee z);$$

$$(x \oplus y) \,\&\, z = (x \,\&\, z) \oplus (y \,\&\, z).$$

4. ***Законы де Моргана***:

   а) $\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; *б)* $\overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$.

5. ***Законы поглощения***:

   а) $x \vee (x \,\&\, y) = x$; *б)* $x \,\&\, (x \vee y) = x$.

6. *а)* $x \vee (\bar{x} \,\&\, y) = x \vee y$; *б)* $x \,\&\, (\bar{x} \vee y) = x \,\&\, y$.

7. *а)* $x \,\&\, \bar{x} = x \,\&\, 0 = x \oplus x = 0$; *б)* $x \vee \bar{x} = x \vee 1 = x \leftrightarrow x = 1$.

8. *а)* $x \,\&\, x = x \vee x = x \,\&\, 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$;

   б) $x \oplus 1 = x \to 0 = x \leftrightarrow 0 = x \,|\, x = x \downarrow x = \bar{x}$;

9. *а)* $x \oplus y = (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y) = (x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y})$;

   б) $x \to y = \bar{x} \vee y$;

   в) $x \leftrightarrow y = \overline{x \oplus y} = (x \,\&\, y) \vee (\bar{x} \,\&\, \bar{y}) = (x \vee \bar{y}) \,\&\, (\bar{x} \vee y)$;

   г) $x \,|\, y = \overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$;

   д) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$.

В справедливости этих эквивалентностей можно убедиться путем построения таблиц соответствующих им функций.

Пример 1.1.1. По функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$, заданным векторно $\tilde{\alpha}_f = (1001)$, $\tilde{\alpha}_g = (1110)$, построить векторное задание функции $h(\tilde{x}^3) = f(x_1, g(x_2, x_3)) \to g(x_2, f(x_1, x_3))$.

Решение. Для каждой из функций $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$ перейдём от векторного задания к табличному (см. табл. 1.4).

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	$g(x_1,x_2)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Табл. 1.4. Табличное задание функций

В таблице 1.5 функция $h(\tilde{x}^3)$, реализуемая заданной формулой, построена «постепенно».

Здесь используются следующие обозначения: $g_1 = g(x_2,x_3)$, $f_1 = f(x_1,g_1)$, $f_2 = f(x_1,x_3)$, $g_2 = g(x_2,f_2)$.

x_1	x_2	x_3	g_1	f_1	f_2	g_2	$h(\tilde{x}^3)$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1

Табл. 1.5. Процесс построения искомой функции

Принимая во внимание тот факт, что функция $x \to y$ равна нулю только на наборе (1,0), а функция $g(x_1,x_2)$ равна нулю лишь на наборе (1,1), процедуру построения таблицы функции $h(\tilde{x}^3)$ можно упростить. В самом деле, функция $h(\tilde{x}^3)=0$ тогда и только тогда, когда $f(x_1,g(x_2,x_3))=1$ и $g(x_2,f(x_1,x_3))=0$. В свою очередь, $g(x_2,f(x_1,x_3))=0$ тогда и только тогда, когда $x_2 = f(x_1,x_3)=1$. В силу того, что $f(x_1,x_3)=1$ при $x_1 = x_3$, заключаем, что $g(x_2,f(x_1,x_3))=0$ либо при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, либо при $x_2 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$. Теперь $f(x_1,g(x_2,x_3))=1$ тогда и только тогда, когда $x_1 = g(x_2,x_3)$. Замечаем, что если $x_1 = 0$, то $g(x_2,0)=1$ при любом значении x_2. Если $x_1 = 1$, тогда

$g(x_2,1)=1$ при единственном значении переменной $x_2=0$. Получаем, что $\tilde{\alpha}_h=(11111111)$.

Соседними наборами по k-ой компоненте называются наборы $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_{k-1},0,\alpha_{k+1},...,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\alpha_1,...,\alpha_{k-1},1,\alpha_{k+1},...,\alpha_n)$, различающиеся только в k-ой компоненте.

Переменная x_k для функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется ***существенной***, если найдется пара наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соседних по k-ой компоненте, таких, что $f(\tilde{\alpha})\neq f(\tilde{\beta})$. В противном случае переменная x_k называется ***несущественной*** или ***фиктивной***.

Пусть для функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ переменная x_k является фиктивной. Возьмем таблицу, задающую функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Вычеркнем из нее все строки вида $\alpha_1,...,\alpha_{k-1},1,\alpha_{k+1},...,\alpha_n,\ f(\alpha_1,...,\alpha_{k-1},1,\alpha_{k+1},...,\alpha_n)$, а также столбец, соответствующий переменной x_k. Полученная таблица будет определять некоторую булеву функцию $g(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)$ от $n-1$ переменной. Будем говорить, что функция $g(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)$ получена из функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ***путем удаления фиктивной переменной*** x_k, а также что функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ получается из $g(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)$ ***путем введения фиктивной переменной*** x_k.

Две функции $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{x}^m)$ называются ***равными***, если функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно получить из функции $g(\tilde{x}^m)$ путем введения и удаления фиктивных переменных. Заметим, что для любой функции, отличной от константы 0 или 1, существует равная ей, у которой все переменные существенные.

Пример 1.1.2. Перечислить все существенные и фиктивные переменные у функции $f(\tilde{x}^3)=(11110011)$.

Решение. Рассмотрим таблицу значений функции $f(\tilde{x}^3)$ (табл.1.6).

Сравнивая значения функции на всех парах наборов, соседних по переменной x_3, отметим, что $f(0,0,0)=f(0,0,1)=1$, $f(0,1,0)=f(0,1,1)=1$, $f(1,0,0)=f(1,0,1)=0$ и $f(1,1,0)=f(1,1,1)=1$. Получаем, что $f(x_1,x_2,0)\equiv f(x_1,x_2,1)$. Следовательно, переменная x_3 фиктивная.

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Табл. 1.6. Функция $f(\tilde{x}^3)$

Строим функцию $g(\tilde{x}^2)$ посредством операции удаления из функции $f(\tilde{x}^3)$ фиктивной переменной x_3: вычеркнем из табл. 1.6 все строки, соответствующие наборам вида $(\alpha_1,\alpha_2,1)$ и столбец, соответствующий переменной x_3.

В таблице 1.7 представлена полученная функция $g(x_1,x_2)$.

Далее, так как $g(1,0)=0$, а $g(1,1)=1$, заключаем, что переменная x_2 существенная. Аналогично, так как $g(0,0)=1$, а $g(1,0)=0$, то переменная x_1 существенная. Итак, у функции $f(\tilde{x}^3)$ переменные x_1 и x_2 существенные, а переменная x_3 фиктивная. (Нетрудно убедиться в том, что $f(\tilde{x}^3)=x_1\to x_2$.)

x_1	x_2	$g(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Табл. 1.7. Функция $g(\tilde{x}^2)$

Задачи

1.1.1. По функциям $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$, заданным векторно, построить функцию h:

1) $\tilde{\alpha}_f=(1011)$, $\tilde{\alpha}_g=(0111)$,

а) $h(\tilde{x}^2)=f(x_1,g(x_1,x_2))$;

б) $h(\tilde{x}^2)=g(x_2,f(x_2,x_1))$;

в) $h(\tilde{x}^2)=f(f(x_1,g(x_1,x_2)),g(x_1,x_2))$;

г) $h(\tilde{x}^3)=g(x_1,x_2)\oplus f(x_3,g(x_1,x_2))$;

д) $h(\tilde{x}^3) = f(x_2, g(x_3, x_1)) \leftrightarrow g(x_1, g(x_2, x_3))$.

2) $\tilde{\alpha}_f = (1010)$, $\tilde{\alpha}_g = (0110)$,

а) $h(\tilde{x}^3) = f(x_3, g(x_1, x_2))$;

б) $h(\tilde{x}^3) = g(g(x_3, x_2), f(x_1, x_3))$;

в) $h(\tilde{x}^3) = f(f(x_3, g(x_1, x_2)), g(x_1, x_2))$;

г) $h(\tilde{x}^3) = f(f(x_1, x_2), g(x_3, x_1)) \to g(x_1, g(x_1, x_2))$.

1.1.2. Доказать тождества:

1) $x \vee y = (x \to y) \to y$;

2) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \,\&\, (y \to x)$;

3) $x \downarrow y = ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))$;

4) $x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$;

5) $x \,\&\, (y \leftrightarrow z) = ((x \,\&\, y) \leftrightarrow (x \,\&\, z)) \leftrightarrow x$;

6) $x \to (y \leftrightarrow z) = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$;

7) $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$;

8) $x \,\&\, (y \to z) = (x \to y) \to (x \,\&\, z)$;

9) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

10) $x \to (y \,\&\, z) = (x \to y) \,\&\, (x \to z)$;

11) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

1.1.3. Построив таблицы соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы A и B:

1) $A = \overline{x \oplus y \cdot z} \cdot \overline{\bar{y} \to x \cdot z} \cdot (\bar{x} \downarrow y)$, $B = \overline{(x \cdot y \to (y \downarrow z)) \vee x \cdot z} \cdot z$;

2) $A = (x \oplus y \cdot z) \to (\bar{x} \to (y \to z))$, $B = x \to ((y \to z) \to x)$;

3) $A = (x \cdot y \to z) \vee ((x \downarrow y) \mid z)$, $B = ((x \to y \cdot z) \oplus (x \leftrightarrow y)) \vee (y \to x \cdot z)$;

4) $A = (\bar{x} \to (\bar{y} \to (x \leftrightarrow z))) \cdot (x \leftrightarrow (y \to (z \vee (x \to y))))$, $B = (x \to (y \to z)) \to x$;

5) $A = (((x \mid y) \downarrow \bar{z}) \mid y) \downarrow (\bar{y} \to z)$, $B = ((x \mid y) \downarrow (y \mid \bar{z})) \cdot (x \to (y \to z))$;

6) $A = (\bar{x} \vee \bar{y} \cdot z) \to ((x \to y) \to ((y \vee z) \to \bar{x}))$, $B = (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

7) $A = (x \mid \bar{y}) \to ((y \downarrow \bar{z}) \to (x \oplus z))$, $B = x \cdot y \cdot z \oplus (\bar{x} \to z)$;

8) $A=\left(x\cdot\overline{y}\vee\overline{x}\cdot z\right)\oplus\left(\left(y\to z\right)\to\overline{x}\cdot y\right),\ B=\left(x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\oplus y\right)\oplus z$;

9) $A=\left(\overline{x}\vee y\right)\to\left(\left(y\mid\overline{z}\right)\to\left(x\leftrightarrow x\cdot z\right)\right),\ B=x\cdot y\vee\left(\overline{x\to x\cdot\overline{y}}\to z\right)$;

10) $A=x\to\left(\left(\overline{x}\cdot\overline{y}\to\left(\overline{x}\cdot\overline{z}\to y\right)\right)\to y\right)\cdot z,\ B=\overline{x\cdot\left(y\to\overline{z}\right)}$;

11) $A=\left(\left(x\vee y\right)\cdot\overline{z}\to\left(\left(x\leftrightarrow\overline{z}\right)\oplus\overline{y}\right)\right)\cdot\left(\left(x\oplus y\right)\cdot\overline{z}\right),\ B=\left(x\to y\cdot z\right)\cdot\overline{x\to y}$;

12) $A=\overline{\left(\left(x\leftrightarrow y\right)\to\left(x\to\overline{z}\right)\right)}\vee\left(x\oplus\overline{y}\cdot z\right),\ B=x\leftrightarrow\left(z\to y\right)$;

13) $A=\overline{\left(x\downarrow y\right)\vee\left(x\leftrightarrow z\right)}\mid\left(x\oplus y\cdot z\right),\ B=\overline{x}\cdot y\cdot z\vee\overline{x\to z}$;

14) $A=\overline{\left(x\vee\overline{y}\cdot\overline{z}\right)\cdot\left(\overline{x}\to\overline{y}\cdot z\right)}\cdot\left(x\to\left(y\leftrightarrow z\right)\right)$,

$B=\left(\left(x\to y\right)\leftrightarrow\left(y\to\left(x\to z\right)\right)\right)\oplus x\cdot\left(y\cdot z\right)$;

15) $A=x\to\left(\left(y\to z\right)\to y\cdot z\right),\ B=\left(x\vee\left(x\cdot y\to z\right)\right)\cdot\left(x\oplus y\cdot z\right)$;

16) $A=\overline{\left(\left(x\vee y\right)\to y\cdot z\right)\vee\left(y\to x\cdot z\right)}\vee\left(x\to\left(\overline{y}\to z\right)\right),\ B=\left(x\to y\right)\vee z$.

1.1.4. Используя основные эквивалентности булевой алгебры, упростить формулы A и B из задачи 1.1.3.

1.1.5. Перечислить все существенные и фиктивные переменные у следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^3)=(10101010)$;

2) $f(\tilde{x}^3)=(10011001)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(00111100)$;

4) $f(\tilde{x}^4)=(0101111101\ 011111)$;

5) $f(\tilde{x}^4)=(1100110000\ 110011)$;

6) $f(\tilde{x}^4)=(1011010110\ 110101)$;

7) $f(\tilde{x}^2)=\left(\left(x_1\vee x_2\right)\to x_1\cdot x_2\right)\oplus\left(x_1\to x_2\right)\cdot\left(x_2\to x_1\right)$;

8) $f(\tilde{x}^2)=\left(x_1\cdot x_2\oplus\left(x_1\to x_2\right)\right)\to\left(x_1\leftrightarrow x_1\cdot x_2\right)$;

9) $f(\tilde{x}^3)=\left(\left(x_1\to\overline{x_2}\right)\oplus\left(x_2\to\overline{x_3}\right)\right)\oplus\left(x_2\to x_3\right)$;

10) $f(\tilde{x}^3)=\left(\left(x_1\vee x_2\cdot\overline{x_3}\right)\to\left(x_2\to x_1\cdot x_3\right)\right)\to\left(x_1\vee x_3\right)$;

11) $f(\tilde{x}^3)=\left(\left(x_1\downarrow\left(x_2\mid x_3\right)\right)\downarrow\left(x_2\downarrow\left(x_1\mid x_3\right)\right)\right)\downarrow\left(x_1\mid x_2\right)$.

1.1.6. Показать, что x_1 – фиктивная переменная у функции *f*, реализовав для этой цели функцию *f* формулой, не содержащей явно переменную x_1:

1) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2)$;
2) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 \mid x_2)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \cdot \overline{(x_3 \to x_2)}$;
4) $f(\tilde{x}^3) = \left(\left(x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}\right) \leftrightarrow \left(\overline{x_1} \to \overline{x_2} \cdot x_3\right)\right) \cdot \left(x_2 \downarrow x_3\right)$;
5) $f(\tilde{x}^3) = \left(\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right) \to \left(x_1 x_2 \mid x_3\right)\right) \oplus \left(x_2 \to x_1\right) \cdot x_3$.

1.1.7. Найти число всех функций от *n* переменных, которые на противоположных наборах принимают одинаковые значения. При *n* = 2,3 найти все такие функции, существенно зависящие от всех переменных.

1.1.8. Найти число всех функций от *n* переменных, которые на противоположных наборах принимают противоположные значения. При *n* = 2,3 найти все такие функции, существенно зависящие от всех переменных.

1.1.9. Найти число всех функций от *n* переменных, которые на любой паре соседних наборов принимают противоположные значения. Найти вид этих функций.

1.1.10. Доказать, что если у функции $f\left(\tilde{x}^n\right)$ $(n \geq 1)$ имеются фиктивные переменные, то она принимает значение 1 на четном числе наборов. Верно ли обратное утверждение?

1.1.11. Выяснить при каких $n\ (n \geq 2)$ функция $f\left(\tilde{x}^n\right)$ зависит существенно от всех своих переменных:

1) $f\left(\tilde{x}^n\right) = (x_1 \vee \ldots \vee x_n) \to ((x_1 \vee x_2) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} \vee x_n) \cdot (x_n \vee x_1))$;
2) $f\left(\tilde{x}^n\right) = (x_1 x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1} x_n \vee x_n x_1) \to (x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_n x_1)$;
3) $f\left(\tilde{x}^n\right) = ((x_1 \vee \ldots \vee x_n) \to x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \to (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1)$;
4) $f\left(\tilde{x}^n\right) = (x_1 \mid x_2) \oplus (x_2 \mid x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \mid x_n) \oplus (x_n \mid x_1)$;
5) $f\left(\tilde{x}^n\right) = (x_1 \to (x_2 \to \ldots \to (x_{n-1} \to x_n) \ldots)) \to (x_1 \to x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} \to x_n)$.

1.2. Специальные представления булевых функций

Разложения булевой функции по переменным

Пусть $\sigma \in E$. Введём обозначение $x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$

Нетрудно проверить, что $x^{\sigma} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \sigma.$ Тогда $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} = 1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \sigma_1,\ x_2 = \sigma_2, \ldots,\ x_k = \sigma_k$.

Теорема 1.2.1 (***о разложении функции по переменным***). *Каждую булеву функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *при любом* k ($1 \le k \le n$) *можно представить в виде:*

$$f(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n), \qquad (1)$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ *из* E^k.

Доказательство. Возьмем произвольный набор значений переменных $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и покажем, что левая и правая часть соотношения (1) принимают на нем одно и то же значение. Левая часть дает $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Правая −

$$\bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)} \alpha_1^{\sigma_1} \ldots \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n) =$$

$$= \alpha_1^{\alpha_1} \ldots \alpha_k^{\alpha_k} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Теорема доказана.

Представление (1) называется ***разложением функции по переменным*** $x_1,\ldots, x_k$.

Следствие 1.2.2 (***разложение по i-ой переменной***).

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \overline{x_i}\; f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) \vee x_i\; f\big(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n\big). \quad (2)$$

Следствие 1.2.3 (***разложение по всем n переменным***).

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n), \qquad (3)$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ *из* E^n.

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ *не равна тождественно нулю, то выражение* (3) *можно записать в виде:*

$$f(x_1,...,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}, \qquad (4)$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ *из* E^n*, на которых функция* $f(\tilde{x}^n)$ *обращается в единицу.*

Представление функции в виде (4) называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (сокращённо ***совершенной д.н.ф.*** или ***СДНФ***) функции $f(\tilde{x}^n)$.

Из представления функции в виде совершенной д.н.ф. и тождества $0=x\cdot\bar{x}$ получаем следующее утверждение.

Теорема 1.2.4. *Всякую функцию алгебры логики можно представить в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.*

Кроме приведенных выше разложений булевых функций, широко используются также следующие разложения.

Теорема 1.2.5. *Каждую булеву функцию* $f(x_1,...,x_n)$ *при любом* k $(1\le k\le n)$ *можно представить в виде:*

$$f(\tilde{x}^n)=\mathop{\&}_{(\sigma_1,...,\sigma_k)}\left(x_1^{\overline{\sigma_1}}\vee\dots\vee x_k^{\overline{\sigma_k}}\vee f(\sigma_1,...,\sigma_k,x_{k+1},...,x_n)\right),$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,...,\sigma_k)$ *из* E^k.

Следствие 1.2.6 (*разложение по i-ой переменной*).

$$f(\tilde{x}^n)=\left(\overline{x_i}\vee f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)\right)\&\left(x_i\vee f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)\right). \qquad (5)$$

Следствие 1.2.7 (*разложение по всем n переменным*).

$$f(\tilde{x}^n)=\mathop{\&}_{(\sigma_1,...,\sigma_n)}\left(x_1^{\overline{\sigma_1}}\vee\dots\vee x_n^{\overline{\sigma_n}}\vee f(\sigma_1,...,\sigma_n)\right), \qquad (6)$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ *из* E^n.

Если $f(\tilde{x}^n)$ *не равна тождественно 1, тогда выражение* (6) *можно записать в виде:*

$$f(\tilde{x}^n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=0}} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}} \right), \tag{7}$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ *из* E^n, *на которых функция* $f(\tilde{x}^n)$ *обращается в нуль.*

Представление функции в виде (7) называется ***совершенной конъюнктивной нормальной формой*** (сокращённо ***совершенной к.н.ф.*** или ***СКНФ***) функции $f(\tilde{x}^n)$.

Пример 1.2.1. Разложить по переменной x_1, применяя формулы (2) и (5), и представить в совершенных д.н.ф. и к.н.ф. функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$.

Решение. $f(0, x_2) = 0 \to x_2 = 1$, $f(1, x_2) = 1 \to x_2 = x_2$. Поэтому согласно (2) имеем $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot 1 \vee x_1 \cdot x_2$, а используя разложение (5), получаем $f(x_1, x_2) = (\overline{x_1} \vee x_2) \& (x_1 \vee 1)$.

Так как $f(1,0) = 0$ и $f(0,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$, совершенная д.н.ф. функции имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\, x_2 \vee x_1 x_2$, а совершенная к.н.ф.: $f(x_1, x_2) = x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 = \overline{x_1} \vee x_2$.

Пример 1.2.2. Представить в совершенной д.н.ф. и совершенной к.н.ф. функцию $f(\tilde{x}^3) = (01101011)$.

Решение. Функция принимает значение 1 на наборах $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$. Элементарные конъюнкции, соответствующие этим наборам, таковы: $x_1^0 x_2^0 x_3^1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$, $x_1^0 x_2^1 x_3^0 = \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}$, $x_1^1 x_2^0 x_3^0 = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$, $x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2 \overline{x_3}$ и $x_1^1 x_2^1 x_3^1 = x_1 x_2 x_3$. Значит, совершенная д.н.ф. функции $f(\tilde{x}^3)$ имеет вид: $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$. Для построения совершенной к.н.ф. рассматриваем все те наборы, на которых функция f обращается в нуль. Это наборы $(0,0,0)$, $(0,1,1)$ и $(1,0,1)$. Элементарные дизъюнкции, соответствующие этим наборам, таковы:

$$x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3,$$

$$x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{1}} = x_1^{1} \vee x_2^{0} \vee x_3^{0} = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3},$$
$$x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{1}} = x_1^{0} \vee x_2^{1} \vee x_3^{0} = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}.$$

Перемножая эти дизъюнкции, получаем совершенную к.н.ф. функции: $f\left(\tilde{x}^3\right) = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right) \cdot \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$.

Представление булевой функции полиномом Жегалкина

Теорема 1.2.8. *Каждая булева функция* $f(\tilde{x}^n)$ *представима в виде:*

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} ... x_n^{\sigma_n}, \tag{8}$$

где сумма по модулю 2 берётся по всем наборам $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ *из* E^n, *на которых функция* $f(\tilde{x}^n)$ *обращается в единицу.*

Нетрудно видеть, что $x^0 = \bar{x} = x \oplus 1$, $x^1 = x = x \oplus 0$, тогда $x^\sigma = x \oplus \bar{\sigma}$. Подставив в (8) вместо $x_i^{\sigma_i}$ выражение $x_i \oplus \overline{\sigma_i}$, получим $f(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} \left(x_1 \oplus \overline{\sigma_1}\right) \cdot ... \cdot \left(x_n \oplus \overline{\sigma_n}\right)$.

Раскрыв скобки по закону дистрибутивности и приведя подобные члены по правилу $A \oplus A = 0$, представим функцию в виде полинома по модулю 2:

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{\{i_1,...,i_s\} \subseteq \{1,...,n\}} \alpha_{i_1,...,i_s} x_{i_1} ... x_{i_s}, \tag{9}$$

где коэффициенты $\alpha_{i_1,...,i_s}$ равны 0 или 1. Пустая конъюнкция считается равной 1, так что коэффициент, соответствующий пустому множеству индексов, представляет собой свободный член полинома. Представление функции $f(\tilde{x}^n)$ в виде (9) носит название ***полинома Жегалкина***. Для функции, тождественно равной нулю, в качестве полинома берется 0.

Теорема 1.2.9 *Всякая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина единственным образом.*

Доказательство. Существование полинома вытекает из описанного выше способа его построения. Для доказательства единственности покажем, что между множеством всех функций от n переменных и множеством всех полиномов Жегалкина от n переменных существует биекция (взаимно однозначное соответствие). Число различных слагаемых (т. е. конъюнкций переменных) полиномов от n переменных равно числу всех подмножеств из n элементов, т. е. 2^n (пустому подмножеству соответствует слагаемое 1). Число различных полиномов, которые можно образовать из этих конъюнкций, равно числу всех подмножеств множества конъюнкций, т. е. 2^{2^n} (пустому подмножеству конъюнкций соответствует полином 0). Таким образом, число всех полиномов Жегалкина от n переменных равно числу всех функций от n переменных. Так как разным функциям соответствуют разные полиномы (одна и та же формула не может представлять две разные функции), то тем самым установлена биекция между множеством всех функций и полиномов от n переменных, что и доказывает единственность полинома Жегалкина для каждой булевой функции.

Пример 1.2.3. Построить полином Жегалкина для функции $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01101011)$.

Решение. Совершенная д.н.ф. функции $f\left(\tilde{x}^3\right)$ имеет вид (см. пример 1.2.2):

$f\left(\tilde{x}^3\right)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,x_2 x_3$, тогда получаем

$$f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)x_3\oplus(x_1\oplus 1)x_2(x_3\oplus 1)\oplus x_1(x_2\oplus 1)(x_3\oplus 1)\oplus$$
$$\oplus\, x_1\,x_2(x_3\oplus 1)\oplus x_1\,x_2\,x_3.$$

Для преобразования этого выражения могут быть использованы обычные приемы элементарной алгебры и соотношение $A\oplus A=0$. В частности, применяя группировку конъюнкций и вынесение за скобки одинаковых сомножителей, получаем:

$$f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1\oplus 1)(x_2\,x_3\oplus x_3\oplus x_2\,x_3\oplus x_2)\oplus(x_3\oplus 1)(x_1 x_2\oplus x_1\oplus x_1 x_2)\oplus x_1\,x_2\,x_3=$$
$$=(x_1\oplus 1)(x_2\oplus x_3)\oplus(x_3\oplus 1)x_1\oplus x_1\,x_2\,x_3.$$

Далее, раскрывая скобки и учитывая, что $A\oplus A=0$, получаем полином Жегалкина:

$$f\left(\tilde{x}^3\right)=x_1\,x_2\oplus x_1\,x_3\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_1\,x_3\oplus x_1\oplus x_1\,x_2 x_3=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_1\,x_2\oplus x_1\,x_2\,x_3.$$

Кроме рассмотренного способа построения полинома Жегалкина, существуют и другие методы построения. Рассмотрим некоторые из них.

Метод неопределенных коэффициентов

Пусть $P\left(\tilde{x}^n\right)$ – искомый полином Жегалкина, реализующий заданную функцию $f\left(\tilde{x}^n\right)$. Запишем его в виде

$$P\left(\tilde{x}^n\right)=\alpha_0 \cdot 1 \oplus \alpha_1 \cdot x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n \cdot x_n \oplus \alpha_{1,2} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus \alpha_{n-1,n} x_{n-1} \cdot x_n \oplus \ldots \oplus \alpha_{1,\ldots,n} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n . \qquad (10)$$

Найдем неизвестные коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{n-1,n}, \ldots, \alpha_{1,\ldots,n}$ в этом разложении. Для каждого двоичного набора $\tilde{\alpha} \in E^n$ составляем уравнение $P(\tilde{\alpha})= f(\tilde{\alpha})$, где $P(\tilde{\alpha})$ – выражение, получающееся из формулы (10) при подстановке $\tilde{x} = \tilde{\alpha}$. В итоге получаем систему из 2^n уравнений с 2^n неизвестными, которая имеет единственное решение. Решив систему, находим коэффициенты полинома $P\left(\tilde{x}^n\right)$.

Пример 1.2.4. Методом неопределенных коэффициентов найти полином Жегалкина для функции $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01101011)$.

Решение. Для функции от трех переменных полином Жегалкина с неопределенными коэффициентами имеет вид:

$$P\left(\tilde{x}^3\right)=\alpha_0 \oplus \alpha_1 \cdot x_1 \oplus \alpha_2 \cdot x_2 \oplus \alpha_3 \cdot x_3 \oplus$$

$$\oplus \alpha_{1,2} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus \alpha_{1,3} \cdot x_1 \cdot x_3 \oplus \alpha_{2,3} \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus \alpha_{1,2,3} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 .$$

Выпишем систему уравнений для неизвестных коэффициентов:

$$f(0,0,0) = 0 = \alpha_0 ,$$

$$f(0,0,1) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_3 = \alpha_3 ,$$

$$f(0,1,0) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_2 = \alpha_2 ,$$

$$f(0,1,1) = 0 = \alpha_0 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{2,3} = \alpha_{2,3} ,$$

$$f(1,0,0) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_1 = \alpha_1 ,$$

$$f(1,0,1) = 0 = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{1,3} = \alpha_{1,3} ,$$

$$f(1,1,0) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_{1,2} = \alpha_{1,2} ,$$

$$f(1,1,1) = 1 = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{2,3} \oplus \alpha_{1,2,3} = \alpha_{1,2,3} .$$

Решая эту систему, находим решение: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{1,2} = \alpha_{1,2,3} = 1$, $\alpha_0 = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,3} = 0$.

Следовательно, $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01101011)= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$.

Алгебраический метод построения полинома

Сначала формулу, реализующую функцию *f*, преобразуем в формулу над множеством связок $\{\bar{\ }, \&\}$.

Затем все подформулы вида $\overline{A}$ следует заменить на $A \oplus 1$, раскрыть скобки, пользуясь дистрибутивным законом $A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$, и применить эквивалентности $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$ и $A \oplus 0 = A$.

Пример 1.2.5. Построить полином Жегалкина для функции $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$.

Решение. Выразим функцию f в виде формулы через отрицание и конъюнкцию: $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}}} = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3}$.

Заменяя теперь все подформулы вида $\overline{A}$ на $A \oplus 1$ и раскрывая скобки, получаем полином Жегалкина: $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \cdot x_3 \oplus 1 =$

$$= (x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1) \cdot x_3 \oplus 1 = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1.$$

Задачи

1.2.1. Представить в совершенной д.н.ф. и совершенной к.н.ф. функции:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_2}\, x_3 \vee (x_1 \to x_2 x_3)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}) \vee (x_1 x_3 \oplus (x_2 \to x_3))$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \cdot x_2 \oplus x_3) \cdot (x_1 \cdot x_3 \to x_2)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (x_1 \cdot x_2 \vee x_3)$;
5) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \mid x_2 \cdot x_3)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \cdot x_2 \to x_3) \cdot (x_1 \to x_3 \to x_2)$.

1.2.2. Построить из заданной д.н.ф. функции ее совершенную д.н.ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot x_2 \vee \overline{x_3}$;
2) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_3}$;
3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$.

1.2.3. Построить из заданной к.н.ф. функции ее совершенную к.н.ф.:

1) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\overline{x_1}\cdot\left(\overline{x_2}\vee x_3\right)$;

2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\vee x_2\right)\cdot\left(\overline{x_2}\vee x_3\right)\cdot\overline{x_3}$;

3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x_1}\vee x_2\right)\cdot\left(x_1\vee\overline{x_3}\right)\cdot\left(x_2\vee x_3\right)$.

1.2.4. Подсчитать число функций $f\left(\tilde{x}^n\right)$, у которых совершенная д.н.ф. удовлетворяет следующему условию:

1) отсутствуют элементарные конъюнкции, у которых число букв с отрицаниями равно числу букв без отрицаний;

2) каждая элементарная конъюнкция содержит хотя бы две буквы с отрицаниями;

3) отсутствуют элементарные конъюнкции, содержащие нечетное число букв с отрицаниями;

4) в каждой элементарной конъюнкции число букв с отрицаниями не больше числа букв без отрицаний.

1.2.5. Выразить через полином Жегалкина все элементарные функции алгебры логики от двух переменных.

1.2.6. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций:

1) $f\left(\tilde{x}^2\right)=(0100)$;

2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01101001)$;

3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(10001110)$;

4) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(00000111)$;

5) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01100110)$.

1.2.7. Построить полином Жегалкина функции $f\left(\tilde{x}^n\right)$:

1) $f\left(\tilde{x}^2\right)=x_1\to\left(x_2\to\overline{x_1}\cdot x_2\right)$;

2) $f\left(\tilde{x}^2\right)=x_1\cdot\left(x_2\leftrightarrow x_1\cdot\overline{x_2}\right)$;

3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\downarrow x_2\right)\mid\left(x_2\downarrow x_3\right)$;

4) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1 \vee x_2)\cdot\left(x_1 \mid (x_3 \to x_2)\right)$;

5) $f\left(\tilde{x}^3\right)=x_1 \downarrow \left((x_1 \to x_2)\vee \overline{x_3}\right)$;

6) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1 \to (x_2 \to x_3))\cdot((x_1 \to x_2)\to x_3)$.

1.2.8. Найти функцию $f\left(\tilde{x}^n\right)$, у которой длина полинома Жегалкина в 2^n раз превосходит длину ее совершенной д.н.ф. $(n \geq 1)$.

1.2.9. Пользуясь свойством единственности совершенных форм и полинома Жегалкина, выяснить, равносильны ли выражения A и B, представив их в совершенной д.н.ф. или к.н.ф., либо построив для них полиномы Жегалкина:

1) $A = x_1 \to (x_2 \to x_3)$, $B = (x_1 \to x_2)\to(x_1 \to x_3)$;

2) $A = (x_1 \cdot x_2 \to x_3)\to(x_1 \to x_3)$, $B = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$;

3) $A = x_1 \cdot x_2 \to x_3$, $B = (x_1 \to x_3)(x_2 \to x_3)$;

4) $A = x_1 \cdot x_2 \vee (x_3 \to x_1)$, $B = \overline{x_1} \to \overline{x_3}$;

5) $A = (x_1 \to x_3)(x_2 \to x_3)$, $B = (x_1 \vee x_2)\to x_3$;

6) $A = x_1 \leftrightarrow x_2$, $B = (x_1x_3 \leftrightarrow x_2x_3)((x_1 \vee x_3)\leftrightarrow(x_2 \vee x_3))$.

1.3. Двойственные функции. Принцип двойственности

Функция $f^*(x_1,...,x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f(x_1,...,x_n)$, если $f^*(x_1,...,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$.

Константа 0 двойственна 1, а константа 1 двойственна 0. Для нахождения функции, двойственной функции $x_1 \& x_2$, навесим отрицания над каждой переменной и над всей функцией, тогда $(x_1 \& x_2)^* = \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2}} = x_1 \vee x_2$. Для функции $x_1 \vee x_2$ двойственной является функция $x_1 \& x_2$, а для функции x двойственной функцией является сама функция x.

Теорема 1.3.1 ***(принцип двойственности).*** *Если*

$$F(x_1,..., x_n) = g(f_1(x_1,..., x_n),..., f_m(x_1,..., x_n)),$$

то $F^*(x_1,..., x_n) = g^*(f_1^*(x_1,..., x_n),..., f_m^*(x_1,..., x_n))$.

Доказательство. Воспользовавшись определением двойственной функции и соотношением $\overline{\overline{x}} = x$, получаем

$$F^*(x_1,..., x_n) = \overline{F}(\overline{x}_1,..., \overline{x}_n) = \overline{g}(f_1(\overline{x}_1,..., \overline{x}_n),..., f_m(\overline{x}_1,..., \overline{x}_n)) =$$

$$= \overline{g}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_1,..., \overline{x}_n),..., \overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_1,..., \overline{x}_n)) = \overline{g}(\overline{f}_1^{\,*}(x_1,..., x_n),..., \overline{f}_m^{\,*}(x_1,..., x_n)) =$$

$$= g^*(f_1^*(x_1,..., x_n),..., f_m^*(x_1,..., x_n)),$$ что и требовалось показать.

Если функция f задана формулой через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, то справедлив следующий ***принцип двойственности***: для того, чтобы получить формулу, реализующую функцию f^*, достаточно заменить все операции & на $\vee$, все операции $\vee$ на &, а все константы – противоположными константами.

Из принципа двойственности вытекает, что если имеет место некоторое тождество, то справедливо и двойственное к нему. Обратим внимание, что пары *а*) и *б*) основных эквивалентностей алгебры логики 4–7, приведенные в разделе 1.1, являются двойственными.

Пример 1.3.1. Используя принцип двойственности, построить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции $f = x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$, и убедиться в том, что полученная формула эквивалентна формуле $A = x \cdot (y \oplus z)$.

Решение. Согласно принципу двойственности имеем:

$$f^* = (x \vee 0) \cdot (y \vee (z \cdot 1)) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) = x \cdot (y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) =$$

$= x \cdot (y \vee z) \cdot (\overline{y} \vee \overline{z}) = x \cdot (y \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot z) = x \cdot (y \oplus z)$. Значит, функция, двойственная к f, может быть реализована формулой A.

Можно поступить иначе, а именно, сначала упростить формулу, задающую функцию f:

$$f = x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = x \vee y \cdot z \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = x \vee y \cdot z \vee \overline{y} \cdot \overline{z} = x \vee (y \leftrightarrow z).$$

Несложно показать, что функцией, двойственной к $(x \leftrightarrow y)$, является функция $(x \oplus y)$. Теперь воспользовавшись принципом двойственности, получаем: $f^* = x \cdot (y \oplus z)$, что подтверждает эквивалентность формул.

Задачи

1.3.1. Используя непосредственно определение двойственности булевых функций, а также основные тождества, выяснить, является ли функция g двойственной к функции f:

1) $f = x \oplus y,\ g = x \leftrightarrow y$;

2) $f = x \mid y,\ g = x \downarrow y$;

3) $f = x \to y,\ g = \bar{x} \cdot y$;

4) $f = x \cdot y \to z,\ g = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$;

5) $f = (\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x), \quad g = (x \to y) \cdot (\bar{y} \to \bar{x})$;

6) $f = x \cdot y \vee z,\ g = x \cdot (y \vee z)$.

1.3.2. Используя принцип двойственности, построить и упростить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции f.

1) $f = (x \vee y \vee z) \cdot (y \oplus z) \vee x \cdot y \cdot z$;

2) $f = (x \vee (1 \to y)) \vee y \cdot \bar{z} \vee \left(\bar{x} \mid \overline{y \downarrow \bar{z}}\right)$;

3) $f = (x \downarrow y) \oplus ((x \mid y) \downarrow (\bar{x} \leftrightarrow y \cdot z))$;

4) $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee (y \cdot \bar{z} \oplus 1)) \downarrow z$;

5) $f = (x \cdot (y \cdot z \vee 0) \leftrightarrow (z \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot y)) \vee \bar{y} \cdot z$;

6) $f = (x \downarrow z) \oplus ((x \vee y) \leftrightarrow (\bar{x} \downarrow (y \vee \bar{z})))$.

Глава 2. ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ И ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

2.1. Понятие функциональной полноты и замкнутости

Булевы функции удобно задавать формулами. Формула представляет собой более компактный способ задания булевой функции, чем табличный, однако она задает функцию через другие функции. В связи с этим, для любой системы булевых функций $F=\{f_1, f_2, ...\}$ возникает естественный вопрос: всякая ли булева функция представима формулой над F?

Система булевых функций $F=\{f_1, f_2, ...\}$ называется ***полной системой***, если любую булеву функцию можно представить формулой над F, т. е. реализовать в виде суперпозиции функций из F.

Система $\{\&, \vee, ^{-}\}$ (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание) полна, т. к. любую булеву функцию можно представить в виде совершенной д.н.ф. или совершенной к.н.ф.

Из представления функции в виде полинома Жегалкина следует, что система функций $\{\&, \oplus, 0, 1\}$ также полна.

Теорема 2.1.1 (***теорема сведения***). *Пусть даны две системы булевых функций $F=\{f_1, f_2, ...\}$ и $G=\{g_1, g_2, ...\}$ такие, что система F полна и каждая функция $f_i \in F$ представима формулой над G. Тогда система G также полна.*

Так как дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание по закону де Моргана: $x \vee y = \overline{\overline{x} \,\&\, \overline{y}}$, получаем, что система $\{^{-}, \&\}$ полна. Аналогично доказывается полнота системы $\{^{-}, \vee\}$.

Замыканием множества F называется множество всех функций из P_2, являющихся суперпозициями функций из F. Замыкание множества F обозначается через $[F]$.

Система булевых функций F называется ***замкнутой***, если $[F]=F$.

Система булевых функций F называется ***полной***, если $[F]=P_2$.

Отметим некоторые свойства замыкания:

1) $F \subseteq [F]$;
2) $[[F]] = [F]$;
3) если $F \subseteq G$, то $[F] \subseteq [G]$;
4) $[F \cap G] \subseteq [F] \cap [G]$;
5) $[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$.

Задачи

2.1.1. Построить множество всех функций, зависящих от переменных x_1, x_2 и принадлежащих замыканию множества F:

1) $F = \{\bar{x}\}$;
2) $F = \{x_1 \oplus x_2\}$;
3) $F = \{0, \bar{x}\}$;
4) $F = \{x_1 \cdot x_2\}$;
5) $F = \{x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3\}$;
6) $F = \{x_1 \to x_2\}$;
7) $F = \{x_1x_2,\ x_1 \oplus x_2\}$;
8) $F = \{x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3\}$.

2.1.2. Показать, что $f \in [F]$, выразив f формулой над множеством F:

1) $f = \bar{x}, \quad F = \{0, x \to y\}$;
2) $f = x \oplus y, \quad F = \{x \downarrow y\}$;
3) $f = x, \quad F = \{x \oplus y\}$;
4) $f = x \oplus y \oplus z, \quad F = \{x \leftrightarrow y\}$;
5) $f = 0, \quad F = \{xy \oplus z\}$;
6) $f = x, \quad F = \{x\bar{y}\}$;
7) $f = x \vee y, \quad F = \{\bar{x} \vee \bar{y}\}$.

2.1.3. Воспользовавшись теоремой сведения, доказать полноту системы F:

1) $F = \{x_1 \downarrow x_2\}$;
2) $F = \{x_1 | x_2\}$;
3) $F = \{x_1 \to x_2, \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}\}$;
4) $F = \{x_1x_2 \oplus x_3, (x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_3\}$;
5) $F = \{\bar{x}, x_1\overline{x_2}\}$;
6) $F = \{x_1x_2 \oplus x_3, x_1 \leftrightarrow x_2, x_1 \oplus x_3\}$.

2.2. Классы функций, сохраняющих константы

Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***сохраняет константу* 0**, если $f(\tilde{0}^n) = f(0,0,...,0) = 0$. Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 0, обозначается через T_0.

Теорема 2.2.1. *Класс* T_0 *− замкнутый.*

Доказательство. Покажем, что суперпозиция $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$ функций f, $f_1, ..., f_m$, принадлежащих классу T_0, принадлежит классу T_0. Действительно, $\Phi(0,...,0) = f(f_1(0,...,0), ..., f_m(0,...,0)) = f(0,...,0) = 0$.

Множество всех функций из T_0, зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, будем обозначать через $T_0(n)$.

Теорема 2.2.2. $|T_0(n)| = 2^{2^n - 1}$.

Доказательство. Если $f(\tilde{x}^n) \in T_0$, тогда значения функции $f(\tilde{x}^n)$ можно произвольно выбирать на всех двоичных наборах, кроме нулевого, т. е. на $(2^n - 1)$ наборах. Такой выбор осуществляется $2^{2^n - 1}$ способами. Таким образом, $|T_0(n)| = 2^{2^n - 1}$.

Функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***сохраняет константу* 1**, если $f(\tilde{1}^n) = f(1,1,...,1) = 1$. Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 1, обозначается через T_1.

Теорема 2.2.3. *Класс* T_1 *− замкнутый.*

Доказательство. Покажем, что суперпозиция $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$ функций f, $f_1, ..., f_m$, принадлежащих классу T_1, принадлежит классу T_1. Действительно, $\Phi(1,...,1) = f(f_1(1,...,1), ..., f_m(1,...,1)) = f(1,...,1) = 1$.

Множество всех функций из T_1, зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, будем обозначать через $T_1(n)$.

Теорема 2.2.4. $|T_1(n)| = 2^{2^n - 1}$.

Доказательство. Если $f(\tilde{x}^n) \in T_1$, тогда значения функции $f(\tilde{x}^n)$ можно произвольно выбирать на всех двоичных наборах, кроме единичного, т. е. на

$\left(2^n-1\right)$ наборах. Такой выбор осуществляется 2^{2^n-1} способами. Таким образом, $|T_1(n)|=2^{2^n-1}$.

Пример 2.2.1. Найти число функций $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащих множеству $A=T_0\cap T_1$.

Решение. Если $f(\tilde{x}^n)\in T_0\cap T_1$, тогда значения функции $f(\tilde{x}^n)$ можно произвольно выбирать на всех двоичных наборах, кроме нулевого и единичного, т.е. на $\left(2^n-2\right)$ наборах. Такой выбор осуществляется 2^{2^n-2} способами. Таким образом, $|A|=2^{2^n-2}$.

Задачи

2.2.1. Перечислить все булевы функции:

1) от одной переменной, сохраняющие 0;
2) от одной переменной, сохраняющие 1;
3) от одной переменной, сохраняющие обе константы;
4) от двух переменных, сохраняющие 0;
5) от двух переменных, сохраняющие 1;
6) от двух переменных, сохраняющие обе константы;
7) от двух переменных, сохраняющие 0, но не сохраняющие 1;
8) от двух переменных, сохраняющие 1, но не сохраняющие 0.

2.2.2. Выяснить, при каких n функция $f(\tilde{x}^n)$ сохраняет константы:

1) $f(\tilde{x}^n)=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n$;
2) $f(\tilde{x}^n)=\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\right)\oplus x_n x_1$;
3) $f(\tilde{x}^n)=\bigoplus\limits_{1\le i<j\le n} x_i\cdot x_j$;
4) $f(\tilde{x}^n)=\bigoplus\limits_{1\le i<j\le n} \left(x_i\vee x_j\right)$;

5) $f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)\ldots(x_n \to x_1)$;

6) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} (x_i \to (x_{i+1} \to x_{i+2}))$;

7) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} ((x_i \to x_{i+1}) \to x_{i+2})$.

2.2.3. Доказать, что если булева функция сохраняет 0, то двойственная для нее функция сохраняет 1.

2.2.4. Доказать, что из всякой булевой функции, не сохраняющей 0, отождествлением всех ее переменных, можно получить функцию от одной переменной, также не сохраняющую 0, т. е. функцию $\bar{x}$ или константу 1.

2.2.5. Доказать, что из всякой булевой функции, не сохраняющей 1, отождествлением всех ее переменных, можно получить функцию от одной переменной, также не сохраняющую 1, т. е. функцию $\bar{x}$ или константу 0.

2.3. Класс самодвойственных функций

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется ***самодвойственной***, если она совпадает со своей двойственной, т.е. $f(x_1,...,x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$.

Из этого определения вытекает, что функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на любой паре противоположных наборов она принимает противоположные значения.

Обозначим через S множество всех самодвойственных функций.

Теорема 2.3.1. *Класс* S *− замкнутый.*

Доказательство. Покажем, что суперпозиция $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$ самодвойственных функций $f, f_1, ..., f_m$ является самодвойственной. Действительно, $\Phi^* = f^*(f_1^*,..., f_m^*) = f(f_1,..., f_m) = \Phi$, т. е. S − замкнутый класс.

Множество всех самодвойственных функций от n переменных будем обозначать через $S(n)$. Так как самодвойственная функция полностью определяется своими значениями на первой половине строк, имеет место:

Теорема 2.3.2. $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$.

Лемма 2.3.3 (***о несамодвойственной функции***). *Из всякой несамодвойственной функции* $f(x_1,...,x_n)$ *с помощью подстановки вместо ее переменных функций* x *и* $\overline{x}$ *можно получить константу.*

Доказательство. Пусть функция $f(x_1,...,x_n)$ не является самодвойственной, тогда найдется пара противоположных наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2 \ldots, \overline{\alpha}_n)$, на которых значения функции совпадают, т. е. $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = c$, где $c \in \{0, 1\}$. Построим функцию одной переменной $\varphi(x) = f\left(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, ..., x^{\alpha_n}\right)$. Нетрудно проверить, что $\varphi(0) = \varphi(1) = c$, что и требовалось доказать.

Проиллюстрируем эту лемму на примере.

Пример 2.3.1. Определить, можно ли получить константу из функции $f(\tilde{x}^3) = x_3 \to x_1 x_2$ путем подстановки x и $\overline{x}$ вместо переменных.

Решение. Перейдем к табличному заданию функции $f(\tilde{x}^3)$. В табл. 2.1 стрелками указаны пары противоположных наборов.

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_3 \to x_1 x_2$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Табл. 2.1. Табличное задание функции $f(\tilde{x}^3)$

Замечаем, что $f \notin S$, т. к. нарушается условие самодвойственности на первом и восьмом наборах: $f(000) = f(111) = 1$. Таким образом, константу 1 можно получить двумя способами.

Заменим все переменные на $\bar{x}$, тогда $f(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = \bar{x} \to \bar{x} \cdot \bar{x} = 1$. Заменив все переменные на x, получим $f(x,x,x) = x \to x \cdot x = 1$. Константу 0 из заданной функции получить нельзя, т.к. не существует двух противоположных наборов, на которых функция принимает нулевое значение.

При помощи леммы о несамодвойственной функции можно получать некоторые тождества для констант.

В примере 1 мы получили следующие тождества: $x \to x \cdot x = 1$, $\bar{x} \to \bar{x} \cdot \bar{x} = 1$. Эти тождества нетрудно доказать, используя основные тождества алгебры логики: $x \cdot x = x$, $x \to y = \bar{x} \vee y$, $\bar{x} \vee x = 1$.

Задачи

2.3.1. Найти все самодвойственные функции существенно зависящие от двух переменных.

2.3.2. Заменить прочерки в векторе $\tilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор самодвойственной функции:

1) $\tilde{\alpha}_f = (01-0-0--11-0-1--)$;
2) $\tilde{\alpha}_f = (--01--11--01--10)$;
3) $\tilde{\alpha}_f = (11--00--01--10--)$.

2.3.3. Выяснить, является ли самодвойственной функция f, заданная векторно. Для несамодвойственной функции определить какие переменные следует заменить на x, а какие на $\bar{x}$, чтобы получить константу:

1) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$;
2) $\tilde{\alpha}_f = (01111001)$;
3) $\tilde{\alpha}_f = (10110110)$;
4) $\tilde{\alpha}_f = (10101000)$.

2.3.4. Выяснить, является ли функция f самодвойственной. Для несамодвойственной функции определить какие переменные следует заменить на x, а какие на $\bar{x}$, чтобы получить константу.

1) $f = x \oplus y$;
2) $f = (x \to y) \to y$;

3) $f = x\cdot y \vee x\cdot z \vee y\cdot z$; 4) $f = x \oplus y \oplus z \oplus 1$;

5) $f = x\cdot y \vee z$; 6) $f = x\cdot y \oplus z\cdot(x \vee y)$;

7) $f = x\cdot y \oplus y\cdot z \oplus x\cdot z \oplus y \oplus z$; 8) $f = (x \to y) \oplus (y \to z) \oplus (z \to x) \oplus z$;

9) $f = x\cdot y\cdot z \oplus x\cdot y \oplus x\cdot z \oplus y\cdot z$; 10) $f = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \to x\cdot(y \leftrightarrow z)$.

2.3.5. Подсчитать число самодвойственных булевых функций от n переменных:

1) сохраняющих 0, но не сохраняющих 1;
2) сохраняющих 1, но не сохраняющих 0.

2.3.6. Доказать, что среди всех самодвойственных булевых функций от n переменных число функций, сохраняющих 0, равно числу функций, сохраняющих 1. Найти это число.

2.4. Монотонность и класс монотонных функций

Пусть наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, таковы, что $\alpha_i \geq \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, тогда будем говорить, что $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$ больше или равен $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, и обозначать через $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$. Если для наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ выполнено одно из двух неравенств: $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$ или $\tilde{\beta} \succeq \tilde{\alpha}$, то будем говорить, что наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ***сравнимы***. В противном случае, наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ***несравнимы***. Очевидно, что любые два соседних набора сравнимы.

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется ***монотонной***, если для любых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких, что $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$ выполнено неравенство: $f(\tilde{\alpha}) \geq f(\tilde{\beta})$. В противном случае, функция называется ***немонотонной***.

Множество всех монотонных функций обозначим через M, а множество всех монотонных функций от n переменных – через $M(n)$.

Теорема 2.4.1. *Класс M − замкнут.*

Доказательство. Покажем, что суперпозиция $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$ монотонных функций $f, f_1, ..., f_m$ является монотонной функцией.

Пусть $\tilde{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\tilde{x}^1 = (x_{11}, ..., x_{1k_1}), ...,$ $\tilde{x}^m = (x_{m1}, ..., x_{mk_m})$ − наборы переменных функций Φ, $f_1, ..., f_m$, причем множество переменных функции Φ состоит из тех и только тех переменных, которые встречаются у функций $f_1, ..., f_m$. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ − два набора длины n значений переменных $\tilde{x}$, причем $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$. Эти наборы определяют наборы $\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1, ..., \tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m$ значений переменных $\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^m$ такие, что $\tilde{\alpha}^1 \preceq \tilde{\beta}^1, ..., \tilde{\alpha}^m \preceq \tilde{\beta}^m$. В силу монотонности функций $f_1, ..., f_m$ имеем: $f_1(\tilde{\alpha}^1) \le f_1(\tilde{\beta}^1), ..., f_m(\tilde{\alpha}^m) \le f_m(\tilde{\beta}^m)$. Поэтому

$$(f_1(\tilde{\alpha}^1), ..., f_m(\tilde{\alpha}^m)) \preceq (f_1(\tilde{\beta}^1), ..., f_m(\tilde{\beta}^m)),$$

и в силу монотонности f имеем

$$f(f_1(\tilde{\alpha}^1), ..., f_m(\tilde{\alpha}^m)) \le f(f_1(\tilde{\beta}^1), ..., f_m(\tilde{\beta}^m)).$$

Значит, $\Phi(\tilde{\alpha}) \le \Phi(\tilde{\beta})$. Тем самым показали, что класс всех монотонных функций замкнут относительно операции суперпозиции, т. е. любая суперпозиция монотонных функций является монотонной функцией.

Лемма 2.4.2 (***о немонотонной функции***). Из всякой немонотонной функции $f(x_1,..., x_n)$ с помощью подстановки вместо ее переменных функций 0, 1 и x можно получить $\bar{x}$.

Доказательство. Пусть функция $f(x_1,...,x_n)$ немонотонна, тогда найдется такая пара сравнимых наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, что $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$, а $f(\tilde{\alpha}) < f(\tilde{\beta})$, т.е. $f(\tilde{\alpha}) = 0$, $f(\tilde{\beta}) = 1$. Так как $\alpha_i \ge \beta_i$, то для каждого i $\left(i = 1,...,n\right)$ выполнено либо $\alpha_i = \beta_i$(в этом случае переменную x_i заменяем на α_i), либо $\alpha_i > \beta_i$ (в этом случае переменную x_i заменяем на x). В результате замены получим функцию одной переменной, обозначим ее через $\varphi(x)$. Нетрудно проверить, что $\varphi(0) = f(\tilde{\beta}) = 1$, $\varphi(1) = f(\tilde{\alpha}) = 0$, т.е. $\varphi(x) = \bar{x}$. Лемма доказана.

Замечание. Если функция не является монотонной, найдется пара соседних наборов, на которых нарушается условие монотонности.

Следствие 2.4.3. Если функция $f(x_1,...,x_n)$ немонотонна, то из нее с помощью подстановки констант вместо $(n-1)$-ой переменной и одной переменной x можно получить $\bar{x}$.

Доказательство. В силу замечания, найдется пара наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соседних по i –ой компоненте, таких что $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$, на которых условие монотонности нарушается, т. е. $f(\tilde{\alpha}) < f(\tilde{\beta})$.

Очевидно, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Легко видеть, что $\varphi(0) = f(\tilde{\beta}) = 1$, $\varphi(1) = f(\tilde{\alpha}) = 0$, т. е. $\varphi(x) = \bar{x}$, что и требовалось доказать.

Пример 2.4.1. Выяснить, можно ли получить функцию $\bar{x}$ из функции $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 x_3$ путем соответствующей замены переменных.

Решение. Функция f немонотонна, т. к. $f(100) = 1$, $f(111) = 0$, тогда по лемме о немонотонной функции из этой функции можно получить функцию $\bar{x}$. Подставим вместо переменной x_1 константу 1, а вместо переменных x_2, x_3 – x, тогда $f(1, x, x) = 1 \oplus x \cdot x = \bar{x}$. Чтобы воспользоваться следствием леммы, выберем пару соседних наборов, на которых нарушено условие монотонности. Имеем, $f(110) = 1$, $f(111) = 0$. Выбирая соответствующую замену переменных, получаем, что $f(1, 1, x) = 1 \oplus 1 \cdot x = \bar{x}$.

Проверку на монотонность булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, заданной своим вектором значений $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n - 1})$, можно осуществить следующим образом. Разделим вектор $\tilde{\alpha}_f$ на две равные части $\tilde{\alpha}_{f_0^1} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^{n-1}-1})$ и $\tilde{\alpha}_{f_1^1} = (\alpha_{2^{n-1}}, \alpha_{2^{n-1}+1}, \ldots, \alpha_{2^n - 1})$. Если отношение $\tilde{\alpha}_{f_0^1} \leq \tilde{\alpha}_{f_1^1}$ не выполнено, то $f(\tilde{x}^n)$ не является монотонной. В противном случае каждый из векторов $\tilde{\alpha}_{f_\sigma^1}$ $(\sigma \in \{0, 1\})$ вновь разделим на две равные части и проверим для них отношение предшествования. Если хотя бы одно из отношений не выполнено, то заключаем, что $f(\tilde{x}^n) \notin M$. В противном случае вновь делим векторы пополам и т. д. Если отношение предшествования выполняется для всех пар векторов, то $f(\tilde{x}^n) \in M$.

Пример 2.4.2. По вектору значений $\tilde{\alpha}_f = (10011111)$ выяснить, является ли функция f монотонной.

Решение. Поделим вектор пополам, тогда $1001 \le 1111$. На следующем шаге отношение предшествования нарушается для пары 10 и 01, а $11 \le 11$. Таким образом, заданная функция не является монотонной.

В силу замкнутости класса монотонных функций, можно утверждать, что всякая функция f, которая задана формулой, содержащей лишь связки & и $\vee$ (или другие монотонные связки), монотонна.

Пример 2.4.3. Доказать, что функция $f = x \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z$ является монотонной.

Решение. Преобразуем f, применив эквивалентность вида $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.

$f = x \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z = x \vee y \vee \bar{y}z = x \vee y \vee z$. Действительно, функция f монотонна, так как представляет собой суперпозицию монотонных функций.

Задачи

2.4.1. Какие из элементарных функций алгебры логики являются монотонными?

2.4.2. Выяснить, является ли монотонной функция f, заданная векторно. Для немонотонной функции подобрать соответствующую замену переменных, чтобы получить $\bar{x}$.

1) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$;
2) $\tilde{\alpha}_f = (01010111)$;
3) $\tilde{\alpha}_f = (00110110)$;
4) $\tilde{\alpha}_f = (00010011)$.

2.4.3. Выяснить, является ли функция f монотонной. Если не является, то подобрать соответствующую замену переменных, чтобы построить из f функцию $\bar{x}$.

1) $f = x \oplus y \oplus z$;
2) $f = xz \oplus y$;
3) $f = x \cdot \bar{y} \vee z$;
4) $f = (x \to \bar{y}) \oplus x \cdot \bar{z}$;

5) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus x \cdot z \oplus x$;

6) $f = x \cdot y \oplus z \cdot (x \vee y)$;

7) $f = (x \downarrow z) \to (y \mid \bar{z})$.

2.4.4. Доказать, что функция f является монотонной:

1) $f = (x \oplus y) \cdot (x \leftrightarrow y)$;

2) $f = x \to (y \to x)$;

3) $f = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z$;

4) $f = (x \oplus y) \cdot x \cdot y$;

5) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus z \cdot x$.

2.4.5. Найти все монотонные функции, которые можно получить из вектора $\tilde{\alpha}_f$ заменой символа «–» на 0 или 1:

1) $\tilde{\alpha}_f = (0-)$;

2) $\tilde{\alpha}_f = (--)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (-00-)$;

4) $\tilde{\alpha}_f = (-10-)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (-----00-)$;

6) $\tilde{\alpha}_f = (---1--0-)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (0------1)$.

2.4.6. Найти все функции $f \in M \cap S$, которые можно получить из вектора $\tilde{\alpha}_f$ заменой символа «–» на 0 или 1:

1) $\tilde{\alpha}_f = (--)$;

2) $\tilde{\alpha}_f = (-0--)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (---1)$;

4) $\tilde{\alpha}_f = (-00-0---)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (-01-0---)$.

2.4.7. Выяснить при каких $n \geq 1$ функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна:

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i \cdot x_j$;

3) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n)$.

2.4.8. Доказать, что функция, двойственная монотонной функции, монотонна.

2.4.9. Доказать, что монотонная функция, не сохраняющая нуль (единицу), равна тождественно единице (нулю).

2.4.10. Доказать, что если f тождественно не равна константе, а $(f \vee f^*)$ – константа, то $f \notin M \cup S$.

2.4.11. Найти все самодвойственные монотонные функции $f(\widetilde{x}^n)$, существенно зависящие от всех переменных (n = 1, 2, 3, 4).

2.5. Линейность и класс линейных функций

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***линейной***, если она представима полиномом Жегалкина не выше первой степени, т. е. если существуют такие константы $\alpha_i \in \{0, 1\}$ $(i = 0,1, \ldots, n)$, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n .$$

Множество всех линейных функций обозначим через L.

Теорема 2.5.1. *Класс* L *– замкнут.*

Доказательство. Действительно, суперпозиция $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$ линейных функций f, $f_1, ..., f_m$ является линейной функцией, так как при подстановке в линейное выражение других линейных выражений полученное выражение также будет линейным, т. е. L – замкнутый класс.

Множество всех линейных функций от n переменных будем обозначать через $L(n)$.

Теорема 2.5.2. $|L(n)| = 2^{n+1}$.

Доказательство. Так как линейная функция от n переменных определяется двоичным набором $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ длины $(n+1)$, получаем, что $|L(n)| = 2^{n+1}$.

Линейная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, существенно зависящая от всех n переменных, имеет вид: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_0 \oplus x_1 \oplus ... \oplus x_n$, где $\alpha_0 \in \{0,1\}$, поэтому получаем, что таких функций только две.

Лемма 2.5.3 (***о нелинейной функции***). Из всякой нелинейной функции $f(\tilde{x}^n)$ с помощью подстановки вместо ее переменных констант 0, 1 и функций $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ и, быть может, путем навешивания отрицания над всей функцией, можно получить конъюнкцию x_1x_2.

Доказательство. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ нелинейна относительно переменных x_1 и x_2, тогда ее можно представить в виде:

$$f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 f_1(x_3,\ldots,x_n) \oplus x_1 f_2(x_3,\ldots,x_n) \oplus x_2 f_3(x_3,\ldots,x_n) \oplus f_4(x_3,\ldots,x_n),$$

где функция $f_1(x_3,\ldots,x_n) \neq 0$ (не равна тождественно нулю), т. е. существуют такие $\alpha_3,\ldots,\alpha_n$, что $f_1(\alpha_3,\ldots,\alpha_n) = 1$. Подставив вместо переменных x_i константы α_i для любого $i = 3,\ldots,n$, получим функцию от двух переменных:

$$\Psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3,\ldots,\alpha_n) = x_1x_2 \oplus \alpha\, x_1 \oplus \beta\, x_2 \oplus \gamma,$$

где $\alpha = f_2(\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = f_3(\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$, $\gamma = f_4(\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$. Нетрудно показать, что $\Psi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = x_1x_2$. Таким образом, получаем, что $f(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha, \alpha_3,\ldots,\alpha_n) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = x_1x_2$, что и требовалось доказать.

Проиллюстрируем лемму о нелинейной функции на примере.

Пример 2.5.1. Выяснить, можно ли получить функцию x_1x_2 из функции $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}$ соответствующей заменой переменных.

Решение. Построим полином Жегалкина для заданной функции.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1x_2x_3} \cdot \overline{x_1\overline{x_2}}} = (x_1x_2x_3 \oplus 1)\cdot(x_1(x_2 \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus 1 = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1.$$

Получили, что функция $f(x_1, x_2, x_3)$ нелинейна относительно переменных x_1 и x_2, и по лемме о нелинейной функции из нее можно получить конъюнкцию x_1x_2. Представим функцию в виде $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2(x_3 \oplus 1) \oplus x_1$.

Подставив вместо переменной x_3 константу 0, получим функцию от двух переменных: $\Psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, 0) = x_1x_2 \oplus x_1$. Таким образом, имеем $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\gamma = 0$, а это означает, что $\Psi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = \Psi(x_1, x_2 \oplus 1) =$ $= x_1(x_2 \oplus 1) \oplus x_1 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 = x_1x_2$.

Заключаем, что конъюнкцию x_1x_2 можно получить из функции $f(x_1, x_2, x_3)$ заменой переменных x_2 на $\overline{x_2}$, x_3 на 0. Действительно, $f(x_1, \overline{x_2}, 0) = x_1x_2$.

Задачи

2.5.1. Какие из элементарных булевых функций являются линейными?

2.5.2. Выяснить, является ли линейной функция f, заданная векторно:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1001)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1101)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (10010110)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (11000011)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (10100110)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (0110100101101001)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0111101111111100)$;

9) $\tilde{\alpha}_f = (1010010110011100)$. 10) $\tilde{\alpha}_f = (1110100110010111)$.

2.5.3. Выяснить, можно ли путем соответствующей замены переменных получить из функции f конъюнкцию $x \cdot y$:

1) $f = x \to y$;

2) $f = x \cdot y \vee y \cdot \bar{z} \vee \bar{z} \cdot x$;

3) $f = (x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z) \oplus \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$;

4) $f = x \to (y \to z)$;

5) $f = x \cdot \bar{y} \vee y \cdot \bar{z} \vee z \cdot \bar{x}$.

6) $\tilde{\alpha}_f = (11101000)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (11011011)$;

8) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$;

9) $f = x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2$.

2.5.4. Заменить в векторе $\tilde{\alpha}_f$ прочерки символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом Жегалкина.

1) $\tilde{\alpha}_f = (10-1)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (0-11)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (-001--1-)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (1-101---)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (-0-1--00)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (11-0---1)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (--10\ ----\ 0--1\ -110)$;

8) $\tilde{\alpha}_f = (1---\ ----\ ---0\ -110)$.

2.5.5. Найти число функций $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащих множеству A:

1) $A = T_0 \cup T_1$;
2) $A = L - T_1$;
3) $A = (T_0 \cup T_1) \cap L$;
4) $A = S \cap T_1$;
5) $A = S \cap T_1 \cap L$;
6) $A = (T_1 \cup L) \cap S$;
7) $A = (S \cup L) \cap T_0$;
8) $A = T_0 \cup L \cup S$.

2.5.6. Доказать, что:

$$L \bigcap T_0 \bigcap T_1 = L \bigcap S \bigcap T_0 = L \bigcap S \bigcap T_1 = L \bigcap S \bigcap T_0 \bigcap T_1.$$

2.5.7. Доказать, что $L \subseteq T_1 \bigcup T_0 \bigcup S$.

2.5.8. Доказать, что множество A не пусто:

1) $A = LT_1 - (T_0 \bigcup S)$;
2) $A = LT_0 - (T_1 \bigcup S)$;
3) $A = LS - (T_1 \bigcup T_0)$.

2.5.9. Какие функции можно получить из функции $f(\tilde{x}^n)$ путем отождествления переменных, если:

1) $f \in L - T_1 S$;
2) $f \in S - T_1$;
3) $f \in T_1 - T_0$;
4) $f \in T_1 - \overline{T_0}$;
5) $f \in T_0 - T_1$;
6) $f \in \overline{T_1} - T_0$;
7) $f \in S - T_0$;
8) $f \in \overline{T_1 - T_0}$.

2.5.10. Показать, что всякая монотонная функция содержится не менее чем в двух классах из T_0, T_1, L.

2.6. Критерий полноты Поста и его применения

Теорема 2.6.1 (*критерий Поста о полноте*). *Система функций F полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов: T_0, T_1, S, M, L.*

Доказательство. Необходимость докажем от противного. Пусть система функций F полна и включена в один из пяти классов T_0, T_1, S, M, L, т. е.

$F \subseteq A \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$, где A один из пяти замкнутых классов. Тогда, $[F] = P_2$, т. е. $P_2 = [A]$, а так как класс A замкнут, то один из пяти классов совпадает с множеством всех булевых функций, что ведет к противоречию.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы, т. е. существуют функции, которые не принадлежат соответствующим классам. Пусть $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_s \notin S$, $f_m \notin M$, $f_l \notin L$, возможно, что некоторые из этих функций равны между собой. Покажем, что через суперпозицию этих функций можно выразить отрицание и конъюнкцию, тогда любая функция может быть выражена через суперпозицию функций из множества *F*.

1 этап. ***Получение констант*** 0 и 1.

Рассмотрим функцию $f_0 \notin T_0$. Возможны два случая:

А) Если $f_0(\tilde{1}^n) = 1$, тогда $f_0(x,...,x) = 1$. Вторая константа получается из $f_1 \notin T_1$: $f_1(f_0(x,...,x), f_0(x,...,x), \ldots, f_0(x,...,x)) = 0$.

Б) Если $f_0(\tilde{1}^n) = 0$, тогда $f_0(x,...,x) = \bar{x}$. По лемме о несамодвойственной функции из функции $f_s \notin S$ и отрицания можно получить константу, обозначим ее через *c*. Вторая константа получается из отрицания: $f_0(c,...,c) = \bar{c}$.

2 этап. ***Получение отрицания.***

По лемме о немонотонной функции из функции $f_m \notin M$ с помощью подстановки констант, которые были получены через суперпозицию на первом этапе, и переменной x получаем $\bar{x}$.

3 этап. ***Получение конъюнкции.***

По лемме о нелинейной функции из $f_l \notin L$ с помощью подстановки констант, функций $x, \bar{x}, y, \bar{y}$ и отрицания можно получить конъюнкцию $x \cdot y$. Теорема доказана.

Следствие 2.6.2. *Всякий замкнутый класс содержится в одном из пяти классов* T_0, T_1, S, M, L.

Утверждение доказывается от противного.

При исследовании полноты систем функций удобно пользоваться таблицей, которую будем называть ***критериальной таблицей Поста***. Эта таблица имеет пять столбцов, каждый из которых соответствует одному из пяти предполных классов в P_2, а строки таблицы соответствуют функциям исследуемой системы.

На пересечении строки таблицы, соответствующей функции f, и столбца, соответствующего классу K, ставится знак плюс, если $f \in K$, и минус, если $f \notin K$. Система функций полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце содержится хотя бы один знак минус.

Пример 2.6.1. Исследовать полноту системы $F = \{\ 0,\ 1, xy,\ x \oplus y \oplus z\ \}$.

Решение. Критериальная таблица Поста для исходной системы функций представлена в таблице 2.2.

	T_0	T_1	S	M	L
xy	+	+	–	+	–
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
$x \oplus y \oplus z$	+	+	+	–	+

Табл. 2.2. Критериальная таблица Поста к примеру 2.6.1

Система F полна, т. к. она не содержится целиком ни в одном из пяти замкнутых классов (каждый столбец таблицы 2.2 содержит не менее одного минуса).

Полная система F называется ***базисом*** в P_2, если никакая ее подсистема не является полной, т. е. 1) $[F] = P_2$; 2) для $\forall f \in F \quad [F \setminus \{f\}] \neq P_2$.

Пример 2.6.2. Выяснить, образует ли система $F = \{0,\ 1, xy,\ x \oplus y \oplus z\ \}$ базис?

Решение. В примере 2.6.1 показано, что система F полна. Покажем, что она образует базис, для этого достаточно показать, что после исключения любой функции из системы F будет получена неполная подсистема. Действительно, $F \setminus \{xy\} \subseteq L$, $F \setminus \{0\} \subseteq T_1$, $F \setminus \{1\} \subseteq T_0$, $F \setminus \{x \oplus y \oplus z\} \subseteq M$, что позволяет сделать вывод о том, что система F − базис.

Теорема 2.6.3. *Базис в P_2 состоит не более чем из четырех функций.*

Доказательство. Покажем, что из любой полной системы можно выделить полную подсистему, содержащую не более четырех функций. Действительно, если система F полна, то согласно теореме Поста о полноте в ней существует пять функций $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_s \notin S$, $f_m \notin M$, $f_l \notin L$, причем система функций $\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$ полна.

Рассмотрим функцию $f_0 \notin T_0$. Возможны два случая:

А) $f_0(\tilde{1}^n) = 1$, тогда $f_0 \notin S$ и система $\{f_0, f_1, f_m, f_l\}$ полна.

Б) $f_0(\tilde{1}^n) = 0$, тогда $f_0 \notin T_1$, $f_0 \notin M$ и система $\{f_0, f_s, f_l\}$ полна.

Таким образом, система функций, содержащая пять и более функций не может быть базисом в P_2.

Существование базиса из четырех функций вытекает из примера 2.6.2. Теорема доказана.

Критериальная таблица Поста может быть полезной для нахождения всех базисов, содержащихся в системе F.

Пример 2.6.3. Из полной в P_2 системы $F = \{1, x \oplus yz, x \to y, \bar{x}\}$ выделить всевозможные базисы.

Решение. Критериальная таблица Поста системы F представлена в табл. 2.3.

	T_0	T_1	S	M	L
$f_1 = 1$	–	+	–	+	+
$f_2 = x \oplus yz$	+	–	–	–	–
$f_3 = x \to y$	–	+	–	–	–
$f_4 = \bar{x}$	–	–	+	–	+

Табл. 2.3. Критериальная таблица Поста к примеру 2.6.3

По таблице составим выражение, представляющее собой к.н.ф. K, в которой элементарные дизъюнкции соответствуют столбцам таблицы и включают в качестве слагаемых символы тех функций, которые не входят в класс, соответствующий столбцу. Для исходной системы функций имеем

$$K = (f_1 \vee f_3 \vee f_4)(f_2 \vee f_4)(f_1 \vee f_2 \vee f_3)(f_2 \vee f_3 \vee f_4)(f_2 \vee f_3).$$

Раскрывая скобки и используя для упрощения эквивалентности вида $A \cdot A = A, \quad A(A \vee B) = A, \quad A \vee AB = A$, приведем к.н.ф. K к д.н.ф. D, в которой закон поглощения уже неприменим. Таким образом, получаем

$$K = (f_1 \vee f_3 \vee f_4)(f_2 \vee f_4)(f_2 \vee f_3) = (f_1 \vee f_3 \vee f_4)(f_2 \vee f_3 f_4) =$$
$$= f_1 f_2 \vee f_1 f_3 f_4 \vee f_2 f_3 \vee f_3 f_4 \vee f_2 f_4 \vee f_3 f_4 = f_1 f_2 \vee f_2 f_3 \vee f_2 f_4 \vee f_3 f_4.$$

По полученной д.н.ф. D выпишем подмножества функций, соответствующие слагаемым д.н.ф. D. Это и будут искомые базисы. В нашей системе имеется четыре базиса: $B_1 = \{f_1, f_2\}, B_2 = \{f_2, f_3\}, B_3 = \{f_2, f_4\}, B_4 = \{f_3, f_4\}$.

Класс F функций из P_2 называется ***предполным***, если:

1) F − неполный, т. е. $[F] \neq P_2$;

2) при добавлении к F произвольной функции из P_2, не принадлежащей F, вновь полученная система будет полной, т. е. для $\forall\ f \notin F \ \ [F \cup \{f\}] = P_2$.

Теорема 2.6.4. *В алгебре логики существует пять предполных классов* T_0, T_1, S, M, L.

Доказательство. 1) Покажем сначала, что ни один из пяти классов T_0, T_1, S, M, L не содержится в другом.

	T_0	T_1	S	M	L
T_0		0	0	$x \oplus y$	xy
T_1	1		1	$x \leftrightarrow y$	xy
S	$\bar{x}$	$\bar{x}$		$\bar{x}$	$xy \oplus xz \oplus yz$
M	1	0	0		xy
L	1	0	0	$x \oplus y$	

Табл. 2.4. Критериальная таблица Поста к теореме 2.6.4

Для этого достаточно для каждого из пяти классов указать четыре функции, принадлежащие данному классу, но не принадлежащие остальным четырем (см. табл. 2.4).

2) Докажем, что все классы − T_0, T_1, S, M, L являются предполными. Действительно, пусть $A \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ и $f \notin A$. Тогда система $A \cup \{f\}$ не содер-

жится ни в одном из пяти классов, так как A не содержится в четырех из них, а f не содержится в A. Следовательно, система $A \cup \{f\}$ − полная и A − предполный класс.

3) Покажем теперь, что в P_2 других предполных классов нет. Пусть B − предполный класс. Тогда $[B] \neq P_2$ и $\exists A \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$, что $B \subseteq A$. Если $B \neq A$, то $\exists f$ такая, что $f \in A,\ f \notin B$, тогда $B \cup \{f\} \subseteq A$ и $[B \cup \{f\}] \neq P_2$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Функция $f\left(\tilde{x}^n\right)$ называется ***шефферовой*** (или ***функцией Шеффера*** от n переменных), если она полна, т. е. образует базис в P_2. Нетрудно проверить, что $x_1 | x_2$ и $x_1 \downarrow x_2$ являются функциями Шеффера от двух переменных.

Пример 2.6.3. Показать полноту системы функций $G = \{f(x, y, z) = xy \to z,\ g(x, y) = x \oplus y\}$. Проиллюстрировать поэтапное доказательство теоремы Поста, т. е. выразить константы, отрицание и конъюнкцию через функции системы G.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = xy \to z$, построим для нее таблицу значений (см. табл. 2.5). Очевидно, что f не самодвойственна и не монотонна, т. к. условие монотонности нарушается на третьем и седьмом наборах: $f(0,1,0) = 1$, $f(1,1,0) = 0$. Нетрудно проверить, что у этой функции все переменные существенные, т. к. она принимает значение 0 только на одном наборе, для которого найдутся соседние наборы по первой, по второй и по третьей переменным, значения функций на которых равны 1. Если бы эта функция была линейна, то она совпала бы с одной из функций $x \oplus y \oplus z$ или $x \oplus y \oplus z \oplus 1$(см. табл. 2.5). Заключаем, что функция f не линейна.

x	y	z	$xy \to z$	$x \oplus y \oplus z$	$x \oplus y \oplus z \oplus 1$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Табл. 2.5. Табличное задание функции $f(x, y, z)$

Вторая функция $g(x,y)=x\oplus y$ на нулевом и на единичном наборах принимает значение 0. Найдем для нее двойственную функцию: $g^*(x,y)=\overline{\bar{x}\oplus\bar{y}}=(x\oplus 1)\oplus(y\oplus 1)\oplus 1=x\oplus y\oplus 1$. Из единственности представления функции в виде полинома Жегалкина, получаем, что функция g не самодвойственна. Эта функция не монотонна, так как условие монотонности нарушается на наборах (0,1) и (1,1).

Построим критериальную таблицу Поста (табл. 2.6) для исходной системы функций G.

	T_0	T_1	S	M	L
$xy\to z$	–	+	–	–	–
$x\oplus y$	+	–	–	–	+

Табл. 2.6. Критериальная таблица Поста к примеру 2.6.3

По теореме Поста делаем вывод, что система функций $G=\{f(x,y,z)=xy\to z,\ g(x,y)=x\oplus y\}$ полна.

Проиллюстрируем теперь на примере этой полной системы функций поэтапное доказательство теоремы Поста.

1) Получение констант. Имеем, $f(0,0,0)=f(1,1,1)=1$, следовательно, $f(x,x,x)=1$, т. о. константу 1 можно выразить в виде формулы $xx\to x=1$. Константу 0 получим из функции $g(x,y)\notin T_1$: $g(f(x,x,x),f(x,x,x))=0$ или в виде формулы $(xx\to x)\oplus(xx\to x)=0$.

2) Получение отрицания. По лемме о немонотонной функции имеем $f(x,1,0)=\bar{x}$ или в виде формулы: $x\cdot 1\to 0=\bar{x}$. Аналогично, применяя эту лемму для второй функции, получим, что $g(1,x)=\bar{x}$ или в виде формулы $1\oplus x=\bar{x}$. Подставим вместо 1 ее выражение в виде $f(x,x,x)=1$, тогда получим, что $g(f(x,x,x),x)=\bar{x}$ или в виде формулы: $(xx\to x)\oplus x=\bar{x}$.

3) Получение &. Найдем полином Жегалкина для функции $f(x,y,z)=xy\to z$. СКНФ для нее имеет следующий вид: $\bar{x}\vee\bar{y}\vee z$. Удобно воспользоваться алгебраическим методом для нахождения полинома этой функции: $\overline{\overline{\bar{x}\vee\bar{y}\vee z}}=\overline{x\,y\,\bar{z}}=x\,y\,\bar{z}\oplus 1=x\,y\,z\oplus x\,y\oplus 1$. По лемме о нелинейной

функции имеем $xy = \overline{f(x,y,0)}$. Подставляя выражение константы 0 в виде суперпозиции, получим, что $\overline{xy} = f(x,y,g(f(x,x,x),f(x,x,x)))$ (обозначим правую часть этого выражения через A) или в виде формулы $\overline{xy} = xy \to ((xx \to x) \oplus (xx \to x))$. Наконец, применив выражение отрицания через суперпозицию функций исходной системы, имеем $g(f(x,x,x),A) = xy$. В формульном виде получим, что $(xx \to x) \oplus (xy \to ((xx \to x) \oplus (xx \to x))) = xy$. Таким образом, константы, отрицание и конъюнкцию выразили через функции системы G.

Пример 2.6.4. Выразить функцию $h = x \downarrow \overline{y}$ через функции системы $G = \{f(x,y,z) = xy \to z,\ g(x,y) = x \oplus y\}$.

Решение. Выразим функцию h через конъюнкцию и отрицание: $h = \overline{x} \cdot y$. Используя выражения для отрицания и конъюнкции через функции системы G, которые были получены в примере 2.6.3, получаем $h = g(f(x,x,x),\ f(g(f(x,x,x),x),y,g(f(x,x,x),\ f(x,x,x))))$, или в виде формулы: $h = (xx \to x) \oplus (((xx \to x) \oplus x)y \to ((xx \to x) \oplus (xx \to x))) = \overline{x} \cdot y = x \downarrow \overline{y}$.

Задачи

2.6.1. Выяснить, полна ли система функций. Если полна, то проиллюстрировать поэтапное доказательство теоремы Поста, т. е. получить через суперпозицию функций из этой системы константы, отрицание и конъюнкцию.

1) $\{ x \to yz,\ x(y \leftrightarrow z),\ xy \oplus yz \}$;
2) $\{ (xy \vee xz) \oplus yz,\ x \vee y,\ \overline{\overline{x} \to xy},\ x \leftrightarrow \overline{y} \}$;
3) $\{ xy \vee xz \vee yz,\ xy \to \overline{z},\ (xy \vee xz)(y \to z) \}$;
4) $\{ xy \leftrightarrow xz,\ xy \to \overline{z},\ x \leftrightarrow \overline{y} \}$;
5) $\{ x\overline{z} \vee xy \vee y\overline{z},\ (xy \vee \overline{x}z) \to \overline{y}z,\ \overline{xyz \leftrightarrow xz} \}$;
6) $\{ x \leftrightarrow xz,\ xz \to xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \}$;
7) $\{ x \vee y,\ x \oplus y,\ x \to y,\ 0 \}$.

2.6.2. Выяснить, полна ли система A функций, заданных векторами своих значений:

1) $A=\{f_1=(0110), f_2=(1100\,0011), f_3=(1001\,0110)\}$;
2) $A=\{f_1=(0111), f_2=(01011010), f_3=(01111111)\}$;
3) $A=\{f_1=(0111), f_2=(1001\,0110)\}$;
4) $A=\{f_1=(0101), f_2=(1110\,1000), f_3=(0110\,1001)\}$;
5) $A=\{f_1=(1001), f_2=(1110\,1000)\}$;
6) $A=\{f_1=(11), f_2=(0111), f_3=(0011\,0111)\}$;
7) $A=\{f_1=(10), f_2=(0011\,0111)\}$.

2.6.3. Из полной системы функций A выделить всевозможные базисы:

1) $A=\{1, \bar{x}, xy(x\oplus y), x\oplus y\oplus xy\oplus yz\oplus xz\}$;
2) $A=\{0, x\oplus y, x\to y, xy\leftrightarrow xz\}$;
3) $A=\{0,1, x\oplus y\oplus z, xy\oplus xz\oplus yz, xy\oplus z, x\vee y\}$;
4) $A=\{xy, x\vee y, xy\vee z, x\oplus y, x\to y\}$;
5) $A=\{xy\vee \bar{x}z, \bar{x}, x\to y, 0, x\oplus yz\}$.

2.6.4. Полна ли система $F=\left\{ f(\tilde{x}^n), g(\tilde{x}^n) \right\}$, если:

1) $f\in S-M$, $g\notin L\bigcup S$, $f\to g\equiv 1$;
2) $f\notin T_0\bigcup L$, $g\notin S$, $f\to g\equiv 1$;
3) $f\in \overline{T}_0\bigcup \overline{T}_1$, $g\in M-T_1$, $f\to g\equiv 1$;
4) $f\in SL-T_0$, $g\in M-T_0$, $f\to g\equiv 1$?

2.6.5. Выяснить, полна ли система функций $A=\{f,g,h\}$, если выполнены следующие условия: $f\notin L\bigcup T_0\,T_1$, $g\in M-L$, $f\to g\equiv 1$, $f\vee h\equiv 1$?

2.6.6. Привести примеры базисов, содержащих одну, две, три и четыре функции.

2.6.7. Перечислить все различные базисы, содержащие только функции, существенно зависящие от двух переменных.

2.6.8. Найти все функции Шеффера от двух переменных.

2.6.9. Доказать, что если $f\notin T_0\bigcup T_1\bigcup S$, то f – функция Шеффера.

2.6.10. Сколько существует функций Шеффера от n переменных?

2.6.11. Верно ли, что если $f \notin L \bigcup S \bigcup M$, то f полна?

2.6.12. Опровергнуть, что

1) если $f \notin (T_0 \bigcup T_1) - S$, то $f \in L \bigcup M$;
2) если $f \in \overline{T_0}\ \ \overline{T_1}\ \ \overline{M}$, то f – функция Шеффера;
3) если $f \notin T_0 \bigcup S \bigcup M$, то $f \in L\ \overline{T_1}\ S\ \overline{M}$;
4) если $f \notin L \bigcup S \bigcup M$, то f – функция Шеффера.

2.6.13. Выяснить, полна ли система функций A? В случае положительного ответа, привести пример полной системы функций из множества A.

1) $A = P_2 - (T_0 \bigcup T_1 \bigcup L \bigcup S \bigcup M)$;
2) $A = (M - T_0) \bigcup (L - S)$;
3) $A = (S \cap M) \cup (L - M)$;
4) $A = (L \cap T_0 \cap T_1) \cup (S - (T_0 \cup T_1))$;
5) $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;
6) $A = (L \cap T_1) \cup (S - T_0)$;
7) $A = (M - T_0) \bigcup (S - L)$.

2.6.14. Пусть f, g, h – попарно различные функции, существенно зависящие от двух переменных. Будет ли полной система функций $\{\bar{x},\ f, g, h\}$?

2.6.15. Верно ли, что $f \in [g]$ или $g \in [f]$?

1) $f = x \oplus y$, $g = xy$;
2) $f = x \oplus y$, $g = x \to y$;
3) $f = x \to y$, $g = xy$;
4) $f = x \to y$, $g = x \vee y$;
5) $f = x \leftrightarrow y$, $g = x \vee y$;
6) $f = x \leftrightarrow y$, $g = xy$;
7) $f = x \to y$, $g = xy \oplus xz \oplus yz$;
8) $f = x \oplus y$, $g = xy \oplus xz \oplus yz$;

9) $f = x \oplus y$, $g = xy \to z$;

10) $f = x \to y$, $g = xy \oplus z$;

11) $f = x \leftrightarrow y$, $g = xy \oplus z$;

12) $f = x \to y$, $g = \bar{x}$.

2.6.16. Доказать, что имеют место следующие включения:

1) $T_0 S \subseteq T_1$;

2) $T_0 T_1 L \subseteq S$;

3) $M \subseteq T_0 \cup T_1$;

4) $M \subseteq T_0 \cup L$;

5) $MS \subseteq T_0$;

6) $L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup S$.

2.6.17. Проверить, что если $U = P_2$ (множество всех функций алгебры логики), то на диаграмме Венна для системы замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L пустыми будут в точности те клетки, которые в таблице 2.7 помечены символом $\varnothing$. Привести примеры функций каждого из остальных типов.

	T_0				$\overline{T_0}$				
	T_1		$\overline{T_1}$		T_1		$\overline{T_1}$		
L		$\varnothing$	$\varnothing$		$\varnothing$		$\varnothing$	$\varnothing$	M
L		$\varnothing$	$\varnothing$		$\varnothing$			$\varnothing$	$\overline{M}$
$\overline{L}$			$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	M
$\overline{L}$			$\varnothing$		$\varnothing$				$\overline{M}$
	S	$\overline{S}$	S	$\overline{S}$	S	$\overline{S}$	S	$\overline{S}$	

Табл. 2.7. Критериальная таблица Поста к примеру 2.6.17

2.6.18. Подсчитать число функций $f\left(\tilde{x}^n\right)$, принадлежащих классу A:

1) $A = LS$;

2) $A = LSM$;

3) $A = LST_0$;

4) $A = LST_0T_1$;

5) $A = MLST_0$;

6) $A = MLST_0T_1$;

7) $A = L\bar{S}T_0T_1$;

8) $A = LS\bar{T_0}\bar{T_1}$;

9) $A = \bar{L}ST_0T_1$;

10) $A = LT_0T_1$.

Глава 3. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. Сокращенная д.н.ф. и основные методы ее построения

Импликантом функции $f(\tilde{x}^n)$ называется такая элементарная конъюнкция K над множеством переменных $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, что $K \vee f(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$. Импликант K функции $f(\tilde{x}^n)$ называется ***простым импликантом***, если после отбрасывания любой переменной получается конъюнкция, не являющаяся импликантом функции $f(\tilde{x}^n)$. Дизъюнкция всех простых импликантов функции $f(\tilde{x}^n)$ называется ***сокращенной д.н.ф.*** функции $f(\tilde{x}^n)$.

Пример 3.1.1. Из множества $A = \{xyz, xy\bar{z}, xy, xz, x\}$ элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функции $f(x, y, z) = x(y \vee z)$.

Решение. Конъюнкция xyz является импликантом функции $f = x(y \vee z)$, так как $xyz \vee x(y \vee z) = x(y \vee z)$. Если из нее вычеркнуть переменную y, полученная конъюнкция xz снова будет импликантом, т. к. $xz \vee x(y \vee z) = x(y \vee z)$. Отсюда следует, что конъюнкция xyz не является простым импликантом. Аналогично можно показать, что конъюнкция $xy\bar{z}$ является импликантом и не является простым импликантом. Конъюнкции xy и xz являются простыми импликантами, т. к. после отбрасывания любой переменной получаются конъюнкции, не являющиеся импликантами. Конъюнкция x не является импликантом функции $f = x(y \vee z)$, так как $x \vee f \neq f$.

Рассмотрим теперь метод построения сокращенной д.н.ф. функции по ее к.н.ф. (метод Нельсона). На первом этапе в заданной к.н.ф. раскрываются скобки с использованием закона дистрибутивности. После этого на втором этапе удаляются переменные и конъюнкции с использованием правил $x\bar{x}K = 0, xxK = xK, K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

Пример 3.1.2. Построить сокращенную д.н.ф. по заданной к.н.ф.:

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_3).$$

Решение. После раскрытия скобок получаем

$$f = x_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_3 .$$

На следующем этапе получаем сокращенную д.н.ф. $f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3$.

Пусть B^n – ***единичный*** n***-мерный куб, вершинами*** которого являются всевозможные наборы $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, состоящие из нулей и единиц. Рассмотрим множество $N_f = \left\{ \tilde{\alpha}^n \in B^n \;\middle|\; f(\tilde{\alpha}^n) = 1 \right\}$, т. е. множество таких вершин n-мерного куба B^n, на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в 1.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ – заданные константы 0 или 1. $(n-k)$***-мерной гранью*** n-мерного куба B^n называется множество всех вершин $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ куба таких, что $\alpha_{i_1} = \sigma_1, \alpha_{i_2} = \sigma_2, ..., \alpha_{i_k} = \sigma_k$.

Легко понять, что множество N_K, соответствующее элементарной конъюнкции $K(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_k}^{\sigma_k}$, представляет собой $(n-k)$-мерную грань куба B^n, состоящую из всех вершин $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, для которых $\alpha_{i_1} = \sigma_1, \alpha_{i_2} = \sigma_2, ..., \alpha_{i_k} = \sigma_k$, а значения остальных $n-k$ компонент могут быть выбраны произвольно.

Число k называется ***рангом*** этой грани. Грань ранга k содержит 2^{n-k} вершин. В частности, грань ранга n вырождается в вершину, а грань ранга $n-1$ называется ***ребром*** куба.

Грань N_K, содержащаяся в N_f, называется ***максимальной*** (относительно N_f), если не существует грани $N_{K'}$ такой, что:

1) $N_K \subseteq N_{K'} \subseteq N_f$;

2) Размерность грани $N_{K'}$ больше размерности грани N_K.

Пример 3.1.3. Пусть функция $f(\tilde{x}^3)$ задана вектором (10001011). Определить все максимальные грани множества N_f.

Решение. На рис. 3.1 отмечены вершины множества N_f ={000, 100, 110, 111}.

Вершины {000, 100} образуют максимальную одномерную грань, которой соответствует конъюнкция $\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Вершины {100, 110} образуют максимальную одномерную грань, которой соответствует конъюнкция $x_1\bar{x}_3$.

Вершины {110, 111} образуют максимальную одномерную грань, которой соответствует конъюнкция $x_1 x_2$.

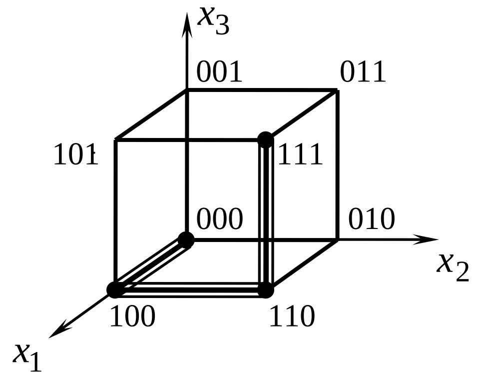

Рис. 3.1. Функция $f(\tilde{x}^3)$ =(10001011)

Теперь заметим, что конъюнкция K, соответствующая максимальной грани N_K множества N_f, определяет простой импликант функции $f(\tilde{x}^n)$.

Для небольших значений n сокращенную д.н.ф. функции $f(\tilde{x}^n)$ можно найти , исходя из геометрического изображения множества N_f в единичном n-мерном кубе B^n. С этой целью в кубе B^n отыскиваются грани максимальной размерности, целиком содержащиеся в множестве N_f, а затем составляется д.н.ф. из конъюнкций, соответствующих этим граням.

Пример 3.1.4. Пусть функция $f(\tilde{x}^3)$ задана вектором (00101111). Требуется найти ее сокращенную д.н.ф.

Решение. Отметим вершины множества N_f ={010, 100, 101, 110, 111)} в кубе B^3 (см. рис. 3.2). Замечаем, что множество вершин {000, 100} образует одномерную грань (ребро) куба B^3, которой соответствует конъюнкция $\bar{x}_2\bar{x}_3$. Множество вершин {100, 101, 110, 111} образует двумерную грань ранга 1, которой соответствует конъюнкция x_1. Указанные грани являются максимальными, следовательно, получаем сокращенную д.н.ф. заданной функции в виде $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$.

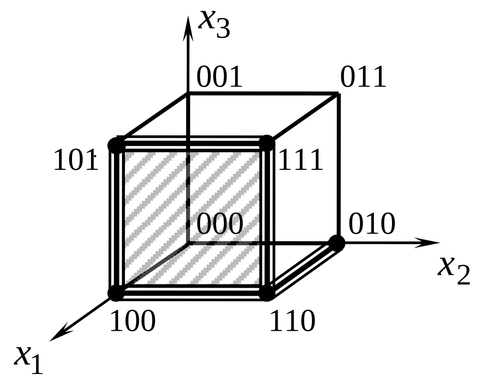

Рис. 3.2. Функция $f(\tilde{x}^3)$ =(00101111)

Задачи

3.1.1. Из заданного множества A элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функции f:

1) $A=\{x_1, \bar{x}_3, x_1x_2, x_2\bar{x}_3\}$, $f(\tilde{x}^3)=(0010\,1111)$;

2) $A=\{x_1\bar{x}_2, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$, $f(\tilde{x}^3)=(0111\,1110)$;

3) $A=\{x_1\bar{x}_3, x_1x_3, x_2\}$, $f(\tilde{x}^3)=(0011\,1011)$;

4) $A=\{x_1\bar{x}_2, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_2, x_1x_2x_3\}$, $f(\tilde{x}^3)=(1110\,1111)$.

3.1.2. Построить сокращенную д.н.ф. по заданной к.н.ф.:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$;

3) $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

4) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$;

5) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$.

3.1.3. Изобразив множество N_f функции $f(\tilde{x}^n)$ в B^n, выделить максимальные грани и построить сокращенную д.н.ф.:

1) $f(\tilde{x}^3)$=(11110100);	2) $f(\tilde{x}^3)$=(01010011);

3) $f(\tilde{x}^3)$=(11010011);	4) $f(\tilde{x}^3)$=(11100111);

5) $f(\tilde{x}^4)=(0001011111\ 101111)$;	6) $f(\tilde{x}^4)$=(1111100001001100);

7) $f(\tilde{x}^4)$=(1110011000000111);	8) $f(\tilde{x}^4)$=(1111111111111000).

3.1.4. Построить сокращенную д.н.ф. функции $f(\tilde{x}^n)$:

1) $f(\tilde{x}^3)$=(01010111);	2) $f(\tilde{x}^3)$=(11011011);

3) $f(\tilde{x}^3)$=(10110000);	4) $f(\tilde{x}^3)$=(11101111);

5) $f(\tilde{x}^4)=(0001101111\ 011111)$;	6) $f(\tilde{x}^4)$=(0011110111111101);

7) $f(\tilde{x}^4)$=(0011110111011110);	8) $f(\tilde{x}^4)$=(0010101111011111).

3.1.5. Найти длину сокращенной д.н.ф. функции $f(\tilde{x}^n)$:

1) $f(\tilde{x}^n)=x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n$;

3) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$;

4) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee \ldots \vee x_k)(x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n)$;

5) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$;

6) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \bar{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$;

7) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)\ldots(x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$.

Литература

1. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. − 416 с.
2. Киселева Л. Г., Смирнова Т. Г. Логические функции. – Учебно-методическое пособие, Нижний Новгород: издательство Нижегородского госуниверситета, 2005. − 52 с.
3. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. − СПб: издательство «Лань», 2004. − 400 с.
4. Марков А. А. Введение в теорию кодирования. − М.: Наука, 1982. − 192 с.
5. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. – М.: Наука, 1980. − 400 с.
6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 2000. − 384 с.

Оглавление

Лариса Георгиевна **Киселева**

Татьяна Геннадьевна **Смирнова**

ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.