

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет

**Е.А. Анашкина**

# **ДИСПЕРСИОННЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ МИКРОРЕЗОНАТОРОВ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ СТЕКОЛ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета  
«Высшая школа общей и прикладной физики»  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки  
03.03.02 «Физика» (бакалавриат) и 03.04.02 «Физика» (магистратура)

Нижний Новгород  
2019

УДК 535.015, 535.399, 535.329  
ББК 22.343  
А64

А64 Анашкина Е.А., ДИСПЕРСИОННЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ МИКРОРЕЗОНАТОРОВ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ СТЕКОЛ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 30с.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, **А.А. Силаев**

В учебно-методическом пособии рассматриваются приближенные методы расчета дисперсионных и нелинейных характеристик сферических микрорезонаторов мод шепчущей галереи и приводятся примеры анализа свойств микрорезонаторов на основе кварцевых, германосиликатных, германатных, фторидных, теллуридных и халькогенидных стекол в области их прозрачности в ближнем и среднем ИК диапазонах. Также в пособии приведен ряд задач для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов факультета ННГУ «Высшая школа общей и прикладной физики», обучающихся по направлениям 03.03.02 «Физика» (бакалавриат) и 03.04.02 «Физика» (магистратура).

Подготовлено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-72-00176) и Минобрнауки РФ (договор № 14.W03.31.0032).

Ответственный за выпуск:  
председатель методической комиссии факультета Высшей школы общей и прикладной физики ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **А.М. Фейгин**

УДК 535.015, 535.399, 535.329  
ББК 22.343

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2019

## Содержание

1. Введение	4
2. Теоретическое описание сферических микрорезонаторов мод шепчущей галереи	6
3. Свойства стекол для микрорезонаторов	12
4. Анализ дисперсионных и нелинейных свойств микрорезонаторов	16
5. Заключение	26
Задачи	27
Список литературы	28

# 1. Введение

Микрорезонаторы мод шепчущей галереи (МШГ) [1] находят применение в различных фундаментальных и прикладных задачах, таких как создание частотных оптических гребенок, микролазеров, оптических фильтров и переключателей, датчиков и сенсоров [1-5]. Популярным направлением в настоящее время является детектирование биомолекул и вирусов, где информация о наличии и размере частицы получается посредством измерения сдвига резонансной длины волны резонатора с МШГ. Так, в 2016 году было продемонстрировано детектирование частиц с радиусом 2.5 нм с помощью микротороидного резонатора с МШГ [6]. Пассивные устройства на основе резонаторов МШГ используются в схемах лазеров для фильтрации их спектра и стабилизации частоты. Так, например, ширину спектральной линии диодного лазера возможно уменьшить более чем в 10000 раз до значения 200 Гц [7]. Активно развивающимся направлением использования микрорезонаторов является генерация оптических частотных гребенок. Не так давно было предложено использовать параметрическое преобразование частоты непрерывного узкополосного лазера в высокодобротных МШГ резонаторах различных конфигураций [8, 9].

В настоящее время изготавливают микрорезонаторы с различными геометрическими формами: сферические, дисковые, бутылочные, тороидные и др. [1]. Их характерный размер составляет от нескольких десятков до нескольких сотен микрон, иногда до 1-2 мм. В качестве материалов для микрорезонаторов могут быть использованы как различные стекла, наиболее распространенными из которых являются кварцевые [5], так и кристаллы [10]. Стекланные микрорезонаторы можно изготовить методом нагрева волокна (включая локальный нагрев CO<sub>2</sub> лазером) [5]. При изготовлении кристаллических микрорезонаторов применяют опто-механические методы [10]. Наиболее широко изучаются кварцевые микросферы с МШГ по причине простоты их изготовления из стандартных телекоммуникационных волокон (см. обзор [5] и ссылки в нем). Микрорезонаторы на основе мягких стекол (теллуритных, фторидных, халькогенидных) применяются в основном в ближнем ИК диапазоне до 2 мкм [11-16], хотя наиболее актуальным для них является диапазон за 2 мкм, где они прозрачны, а кварцевые стекла имеют большие оптические потери [17]. В качестве примера использования микрорезонаторов на основе мягких стекол в диапазоне длин волн свыше 2 мкм отметим микролазеры, генерирующие на 2.7 мкм, на основе легированных эрбием фторидных стекол [18, 19]

Важными характеристиками микрорезонаторов являются дисперсия и нелинейность. Например, при генерации оптических частотных гребенок в режиме диссипативного солитона, где в последние годы достигнут значительный прогресс [20], должен выполняться двойной баланс: керровской нелинейности и аномальной дисперсии, а также диссипации и усиления [21].

Поэтому при разработке микрорезонаторов особое внимание уделяется нелинейности и дисперсии, вклад в которую вносят как материальная, так и геометрическая составляющие [22].

В данном учебно-методическом пособии рассматриваются приближенные методы расчета дисперсионных и нелинейных характеристик сферических микрорезонаторов МШГ, приводится анализ свойств микрорезонаторов на основе кварцевых, германосиликатных, германатных, фторидных, теллуритных и халькогенидных стекол в области их прозрачности в ближнем и среднем ИК диапазонах. Также в пособии приведен ряд задач для самостоятельной работы.

## 2. Теоретическое описание сферических микрорезонаторов МШГ

Взаимодействие света со стеклянным микрорезонатором описывается в рамках уравнений Максвелла, решение которых в случае пространства с диэлектрическим шаром можно свести к решению скалярного уравнения Гельмгольца для так называемых потенциалов Дебая [1, 5, 23]. В сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  уравнение Гельмгольца принимает вид [1, 5, 23]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0, \quad (1)$$

где  $k = k_0 n$  – постоянная распространения внутри шара,  $k = k_0 = 2\pi\nu/c$  – постоянная распространения вне шара,  $c$  – скорость света,  $\nu$  – частота излучения. Компоненты электрического и магнитного полей выражаются следующим образом для ТМ – мод:

$$\begin{aligned} E_r &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) U, & H_r &= 0, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, & H_\theta &= -ik \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}, & H_\varphi &= ik \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (2)$$

и для ТЕ – мод:

$$\begin{aligned} H_r &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) V, & E_r &= 0, \\ H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}, & E_\theta &= ik \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ H_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}, & E_\varphi &= -ik \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (3)$$

где функция  $V$  удовлетворяет тому же уравнению (1), что и функция  $U$ . Хотя функции  $U$  и  $V$  определяются одним и тем же уравнением, их принято считать

двумя разными потенциалами Дебая, т.к. они описывают поля различной структуры (ТМ – моды и ТЕ – моды соответственно).

Решение уравнения Гельмгольца можно найти методом разделения переменных:

$$U_{l,m} = Z(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение Гельмгольца (1) и выделяя члены, не зависящие от координат, вводят константы разделения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ}{dr} \right) + k^2 r^2 &= \frac{-1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right] = C_l, \\ \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + C_l \sin^2 \theta &= \frac{-1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = C_m. \end{aligned} \quad (5)$$

Простое гармоническое уравнение для  $\Phi(\varphi)$  имеет пару независимых решений:

$$\Phi = \exp(\pm i\sqrt{C_m}\varphi), \quad (6)$$

и из условия периодичности по углу  $\varphi$  следует, что  $C_m = m^2$ , где  $m$  – целое число. Заменой переменных  $x = kr$  и  $\eta = \cos\theta$  при выборе константы разделения  $C_l = l(l+1)$ , где  $l \geq m$  – положительное число, оставшиеся два уравнения сводятся к известным уравнениям для сферических функций Бесселя и полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dZ}{dx} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] Z &= 0, \\ (1 - \eta^2) \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Theta}{d\eta} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Угловая часть  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  называется шаровой функцией, ее обычно нормируют на единицу:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{lm} Y_{l'm'}^* d\varphi d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$Y_{lm} = C_{lm} P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi),$$

$$C_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} \quad (8)$$

$$\nabla^2 Y_{lm} = \frac{-l(l+1)}{r^2} Y_{lm}.$$

Функции  $P_l^m$  называются присоединенными полиномами Лежандра. Индекс  $l$  называется полярным индексом или индексом (номером) моды (в приближении волновой оптики он соответствует числу длин волн, укладывающихся на большом круге резонатора радиусом  $l \approx 2\pi nR/\lambda$ , здесь и далее  $R$  – радиус шара), число  $m$  называется азимутальным индексом. Волны  $\sim \exp(i/m/\varphi)$  и  $\sim \exp(-i/m/\varphi)$  соответствуют двум вырожденным модам, бегущим по окружности резонатора в экваториальной (азимутальной) плоскости в противоположных направлениях. Индекс  $m$  принимает  $2l + 1$  значений от  $-l$  до  $+l$ .

По физическому смыслу решение вне шара должно иметь асимптотический вид убегающей волны, поскольку не может существовать волна, приходящая из бесконечности. Значит, вне шара решения должны выражаться через функции Ганкеля первого рода, которые при больших значениях аргумента имеют асимптотический вид убегающей волны с амплитудой, убывающей обратно пропорционально расстоянию. В итоге решение внутри диэлектрического шара ( $r \leq R$ ) имеет вид

$$U_{ml}^j(r, \theta, \varphi) = B_j P_l^m(\cos \theta) \sqrt{kr} J_{l+1/2}(kr) \exp(\pm im\varphi), \quad (9)$$

а вне шара ( $r > R$ ):

$$U_{ml}^e(r, \theta, \varphi) = B_e P_l^m(\cos \theta) \sqrt{kr} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0 r) \exp(\pm im\varphi), \quad (10)$$

где  $B_{j,e}$  – произвольные постоянные,  $J_{l+1/2}$  – функция Бесселя порядка  $(l+1/2)$ ,  $H_{l+1/2}^{(1)}$  – функция Ганкеля первого рода порядка  $(l+1/2)$ .

Явные выражения для электрического и магнитного полей имеют громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся. Их можно найти, например, в работах [1, 24]. Граничные условия при  $r = R$ , заключающиеся в непрерывности тангенциальных компонент полей, позволяют найти отношение констант [24]:



$$\frac{B_j}{B_e} = n^{-5/2} \frac{H_{l+1}^{(1)}(k_0 R)}{J_{l+1}[k_0 R n]}, \quad (11)$$

одна из которых остается свободной. Она определяется мощностью источников, возбуждающих волны. Граничные условия при  $r = R$  также позволяют получить характеристические уравнения, определяющие допустимые значения параметра  $k_0 R$ . Характеристическое уравнение для ТМ – мод имеет вид [24]

$$\frac{[(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)]'}{(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)} = n \frac{[(k_0 R)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0 R)]'}{(k_0 R)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0 R)}, \quad (12)$$

а для ТЕ – мод –

$$\frac{[(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)]'}{(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)} = \frac{1}{n} \frac{[(k_0 R)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0 R)]'}{(k_0 R)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0 R)}, \quad (13)$$

где штрих означает полную производную по аргументу.

Помимо индексов  $l$  и  $m$  вводят также третий индекс  $q$ , указывающий номер корня характеристического уравнения. Чем больше индекс  $q$ , тем больше нулей функции Бесселя находится внутри шара, т.е. индекс  $q$  соответствует числу узлов данной моды, лежащих внутри шара. Отметим, что характеристическое уравнение не зависит от индекса  $m$ , так что моды диэлектрического тела идеальной шаровой формы оказываются вырожденными по этому индексу [24]. Это вырождение снимается при отклонении формы от шаровой.

Мы рассматриваем фундаментальные моды шепчущей галереи, для которых  $l = m$  и  $q = 1$  [1, 24]. Собственные частоты  $\nu_l$ , определяемые из корней характеристических уравнений, могут быть оценены по аппроксимационным формулам [24] для ТМ – мод

$$\nu_l = \frac{c}{2\pi R n} \left[ (l + 1/2) + 1.85576(l + 1/2)^{1/3} - \frac{1}{n^2} \left( \frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^{1/2} \right] \quad (14)$$

и ТЕ – мод

$$v_l = \frac{c}{2\pi R n} \left[ (l + 1/2) + 1.85576(l + 1/2)^{1/3} - \left( \frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^{1/2} \right]. \quad (15)$$

Поскольку входящий в выражения (14) и (15) показатель преломления  $n$  сам зависит от частоты света, то при нахождении собственных частот можно применять итерационную процедуру: оценить  $v_l$  при приближенно известном значении  $n$ , далее взять показатель преломления на найденной в нулевом приближении частоте, подставить в (14) и (15), и процедуру повторить. Данная процедура быстро сходится. Обычно достаточно ~4-5 итераций.

Важной линейной характеристикой микрорезонаторов является дисперсия. Дисперсия обусловлена как зависимостью показателя преломления материала микрорезонатора от длины волны (частоты) света вследствие наличия резонансных частот, на которых диэлектрическая среда взаимодействует с электромагнитной волной, так и волноводными эффектами [22]. Расчет коэффициента квадратичной дисперсии  $\beta_2$  с учетом материального и геометрического вкладов осуществлялся следующим образом:

$$\beta_2 = -\frac{1}{4\pi^2 R} \frac{\Delta(\Delta v_l)}{(\Delta v_l)^3}, \quad (16)$$

где

$$\Delta v_l = \frac{v_{l+1} - v_{l-1}}{2}; \quad \Delta(\Delta v_l) = v_{l+1} - 2v_l + v_{l-1}. \quad (17)$$

При генерации оптических частотных гребенок важную роль играет длина волны нулевой дисперсии ZDW (zero dispersion wavelength), т.е. такая длина волны, при которой величина  $\beta_2$  обращается в нуль. Случай  $\beta_2 > 0$  соответствует нормальной дисперсии, а  $\beta_2 < 0$  – аномальной дисперсии.

Другой важной характеристикой микрорезонаторов является эффективный объем мод. Вводят разные определения этой величины, мы будем использовать следующее [25]:

$$V_{eff} = \frac{\left( \int E^2 d^3 \vec{r} \right)^2}{\int E^4 d^3 \vec{r}}, \quad (18)$$

которое может быть оценено для фундаментальных мод по следующей аппроксимационной формуле [25]:

$$V_{eff} \approx 3.4\pi^{3/2} [\lambda / (2\pi n)]^3 l^{11/6}. \quad (19)$$

Нелинейные эффекты в микрорезонаторах на основе стекол обусловлены кубичной (керровской) нелинейностью. Добавка  $\Delta n$  к показателю преломления зависит от интенсивности электромагнитной волны  $I$  следующим образом:

$$\Delta n = n_2 I, \quad (20)$$

где  $n_2$  – нелинейный показатель преломления.

Нелинейные коэффициенты сферических микрорезонаторов  $\gamma$  зависят от нелинейного показателя преломления, длины волны и размера моды следующим образом [20]:

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_2}{V_{eff} / (2\pi R)}. \quad (21)$$

### 3. Свойства стекол для микрорезонаторов

Микрорезонаторы изготавливают из разных стекол, линейные и нелинейные свойства которых могут сильно отличаться. Ниже дан краткий обзор материалов для ближнего и среднего ИК диапазонов, рассматриваемых в данном учебно-методическом пособии, приведены основные дисперсионные и нелинейные характеристики.

В настоящее время для оптических задач широко используются кварцевые стекла на основе диоксида кремния  $\text{SiO}_2$ . Они могут быть прозрачны в широком диапазоне длин волн, включая видимый и ближний инфракрасный (ИК). Кварцевые стекла характеризуются высокой термической стойкостью, очень низким коэффициентом теплового расширения, химической стабильностью, инертностью к большинству веществ, включая практически все химические кислоты. Они способны выдерживать воздействие лазерного излучения высокой интенсивности. Кварцевые волокна используются в телекоммуникациях благодаря низким потерям ( $\sim 0.2$  дБ/км на длине волны 1.55 мкм) [26]. Нелинейный показатель преломления кварцевых стекол составляет  $\sim 2.2 \cdot 10^{-20}$  м<sup>2</sup>/Вт, что позволяет наблюдать нелинейно-оптические эффекты в элементах на их основе [26]. Но, отметим, для приложений в среднем ИК кварцевые стекла не подходят: при длинах волн  $> 2.2\text{-}2.3$  мкм их потери начинают резко возрастать, являясь ограничивающим фактором в указанном диапазоне.

Помимо стекол из плавленого кварца, также изготавливают германосиликатные стекла, содержащие диоксид кремния и диоксид германия. Существующие в настоящее время технологии позволяют создавать стекла высокого качества  $(1-x)\text{SiO}_2-x\text{GeO}_2$  с любым содержанием диоксида германия  $\text{GeO}_2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) [27, 28]. Область прозрачности стекол  $(1-x)\text{SiO}_2-x\text{GeO}_2$  при больших значениях  $x$  простирается за 3 мкм [27], что обуславливает их потенциальную применимость как в телекоммуникационном диапазоне, так и в диапазоне длин волн 2-3 мкм. Германосиликатные стекла обладают более высоким нелинейным показателем преломления по сравнению с кварцевым стеклом и смещенным нулем дисперсии в длинноволновую область.

Для среднего ИК диапазона могут быть использованы так называемые мягкие стекла, к которым относятся теллуридные, фторидные и халькогенидные [17]. Они имеют низкую температуру стеклования ( $\sim 200\text{-}400$  °С), поэтому к ним неприменимы многие технологии, существующие для кварцевых стекол, температура стеклования которых составляет  $\sim 1100$  °С.

Теллуридные стекла на основе диоксида теллура  $\text{TeO}_2$  прозрачны в ближнем и среднем ИК диапазонах (до  $\sim 4\text{-}5$  мкм), обладают высокой химической устойчивостью, имеют высокий нелинейный показатель преломления (в 10-30 раз больший, чем плавленый кварц), многие составы устойчивы к кристаллизации, например  $\text{TeO}_2\text{-WO}_3\text{-La}_2\text{O}_3$  [17, 29-31].

Фторидные бескислородные стекла, наиболее распространенными среди которых распространены среди которых являются составы ZBLAN ( $ZrF_4$ - $BaF_2$ - $LaF_3$ - $AlF_3$ - $NaF$ ), прозрачны до  $\sim 5$ -6 мкм [17, 32]. Они обладают отличными оптическими свойствами, способны выдерживать действие лазерного излучения с высокой интенсивностью, но имеют ряд существенных ограничений, среди которых взаимодействие с атмосферной влагой [17]. Их нелинейный показатель преломления незначительно больше, чем для кварцевых стекол.

Халькогенидные бескислородные стекла состоят из халькогенов (S, Se, и Te) и других химических элементов, таких как As, Ge, Sb, и/или Ga. Халькогенидные стекла обладают высокой химической устойчивостью, устойчивостью к атмосферной влаге, низкими оптическими потерями, полосой прозрачности до  $\sim 10$  мкм (а для отдельных составов и до  $\sim 20$  мкм) [17, 33, 34]. Они обладают рекордно большим нелинейным показателем преломления (в  $\sim 100$ -500 раз большим, чем кварцевое стекло).

Зависимости показателей преломления стекол от длины волны  $\lambda$  можно определить по формуле Sellmeiera [26]:

$$n^2 = A + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}. \quad (22)$$

Константы  $A$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  для рассматриваемых материалов приведены в Таблице 1.

Отметим, что для германосиликатных стекол  $(1-x)SiO_2-xGeO_2$  с любым содержанием диоксида германия (в диапазоне  $x = 0$ -1) зависимость показателя преломления от  $x$  и длины волны может быть выражена через коэффициенты  $B_i$ ,  $C_i$  для кварцевого и германатного стекол следующим образом [35]:

$$n^2(x, \lambda) = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{[(1-x)B_i^{SiO_2} + xB_i^{GeO_2}] \lambda^2}{\lambda^2 - [(1-x)\sqrt{C_i^{SiO_2}} + x\sqrt{C_i^{GeO_2}}]^2}, \quad (23)$$

где верхний индекс определяет состав стекла.

Материальная квадратичная дисперсия стекол  $\beta_2$  связана с постоянной распространения  $\beta = n \cdot \omega / c$  следующим образом [26]:

$$\beta_2 = \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} = \frac{1}{c} \left( 2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n}{d\omega^2} \right) \approx \frac{\omega}{c} \frac{d^2 n}{d\omega^2}, \quad (24)$$

где  $\omega = 2\pi\nu$  – круговая частота.

В Таблице 2 приведены значения линейных и нелинейных показателей преломления, а также квадратичной дисперсии на телекоммуникационной длине волне 1.55 мкм и ZDW (длины волны нулевой дисперсии). Линейные показатели преломления получены по формуле Селлмейера (22) с учетом констант, приведенных в Таблице 1. Дисперсия рассчитана по формуле (24).

Таблица 1. Коэффициенты Селлмейера для различных стекол.

$A$	$B_1$	$C_1$ (мкм <sup>2</sup> )	$B_2$	$C_2$ (мкм <sup>2</sup> )	$B_3$	$C_3$ (мкм <sup>2</sup> )
Кварцевое SiO <sub>2</sub> [35]						
1	0.69616	0.00467	0.40794	0.01351	0.89748	97.934
Германатное GeO <sub>2</sub> [35]						
1	0.80686	0.00475	0.71816	0.02371	0.85417	140.231
Германосиликатное 0.8SiO <sub>2</sub> -0.2GeO <sub>2</sub> [35]						
1	0.71830	0.00469	0.46998	0.01532	0.88881	105.788
Германосиликатное 0.2SiO <sub>2</sub> -0.8GeO <sub>2</sub> [35]						
1	0.78472	0.00474	0.65612	0.02144	0.86283	131.166
Фторидное ZBLAN [32]						
1	1.22514	0.00804	1.52898	457.2113		
Теллуритное TeO <sub>2</sub> -WO <sub>3</sub> -La <sub>2</sub> O <sub>3</sub> [36]						
2.49099	1.9515	0.05674	3.02126	225		
Халькогенидное Ge-As-Ga-Se [37]						
1.485	4.942	0.0854	1.124	1539		
Халькогенидное As <sub>2</sub> Se <sub>3</sub> [38]						
1	4.99487	0.0584	0.12072	361	1.71237	0.2336
Халькогенидное As <sub>2</sub> S <sub>3</sub> [39]						
$A$	$B_1$	$C_1$ (мкм <sup>2</sup> )	$B_2$	$C_2$ (мкм <sup>2</sup> )	$B_3$	$C_3$ (мкм <sup>2</sup> )
1	1.89837	0.0225	1.92230	0.0625	0.87651	0.1225
			$B_4$	$C_4$ (мкм <sup>2</sup> )	$B_5$	$C_5$ (мкм <sup>2</sup> )
				0.11887	0.2025	750

Таблица 2. Линейные и нелинейные свойства различных стекол.

Стекло	$n$ 1.55 мкм	$n_2 / n_2^{SiO_2}$ 1.55 мкм	$\beta_2$ (пс <sup>2</sup> /км) 1.55 мкм	ZDW (мкм)
Кварцевое SiO <sub>2</sub>	1.44	1.0 [40]	-28	1.27
Германатное GeO <sub>2</sub>	1.59	2.3 [40]	18	1.74
Германосиликатное 0.8SiO <sub>2</sub> -0.2GeO <sub>2</sub>	1.47	1.3 [40]	-19	1.36
Германосиликатное 0.2SiO <sub>2</sub> -0.8GeO <sub>2</sub>	1.56	2 [40]	9	1.64
Фторидное ZBLAN	1.49	1.2 [17]	8	1.71
Теллуритное TeO <sub>2</sub> -WO <sub>3</sub>	2.11	27 [36]	150	2.17
Халькогенидное Ge-As-Ga-Se	2.57	~400 [33]	630	6.22
Халькогенидное As <sub>2</sub> Se <sub>3</sub>	2.83	~500 [33]	1050	7.22
Халькогенидное As <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	2.44	~100 [33]	460	4.89

## 4. Анализ дисперсионных и нелинейных свойств микрорезонаторов

Рассмотрим ТЕ-моды микрорезонаторов, поскольку при стандартном заводе лазерного излучения через волоконную перетяжку фундаментальная мода волокна  $HE_{11}$  возбуждает именно ТЕ фундаментальные МШГ сферических микрорезонаторов [41]. Кроме того, для анализируемых параметров характеристики ТЕ и ТМ мод достаточно близки.

Расчет собственных частот осуществляется по аппроксимационной формуле (15) итерационным способом, описанным в пункте 2. Показатели преломления различных стекол определяются по формуле Селлмейера (22) с учетом констант, приведенных в таблице 1. Анализируются микросферы с радиусами 50, 100, 150, 200 и 250 мкм. После нахождения собственных частот фундаментальных МШГ выполняется расчет коэффициентов квадратичной дисперсии по формуле (16) с учетом выражений (17). Далее оцениваются эффективные объемы мод по аппроксимационной формуле (19), после чего оцениваются нелинейные коэффициенты по формуле (21) с учетом нелинейных показателей преломления, приведенных в таблице 2. Далее строятся зависимости найденных параметров от длины волны. Строго говоря, все обсуждаемые характеристики микрорезонаторов определены в дискретном наборе точек, соответствующих натуральным значениям индекса  $l$ . Однако для наглядности и простоты восприятия найденные в соседних точках значения интересующих нас параметров соединены отрезками прямых, поэтому графики всех функций, представленные на рисунках (1) – (9) для различных стекол, непрерывны. А именно, на рисунках (1) – (9) показаны численные зависимости индексов  $l$  фундаментальных МШГ, квадратичных коэффициентов дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  от длины волны для микросфер на основе кварцевого  $SiO_2$ , германосиликатного  $0.8SiO_2-0.2GeO_2$ , германосиликатного  $0.2SiO_2-0.8GeO_2$ , германатного  $GeO_2$ , фторидного ZBLAN, теллуритного  $TeO_2-WO_3-La_2O_3$ , халькогенидного  $Ge-As-Ga-Se$ , халькогенидного  $As_2Se_3$  и халькогенидного  $As_2S_3$  стекол соответственно. Диапазон длин волн в ближнем и среднем ИК для каждого материала выбирался с учетом диапазона его прозрачности и целесообразности использования.

Можно отметить схожие тенденции в поведении характеристик сферических микрорезонаторов на основе всех рассматриваемых стекол. А именно, эффективные объемы мод увеличиваются, а нелинейные коэффициенты уменьшаются с увеличением размера резонаторов [42]. Эффективные объемы мод увеличиваются почти линейно с увеличением длины волны при всех остальных фиксированных параметрах. За счет волноводного вклада наблюдается смещение нуля дисперсии в длинноволновую область относительно нуля материальной дисперсии. Чем меньше размер сферического



микрорезонатора, тем больше волноводный вклад в дисперсию и сильнее отличие от дисперсии стекла [42].

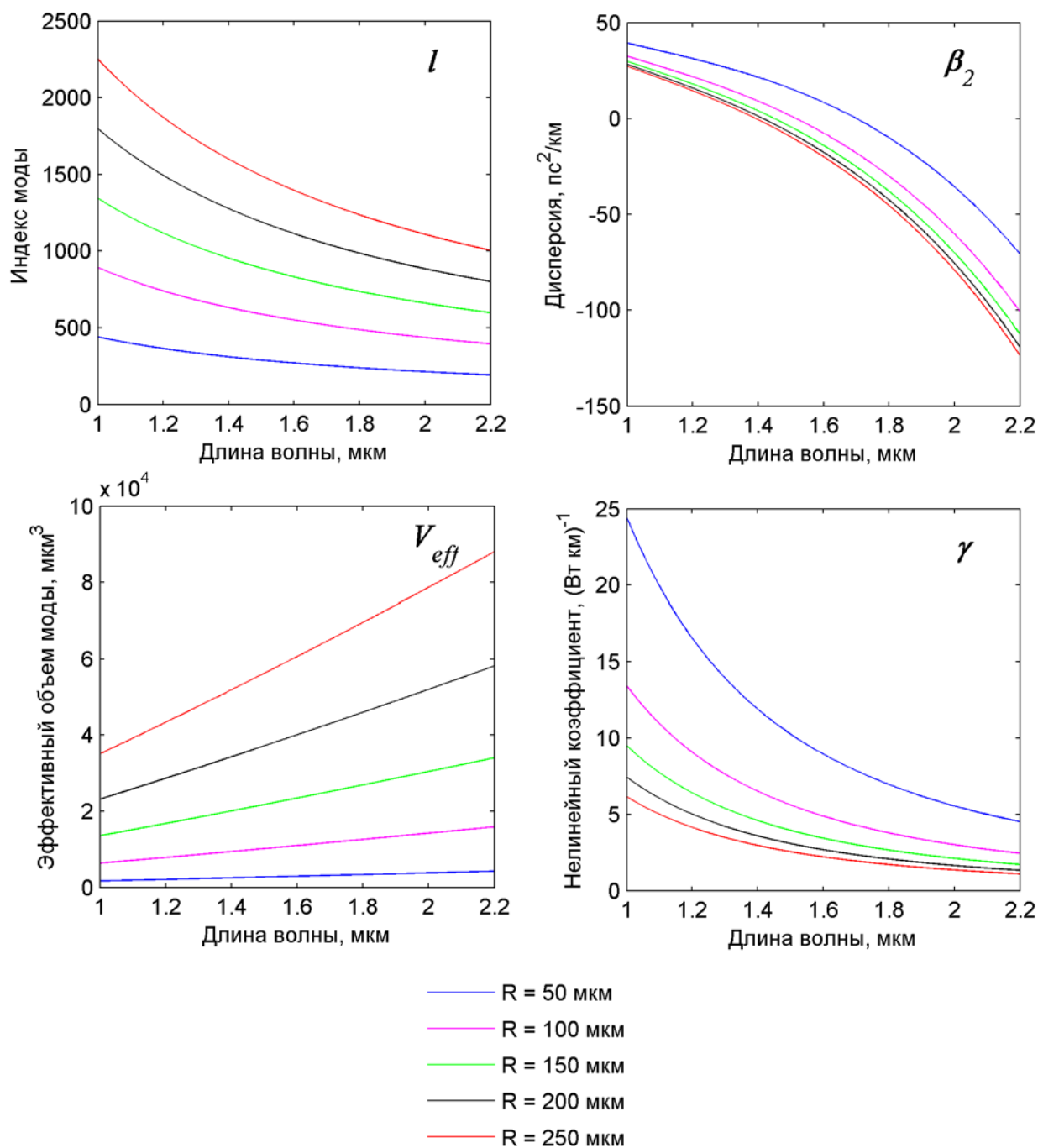


Рис. 1. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе кварцевого стекла  $\text{SiO}_2$ .

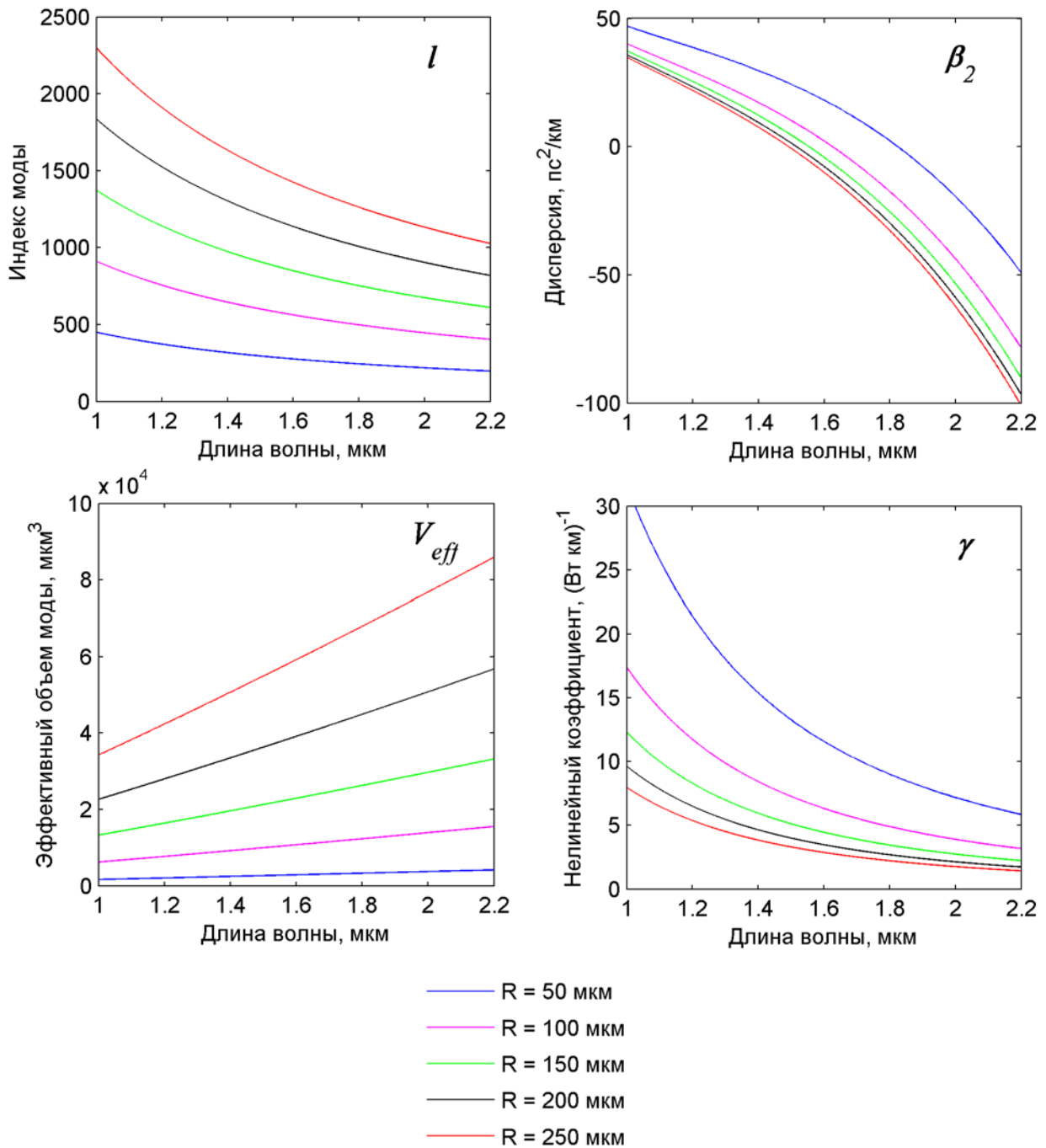


Рис. 2. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе германосиликатного стекла  $0.8\text{SiO}_2-0.2\text{GeO}_2$ .

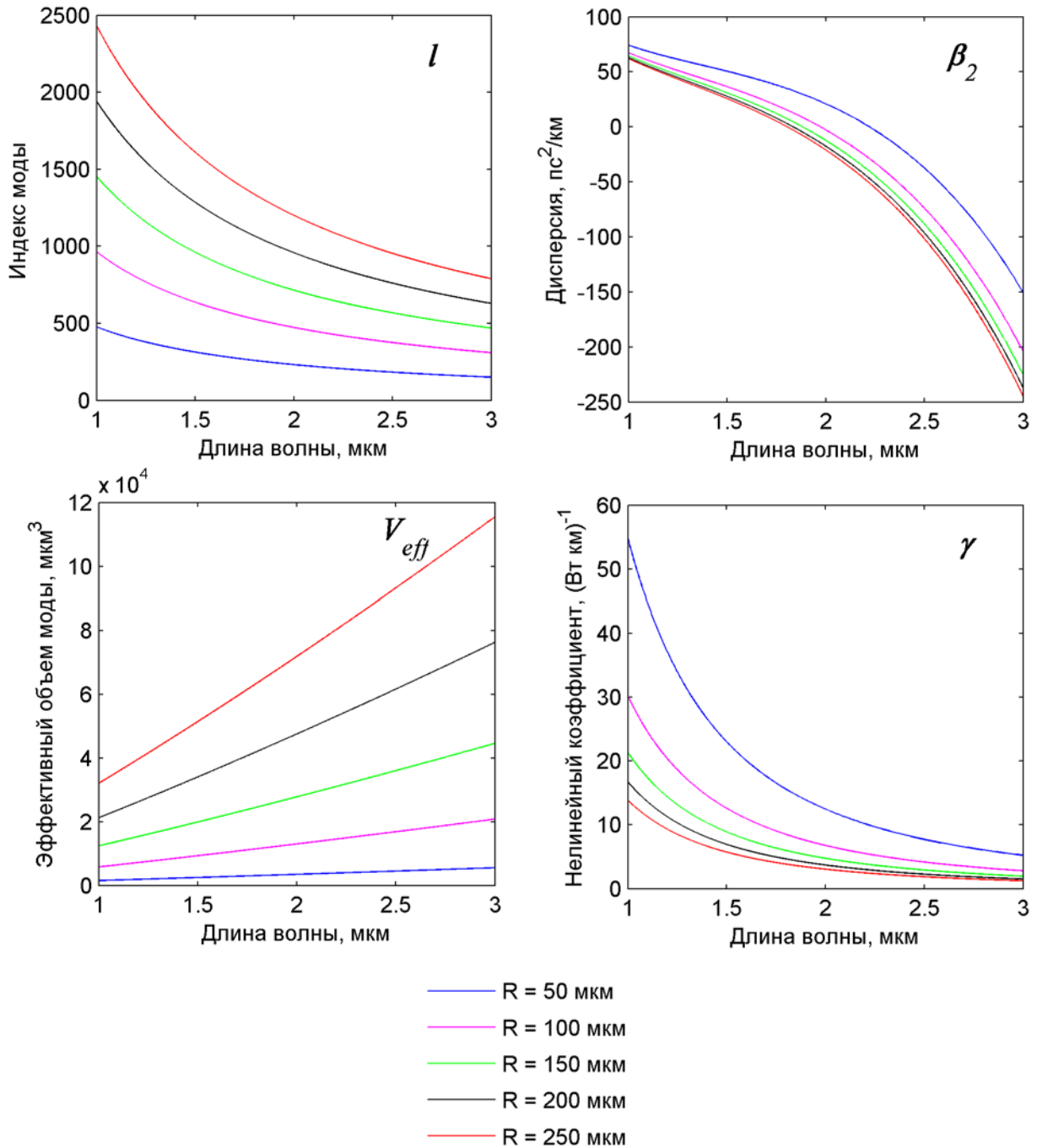


Рис. 3. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе германосиликатного стекла  $0.2\text{SiO}_2-0.8\text{GeO}_2$ .

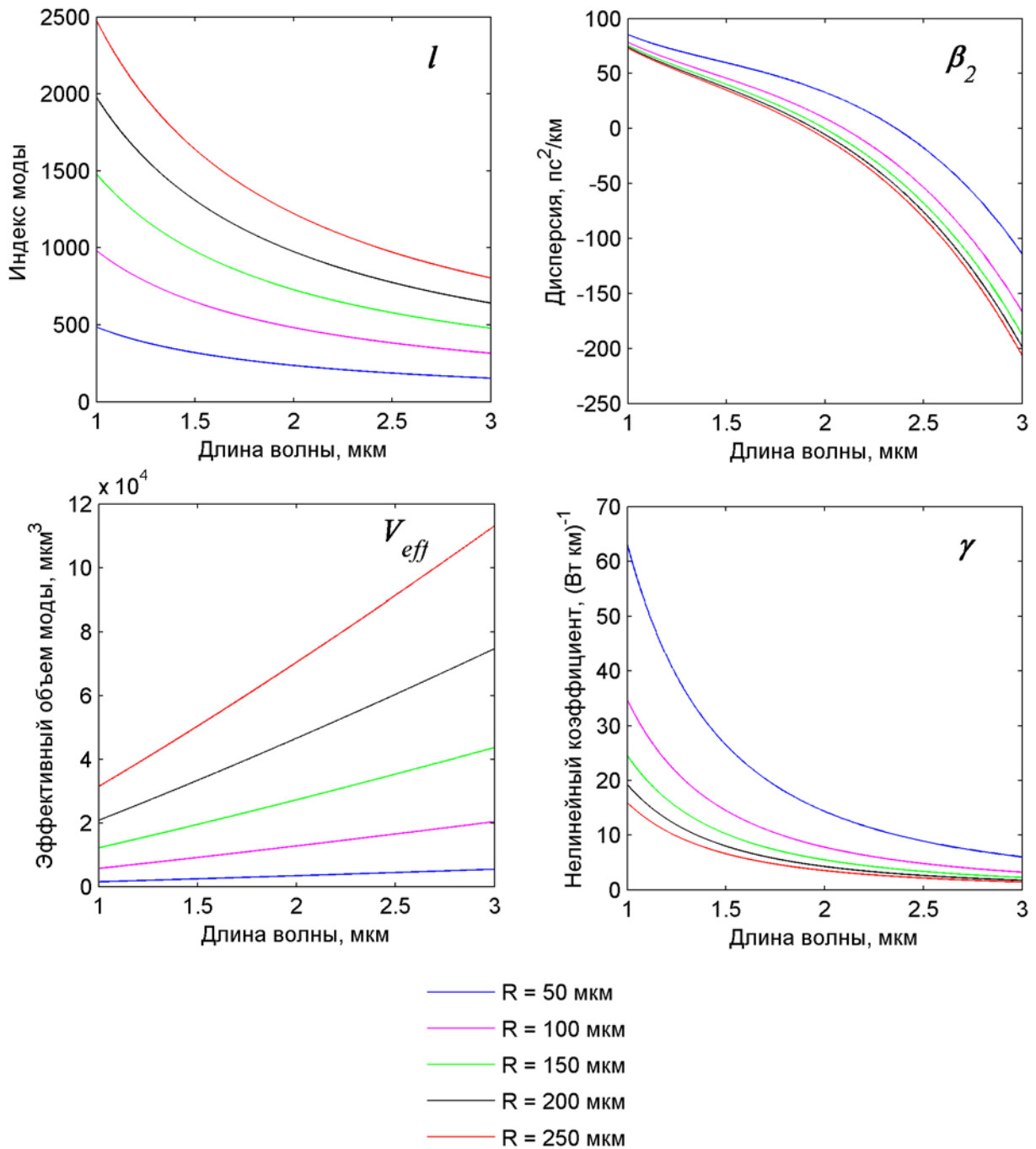


Рис. 4. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе германатного стекла  $\text{GeO}_2$ .

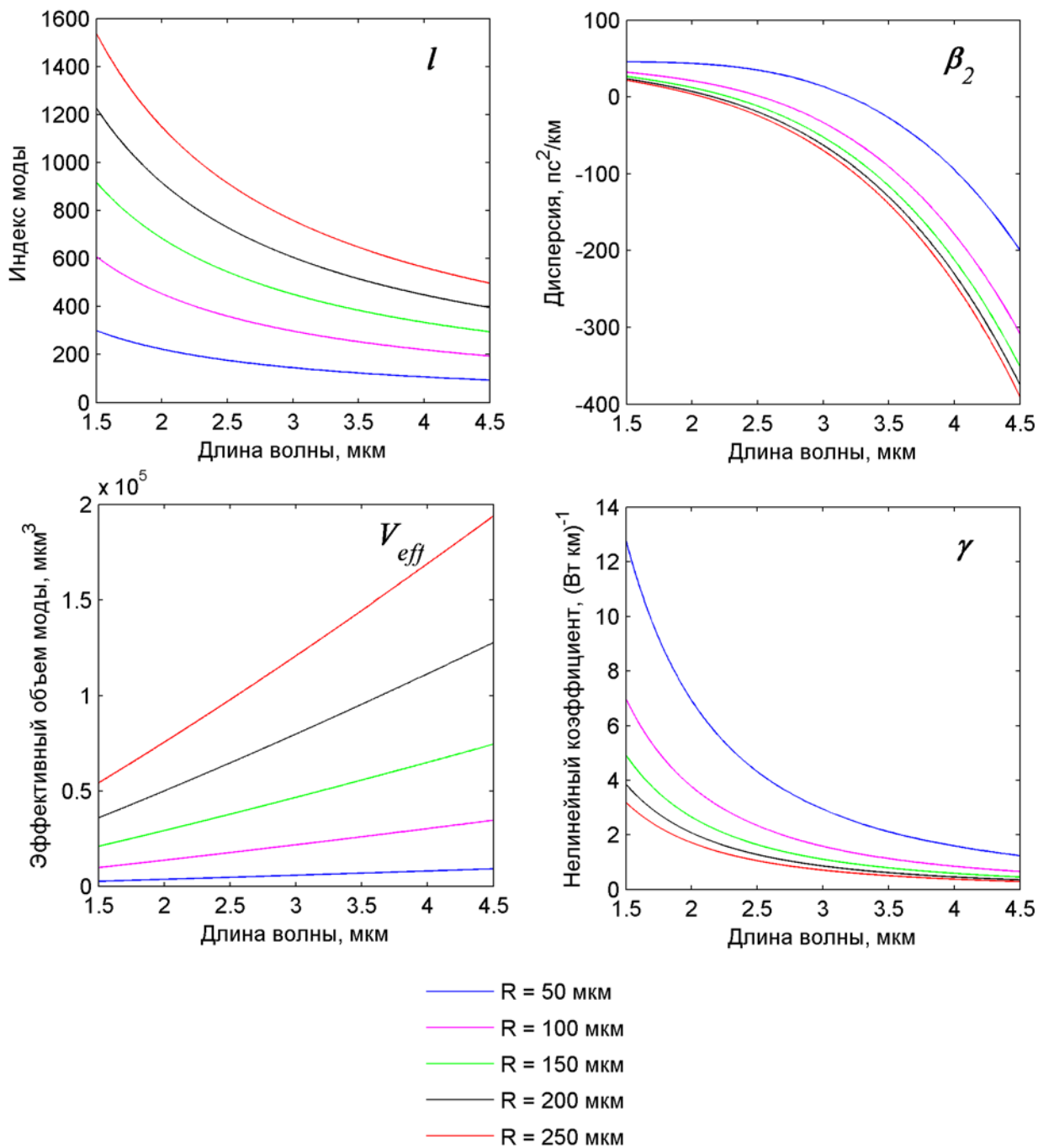


Рис. 5. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе фторидного стекла ZBLAN.

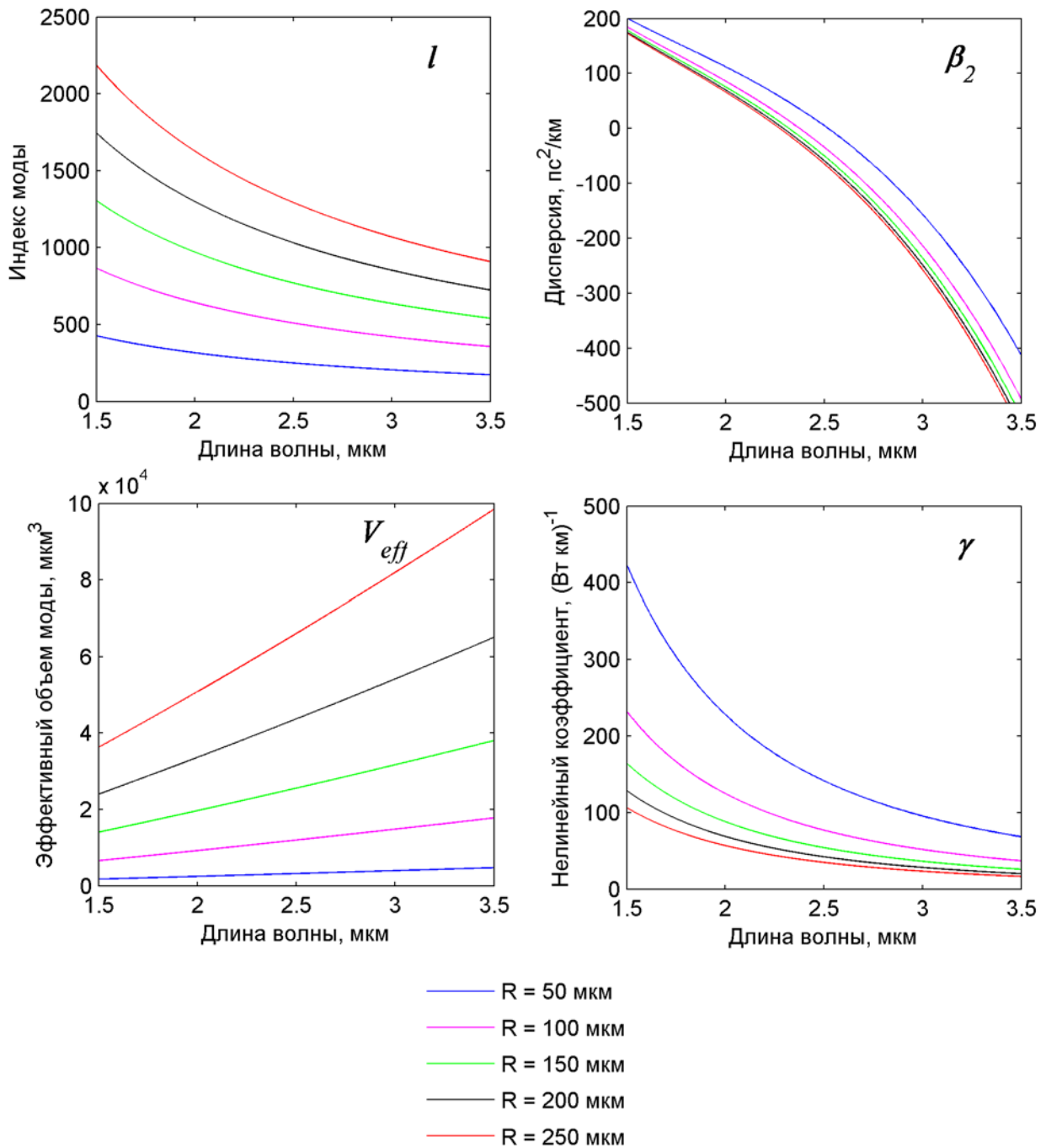


Рис. 6. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе теллуритного стекла  $\text{TeO}_2\text{-WO}_3\text{-La}_2\text{O}_3$ .

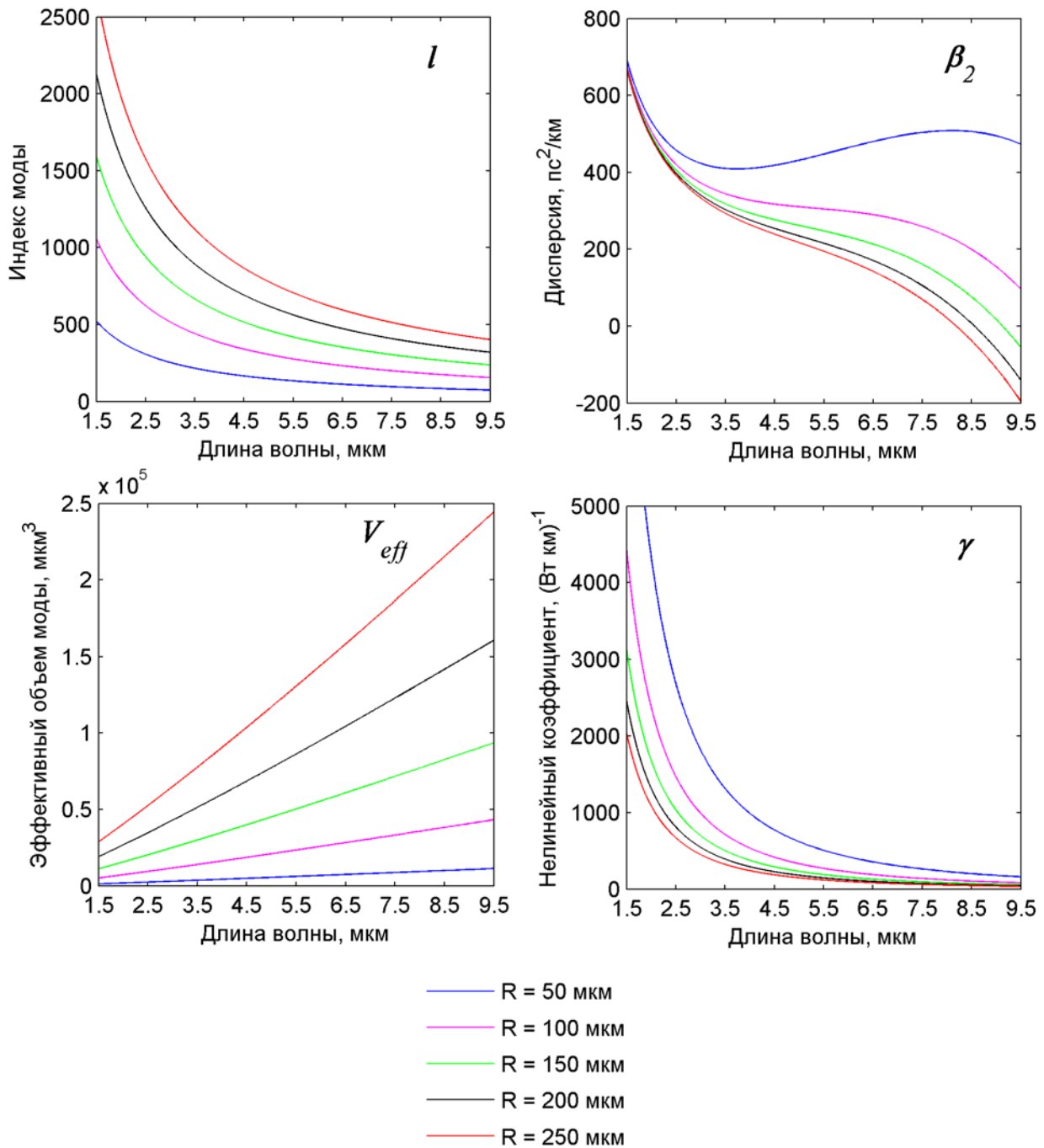


Рис. 7. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе халькогенидного стекла Ge-As-Ga-Se.

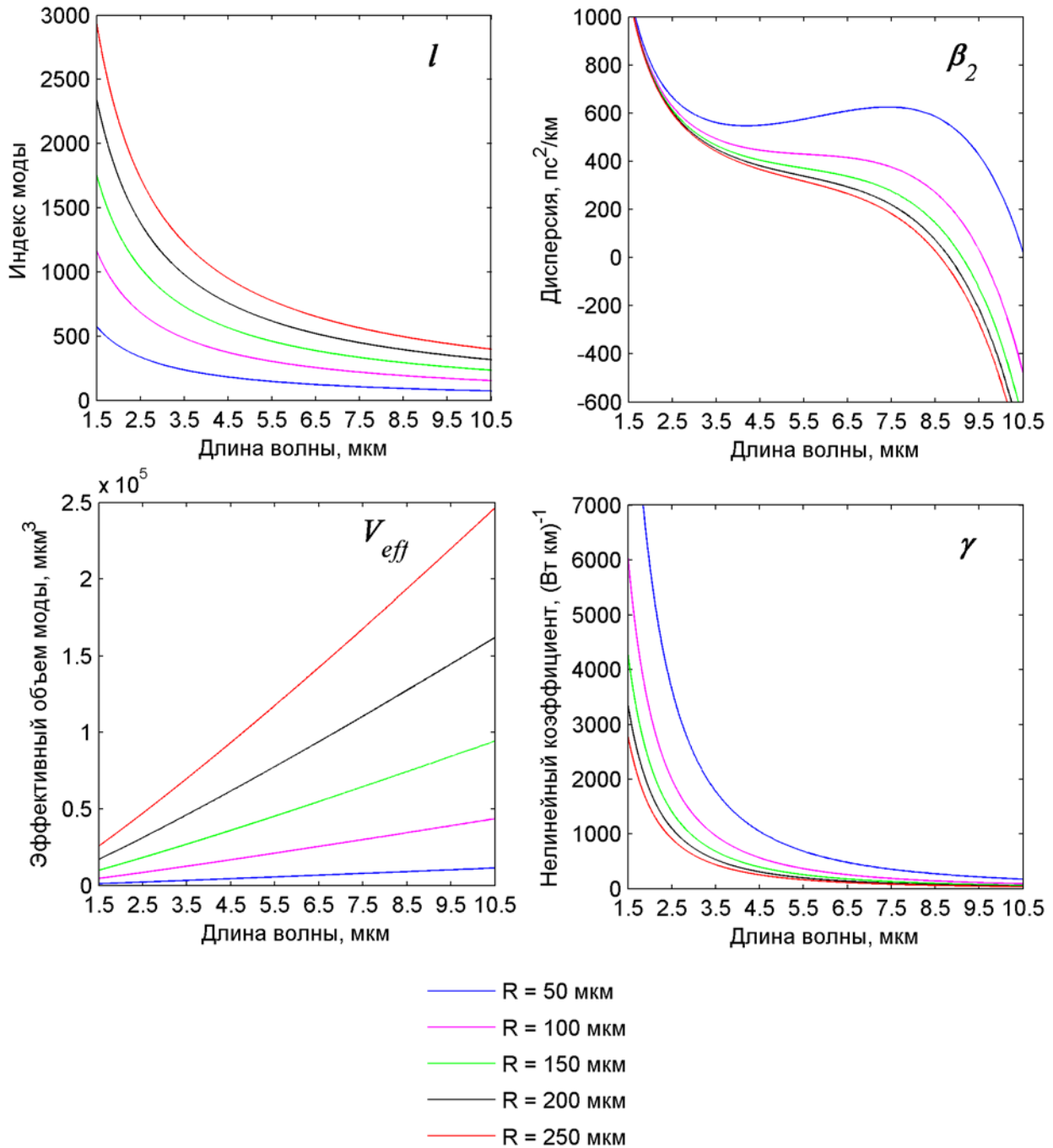


Рис. 8. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе халькогенидного стекла  $As_2Se_3$ .



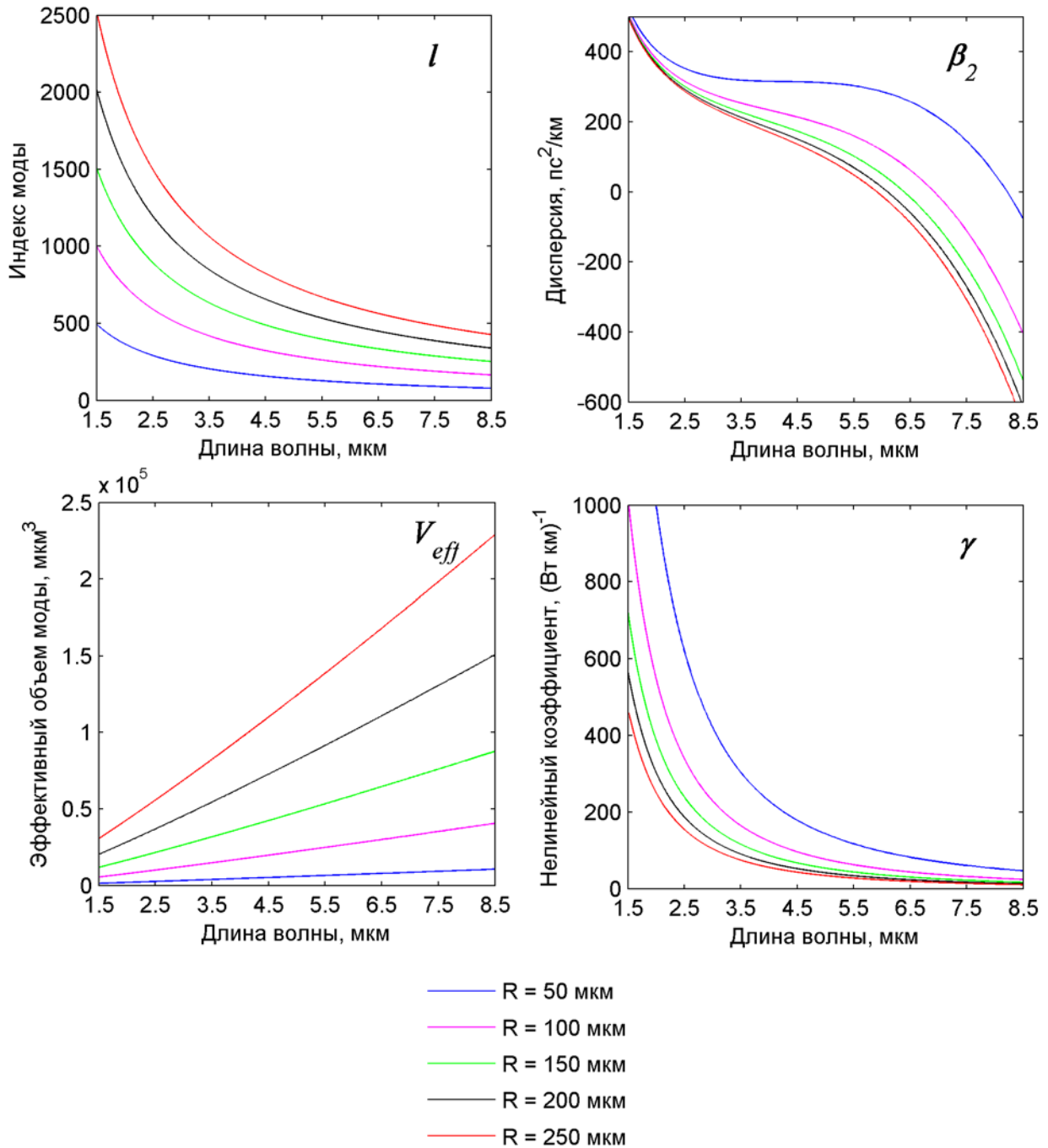


Рис. 9. Расчетные значения индексов  $l$  фундаментальных МШГ, коэффициентов квадратичной дисперсии  $\beta_2$ , эффективных объемов мод  $V_{eff}$  и нелинейных коэффициентов  $\gamma$  в зависимости от длины волны для сферических микрорезонаторов с различными радиусами на основе халькогенидного стекла  $\text{As}_2\text{S}_3$ .

## 5. Заключение.

В учебно-методическом пособии рассмотрены приближенные методы расчета дисперсионных и нелинейных характеристик сферических микрорезонаторов мод шепчущей галереи, приведены примеры анализа свойств микрорезонаторов на основе кварцевых, германосиликатных, германатных, фторидных, теллуритных и халькогенидных стекол в области их прозрачности в ближнем и среднем ИК диапазонах.

Выявлены общие тенденции для зависимостей параметров сферических микрорезонаторов на основе всех рассматриваемых стекол. А именно, показано, что эффективные объемы мод увеличиваются, а нелинейные коэффициенты уменьшаются с увеличением размера резонаторов. Эффективные объемы мод увеличиваются почти линейно с увеличением длины волны при всех остальных фиксированных параметрах. За счет волноводного вклада наблюдается смещение нуля дисперсии в длинноволновую область относительно нуля материальной дисперсии. Чем меньше размер сферического микрорезонатора, тем больше волноводный вклад в дисперсию и сильнее отличие от дисперсии стекла.

Представленные в учебно-методическом пособии результаты могут быть использованы при разработке сферических микрорезонаторов и моделировании нелинейной динамики лазерного излучения в микрорезонаторах, включая генерацию частотных оптических гребенок.

## Задачи

1. Для кварцевого сферического микрорезонатора радиусом  $R$  оценить индекс  $l$  фундаментальной TE моды шепчущей галереи на резонансной длине волны, ближайшей к длине волны  $\lambda_0 = 1.55$  мкм. Чему равна отстройка (в мкм) этой резонансной длины волны от  $\lambda_0$ ? Рассмотреть случаи  $R = 75, 125, 200$  мкм.
2. Оценить межмодовое расстояние (в мкм) для фундаментальных TE мод шепчущей галереи в микрорезонаторе радиусом  $R = 100$  мкм из халькогенидного стекла  $As_2S_3$  вблизи длины волны  $\lambda_0 = 5$  мкм.
3. Оценить количество фундаментальных TE мод шепчущей галереи в сферическом микрорезонаторе радиусом  $R = 30$  мкм из теллуритного стекла в диапазонах длин волн: 1) 2-2.2 мкм; 2) 2.3-2.5 мкм; 3) 2.7-3 мкм.
4. Оценить длину волны нулевой дисперсии ZDW для сферического микрорезонатора радиусом  $R = 80$  мкм из фторидного стекла.
5. Оценить длину волны нулевой дисперсии ZDW для сферического микрорезонатора радиусом  $R = 200$  мкм из германосиликатного стекла  $0.5SiO_2-0.5GeO_2$ .
6. Определить дисперсию для сферического микрорезонатора радиусом  $R = 200$  мкм из германосиликатного стекла  $0.3SiO_2-0.7GeO_2$  на длине волны  $\lambda_0 = 2$  мкм.
7. Оценить эффективный объем фундаментальных мод вблизи длины волны  $\lambda_0$  для микросферы из халькогенидного стекла  $GeAsGaSe$  радиусом  $R = 300$  мкм. Рассмотреть случаи  $\lambda_0 = 2, 3, 5, 8$  мкм.
8. Оценить нелинейный коэффициент  $\gamma$  вблизи длины волны  $\lambda_0$  для микросферы из германосиликатного стекла  $0.3SiO_2-0.7GeO_2$ . Рассмотреть случаи  $\lambda_0 = 1.55, 2$  мкм.

## Список литературы

- [1]. Городецкий М.Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. – ФИЗМАТЛИТ, 2011
- [2]. Reynolds T. et al. Fluorescent and lasing whispering gallery mode microresonators for sensing applications // *Laser & Photonics Reviews*. – 2017. – V. 11. – P. 1600265.
- [3]. He L., Özdemir Ş. K., Yang L. Whispering gallery microcavity lasers // *Laser & Photonics Reviews*. – 2013. – V. 7. – P. 60-82.
- [4]. Foreman M. R., Swaim J. D., Vollmer F. Whispering gallery mode sensors // *Advances in optics and photonics*. – 2015. – V. 7. – P. 168-240.
- [5]. Righini G. C. et al. Whispering gallery mode microresonators: fundamentals and applications // *Rivista del nuovo cimento*. – 2011. – V. 34. – P. 435-488.
- [6]. Su J., Goldberg A. F. G., Stoltz B. M. Label-free detection of single nanoparticles and biological molecules using microtoroid optical resonators // *Light: Science & Applications*. – 2016. – V. 5. – P. e16001.
- [7]. Liang W. et al. Whispering-gallery-mode-resonator-based ultranarrow linewidth external-cavity semiconductor laser // *Optics letters*. – 2010. – V. 35. – P. 2822-2824.
- [8]. Del’Haye P. et al. Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator // *Nature*. – 2007. – V. 450. – P. 1214.
- [9]. Kippenberg T. J., Holzwarth R., Diddams S. A. Microresonator-based optical frequency combs // *Science*. – 2011. – V. 332. – P. 555-559.
- [10]. Conti G. N. et al. Planar coupling to high-Q lithium niobate disk resonators // *Optics express*. – 2011. – V. 19. – P. 3651-3656.
- [11]. Sasagawa K. et al. S-band Tm 3<sup>+</sup>-doped tellurite glass microsphere laser via a cascade process // *Applied physics letters*. – 2004. – V. 85. – P. 4325-4327.
- [12]. Li A. et al. Tm 3<sup>+</sup>-Ho 3<sup>+</sup> codoped tellurite glass microsphere laser in the 1.47 μm wavelength region // *Optics letters*. – 2019. – V. 44. – P. 511-513.
- [13]. K. Yang et al. Fabrication and characterization of Ge–Ga–Sb–S glass microsphere lasers operating at ~ 1.9 μm // *Chin. Phys. B*. – V. 27. – P. 117701.
- [14]. Grillet C. et al. Fiber taper coupling to chalcogenide microsphere modes // *Applied Physics Letters*. – 2008. – V. 92. – P. 171109.
- [15]. Wang P. et al. Chalcogenide microsphere fabricated from fiber tapers using contact with a high-temperature ceramic surface // *IEEE Photonics Technology Letters*. – 2012. – V. 24. – P. 1103-1105.
- [16]. Aktas O. et al. A new route for fabricating on-chip chalcogenide microcavity resonator arrays // *Advanced Optical Materials*. – 2014. – V. 2. – P. 618-625.
- [17]. Tao G. et al. Infrared fibers // *Advances in Optics and Photonics*. – 2015. – V. 7. – P. 379-458.
- [18]. Deng Y., Jain R. K., Hossein-Zadeh M. Demonstration of a cw room temperature mid-IR microlaser // *Optics letters*. – 2014. – V. 39. – P. 4458-4461.

- [19]. Behzadi B., Jain R. K., Hossein-Zadeh M. Spectral and modal properties of a mid-IR spherical microlaser // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. – 2017. – V. 53. – P. 5700109.
- [20]. Herr T. et al. Temporal solitons in optical microresonators // *Nature Photonics*. – 2014. – V. 8. – P. 145.
- [21]. Kippenberg T. J. et al. Dissipative Kerr solitons in optical microresonators // *Science*. – 2018. – V. 361. – P. eaan8083.
- [22]. Riesen N. et al. Material candidates for optical frequency comb generation in microspheres // *Optics express*. – 2015. – V. 23. – P. 14784-14795.
- [23]. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Сов. радио, 1957.
- [24]. Ораевский А. Н. Волны шепчущей галереи // *Квантовая электроника*. – 2002. – Т. 32. – С. 377-400.
- [25]. Braginsky V. B., Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes // *Physics letters A*. – 1989. – V. 137. – P. 393-397.
- [26]. Agrawal G.P. *Nonlinear Fiber Optics*. – Academic Press, 2013.
- [27]. Dianov E. M., Mashinsky V. M. Germania-based core optical fibers // *Journal of lightwave technology*. – 2005. – V. 23. – P. 3500.
- [28]. Лихачев М. Е. и др. Оптические потери в одномодовых и многомодовых световодах с высокой концентрацией  $\text{GeO}_2$  и  $\text{P}_2\text{O}_5$  // *Квантовая электроника*. – 2004. – Т. 34. – С. 241-246.
- [29]. Rivera V. A. G., Manzani D., Rivera V. A. G. *Technological Advances in Tellurite Glasses*. – Springer International Publishing, 2017.
- [30]. El-Mallawany R. A. H. *Tellurite glasses handbook: physical properties and data*. – CRC press, 2016.
- [31]. Anashkina E. A. et al. Development of  $\text{Er}^{3+}$ -doped high-purity tellurite glass fibers for gain-switched laser operation at  $2.7 \mu\text{m}$  // *Optical Materials Express*. – 2017. – V. 7. – P. 4337-4351.
- [32]. Gan F. Optical properties of fluoride glasses: a review // *Journal of non-crystalline solids*. – 1995. – V. 184. – P. 9-20.
- [33]. Eggleton B. J., Luther-Davies B., Richardson K. Chalcogenide photonics // *Nature photonics*. – 2011. – V. 5. – P. 141-148.
- [34]. Shiryaev V. S., Churbanov M. F. Trends and prospects for development of chalcogenide fibers for mid-infrared transmission // *Journal of Non-Crystalline Solids*. – 2013. – V. 377. – P. 225-230.
- [35]. Fleming J. W. Dispersion in  $\text{GeO}_2$ - $\text{SiO}_2$  glasses // *Applied Optics*. – 1984. – V. 23. – P. 4486-4493.
- [36]. Anashkina E. A. et al. Toward a mid-infrared femtosecond laser system with suspended-core tungstate-tellurite glass fibers // *Applied optics*. – 2016. – V. 55. – P. 4522-4530.
- [37]. Sojka L. *et al.* Mid-infrared emission in  $\text{Tb}^{3+}$ -doped selenide glass fiber // *JOSA B*. – 2017. – V. 34. – P. A70-A79.

- [38]. Yuan W. 2–10  $\mu\text{m}$  mid-infrared supercontinuum generation in  $\text{As}_2\text{Se}_3$  photonic crystal fiber // *Laser Physics Letters*. – 2013. – V. 10. – P. 095107.
- [39]. Chaudhari C., Suzuki T., Ohishi Y. Design of zero chromatic dispersion chalcogenide  $\text{As}_2\text{S}_3$  glass nanofibers // *Journal of lightwave technology*. – 2009. – V. 27. – P. 2095-2099.
- [40]. Yatsenko Y., Mavritsky A. D-scan measurement of nonlinear refractive index in fibers heavily doped with  $\text{GeO}_2$  // *Optics letters*. – 2007. – V. 32. – P. 3257-3259.
- [41]. Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S. Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-Q whispering-gallery modes // *Journal of the Optical Society of America B*. – 1999. – V. 16. – P. 147-154.
- [42]. Анашкина Е. А. и др. Разработка и численное моделирование сферических микрорезонаторов на основе германосиликатных стекол  $\text{SiO}_2\text{-GeO}_2$  для генерации оптических частотных гребенок // *Квантовая электроника*. – 2019. – Т. 49. – С. 371-376.