Нижегородский государственный университет
им. Н.И.Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
"Новые многофункциональные материалы и нанотехнологии"

Д.В. Хомицкий
А.В. Тележников

Сборник задач по аналитической геометрии
(Практикум)

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Учебные дисциплины: «Аналитическая геометрия», «Численные методы и математическое моделирование», «Вычислительная физика»

Специальности, направления: 011200 «Физика», 210100 «Электроника и наноэлектроника», 222900 «Нанотехнология и микросистемная техника», 230400 «Информационные системы и технологии»

ННГУ
2010

УДК 514.12

ББК В151.54

Х-76

Х-76 Хомицкий Д.В., Тележников А.В. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ: Практикум (Учебно-научный и инновационный комплекс "Новые многофункциональные материалы и нанотехнологии"). – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010.– 71с.

Рецензент: доцент Д.Е. Бурланков

Сборник содержит задачи по общему курсу «Аналитическая геометрия», читаемому студентам физического факультета ННГУ. Каждый параграф предваряется кратким введением в изучаемый раздел курса, содержащим основные определения, теоремы, а также примеры решения типовых задач. Упражнения, представленные в сборнике, соответствуют темам практических занятий, контрольных работ и экзаменационных билетов.

УДК 514.12

ББК В151.54

Глава 1
Введение в метод координат и методы линейной алгебры

1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Система прямоугольных декартовых координат на плоскости задаётся парой перпендикулярных прямых с указанными на них положительными направлениями. Эти прямые называются координатными осями, а точка их пересечения O называется началом координат. Каждой точке A на плоскости ставят в соответствие пару чисел x и y, определяемых как длины отрезков OA_x и OA_y, где точки A_x и A_y есть пересечения перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные оси. Если направление от точки O к точкам $A_{x,y}$ совпадает с положительным направлением данной оси, то координата имеет положительный знак, если же это направление противоположно положительному направлению оси, координата имеет отрицательный знак. Расстояние A_1A_2 между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле, являющейся следствием теоремы Пифагора и имеющей вид $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Делением отрезка A_1A_2 в заданном отношении λ называется поиск такой точки $A(x, y)$ на линии, соединяющей точки A_1 и A_2, которая удовлетворяет соотношению $A_1A / AA_2 = \lambda$, при этом координаты искомой точки даются выражениями $x = (x_1 + \lambda x_2)/(1+\lambda)$ и $y = (y_1 + \lambda y_2)/(1+\lambda)$. Отношение λ может быть и отрицательным числом, в этом случае точка A лежит за пределами отрезка A_1A_2 на линии, соединяющей точки A_1 и A_2.

Равенство $F(x, y) = 0$, где F является некоторой функцией координат (x, y) точек плоскости, определяет неявное уравнение кривой F на плоскости. Если две кривые F_1 и F_2 заданы уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, их точки пересечения определяются как решения системы, состоящей из двух данных уравнений. Если каждая из координат является функцией некоторой переменной t, называемой параметром, то говорят о задании уравнения кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ в параметрической форме.

Положение точки $A(x, y)$ на плоскости может быть также описано парой чисел (ρ, φ), связанных с декартовыми координатами соотношениями $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$, называемых полярными координатами точки A

(рис.1). Неотрицательная величина ρ представляет собой расстояние от точки A до начала координат, а параметр φ задаёт угол между направлением OA и осью Ox, которая в полярной системе называется полярной осью. Угол φ обычно задаётся в интервале $[0,2\pi]$ или $[-\pi,\pi]$. Кривая в полярных координатах может быть задана как в явном виде $\rho=\rho(\varphi)$, так и в неявной форме $F(\rho,\varphi)=0$, и в параметрической форме $\rho=\rho(t)$, $\varphi=\varphi(t)$.

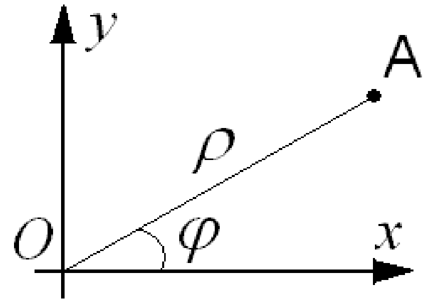

Рис.1. Декартовы и полярные координаты на плоскости.

Уравнения одних и тех же геометрических объектов выглядят по-разному в разных декартовых системах координат, с различным началами отсчёта и направлениями осей. Для упрощения уравнений применяются различные преобразования координат. Наиболее простыми и часто применяемыми преобразованиями декартовых координат на плоскости от старых координат (x,y) к новым (x',y') является параллельный перенос начала координат

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

в точку (x_0,y_0), а также поворот координатных осей, где положительный угол φ отвечает направлению вращения против часовой стрелки (рис.2):

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}.$$

Обратный переход к старым координатам можно произвести, разрешив записанные выше равенства относительно (x',y') как функций (x,y).

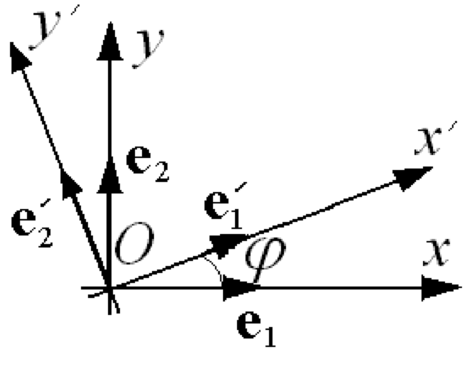

Рис.2. Поворот базиса и системы координат на плоскости.

Пример 1. Доказать, что треугольник с вершинами $P(-2,-1)$, $Q(6,1)$, $R(3,4)$ является прямоугольным.

Решение. Вычислим длины сторон данного треугольника:

$$PQ = \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{68},$$

$$PR = \sqrt{(3-(-2))^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{50},$$

$$QR = \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}.$$

Найденные длины удовлетворяют условию $PQ^2 = PR^2 + QR^2$, т.е. треугольник PQR является прямоугольным с катетами PR, QR и гипотенузой PQ.

Пример 2. Даны точки $A(3,-1)$ и $B(2,1)$. Определить координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B, и координаты точки N, симметричной точке B относительно точки A (рис.3).

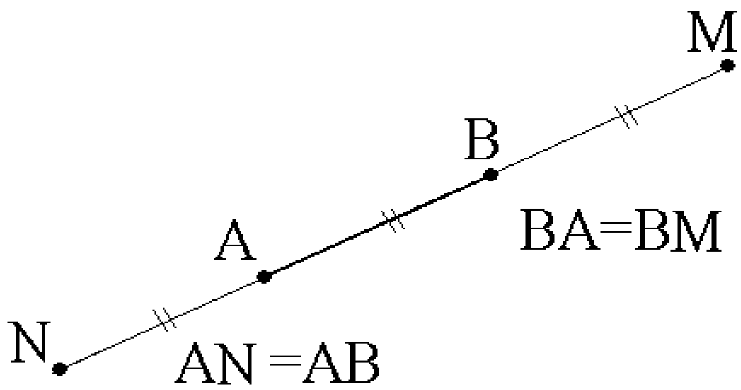

Рис.3. Расположение точек на отрезке в Примере 2.

Решение. Точка B делит отрезок AM в отношении $\lambda = AB/BM = 1$, поэтому имеем уравнение $x_B = (x_A + \lambda x_M)/(1+\lambda)$ на координату x_M. Решая его, находим $x_M = 1$. Аналогичное уравнение для координаты y_M даёт значение $y_M = 3$, т.е. искомая первая точка есть $M(1,3)$. Рассуждая схожим образом, для точки N получаем соотношение $\lambda = NA/AB = 1$ и уравнение $x_A = (x_N + \lambda x_B)/(1+\lambda)$, откуда $x_N = 4$. Аналогичное уравнение приводит к значению $y_N = -3$, поэтому вторая точка есть $N(4,-3)$.

Пример 3. Составить уравнение геометрического места точек, равноудалённых от двух данных точек $M_1(-2,4)$ и $M_2(6,8)$.

Решение. Пусть некоторая точка M, удовлетворяющая данному условию, имеет координаты (x, y). В этом случае для любой такой точки выполняется соотношение $M_1M = M_2M$, имеющее вид $\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}$. Возводя в квадрат и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение прямой линии $2x + y - 10 = 0$, проходящей через середину отрезка M_1M_2. перпендикулярно ему.

Пример 4. Точка M со скоростью v равномерно движется по прямой ON, которая равномерно вращается вокруг точки O (начала координат) с постоянной угловой скоростью ω (рис.4). Траектория точки M на плоскости (ρ, φ) называется спиралью Архимеда. Составить её уравнение в полярных координатах.

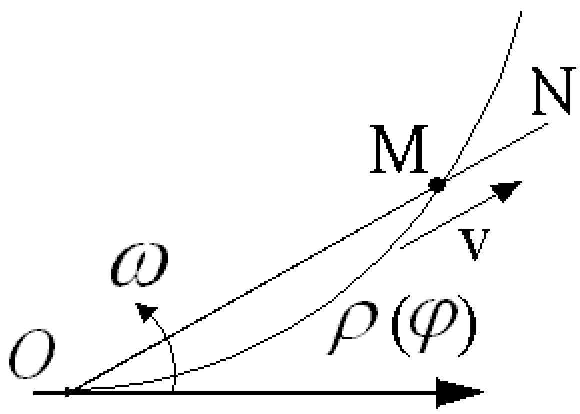

Рис.4. Расположение точки и поворот прямой в примере 4.

Решение. Пусть t есть параметр, обозначающий время, прошедшее с момента начала выхода точки M из начала координат. Тогда для расстояния до начала координат имеем выражение $\rho(t) = vt$, а для равномерно возрастающего полярного угла справедливо равенство $\varphi(t) = \omega t$. Исключая из этих равенств параметр t, получаем в полярных координатах уравнение спирали Архимеда в виде $\rho(\varphi) = a\varphi$, где постоянная $a = v/\omega$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1, -3)$, $B(3, -5)$, $C(-5, 7)$. Определить координаты середин его сторон.

1.2. Известны координаты вершин $A(1,-2)$ и $B(3,2)$ параллелограмма $ABCD$, а также точка $N(5,-1)$ пересечения его диагоналей. Найти координаты двух других вершин C и D.

1.3. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точки $O(0,0)$, $M(3,-1)$ и $N(8,4)$.

1.4. Найти точки пересечения линий, заданных своими уравнениями L_1: $x^2+y^2=25$ и L_2: $x+7y-25=0$.

1.5. Охарактеризовать геометрически расположение точек на оси Ox, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

1) $x>2$; 2) $x-3\le 0$; 3) $12-x<0$; 4) $1<x<3$;

5) $\dfrac{2-x}{x-1}>0$; 6) $\dfrac{2x-1}{x-2}>1$; 7) $x^2-8x+15\le 0$.

1.6. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы второго координатного угла $y=-x$ следующим точкам:

1) $A(3,5)$; 2) $B(-4,3)$; 3) $C(7,-2)$.

1.7. Даны точки $A(1,-1)$, $B(3,3)$ и $C(4,5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из точек делит отрезок, ограниченный двумя другими точками.

1.8. Отрезок, определяемый точками $M_1(-6,7)$ и $M_2(-2,3)$, разделен на четыре равные части. Найти координаты точек деления L, M и N. До какой точки P нужно продолжить отрезок M_1M_2, чтобы его длина увеличилась в три раза?

1.9. Найти декартовы координаты точек, равноудалённых от осей координат и от точки $M(1,8)$.

1.10. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;-1)$ и $B(-1;3)$. Определить две его другие вершины.

1.11. Зная проекции отрезка на координатные оси $X=1$, $Y=-\sqrt{3}$, найти его проекцию на ось, которая составляет с осью Ох угол $\Theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

1.12. Определить координаты концов А и В отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделён на три равные части.

1.13. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $M_1(3,\pi/4)$, $M_2(2,-\pi/2)$, $M_3(3,-\pi/3)$, $M_4(1,2)$ и $M_5(5,-1)$, заданным в полярной системе координат.

1.14. В полярной системе координат даны две вершины $A(3, -4\pi/9)$ и $B(5, 3\pi/14)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить полярные координаты двух других вершин этого параллелограмма.

1.15. В полярной системе координат даны точки $A(8, -2\pi/3)$ и $B(6, \pi/3)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.

1.16. Вычислить площадь треугольника, вершины которого $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8; \frac{7\pi}{24}\right)$ и $C\left(6; \frac{5\pi}{8}\right)$ заданы в полярных координатах.

1.17. В полярных координатах записать уравнение окружности, проходящей через начало координат с центром на полярной оси и радиусом a.

1.18. В полярной системе координат на линии, определённой уравнением $\rho(\varphi) = 1/\sin\varphi$, найти координаты точек, расстояния которых от начала координат равны: 1) 1; 2) 2; 3) $\sqrt{2}$. Какая линия определена данным уравнением? Построить её на чертеже.

1.19. Прямая перпендикулярна полярной оси и отсекает на ней отрезок $OM = 3$. Составить уравнение этой прямой в полярных координатах.

1.20. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояния от которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная и равная a^2, где $a = F_1F_2/2$. Произвести расчёт как в декартовых, так и в полярных координатах (данная кривая носит название «лемниската Бернулли»).

1.21. Окружность радиуса R равномерно катится без проскальзывания по оси Ox. Записать параметрическое уравнение линии $x = x(t)$, $y = y(t)$, где t есть время, а (x, y) представляют собой координаты точки окружности, находившейся при $t = 0$ в начале координат (данная кривая носит название «циклоида»).

2. Определители и системы линейных уравнений 2-го и 3-го порядка

Прямоугольная таблица A из вещественных или комплексных чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется матрицей порядка $m \times n$ с элементами a_{ij}, где $i = 1, \ldots m$ и $j = 1, \ldots n$. Если $m = n$, то матрица называется квадратной матрицей порядка n. Любую матрицу $A = \|a_{ij}\|$ можно умножить на вещественное или комплексное число α, при этом все элементы матрицы умножаются на это число: $(\alpha A)_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. Матрицы одинаковых порядков можно складывать, при этом $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Для квадратной матрицы A можно ввести понятие определителя, или детерминанта, представляющего собой числовую функцию от её элементов и обозначаемого $\det A$. Для матрицы первого порядка $A = \|a_{11}\|$ определитель, обозначаемый в отличие от самой матрицы одинарной прямой чертой, равен единственному имеющемуся элементу, т.е. $\det A \equiv |A| = a_{11}$. Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

определитель вычисляется по следующему правилу:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

откуда сразу следует, что определитель меняет знак при перестановке строк или столбцов, а также равен нулю, если две строки или два столбца пропорциональны друг другу, а также для случая нулевой строки или столбца. Отметим, что данные свойства имеют место для определителей матриц любого порядка. Для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

определитель выражается через определители второго порядка как

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

где детерминанты второго порядка раскрываются по описанному выше правилу.

Рассмотрим основные свойства систем линейных уравнений на примере системы двух уравнений с двумя неизвестными (x_1, x_2). Отметим, что обсуждаемые здесь результаты и методы решения задач останутся прежними и для систем третьего, и более высоких порядков. Системой линейных уравнений второго порядка с двумя неизвестными называется система равенств следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

где коэффициенты a_{ij} образуют квадратную матрицу A данной системы, а столбец (b_1, b_2) называется столбцом свободных членов. В случае, когда этот столбец состоит из нулей, говорят об однородной системе, если же данный столбец содержит хотя бы один ненулевой элемент, система называется неоднородной. Однородная система всегда совместна, поскольку она имеет как минимум одно решение $(x_1, x_2) = (0,0)$. Кроме того, при $\det A = 0$ у однородной системы уравнения пропорциональны друг другу, т.е. имеется одно независимое уравнение для двух неизвестных. Это означает, что одно неизвестное линейно выражается через второе, например, $x_2 = -a_{11}x_1 / a_{12}$, что говорит о бесконечном числе решений. Неоднородная система с квадратной матрицей A при $\det A \neq 0$ имеет единственное решение, выражаемое формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta \equiv \det A$, а определители $\Delta_{1,2}$ получаются из Δ заменой соответственно первого и второго столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если $\det A = 0$, а хотя бы один из $\Delta_{1,2}$ отличен от нуля, то решений нет и система не совместна. Если же все три определителя равны нулю, то уравнения системы пропорциональны друг другу и реально независимым является лишь одно из них. Как и в случае однородной системы, здесь имеется бесконечное множество решений.

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Используя приведенную выше формулу для раскрытия детерминанта третьего порядка, с помощью непосредственного вычисления получаем

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-20) + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 18 = -80 + 16 + 72 = 8.$$

Пример 2. Упростить выражение $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Раскрывая данный определитель, получаем одно не равное нулю слагаемое

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \sin\alpha = \cos(\alpha + \beta).$$

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 = 12 \end{cases}$.

Решение. Определитель матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11 \neq 0$, поэтому существует единственное решение $x_{1,2} = \Delta_{1,2} / \Delta$, где определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 15 = 33$, откуда находим $x_1 = -22/(-11) = 2$ и $x_2 = 33/(-11) = -3$. Обязательной проверкой убеждаемся, что найденные значения неизвестных обращают уравнения системы в тождества.

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$.

Решение. Определитель матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1)) - 4 \cdot (3 \cdot (-3) - 2 \cdot 4) + ,$$

$$+1 \cdot (3 \cdot (-1) - 6 \cdot 4) = 2 \cdot (-16) - 4 \cdot (-17) + 1 \cdot (-27) = 9 \neq 0$$

т.е. у системы имеется единственное решение. Определяя его по формулам Крамера $x_{1,2,3} = \Delta_{1,2,3} / \Delta$, находим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 27, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -36,$$

откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения неизвестных обращают уравнения системы в тождества.

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Вычисляем определитель данной системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, поэтому из формул Крамера следует существование единственного нулевого (тривиального) решения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Данная система содержит большее число неизвестных, чем уравнений. Чтобы привести её к известному нам виду с квадратной матрицей, перенесём слагаемые, например, с x_3 в правую часть:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4x_3 \\ 3x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases}.$$

Получилась система известного вида, где роль столбца свободных членов играет столбец $\left(-4x_{3,}\ 2x_3\right)$. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-9) = 11 \neq 0$, поэтому при каждом значении x_3 существует единственное решение. Применяя к этой системе формулы Крамера, находим

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -4x_3 & -3 \\ 2x_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}\cdot\left(-4x_3\cdot 1-(-3)\cdot 2x_3\right) = \frac{2}{11}x_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & -4x_3 \\ 3 & 2x_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}\cdot\left(2\cdot 2x_3-(-4x_3)\cdot 3\right) = \frac{16}{11}x_3,$$

что и составляет общее решение системы. Обязательной проверкой устанавливаем, что набор неизвестных $\left(2x_3/11,\ \ 16x_3/11,\ \ x_3\right)$ при любом значении x_3 обращает уравнения системы в тождества.

Пример 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}.$

Решение. Определитель данной системы $\Delta = 0$, что свидетельствует о зависимости трёх уравнений друг от друга. Рассмотрим первые два уравнения: их, очевидно, нельзя свести друг к другу умножением на число, и они независимы. Мы получили новую систему, состоящую из этих двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Она имеет вид системы, рассмотренной в предыдущем примере. Перенося неизвестную x_3 в правую часть, получаем по формулам Крамера $x_1 = 3x_3/(-4)$ и $x_2 = x_3/(-4)$, где переменная x_3 принимает любые значения. Проверкой убеждаемся, что найденные значения неизвестных обращают все три уравнения исходной системы в тождества.

Задачи для самостоятельного решения.

2.1. Вычислить определитель третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$.

2.2. Определить неизвестное x из уравнения:

1) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

2.3. Решить систему линейных уравнений второго порядка:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 17 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 2 \\ 5x_1 + 9x_2 = 4 \end{cases}$.

2.4. Решить систему линейных уравнений третьего порядка:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$.

2.5. Решить систему из двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Глава 2
Векторная алгебра

3. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение

Вектором называется направленный отрезок, соединяющий две точки в пространстве, на плоскости, или на прямой. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается как $\overrightarrow{AB}$ либо как одна буква полужирного шрифта, например, $\mathbf{a}$. Модулем вектора $|\mathbf{a}| \equiv a$ называется длина отрезка AB. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым и обозначается как $\mathbf{0}$. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются коллинеарными, если существует прямая, которой они параллельны, что обозначается как $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, при этом векторы могут быть одинаково либо противоположно направленными. Два вектора равны, если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины. Заметим, что при таком определении равенства векторов их начальная точка не имеет значения, и в нашем курсе, если не оговорено специально, все векторы считаются отложенными от начала координат. Вектор, идущий из начала координат в некоторую точку M, называется радиус-вектором точки M. Три вектора, параллельные некоторой плоскости, называются компланарными.

Пусть даны два вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. Их суммой $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$, полученный по правилу треугольника (рис.5).

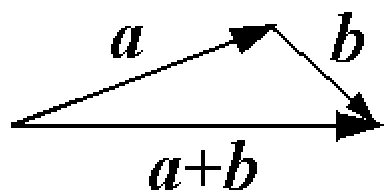

Рис.5. Правило треугольника для сложения векторов

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на вещественное число α называется вектор $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, длина которого равна $|\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением $\mathbf{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$. Последовательное применение операций сложения и умножения на число позволяет составлять линейные комбинации векторов. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ лишь тогда, когда все числа α_i равны нулю. На прямой линейно независимым является только один ненулевой вектор, на плоскости – любые два неколлинеарных вектора, в пространстве – любые три некомпланарных вектора. Максимальное число линейно независимых векторов в данном пространстве называется размерностью этого пространства. Следовательно, прямая является одномерным пространством, плоскость – двумерным, а пространство с декартовыми координатами (x, y, z) трехмерно. Любые четыре и более вектора в трёхмерном пространстве, рассматриваемом в курсе аналитической геометрии, являются линейно зависимыми. Рассмотренные примеры представляют собой частные случаи линейного векторного пространства, подробно изучаемого в курсе линейной алгебры.

Если вектор $\mathbf{x}$ представлен как линейная комбинация $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$, то говорят, что $\mathbf{x}$ разложен по системе векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n\}$. Линейно независимая система векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ данного пространства, по которой любой вектор из этого пространства можно разложить, называется базисом данного линейного пространства, а набор чисел $(x_1, \ldots x_n)$ называется координатами вектора $\mathbf{x}$ в данном базисе. Примером базиса является тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ декартового базиса. Базис может быть выбран по-разному, поэтому один и тот же вектор $\mathbf{x}$ имеет разные столбцы координат в разных базисах. При помощи столбцов координат все линейные операции с векторами могут быть выполнены с их координатными столбцами в данном базисе, например, линейной комбинации $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ векторов с координатами $(x_1, \ldots x_n)$ и $(y_1, \ldots y_n)$отвечает вектор с координатами $(\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots \alpha x_n + \beta y_n)$. Для коллинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо равенство отношений соответствующих координат $a_1/b_1 = \ldots = a_n/b_n = \lambda$, где λ есть фиксированное число. При повороте координатных осей декартовой системы координат на плоскости на угол φ векторы нового базиса $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ связаны с векторами старого базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ соотношениями, аналогичными формулам для связи между старыми и новыми координатами, рассмотренными в п.1 (рис.2):

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi \\ \mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi \end{cases}.$$

При переходе к новому базису меняются также компоненты векторов. Например, для одного и того же вектора $\mathbf{a}$ при замене базиса происходит изменение его компонент: $(a_1, a_2) \to (a_1', a_2')$, причем замена происходит в том же порядке, что и для координат точки, замена которых рассмотрена в п.1:

$$\begin{cases} a_1 = a_1' \cos\varphi - a_2' \sin\varphi \\ a_2 = a_1' \sin\varphi + a_2' \cos\varphi \end{cases}.$$

Следует обратить внимание на то, что направление преобразования базисных векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \to \{\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ с одной и той же матрицей поворота противоположно направлению преобразования координат, или компонент векторов $(a_1, a_2) \to (a_1^{'}, a_2^{'})$. Это свойство носит общий характер и справедливо для любых линейных преобразований базиса; более подробное его рассмотрение производится в курсе векторного и тензорного анализа.

Скалярным произведением $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ есть угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Длина, или модуль вектора может быть выражена через скалярное произведение как $|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$. Векторы, для которых $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, называются ортогональными, а базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$, для которого выполняются соотношения $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и при этом $|\mathbf{e}_i| = 1$, называется ортонормированным базисом. Примером ортонормированного базиса может служить стандартный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в декартовой системе координат. В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов выражается через их координаты по формуле $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, а в случае любого базиса $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Из этих соотношений следует, что в ортонормированном базисе координаты вектора можно найти при помощи скалярного произведения как $a_i = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)$.

Пример 1. На плоскости даны векторы $\mathbf{e}_1 = (2, \quad -3)$ и $\mathbf{e}_2 = (1, \quad 2)$. Найти разложение вектора $\mathbf{a} = (9, \quad 4)$ по векторам $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Решение. Прежде всего, убеждаемся, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ являются неколлинеарными и, следовательно, могут быть выбраны в качестве базиса на плоскости. Требуется найти числа $\alpha_{1,2}$ в разложении $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$. Координаты вектора в левой части этого равенства в исходном базисе есть $\mathbf{a} = (9, \quad 4)$, а координаты вектора в правой части есть $(\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 1, \quad \alpha_1 \cdot (-3) + \alpha_2 \cdot 2)$. Приравнивая соответствующие координаты, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 9 \\ -3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 5$, что и составляет искомое разложение.

Пример 2. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, и три вектора $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$ и $\mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Являются ли векторы $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ компланарными? Если да, то указать, какая линейная связь между ними существует.

Решение. Компланарность трёх векторов означает, что они лежат в одной плоскости и, следовательно, являются линейно зависимыми. Линейная зависимость векторов означает также линейную зависимость столбцов их координат. Матрица третьего порядка, сформированная из этих линейно зависимых столбцов, будет иметь нулевой определитель, как это было упомянуто в предыдущей главе. Вычисляя определитель, составленный из столбцов координат рассматриваемых векторов, находим, что

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. данные вектора являются линейно зависимыми и, следовательно, компланарными. Рассматривая матрицу их столбцов их координат, можно заметить, что первый столбец есть сумма второго и третьего, взятая со знаком минус, поэтому искомая линейная связь имеет вид $\mathbf{l} = -(\mathbf{m} + \mathbf{n})$.

Пример 3. Показать, что при любых векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}$ являются перпендикулярными.

Решение. Перпендикулярность векторов означает равенство нулю их скалярного произведения. Записывая $(\mathbf{a}, \mathbf{d})$, находим, что $(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \big(\mathbf{a}, ((\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c})\big) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$ при любых векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, что и требовалось доказать.

Пример 4. На плоскости даны два вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, причём $|\mathbf{e}_1| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{e}_2| = 1$, а угол между данными векторами $\varphi = \pi/4$. На плоскости также построен параллелограмм, стороны которого заданы векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис.6), имеющими в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ координаты $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1, & 4 \end{pmatrix}$. Найти длины диагоналей и углы этого параллелограмма.

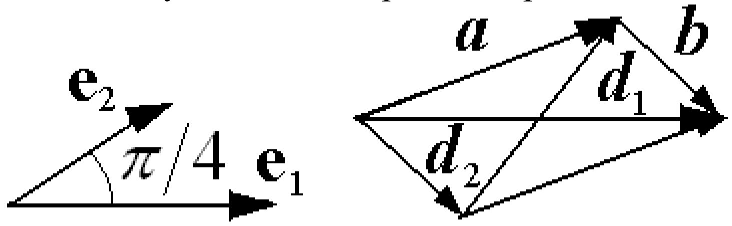

Рис.6. Базисные векторы и построение параллелограмма для примера 4.

Решение. Первая диагональ в векторном виде представляет собой сумму векторов - сторон параллелограмма, а вторая диагональ – векторную разность этих сторон, т.е. $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Следовательно, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ диагонали имеют координаты $\mathbf{d}_1 = (1, 6)$ и $\mathbf{d}_2 = (3, -2)$. Длина каждой из стороны может быть выражена с помощью скалярного произведения: $|\mathbf{d}_{1,2}| = \sqrt{(\mathbf{d}_{1,2}, \mathbf{d}_{1,2})}$. Подставив сюда выражения для диагоналей, получаем

$|\mathbf{d}_1|^2 = (\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1|^2 + 36|\mathbf{e}_2|^2 + 12(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и

$|\mathbf{d}_2|^2 = (3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = 9|\mathbf{e}_1|^2 + 4|\mathbf{e}_2|^2 - 12(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Все входящие в данные выражения слагаемые известны из условия задачи, а последнее скалярное произведение вычисляем по определению как $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|\cos\varphi$. В результате получаем $|\mathbf{d}_1| = 5\sqrt{2}$ и $|\mathbf{d}_2| = \sqrt{10}$. Угол α между сторонами параллелограмма можно определить с помощью скалярного произведения как $\cos\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) / (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)$, где вновь производится разложение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и вычисление скалярного произведения, аналогичное расчёту для $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$. В результате получаем, что $\alpha = \pi/4$, а смежный угол равен соответственно $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Определить координаты точки M, если её радиус-вектор составляет с координатными осями равные углы, а модуль радиус-вектора равен трём.

3.2. Определить, при каких значениях α и β векторы $\mathbf{a}(-2, \quad 3, \quad \beta)$ и $\mathbf{b}(\alpha, \quad -6, \quad 2)$ будут коллинеарными.

3.3. Дано разложение вектора $\mathbf{c}$ по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{c} = 16\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$. Определить разложение по этому же базису вектора $\mathbf{d} \parallel \mathbf{c}$, если эти векторы противоположно направлены и $|\mathbf{d}| = 75$.

3.4. Сторона параллелограмма $ABCD$ образованы векторами $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$. Найти в этом базисе разложения векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{KD}$, где K есть середина стороны BC, а O - точка пересечения диагоналей.

3.5. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ направления $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$ задают базис. Найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{CE}$.

3.6. Найти разложение вектора $\mathbf{c}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

1) $\mathbf{a}=(4,\quad -2)$, $\mathbf{b}=(3,\quad 5)$, $\mathbf{c}=(1,\quad -7)$;

2) $\mathbf{a}=(5,\quad 4)$, $\mathbf{b}=(-3,\quad 0)$, $\mathbf{c}=(19,\quad 8)$;

3) $\mathbf{a}=(-6,\quad 2)$, $\mathbf{b}=(4,\quad 7)$, $\mathbf{c}=(9,\quad -3)$.

3.7. Даны векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Показать, что точка C принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, если $\overrightarrow{OC}=\alpha\,\overrightarrow{OA}+\beta\,\overrightarrow{OB}$, где $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ и $\alpha+b=1$.

3.8. Даны координаты векторов $\mathbf{a}=(1,\quad -1,\quad 1)$, $\mathbf{b}=(5,\quad 1,\quad 1)$ и $\mathbf{c}=(0,\quad 3,\quad -2)$. Вычислить значение следующих выражений:

1) $\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$;

2) $|\,\mathbf{a}\,|^2+|\,\mathbf{c}\,|^2-(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{c})$.

3.9. Какому условию должны удовлетворять векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, чтобы вектор $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ был ортогонален вектору $\mathbf{p}-\mathbf{q}$?

3.10. Даны единичные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$. Вычислить величину $(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{c})+(\mathbf{c},\mathbf{a})$.

3.11. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $|\,\mathbf{a}\,|=4$, $|\,\mathbf{b}\,|=2$ и $|\,\mathbf{c}\,|=6$, определить модуль вектора $\mathbf{p}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

3.12. Определить геометрическое место концов переменного вектора $\mathbf{x}$, если его начало находится в данной точке A и вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет условию $(\mathbf{x},\mathbf{a})=\alpha$, где $\mathbf{a}$ - данный фиксированный вектор и α - данное фиксированное число.

3.13. Найти вектор $\mathbf{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\mathbf{a}=(2,\quad 3,\quad 1)$ и $\mathbf{b}=(1,\quad -2,\quad 3)$, и удовлетворяет условию $(\mathbf{x},(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}))=-6$.

3.14. Найти проекцию вектора $\mathbf{S}=(\sqrt{2},-3,-5)$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oz углы $\alpha=45°$, $\gamma=60°$, а с осью Oy - острый угол β.

3.15. Сила, определяемая вектором $\mathbf{R}=(1,-8,-7)$, разложена по трём взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых задано вектором $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Найти составляющую силы $\mathbf{R}$ в направлении вектора $\mathbf{a}$.

3.16. Найти вектор $\mathbf{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\mathbf{a} = (2, \ -3, \ 1)$ и $\mathbf{b} = (1, \ -2, \ 3)$ и удовлетворяет условию $(\mathbf{x}, (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k})) = 10$.

3.17. На плоскости даны два вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, причём $|\mathbf{e}_1| = 4$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, а угол между данными векторами $\varphi = 2\pi/3$. На плоскости также построен треугольник ABC, радиус-векторы вершины которого заданы векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ эти векторы имеют компоненты $\overrightarrow{OA} = (-2, \ 2)$, $\overrightarrow{OB} = (-2, \ -1)$ и $\overrightarrow{OC} = (-1, \ 0)$. Найти длины диагоналей и углы треугольника ABC.

4. Векторное и смешанное произведение

Тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, отложенных от общего начала в пространстве, называется правой, если при расположении точки наблюдения в конце вектора $\mathbf{c}$ вращение от конца вектора $\mathbf{a}$ к концу вектора $\mathbf{b}$ происходит против часовой стрелки (рис.7а), и левой в противном случае (рис.7б).

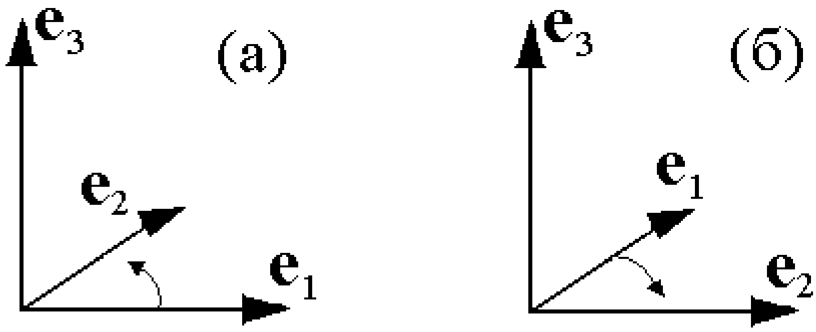

Рис.7. Правая (а) и левая (б) тройки базисных векторов

По умолчанию все базисные тройки векторов в нашем курсе имеют правую ориентацию, для определения которой, очевидно, важен порядок следования базисных векторов. С помощью трёх некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ можно построить параллелепипед, рёбра которого образуют три данных вектора. Число, равное объёму данного параллелепипеда со знаком «плюс» в случае совпадающей ориентации тройки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и тройки базисных векторов, называется смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и обозначается как $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$. В случае, когда ориентация тройки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ противоположна ориентации базисной тройки, смешанное произведение равно указанному объёму со знаком «минус». При перестановке двух соседних сомножителей смешанное произведение меняет знак, а при так называемой циклической перестановке оно не изменяется: $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})$. Смешанное произведение равно нулю, если данные три вектора являются компланарными. Если известны координаты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в правом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, то смешанное произведение можно найти с помощью определителя третьего порядка:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ можно представить как скалярное произведение двух векторов $(\mathbf{d},\mathbf{c})$, где вектор $\mathbf{d}$ называется векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которое обозначается как $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и обладает следующими свойствами (рис.8):

1) Вектор $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, будучи ориентирован так, что тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ является правой;
2) Модуль $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ равен площади параллелограмма, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ есть угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

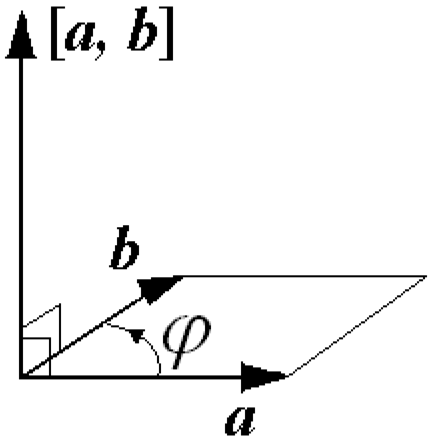

Рис.8. Векторное произведение векторов

Из этих свойств следует, что векторное произведение антикоммутативно, т.е. $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=-[\mathbf{b},\mathbf{a}]$, и равно нулю для случая коллинеарных векторов. Смешанное произведение не изменяется при замене аргументов в векторном и скалярном произведении с сохранением порядка следования векторов, т.е.

$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = ([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])$. В правом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ векторное произведение может быть найдено через определитель третьего порядка

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично векторному произведению может быть введено двойное векторное произведение трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, обозначаемое как $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$. Это выражение можно раскрыть в любом базисе, в результате чего получается более удобная его запись в виде

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Пример 1. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполняется тождество $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|^2 + (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$.

Решение. Модуль векторного произведения равен $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ есть угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а скалярное произведение равно $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$. Следовательно, в левой части стоит выражение $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\varphi + |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\varphi = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)$, что равно $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$, то есть правой части рассматриваемого тождества.

Пример 2. Для некоторых трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ выполняется равенство $[\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}] + [\mathbf{c},\mathbf{a}] = \mathbf{0}$. Показать, что вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ являются компланарными.

Решение. Применим часто используемый в подобных задачах приём, заключающийся в скалярном умножении обеих частей векторного равенства на какой-либо известный вектор, в данном случае, к примеру, на вектор $\mathbf{a}$:

$$(\mathbf{a},[\mathbf{a},\mathbf{b}]) + (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) + (\mathbf{a},[\mathbf{c},\mathbf{a}]) = (\mathbf{a},\mathbf{0}) = 0.$$

Первое и третье слагаемое в левой части равны, поскольку в них входят по два совпадающих вектора, дающие нулевой объём построенного на данных тройках параллелепипедов. Следовательно, мы получили равенство $(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$, что говорит о компланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Пример 3. Какое множество $\mathbf{x}$ векторов удовлетворяет уравнению $[\mathbf{x},\mathbf{a}]=\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ есть некоторые фиксированные векторы?

Решение. Векторное произведение не изменится, если один из его сомножителей изменять так, чтобы площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$, не изменялась, а сам вектор $\mathbf{x}$ всё время оставался в одной плоскости P, перпендикулярной $\mathbf{b}$. Если вектор $\mathbf{a}$ есть основание параллелограмма, то его высотой будет проекция вектора $\mathbf{x}$ на прямую, перпендикулярную $\mathbf{a}$ и лежащую в плоскости P. Оставив эту проекцию неизменной, мы видим, что поставленным условиям удовлетворяют все вектора, лежащие в плоскости P на прямой, параллельной вектору $\mathbf{a}$ и отстоящей от него на расстоянии $|\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|$ (рис.9).

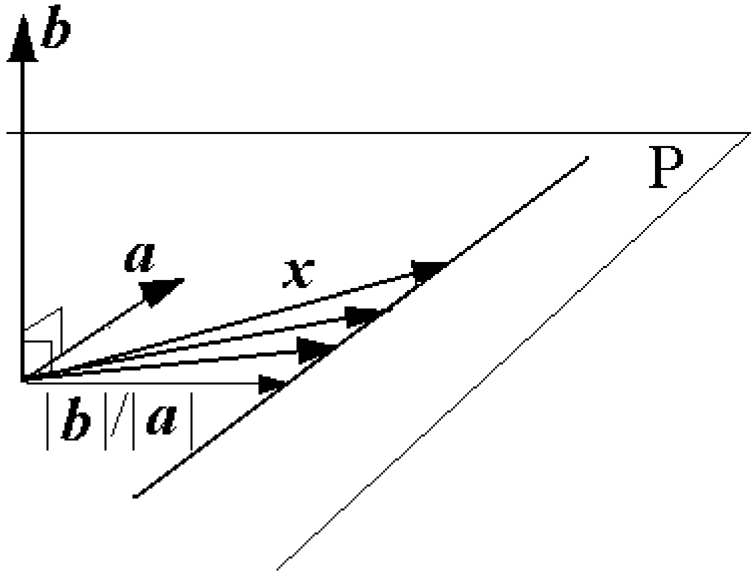

Рис.9. Расположение прямой и искомого вектора в примере 3.

Пример 4. Доказать тождество: $([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}])=\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{c}) & (\mathbf{a},\mathbf{d})\\ (\mathbf{b},\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\mathbf{d})\end{vmatrix}$.

Решение. Обозначим вектор $[\mathbf{c},\mathbf{d}]$ как $\mathbf{f}$, тогда в левой части тождества будет стоять смешанное произведение трёх векторов $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{f})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{f})$. Используя инвариантность смешанного произведения относительно аргументов векторного и скалярного произведения внутри него, получим $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{f})=([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{f})=(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{f}])$, в последнем равенстве подставим $\mathbf{f}=[\mathbf{c},\mathbf{d}]$ и раскроем двойное векторное произведение:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{f}])=(\mathbf{a},[\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{d}]])=(\mathbf{a},\{\mathbf{c},(\mathbf{b},\mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{b},\mathbf{c})\})=\\&=(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d})-(\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c})\end{aligned},$$

что равно значению определителя в правой части тождества после его раскрытия.

Задачи для самостоятельного решения.

4.1. В декартовом базисе $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ вычислить векторные произведения $[\mathbf{i},\mathbf{j}]$, $[\mathbf{j},\mathbf{k}]$, $[\mathbf{k},\mathbf{i}]$, $[\mathbf{j},\mathbf{i}]$, $[\mathbf{k},\mathbf{j}]$, $[\mathbf{i},\mathbf{k}]$.

4.2. Найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(-1,\ 0,\ 2)$, $B(1,\ -2,\ 5)$, $C(3,\ 0,\ -4)$.

4.3. Определить, какую ориентацию имеет тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ с компонентами в правом декартовом базисе $\mathbf{a}=(1,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(2,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{c}=(1,\ -2,\ 3)$.

4.4. Найти объём тетраэдра $ABCD$, вершины которого в декартовом базисе имеют координаты $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$ и $D(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

4.5. Даны компоненты векторов сил $\mathbf{F}_1=(2,\ 4,\ 6)$, $\mathbf{F}_2=(1,\ -2,\ 3)$ и $\mathbf{F}_3=(1,\ 1,\ -7)$, приложенных в одной точке $A(3,\ -4,\ 8)$. Определить величину и направление момента результирующей этих сил относительно точки $B(4,\ -2,\ 6)$.

4.6. Даны произвольные векторы: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}$. Доказать, что векторы $\mathbf{F}_1=[\mathbf{a},\mathbf{x}]$, $\mathbf{F}_2=[\mathbf{b},\mathbf{x}]$ и $\mathbf{F}_3=[\mathbf{c},\mathbf{x}]$.

4.7. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ и $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

4.8. Известны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(0,\ -2,\ 5)$, $B(6,\ 6,\ 0)$, $C(3,\ -3,\ 6)$ и $D(2,\ -1,\ 3)$. Найти длину высоты этого тетраэдра, опущенную из вершины C .

4.9. Даны вершины тетраэдра: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

4.10. Объём тетраэдра $V=5$, три его вершины находятся в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найти координаты четвёртой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy

4.11. Доказать, что четыре точки $A(1,2,-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

4.12. Даны вершины треугольника $A(2, -1, -3)$, $B(1, 2, -4)$ и $C(3, -1, -2)$. Вычислить координаты вектора $\mathbf{x}$, коллинеарного с его высотой, опущенной из вершины A на противоположную сторону, при условии, что вектор $\mathbf{x}$ образует с осью Oy тупой угол и что его модуль равен $2\sqrt{34}$.

4.13. Три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ приведены к общему началу. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\mathbf{a},\mathbf{b}]+[\mathbf{b},\mathbf{c}]+[\mathbf{c},\mathbf{a}]$.

4.14. Неизвестный вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет следующей системе уравнений, где некомпланарные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и числа p, q, s считаются известными:

$$\begin{cases} (\mathbf{x},\mathbf{a}) = p \\ (\mathbf{x},\mathbf{b}) = q \\ (\mathbf{x},\mathbf{c}) = s. \end{cases}$$

Выразить вектор $\mathbf{x}$ через векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и числа p, q, s.

4.15. Доказать векторные тождества:

1) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2 + |[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}]|^2 = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]|^2 \cdot |\mathbf{c}|^2$;

2) $[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]] = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) - \mathbf{d}\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$;

3) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{b},\mathbf{c}],[\mathbf{c},\mathbf{a}]) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$;

4) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]\;] + [\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{a}]\;] + [\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}]\;] = 0$;

3) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{d}]]\;] = [\mathbf{a},\mathbf{c}]\cdot(\mathbf{b},\mathbf{d}) - [\mathbf{a},\mathbf{d}]\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c})$;

4) $[\mathbf{a},\mathbf{b}]^2 \cdot [\mathbf{a},\mathbf{c}]^2 - ([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{a},\mathbf{c}])^2 = \mathbf{a}^2 \cdot (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$.

Глава 3
Прямые линии и плоскости

5. Прямая линия на плоскости

Прямая линия L на плоскости в декартовой системе координат (x, y) задаётся в общем виде уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$, где коэффициенты A и B не равны нулю одновременно. Уравнение общего вида путём элементарных преобразований может быть представлено как уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$ или как уравнение прямой в отрезках $x/a + y/b = 1$, где a и b есть алгебраические, т.е. с учётом знака, длины отрезков, отсекаемых данной прямой на координатных осях (Рис.10а). С использованием аппарата векторной алгебры уравнение прямой на плоскости может быть записано в параметрическом виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, где $\mathbf{r} = (x, y)$ описывает радиус-вектор точки на прямой, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ есть двумерный вектор, задающий начальную точку на прямой, $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ есть направляющий вектор прямой, а параметр t пробегает всю числовую ось (Рис.10б).

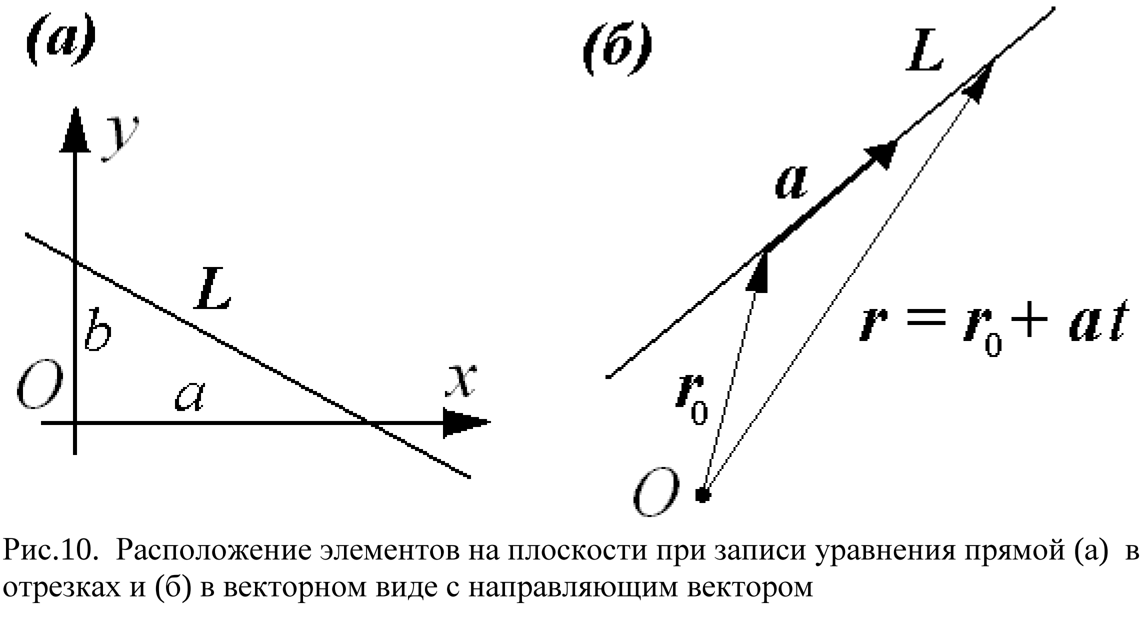

Рис.10. Расположение элементов на плоскости при записи уравнения прямой (а) в отрезках и (б) в векторном виде с направляющим вектором

Исключая параметр t из уравнения прямой, его можно записать в каноническом виде

$$\left\{ \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} \right. .$$

Если известны координаты двух точек $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$, через которые проходит прямая, то её направляющий вектор можно задать в виде $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, что позволяет записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки, в виде

$$\left\{ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right. .$$

Кроме того, при использовании нормального вектора $\mathbf{n}$ к данной прямой её уравнение в векторном виде может быть записано как $\left((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \mathbf{n}\right) = 0$, называемом уравнением прямой в нормальном виде. Поскольку $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}\right) = D$ есть постоянное число, уравнение прямой в нормальном виде также записывают как $\left(\mathbf{r}, \mathbf{n}\right) = D$.

Угол φ между двумя прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом $y_1 = k_1 x + b_1$ и $y_2 = k_2 x + b_2$, может быть найден из выражения $\tan\varphi = (k_2 - k_1)/(1 + k_1 k_2)$. Сравнивая уравнения прямых с угловым коэффициентом и уравнения тех же прямых в общем виде, в последнем случае угол между прямыми находим в виде $\tan\varphi = (A_1 B_2 - A_2 B_1)/(A_1 A_2 + B_1 B_2)$. Отсюда следует, что условием параллельности двух прямых, эквивалентное обращению в нуль числителя последнего выражения, является пропорциональность коэффициентов: $A_1/A_2 = B_1/B_2$, а условие перпендикулярности прямых вытекает из обращения в нуль знаменателя и имеет вид $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Если зафиксировать точку прямой (x_0, y_0), то в уравнении прямой с угловым коэффициентом $y - y_0 = k(x - x_0)$ можно изменять параметр k, определяющий тангенс наклона прямой к оси абсцисс. В этом случае говорят о пучке прямых, проходящих через центр пучка (x_0, y_0). Если даны две пересекающиеся прямые с уравнениями с $A_{1,2}x + B_{1,2}y + C_{1,2} = 0$, то пучок прямых, проходящих через точку их пересечения, может быть задан с помощью двух параметров α и β как

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0.$$

Расстояние от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой L, заданной уравнением общего вида $Ax + By + C = 0$, определяется по формуле

$$d_{ML} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

являющейся координатной записью результата вычисления этого расстояния в векторном виде

$$d_{ML} = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|},$$

где прямая L задана в виде $((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \mathbf{n}) = 0$, а $\mathbf{r}_1$ есть радиус-вектор точки M (рис.11).

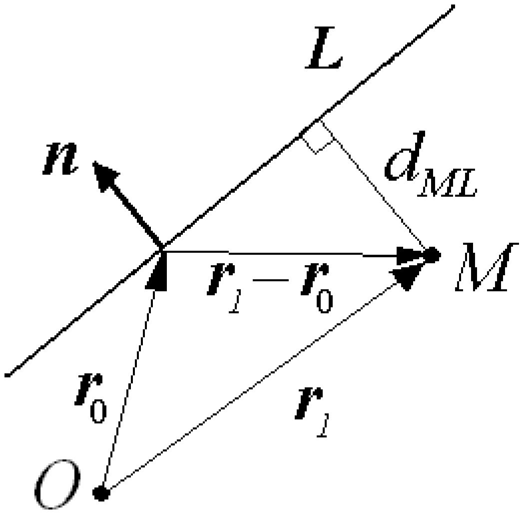

Рис.11. Нахождение расстояния от точки до прямой линии.

Пример 1. На плоскости даны точки $L(-6, 0)$ и $N(0, 8)$. Записать уравнение прямой, проходящей через середину отрезка LN и отсекающей на оси Ox втрое больший отрезок, чем на оси Oy.

Решение. В уравнении прямой в отрезках $x/a + y/b = 1$ требуется определить два параметра a и b. По условию задачи $a = 3b$, кроме того, уравнению удовлетворяют координаты точки $M(-3, 4)$, являющейся серединой отрезка LN. Следовательно, мы имеем уравнение $-3/3b + 4/b = 1$ на параметр b, откуда находим $b = 3$ и $a = 9$. Уравнение искомой прямой имеет вид $x/9 + y/3 = 1$, или $x + 3y - 9 = 0$.

Пример 2. При каком необходимом и достаточном условии прямые L_1 и L_2, заданные на плоскости векторными уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$

а) пересекаются в единственной точке;

б) параллельны, но не совпадают;

в) совпадают.

Решение. Для первого случая необходимым и достаточным является неколлинеарность направляющих векторов прямых $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, тогда на плоскости прямые пересекутся в одной точке (рис.12а). Для второго случая, следует потребовать коллинеарности направляющих векторов, при этом единственным условием, обуславливающим несовпадение прямых, является неколлинеарность вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и направляющего вектора $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ (рис.12б). Наконец, для полного совпадения прямых необходимо и достаточно достижение коллинеарности их направляющих векторов и коллинеарность вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ с направляющим вектором $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ (рис.12в).

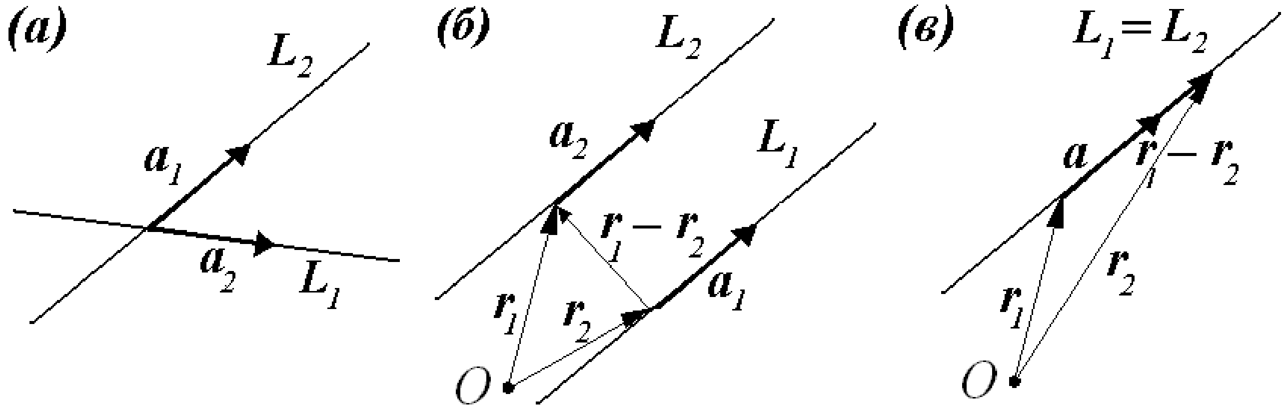

Рис.12. Различные случаи взаимного расположения прямых в примере 2.

Пример 3. На плоскости даны координаты вершин треугольника PQR: $P(0, 5)$; $Q(-3, 1)$; $R(1, -2)$. Найти длину высоты треугольника, опущенной из вершины R.

Решение. Искомая длина есть расстояние от точки $R(1, -2)$ до прямой L, проходящей через точки $P(0, 5)$ и $Q(-3, 1)$, и описываемой уравнением

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y-5}{1-5},$$

или $4x - 3y + 15 = 0$. Используя упомянутую выше формулу для расстояния от точки до прямой, находим

$$d_{RL} = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5,$$

т.е. длина высоты $h = 5$.

Пример 4. Найти расстояние d_{ML} от точки M с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ до прямой L, заданной в нормальной форме уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

Решение. Опустим из точки M перпендикуляр на прямую L, пересекающий её в точке M_1. Очевидно, требуется найти длину перпендикуляра

$MM_1 = d_{ML}$ (см. рис.11). Точка M_1 имеет некоторый радиус-вектор $\mathbf{r}_1$, удовлетворяющий уравнению прямой $(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = D$, и может быть принята за начальную точку в нормальном уравнении прямой. Используя векторную формулу для расстояния от точки $M(\mathbf{r}_0)$ до прямой $((\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \mathbf{n}) = 0$, находим

$$d_{ML} = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1), \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) - (\mathbf{r}_1, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) - D|}{|\mathbf{n}|},$$

что и является ответом к поставленной задаче.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Прямая задана уравнением $3x - 4y - 12 = 0$. Где располагаются точки плоскости, для которых $3x - 4y - 12 > 0$ и $3x - 4y - 12 < 0$?

5.2. При каких значениях постоянной C прямая линия, заданная уравнением $2x + 3y + C = 0$, отсекает на оси Oy отрезки $b_1 = 4$ и $b_2 = -6$?

5.3. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $6x + 8y + 5 = 0$ и $2x - 4y - 3 = 0$.

5.4. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$.

5.5. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$.

5.6. Найти проекцию точки $P(-6, 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

5.7. Вычислить площадь треугольника, заключённого между осями координат и прямой $2x + 7y - 14 = 0$.

5.8. Вычислить площадь треугольника, стороны которого лежат на прямых L_1, L_2 и L_3, заданных следующими уравнениями:

$L_1: \quad x - 3y + 11 = 0$;

$L_2: \quad 5x + 2y - 13 = 0$;

$L_3: \quad 9x + 7y - 3 = 0$.

5.9. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -2)$ и

а) параллельной прямой $L: 4x + 7y - 3 = 0$;

б) перпендикулярной этой прямой.

5.10. Прямая L_1 задана уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, а прямая L_2 задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, причём $(\mathbf{n}, \mathbf{a}) \neq 0$. Найти радиус-вектор точки пересечения прямых L_1 и L_2.

5.11. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_n$ проекции точки M с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ на прямую L, заданную уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

5.12. Определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $x - y + 3 = 0$.

5.13. Даны вершины треугольника $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$ и $C(3, 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведённую из вершины B.

5.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3, 5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7, 3)$ и $B(11, -15)$.

5.15. Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой $3x - 2y + 7 = 0$, луч от неё отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отражённый луч.

5.16. Определить, при каком значении параметра a прямая, заданная уравнением $(a+2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$, будет:

а) параллельна оси абсцисс;

б) параллельна оси ординат;

в) проходит через начало координат.

В каждом случае написать уравнение прямой.

5.17. Определить, при каких значениях параметров m и n две прямые, заданные уравнениями $mx + 8y + n = 0$ и $2x + my - 1 = 0$

а) параллельны;

б) совпадают;

в) перпендикулярны.

5.18. Через точку $M(4, 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. ед. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

5.19. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ и одна из его вершин $A(-2, 1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

5.20. Даны три параллельные прямые: $10x + 15y - 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$. Установить, что первая из них лежит между двумя другими, и вычислить отношение, в котором она делит расстояние между ними.

5.21. Определить, лежат ли точки $M(2,3)$ и $N(5,-1)$ в одном, смежных или вертикальных углах, образованных при пересечении двух прямых:

а) $x-3y-5=0$, $2x+9y-2=0$;

б) $2x+7y-5=0$, $x+3y+7=0$;

в) $12x+y-1=0$, $13x+2y-5=0$.

5.22. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $2x-3y-5=0$, $6x-4y+7=0$, смежного с углом, содержащим точку $C(2,-1)$.

5.23. Записать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(4,-5)$. Среди прямых из этого пучка выбрать прямую,

а) параллельную прямой $L: \quad 2x-3y+6=0$;

б) перпендикулярную прямой L.

5.24. Записать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых L_1 и L_2 параллельно прямой L_3, если входящие в условие задачи прямые заданы следующими уравнениями:

$L_1: \quad 5x-y+10=0$;

$L_2: \quad 8x+4y+9=0$;

$L_3: \quad x+3y=0$.

5.25. Записать уравнение биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$.

5.26. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(2x+5y+4)+\beta(3x-2y+25)=0$. Найти прямую этого пучка, отсекающую на координатных осях отличные от нуля отрезки равной величины (считая от начала координат).

5.27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+y-5=0$, $x-2y+10=0$ и отстоящей от точки $C(-1,-2)$ на расстоянии $d=5$. Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых.

5.28. Найти расстояние между параллельными прямыми $Ax+By+C_1=0$ и $Ax+By+C_2=0$.

5.29. Найти расстояние от точки M с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ до прямой L, заданной уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{a}t$.

5.30. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x-2y-1)+\beta(4x-5y+8)=0$. Найти прямую из этого пучка, проходящую через середину отрезка прямой $x+2y+4=0$, заключённого между прямыми $2x+3y+5=0$ и $x+7y-1=0$.

6. Плоскость в пространстве

В декартовой системе координат (xyz) плоскость в пространстве задаётся уравнением первой степени вида $Ax + By + Cz + D = 0$. Аналогично уравнению прямой на плоскости, плоскость в пространстве также может быть описана в терминах алгебраических величин отрезков (a, b, c), отсекаемых ею на осях координат, что описывается уравнением $x/a + y/b + z/c = 1$. Любая плоскость однозначно определяется вектором нормали к плоскости $\mathbf{n} = (A, B, C)$ и какой-либо точкой $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую данная плоскость проходит. В этом случае уравнение плоскости может быть записано в координатной форме как $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или в эквивалентной ей векторной форме $((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \mathbf{n}) = 0$ (рис.13). Обращаем внимание на то, что это уравнение имеет точно такой же вид, как и уравнение прямой на плоскости. В параметрическом виде плоскость как двумерное множество требует введения двух независимых параметров u и v, которые вместе с введенным базисом на плоскости $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ позволяют записать параметрическое уравнение плоскости в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$. Нормальный вектор очевидным образом выражается через базисные вектора плоскости по формуле $\mathbf{n} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Данное обстоятельство позволяет также записать уравнение плоскости при помощи смешанного произведения как $((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, выражающее компланарность любого вектора в плоскости, взятого относительно некоторой начальной точки, и базисных векторов данной плоскости (рис.13).

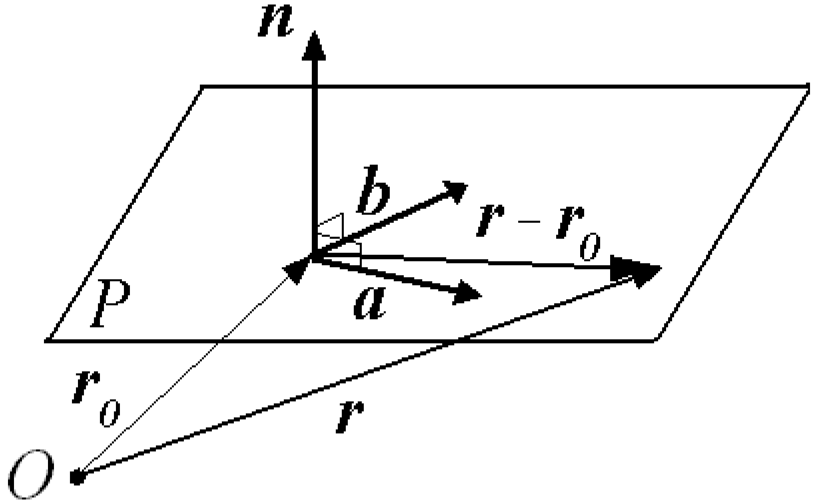

Рис.13. Расположение элементов при выводе векторного уравнения плоскости в нормальной форме.

По уже отмеченной аналогии с уравнением прямой на плоскости расстояние d_{MP} от точки M в пространстве до плоскости P, заданной уравнением $((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\mathbf{n})=0$ (рис.13), даётся формулой

$$d_{MP}=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0),\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|},$$

которая в координатной форме отличается от случая прямой на плоскости лишь наличием третьей координаты и имеет вид

$$d_{MP}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1,y_{1,}z_1)$, $M_2(x_2,y_{2,}z_2)$ и $M_3(x_3,y_{3,}z_3)$.

Решение. Пусть некоторая текущая точка плоскости M имеет координаты (x,y,z). Тогда уравнение плоскости может быть записано в виде $((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\mathbf{a},\mathbf{b})=0$, где $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $\mathbf{r}_0=(x_1,y_1,z_1)$, а базисные векторы на рис.13 равны соответственно $\mathbf{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$. Записывая смешанное произведение в виде определителя, получаем искомое уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 2. Точка $M(x_0,y_0,z_0)$ лежит в плоскости P, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а вектор $\overrightarrow{MM_1}$ имеет компоненты (A,B,C). Доказать, что его конец $M_1(x_1,y_1,z_1)$ на рис.14 лежит в положительном относительно плоскости P полупространстве, т.е. $Ax_1+By_1+Cz_1+D>0$.

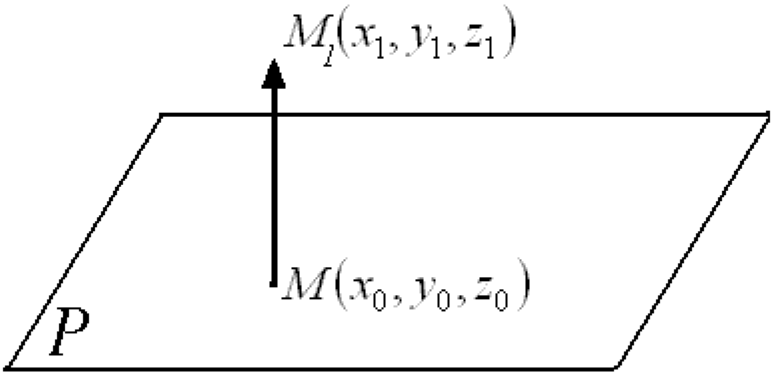

Рис.14. Расположение точек и соединяющего их вектора в примере 2.

Решение. Поскольку по определению компонент вектора имеем $x_1 - x_0 = A$, $y_1 - y_0 = B$ и $z_1 - z_0 = C$, а точка M лежит в плоскости и поэтому $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) + D =$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + A^2 + B^2 + C^2 = 0 + A^2 + B^2 + C^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Известны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(2, -1, 3)$, $B(1, -3, 5)$, $C(6, 2, 5)$ и $D(3, -2, -5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Искомую длину можно найти как расстояние от точки D до плоскости P, проходящей через три данные точки A, B, C. Запишем уравнение плоскости P с помощью определителя, используя результат примера 1:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1-2 & -3+1 & 5-3 \\ 6-2 & 2+1 & 5-3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда уравнение плоскости P есть $2x - 2y - z - 3 = 0$. Используя формулу для расстояния от точки до плоскости, получаем искомую длину

$$d_{DP} = \frac{|2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-5) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 4.$$

Задачи для самостоятельного решения.

6.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4, -3, 5)$ и отсекающей на всех координатных осях равные отрезки.

6.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -2, 6)$, $M_2(5, -4, -2)$, и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy.

6.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно вектору $\mathbf{a}(a_1, \quad a_2, \quad a_3)$, причём векторы $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ неколлинеарны.

6.4. С помощью операций векторной алгебры записать уравнение плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$ в виде $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

6.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки A, B, C, если эти точки определяют плоскость:

а) $A(1, 1, 2)$, $B(2, 3, 3)$, $C(-1, -3, 0)$;

б) $A(2, 1, 3)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(3, 0, 1)$.

6.6. Зная параметрические уравнения плоскости

$$\begin{cases} x = 1 + u - v \\ y = 2 + u + 2v \\ z = -1 - u + 2v \end{cases},$$

записать её уравнение в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

6.7. Зная общее уравнение плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$, записать её уравнение в параметрической форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$.

6.8. На оси Ox найти точку, равноудалённую от точки $A(9, -2, 2)$ и от плоскости $P: \quad 3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

6.9. На оси Oz найти точку, равноудалённую от точки $M(1, -2, 0)$ и от плоскости P: $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

6.10. Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок $c = -5$ и перпендикулярной к вектору $\mathbf{n} = (-2, \quad 1, \quad 3)$.

6.11. Составить уравнение плоскости, которая делит пополам тупой двугранный угол, образованный двумя плоскостями: $3x - 4y - z + 5 = 0$, $4x - 3y + z + 5 = 0$.

6.12. Найти расстояние от точки M с радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ до плоскости P, заданной уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

6.13. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями P_1 и P_2, заданными уравнениями $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_2$.

6.14. Определить, при каких значениях параметров a и b плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$:

а) имеют одну общую точку;

б) проходят через одну прямую;

в) пересекаются по трём различным параллельным прямым.

7. Прямая линия и плоскость в пространстве

Прямая линия в трёхмерном пространстве, как и на плоскости, может быть задана параметрическим векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ (рис.10б), где теперь трехкомпонетный вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$ описывает радиус-вектор точки прямой в пространстве, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ есть вектор, задающий начальную точку на прямой, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ есть направляющий вектор прямой, а параметр t пробегает всю числовую ось. Исключая параметр t из уравнения прямой, его можно записать в каноническом виде

$$\left\{\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}\right. .$$

Если известны координаты двух точек $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, через которые проходит прямая, то её направляющий вектор можно задать в виде $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, что позволяет записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки, в виде

$$\left\{\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}\right. .$$

Ещё один тип векторного уравнения прямой можно получить, записывая условие коллинеарности вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и направляющего вектора прямой, что приводит к равенству нулю их векторному произведению: $[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ (рис.15). Данное уравнение может быть также записано в виде $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ есть направляющий вектор, а $\mathbf{b}$ - некоторый постоянный вектор.

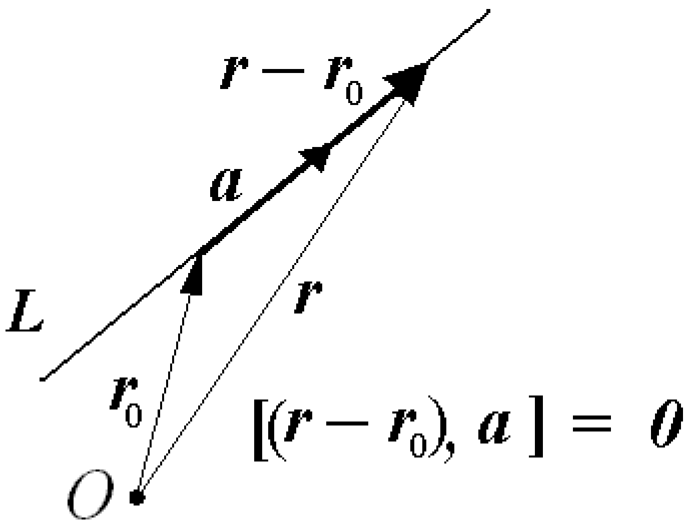

Рис.15. К выводу векторного уравнения прямой линии в пространстве.

Если в пространстве даны две непараллельные плоскости P_1 и P_2, заданные уравнениями $A_{1,2}x + B_{1,2}y + C_{1,2}z + D_{1,2} = 0$, то своим пересечением они определяют прямую линию $L = P_1 \cap P_2$, которая описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

причём направляющий вектор прямой может быть выражен через нормальные векторы плоскостей как $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ (рис.16), а начальная точка (x_0, y_0, z_0) на прямой может быть найдена как одно из множества частных решений данной системы уравнений.

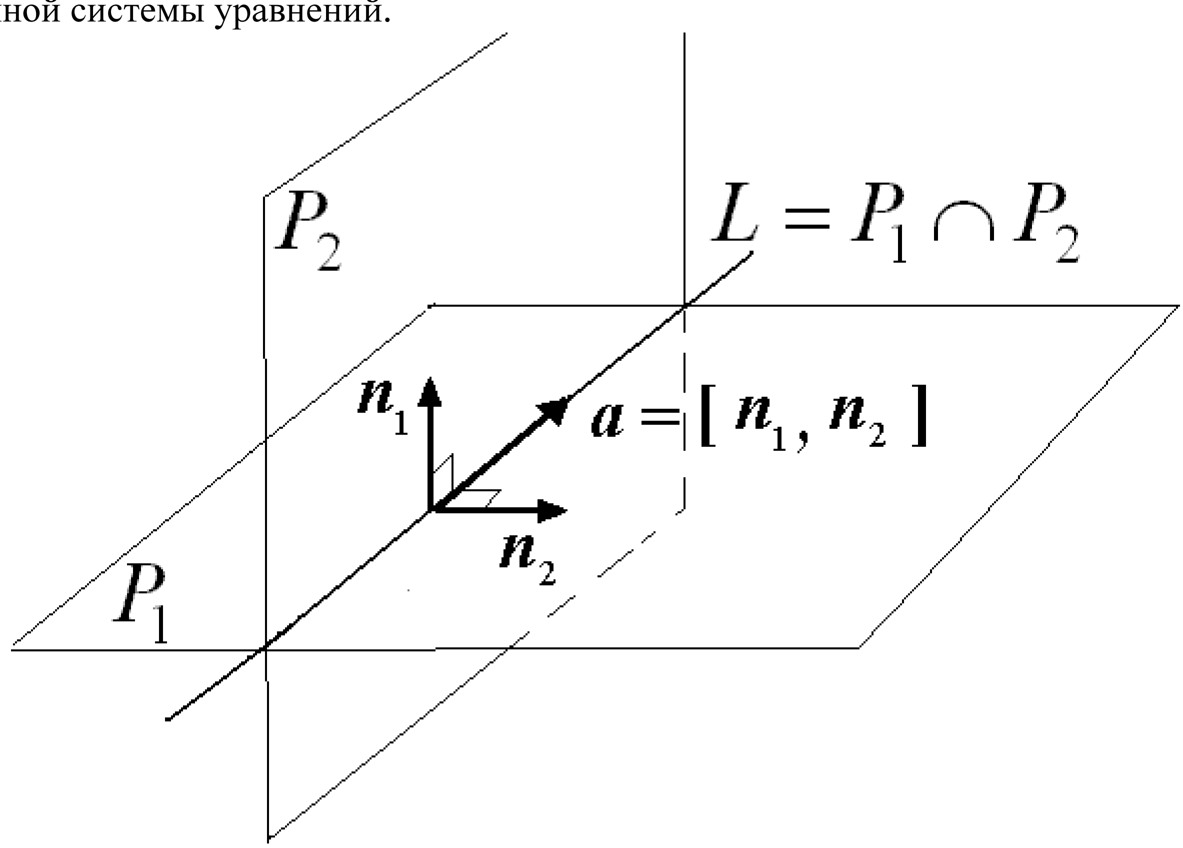

Рис.16. Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Для двух пересекающихся плоскостей, рассмотренных выше, может быть введено понятие пучка плоскостей, то есть множества плоскостей, которые все проходят через прямую линию их пересечения, называемую осью пучка:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Различные значения параметров α и β отвечают различным направлениям нормального вектора плоскости из данного пучка.

Расстояние от точки M с радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ до прямой L, описываемой уравнением $[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\mathbf{a}]=\mathbf{0}$, может быть найдено по формуле

$$d_{ML}=\frac{\left|[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0),\mathbf{a}]\right|}{|\mathbf{a}|},$$

следующей из формулы площади параллелограмма, которой равен модуль векторного произведения (рис.17).

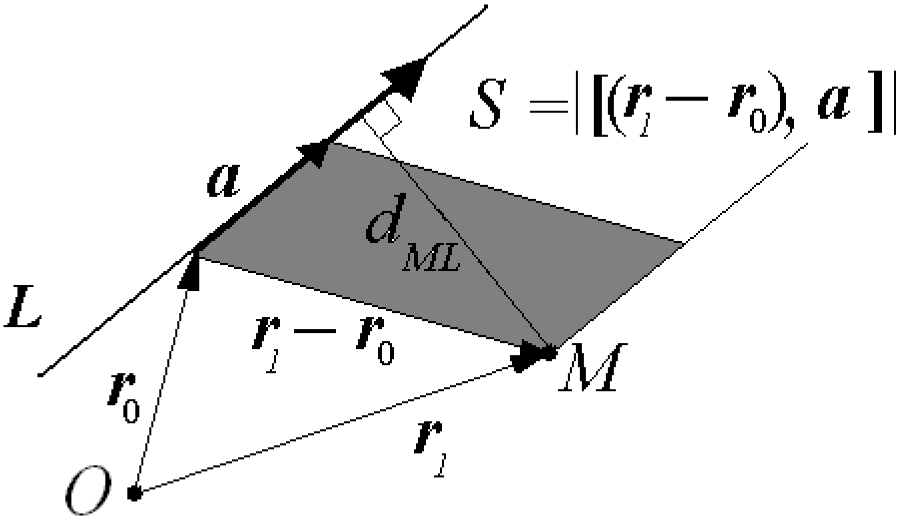

Рис.17. Расположение элементов при нахождении расстояния от точки до прямой линии в пространстве.

Если в пространстве заданы две скрещивающиеся, т.е. не параллельные и не пересекающиеся прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+\mathbf{a}_2 t$, то кратчайшее расстояние между ними может быть найдено по формуле

$$d_{12}=\frac{\left|((\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1),\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\right|}{\left|[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]\right|},$$

которая следует из выражения для объёма параллелепипеда при построении, аналогичном рис.17.

Пример 1. Составить параметрическое уравнение прямой L, проходящей через точку $M(5,-1,-4)$, в каждом из следующих случаев:

1) Прямая L параллельна прямой A, заданной уравнениями $x=3+6t$, $y=2-4t$, $z=7-t$;
2) Прямая L параллельна оси Ox;
3) Прямая L перпендикулярна плоскости $P:\quad x+2y+3z-5=0$.

Решение. 1) Параллельность прямых линий L и A означает, что они имеют одинаковый направляющий вектор, в качестве которого может быть выбран направляющий вектор прямой A, имеющий компоненты $\mathbf{a}(6, \quad -4, \quad -1)$. Начальная точка прямой определена в условии, поэтому в данном пункте уравнения прямой L имеют вид $x = 5 + 6t$, $y = -1 - 4t$, $z = -4 - t$.

2) Параллельность прямой L и оси Ox означает, что в качестве направляющего вектора прямой можно взять любой ненулевой вектор, параллельный оси Ox, например, вектор $\mathbf{a}(1, \quad 0, \quad 0)$. Следовательно, уравнения прямой L в данном случае имеют вид $x = 5 + t$, $y = -1$, $z = -4$.

3) Перпендикулярность прямой L и плоскости P означает, что в качестве направляющего вектора прямой может быть выбран нормальный вектор плоскости, имеющий компоненты $\mathbf{n}(1, \quad 2, \quad 3)$. Уравнения прямой L в данном случае будут иметь вид $x = 5 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = -4 + 3t$.

Пример 2. Составить уравнения прямой L, являющейся проекцией прямой A, заданной уравнениями

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4},$$

на плоскость P, заданную уравнением $x - 3y + 2z - 7 = 0$ (рис.18).

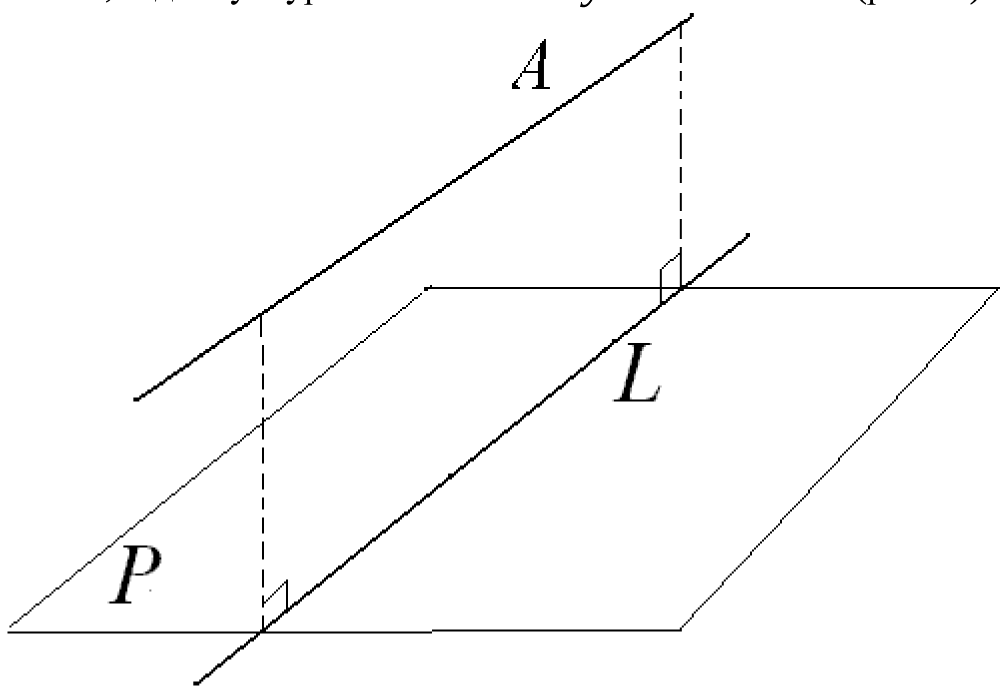

Рис.18. Проекция прямой линии на плоскость.

Решение. Удобно составить уравнения прямой L как линии пересечения двух плоскостей P и P_1, где плоскость P определена в условии задачи, а перпендикулярная ей плоскость P_1 проходит через прямую A с начальной точкой $M_0(2,-1,5)$ и имеет нормальный вектор, ортогональный нормальному вектору плоскости P. Пусть $M(x, y, z)$ есть некоторая точка плоскости P_1. Тогда следующие три вектора: вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-2, \quad y+1, \quad z-5)$, направляющий вектор прямой $\mathbf{a}(6, \quad -5, \quad 4)$, и нормальный вектор плоскости P $\mathbf{n}(1, \quad -3, \quad 2)$ являются векторами, лежащими в одной плоскости P_1. Условие их компланарности, записанное при помощи определителя, и является уравнением плоскости P_1:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $2x - 8y - 13z + 53 = 0$. Система, состоящая из этого уравнения и уравнения плоскости P, и определяет уравнения искомой проекции:

$$L: \quad \begin{cases} x - 3y + 2z - 7 = 0 \\ 2x - 8y - 13z + 53 = 0 \end{cases}.$$

Пример 3. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми L_1 и L_2, заданными уравнениями $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_1$ и $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_2$.

Решение. Пусть точка M с радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ лежит на прямой L_1, тогда $\mathbf{r}_1$ удовлетворяет уравнению этой прямой $[\mathbf{r}_1, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_1$. Расстояние между прямыми L_1 и L_2 может быть найдено как расстояние от точки M до прямой L_2 (рис.17), на которой выбрана некоторая начальная точка с радиус вектором $\mathbf{r}_0$. Используя данные в условии уравнения прямых, получаем:

$$d_{12} = \frac{|[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{a}] - [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2|}{|\mathbf{a}|},$$

что и определяет искомое расстояние между параллельными прямыми.

Задачи для самостоятельного решения.

7.1. Составить в каноническом виде уравнения прямых, образующих диагонали параллелограмма $ABCD$, три вершины которого находятся в точках $A(2,\ 4,\ 6)$, $B(-3,\ 5,\ 4)$ и $C(8,\ -6,\ 2)$.

7.2. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(1,-1,2)$ и перпендикулярной плоскости P, если данная плоскость задана уравнениями:

а) $x-3y+2z+1=0$; б) $\begin{cases} x=4-u+v \\ y=2+u+2v \\ z=-1+7u+3v \end{cases}$.

7.3. Дана прямая $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t$ и плоскость $(\mathbf{r},\mathbf{n})=D$. При каком необходимом и достаточном условии:

а) прямая и плоскость пересекаются (одна общая точка);

б) прямая и плоскость параллельны (нет общих точек);

в) прямая лежит в плоскости.

7.4. Составить уравнение оси Ox как линии пересечения двух плоскостей.

7.5. Как взаимно располагаются в пространстве прямые A и B, заданные своими уравнениями?

а) $A:\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+5t \\ z=-3+4t \end{cases}$, $B:\begin{cases} x=-4+3t \\ y=2-t \\ z=5-2t \end{cases}$;

б) $A:\begin{cases} x=1+2t \\ y=7+t \\ z=3+4t \end{cases}$, $B:\begin{cases} x=6+3t \\ y=-1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$.

7.6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3,5)$ перпендикулярно прямым A и B, заданным каноническими уравнениями $A:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+5}{2}$ и $B:\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+7}{-2}$.

7.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4,-1,-1)$ и прямую L, заданную как линию пересечения двух плоскостей:

$L:\begin{cases} 2x-3y+5z-7=0 \\ 4x+2y-6z-5=0 \end{cases}$.

7.8. Составить уравнение проекции прямой L, заданной в параметрической форме как $x=x_0+a_xt$, $y=y_0+a_yt$, $z=z_0+a_zt$, на плоскость P, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

7.9. Составить уравнение плоскости P, проходящей через прямую L параллельно оси Oy, если прямая L задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$L:\begin{cases}3x-y+2z+9=0\\ x+z-3=0\end{cases}.$$

7.10. Дана прямая $A:\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t$ и плоскость $P:(\mathbf{r},\mathbf{n})=D$, не параллельные между собой. Точка M лежит на прямой A и удалена от плоскости P на расстояние ρ. Найти радиус-вектор точки M.

7.11. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(10x-8y-15z+56)+\beta(4x+y+3z-1)=0$ и отстоит от точки $C(3,-2,-3)$ на расстоянии $d=7$.

7.12. Составить уравнение плоскости, проектирующей прямую $\begin{cases}3x+2y-z-1=0,\\ 2x-3y+2z-2=0\end{cases}$ на плоскость $x+2y+3z-5=0$.

7.13. Даны вершины треугольника $A(3,-1,-1)$, $B(1,2,-7)$ и $C(-5,14,-3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

7.14. Дана прямая
$\begin{cases}2x-y+3z+1=0,\\ 3x+y-z-2=0.\end{cases}$ Найти разложение по базису $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ какого-нибудь её направляющего вектора $\mathbf{a}$. Выразить в общем виде разложение по базису $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ произвольного направляющего вектора этой прямой.

7.15. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1,2,-3)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{a}=(6,-2,-3)$ и пересекает прямую $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$.

7.16 Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4,-5,3)$ и пересекает две прямые $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-5}$.

7.17. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x=3t-7,\ y=-2t+4,\ z=3t+4$ и $x=t+1,\ y=2t-8,\ z=-t-12$.

Глава 4
Кривые и поверхности второго порядка

8. Эллипс, парабола и гипербола

Рассматриваемые в данном разделе кривые второго порядка на плоскости могут быть получены как сечения прямого кругового конуса некоторой плоскостью в пространстве и потому носят общее название конических сечений. На рис.19 представлены примеры конических сечений, когда плоскость пересекает только одну половину конуса, и в результате в сечении получается кривая, называемая эллипсом (рис.19а; частным случаем эллипса является окружность), либо точка, являющаяся вершиной конуса, как это видно на рис.19б.

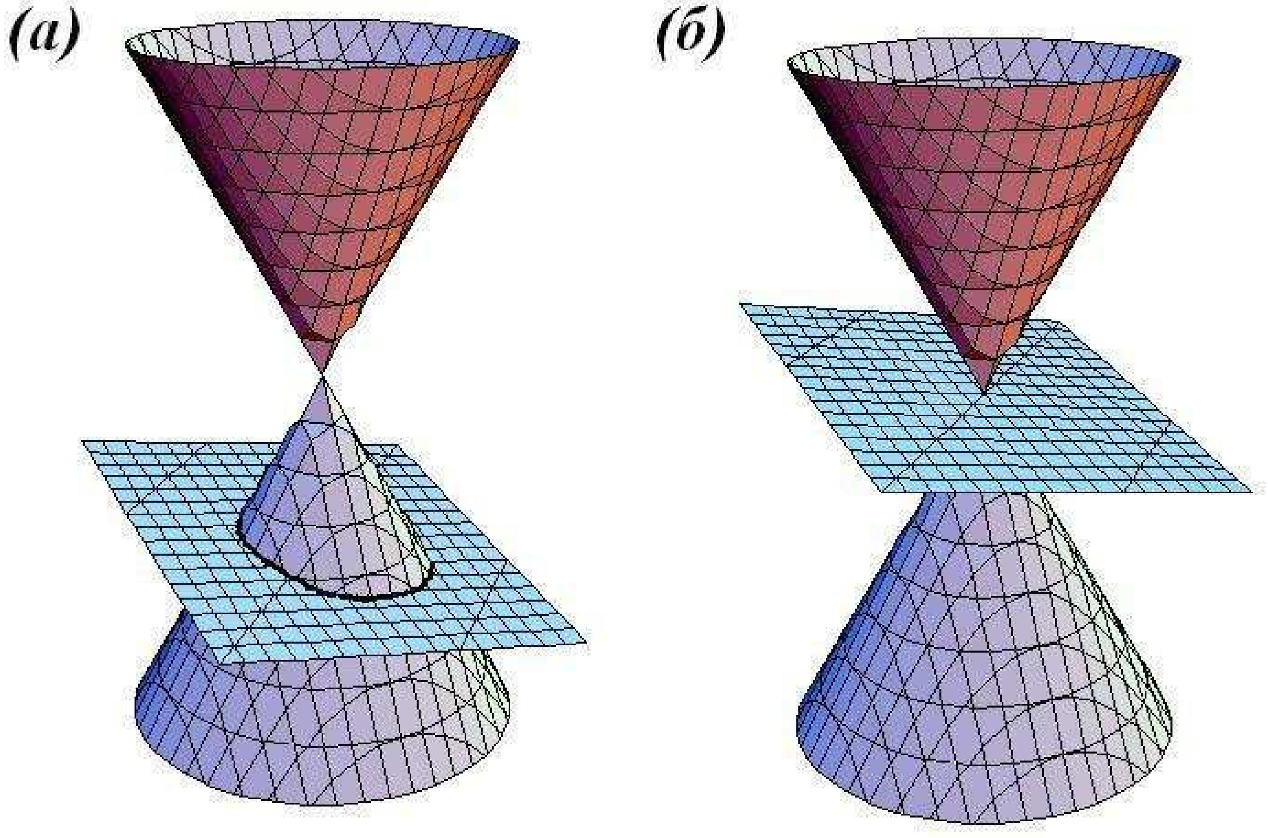

Рис.19. (а) общий и (б) частный случаи пересечения одной половины конуса плоскостью.

На рис.20 представлены примеры конических сечений, когда плоскость пересекает обе половины конуса. В результате в сечении получается кривая, состоящая из двух ветвей и называемая гиперболой (рис.20а), либо две пересекающиеся в вершине конуса прямые, как это видно на рис.20(б).

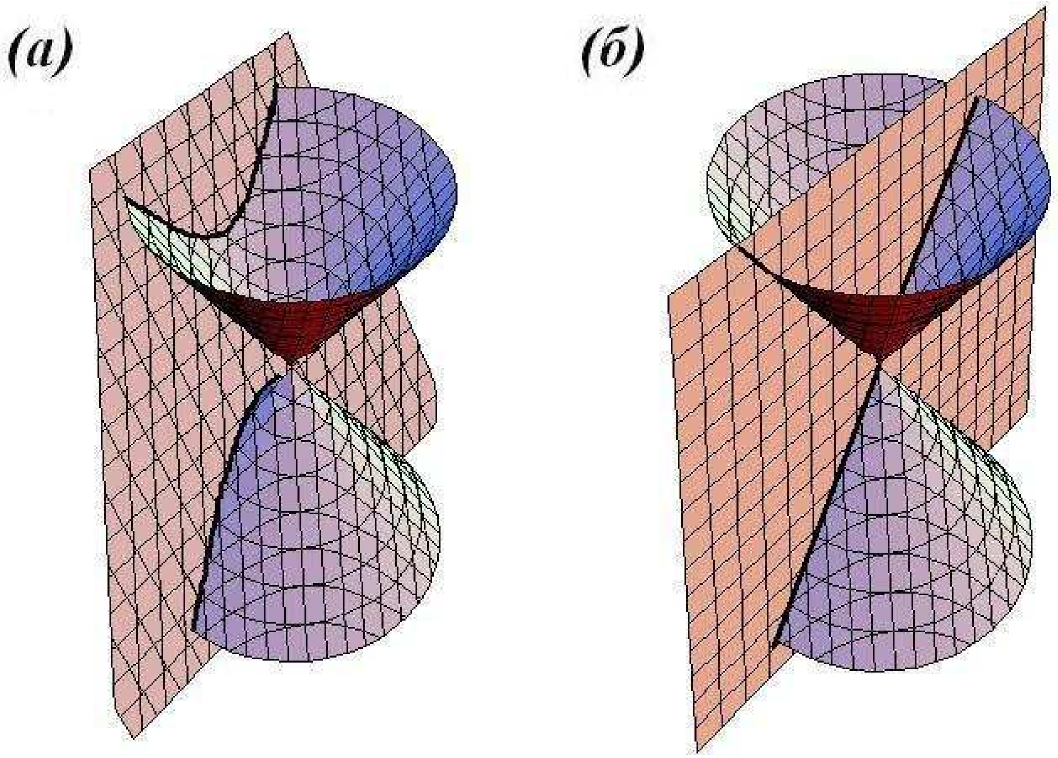

Рис.20. (а) общий и (б) частный случаи пересечения обоих половин конуса плоскостью под углом, не равным углу раствора конуса.

Наконец, возможна ситуация, при которой плоскость пересекает одну половину конуса, составляя при этом угол с его осью, равный углу раствора конуса. В результате в сечении получается кривая, состоящая из одной ветви и называемая параболой (рис.21а), либо две совпавшие прямые линии, проходящие через вершину конуса (рис.21(б)).

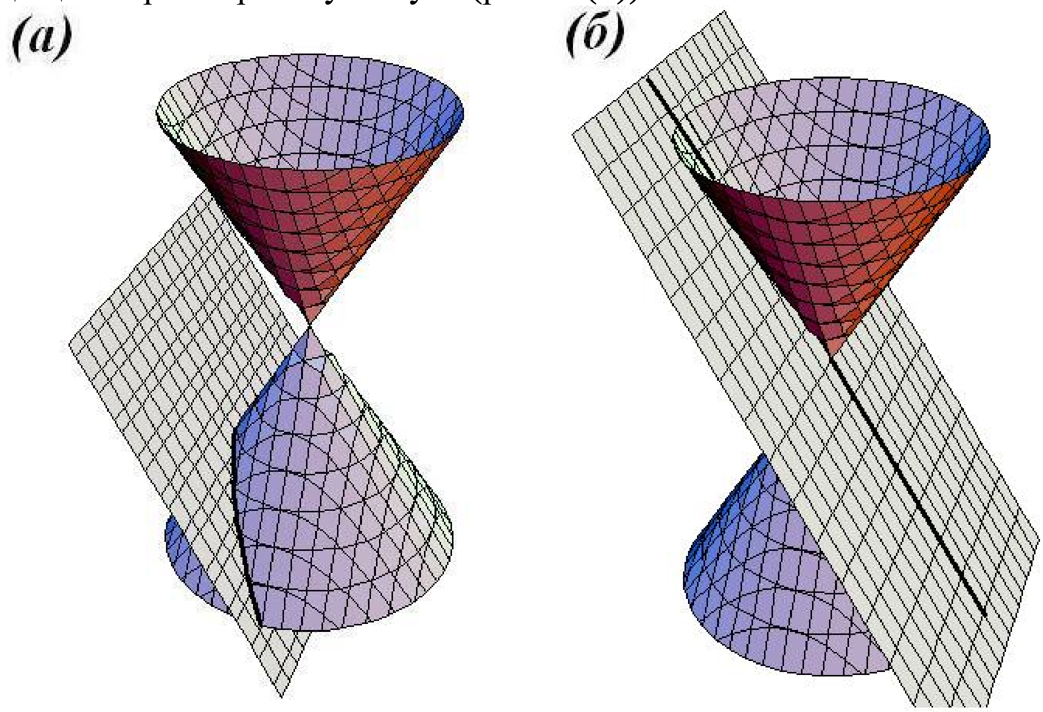

Рис.21. (а) общий и (б) частный случаи пересечения обоих половин конуса плоскостью под углом, равным углу раствора конуса.

Все конические сечения, показанные на рис.19-21, обладают одним общим свойством: для любой точки M, лежащей на сечении, отношение расстояния MF до некоторой точки F плоскости, осуществляющей сечение, к расстоянию MM_1 до некоторой прямой линии δ, лежащей в этой плоскости, есть величина постоянная:

$$\frac{MF}{MM_1} = \varepsilon,$$

где параметр ε называется эксцентриситетом, точка F называется фокусом, а прямая линия δ называется директрисой. Конические сечения могут быть описаны в полярной системе координат, как это показано на рис.22 на примере параболы. Начало координат, или полюс, помещается в фокус конического сечения, а полярная ось направляется вдоль оси симметрии кривой.

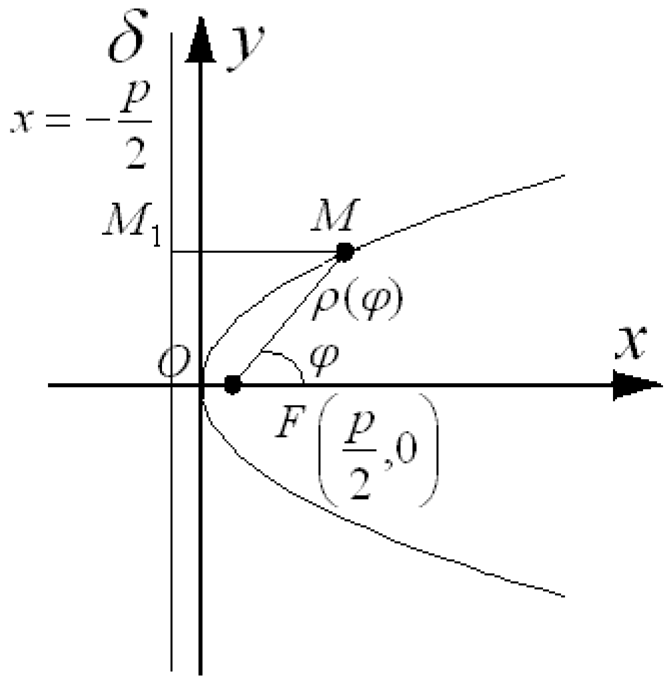

Рис.22. К выводу уравнения конического сечения в полярных координатах.

Используя основное свойство конического сечения, указанное выше, можно записать отношение расстояний MF/MM_1 и найти отсюда явную зависимость $\rho(\varphi)$, которая, как это следует из рис.22, имеет вид

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

где параметр p наряду с эксцентриситетом ε есть величина постоянная для данной кривой.

Конические сечения часто встречаются в задачах небесной механики. Так, можно показать, что траектория движения материальной точки в поле тяготения, подчиняющегося закону Ньютона, представляет собой коническое сечение, расположенное в плоскости, определяемой вектором начальной скорости точки и центром тяготения, который находится в фокусе конического сечения (см. рис.22).

В общем случае кривая второго порядка на плоскости определяется многочленом второй степени от координат вида $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$. Применяя последовательно преобразование поворота и параллельного переноса, можно добиться значительного упрощения приведённого выше уравнения, сведя его к одному из канонических типов, классифицирующих кривые второго порядка. Рассмотрим основные свойства кривых второго порядка на координатной плоскости. Эллипс, заключённый в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ (рис.23), в канонической системе координат с началом в его геометрическом центре описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

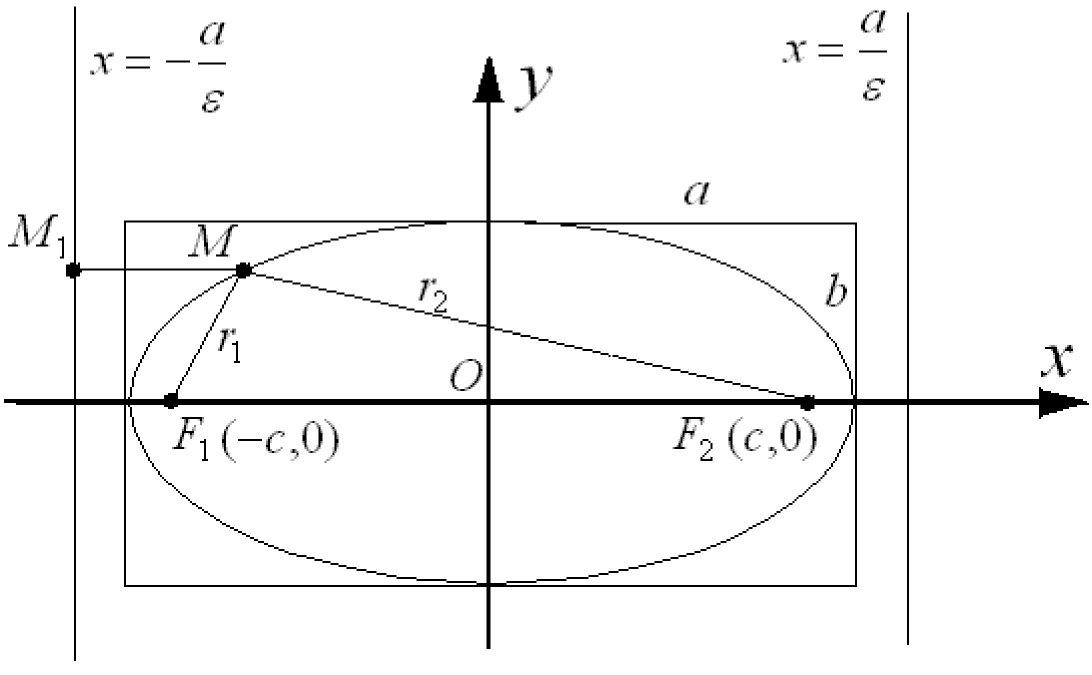

Рис.23. Расположение основных геометрических элементов эллипса.

Параметры $a \ge b$ называются соответственно большой и малой полуосью эллипса, в случае равенства которых он становится окружностью. Крайние точки $(\pm a,\,0)$ и $(0,\pm b)$ называют вершинами эллипса. Эллипс также может быть определён как геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная:

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

где $r_{1,2}$ есть расстояния, или фокальные радиусы, проведенные от некоторой точки до фокусов эллипса (рис.23), которые в канонической системе координат располагаются в точках $F_{1,2}(\pm c, 0)$ с параметром $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Отношение $\varepsilon = c/a < 1$ называется эксцентриситетом эллипса и определяет меру его «вытянутости». В частности, у окружности оба фокуса располагаются в начале координат и эксцентриситет равен нулю. Эллипс также характеризуется двумя параллельными прямыми $x = \pm a/\varepsilon$, называемыми директрисами. С этими прямыми связано ещё одно свойство любого конического сечения как геометрического места точек, отношение расстояний от каждой из которых до некоторой точки (фокуса) и некоторой прямой (директрисы) есть величина постоянная и равная эксцентриситету, т.е. на рис.23 выполняется соотношение $MF_1/MM_1 = \varepsilon$.

Гипербола во многих геометрических свойствах подобна эллипсу и располагается вне прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$ (рис.24) и описывается в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

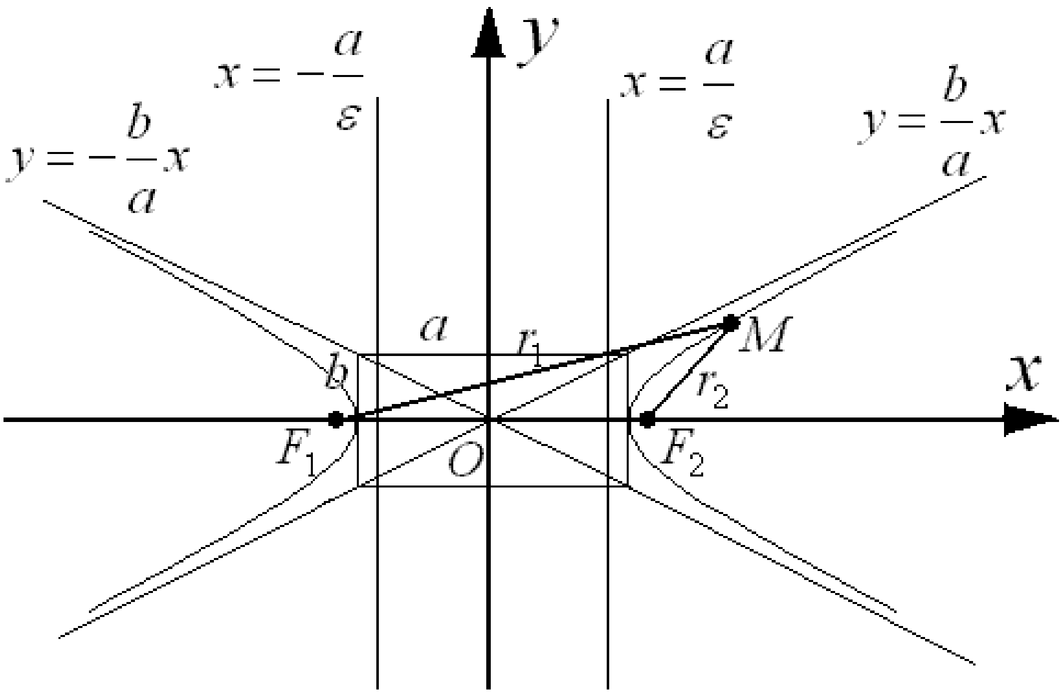

Рис.24. Расположение основных геометрических элементов гиперболы.

Крайние точки $(\pm a,\,0)$ называют вершинами гиперболы. Уравнение $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$ определяет так называемую сопряжённую гиперболу, для которой оси Ox и Oy поменялись местами. Гипербола также может быть определёна как геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная:

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

где $r_{1,2}$ есть расстояния, или фокальные радиусы, до фокусов гиперболы (рис.24), которые в канонической системе координат располагаются в точках $F_{1,2}(\pm c,0)$ с параметром $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отношение $\varepsilon = c/a > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы, а её директрисы $x = \pm a/\varepsilon$ располагаются между ветвями гиперболы и началом координат (рис.21). Фокальные радиусы эллипса и гиперболы являются линейными функциями абсциссы её точек, т.е. $r_{1,2} = |\, a \pm \varepsilon\, x\,|$. При удалении от начала координат ветви гиперболы постепенно приближаются к прямым линиям, имеющим уравнения $y = bx/a$ для правой ветви и $y = -\,bx/a$ для левой ветви гиперболы (рис.23). Эти прямые называются асимптотами гиперболы, которая, таким образом, имеет два асимптотических направления.

Парабола, в противоположность эллипсу или гиперболе, не имеет центра и может быть описана как геометрическое место точек, равноудалённых от некоторой точки плоскости, называемой фокусом, и некоторой прямой, называемой директрисой. Парабола показана на рис.22, где по определению расстояния MF и MM_1 равны. В канонической системе координат уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

при этом фокус располагается в точке $F(p/2,\,0)$, а директриса имеет уравнение $x = -\,p/2$. Как и для эллипса и гиперболы, фокальный радиус параболы также линейно выражается через абсциссу её точки по формуле $r = x + p/2$. Из определения эксцентриситета конического сечения видно, что для параболы $\varepsilon = 1$. Параметр p в уравнении конического сечения в полярных координатах связан с полуосями a и b соотношением $p = b^2/a$.

Касательная к кривой второго порядка $y = f(x)$ определяется как прямая линия, имеющая с данной кривой одну общую точку x_0, в которой тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс равен значению производной

$f'(x_0)$. Более удобным и общим является подход, в котором касательная описывается как прямая, имеющая с кривой второго порядка две совпадающих точки пересечения. Например, если уравнение прямой L задать в параметрической форме с указанием некоторой точки $(x_0 y_0)$ на плоскости, через которую она проходит, а уравнение кривой второго порядка C задано в общем виде, то система уравнений, определяющих точки пересечения кривой C и прямой L

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ x = x_0 + a_x t \\ y = y_0 + a_y t \end{cases}$$

в случае касательной имеет в качестве решения два совпавших корня квадратного уравнения для параметра t, описывающих точки пересечения (рис.25). Если у данной системы есть два различных значения параметра t, это означает, что прямая пересекает кривую в двух различных точках, т.е. является хордой. Если же решений нет вовсе, то касательную через данную точку $(x_0 y_0)$, которая вовсе может не лежать на кривой второго порядка, провести нельзя.

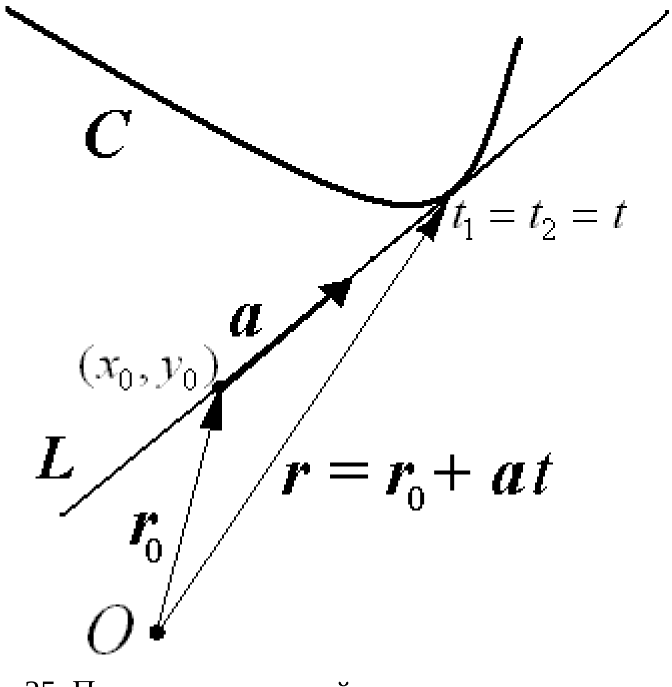

Рис.25. Пересечение кривой второго порядка и прямой.

Пример 1. Записать каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей и проходящего через точки $L(3\sqrt{2},\quad 2\sqrt{2})$ и $N(6,\quad 0)$.

Решение. Каноническому уравнению эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ по условию задачи удовлетворяют координаты двух конкретных точек. Подставляя их в уравнение поочерёдно, получаем систему уравнений для параметров a и b:

$$\begin{cases} 18/a^2 + 8/b^2 = 1 \\ 36/a^2 + 0/b^2 = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим $a = 6$ и $b = 4$, т.е. каноническое уравнение эллипса имеет вид $x^2/36 + y^2/16 = 1$.

Пример 2. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот есть величина постоянная.

Решение. Уравнения асимптот имеют вид $y = \pm bx/a$, или $bx \pm ay = 0$. Используя формулу для расстояния от точки (x, y) до прямой с данным уравнением, записываем соответствующие расстояния как

$$d_{1,2} = \frac{|bx \pm ay|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а их произведение, следовательно, равно

$$d_1 d_2 = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2+b^2}.$$

Поскольку координаты точки гиперболы удовлетворяют её уравнению, выражение в числителе равно a^2b^2, как это нетрудно увидеть, умножив каноническое уравнение гиперболы на a^2b^2. Следовательно, произведение $d_1 d_2$ для всех точек гиперболы есть величина постоянная.

Пример 3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho(\varphi) = \dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\varphi}$ в полярных координатах, и записать её каноническое уравнение в декартовых координатах:

.

Решение. Сравнивая данное уравнение с общим видом уравнения кривой второго порядка в полярных координатах, делаем вывод, что значение $\varepsilon = 0.5$

, т.е. это эллипс, а параметр $p = b^2/a = 5$. Используя одно из выражений для эксцентриситета $\varepsilon = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, получаем систему двух уравнений для полуосей a и b. Решая эту систему, находим $a = 20/3$ и $b = \sqrt{100/3}$, что даёт каноническое уравнение эллипса в виде $9x^2/400 + 3y^2/100 = 1$.

Пример 4. Показать, что касательная к эллипсу, заданному каноническим уравнением, проходящая через точку эллипса (x_0, y_0), описывается уравнением $\dfrac{x\,x_0}{a^2} + \dfrac{y\,y_0}{b^2} = 1$.

Решение. Воспользуемся свойством касательной, согласно которому ее угловой коэффициент равен значению производной функции $y = y(x)$, описывающей зависимость ординаты точки эллипса от её абсциссы. Это означает, что уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = y'(x) \cdot (x - x_0)$. Из канонического уравнения эллипса можно получить выражение для $y'(x)$, если продифференцировать обе его части по x, что дает нам равенство $2x/a^2 + 2y(x) \cdot y(x)'/b^2 = 0$, откуда $y'(x) = -x \cdot b^2/(a^2 \cdot y(x))$. Далее мы подставляем это выражение для $y'(x)$ в уравнение касательной, раскрываем все скобки и умножаем обе части равенства на y/b^2. Используя каноническое уравнение эллипса и приравнивая сумму слагаемых $x^2/a^2 + y^2/b^2$ к единице, мы получаем искомое уравнение касательной.

Пример 5. Написать уравнение касательных к окружности $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$, проходящих через начало координат.

Решение. Прямая, проходящая через начало координат, может быть задана в простейшем виде как $y = k\,x$. Точка касания является общей точкой и для прямой, и для кривой, что описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0 \\ y = k\,x \end{cases}.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем квадратное уравнение на x, в которое угловой коэффициент касательной входит как параметр. Условием того, что прямая будет касательной, является существование двух совпавших точек пересечения прямой и кривой, т.е. наличию двух совпавших корней у квадратного уравнения. Это условие означает равенство нулю дискриминанта:

$$(4 - 8k)^2 - 8(1 + k^2) = 0.$$

Данное условие, в свою очередь, представляет собой квадратное уравнение для углового коэффициента k. Положительность дискриминанта этого уравнения означает наличие искомых касательных, а его отрицательность, в свою очередь, означала бы, что указанные в условии касательные не существуют. В данном случае дискриминант положителен, и существуют два корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 1/7$, что означает существование двух касательных $y = x$ и $y = x/7$, удовлетворяющих условию задачи. В существовании двух касательных к данной окружности, проходящих через начало координат, нетрудно убедиться, построив окружность непосредственно.

Задачи для самостоятельного решения.

8.1. Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

8.2. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти: 1) полуоси *a* и *b*; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

8.3. Определить эксцентриситет эллипса, если:

1) его малая ось видна из фокусов под углом в 60^0;
2) отрезок между фокусами виден из вершин малой оси под прямым углом;
3) расстояние между директрисами в три раза больше расстояния между фокусами;
4) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на его директрису, делится вершиной эллипса пополам.

8.4. Точка $M(3, -1)$ является концом малой оси эллипса, фокусы которого лежат на прямой $y + 6 = 0$. Составить уравнение этого эллипса, зная его эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}/2$.

8.5. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $x^2/25 + y^2/9 = 1$. Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет $\varepsilon = 2$.

8.6. Дано каноническое уравнение эллипса $x^2/15 + y^2/6 = 1$. Записать уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

8.7. Найти длину диаметра (хорды, проходящей через центр) эллипса $x^2/12 + y^2/6 = 1$, направленного по биссектрисе второго координатного угла.

8.8. Для эллипса, заданного в декартовой системе координат каноническим уравнением $x^2/25 + y^2/16 = 1$, записать его уравнение в полярных координатах, если начало координат расположено
а) в левом фокусе эллипса;
б) в правом фокусе эллипса.

8.9. Определить, какая линия второго порядка задана следующим уравнением в полярных координатах:
а) $\rho(\varphi) = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}$; б) $\rho(\varphi) = \dfrac{12}{2 - \cos\varphi}$; в) $\rho(\varphi) = \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$.

8.10. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от точки $F(0, 3)$ и от прямой линии $y = -5$.

8.11. Дано уравнение параболы $y^2 = 6x$. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $N(4, 1)$, которая пересекала бы параболу в некоторых точках B и C так, чтобы отрезок BC делился бы точкой N пополам.

8.12. Записать уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

8.13. Показать, что касательная к кривой второго порядка, заданной своим каноническими уравнениями и проходящая через точку кривой (x_0, y_0), описывается уравнением
а) $\dfrac{x\,x_0}{a^2} - \dfrac{y\,y_0}{b^2} = 1$ для гиперболы,
б) $y\,y_0 = p(x + x_0)$ для параболы.

8.14. Из точки $P(-16, 9)$ проведены касательные к эллипсу $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды эллипса, соединяющей точки касания.

8.15. Из левого фокуса эллипса $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ под тупым углом α к оси Ox направлен луч света. Известно, что $tg\alpha = -2$. Дойдя до эллипса, луч от него отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отражённый луч.

8.16. Провести касательные к гиперболе $x^2/16 - y^2/8 = -1$ параллельно прямой $2x + 4y - 5 = 0$ и вычислить расстояние *d* между ними.

8.17. Доказать, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом.

8.18. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2 = 8x$ и параллельна прямой $2x + 2y - 3 = 0$.

8.19. Составить, если они существуют, уравнения касательных к параболе $y^2 = 16x$, проходящих через точку

а) $A(1, -2)$; б) $B(1, 4)$; в) $C(1, 5)$.

8.20. В следующих случаях определить, как расположена данная прямая относительно данной параболы – пересекает ли, касается или проходит вне её:

1) $x - y + 2 = 0$, $y^2 = 8x$;

2) $8x + 3y - 15 = 0$, $x^2 = -3y$;

3) $5x - y - 15 = 0$, $y^2 = -5x$.

8.21. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax + By + C = 0$ является касательной к параболе $y^2 = 2px$?

8.22. Составить уравнение касательной к кривой $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$, если касательная проходит

а) параллельно прямой $6x + 17y - 4 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $41x - 24y + 3 = 0$;

в) параллельно прямой $y = 2$.

9. Основные свойства поверхностей второго порядка

Алгебраическая поверхность в декартовой системе координат задаётся выражением $F(x, y, z) = 0$, где F есть некоторая алгебраическая функция координат. Если данная функция представляет собой многочлен второй степени относительно всех координат, то говорят об алгебраической поверхности второго порядка. Кроме прямоугольных декартовых координат, в трёхмерном пространстве также широко используются цилиндрические и сферические координаты. Цилиндрическая система координат (ρ, φ, z) (рис.26а) является обобщением полярных координат на трёхмерный случай, где добавляется третья ось Oz, направленная перпендикулярно плоскости (ρ, φ).

В результате формулы перехода к цилиндрическим координатам почти не отличаются от случая полярных координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi . \\ z = z \end{cases}$$

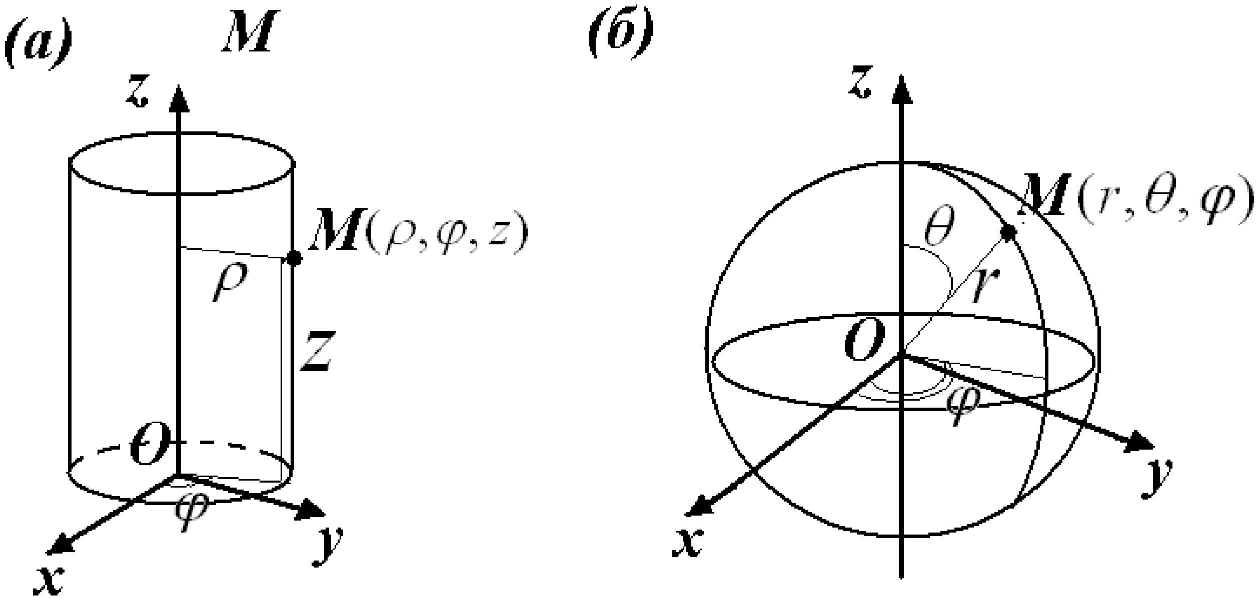

Рис.26 (а) цилиндрическая и (б) сферическая системы координат

Сферическая система координат (r,θ,φ) (рис.26(б)) сопоставляет каждой точке M пространства расстояние $r = OM$ от неё до начала координат O, полярный угол θ между направлением OM и направлением оси z декартовой системы, а также азимутальный угол φ между проекцией луча OM на плоскость (xy) декартовой системы и осью x. Указанный выбор координат приводит к следующим формулам перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi . \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Если какая-либо из координат, например, z, не входит в уравнение поверхности, имеющее вид $F(x,y)=0$, то говорят о цилиндрической поверхности вдоль направления z. Такая поверхность может быть построена с помощью кривой $F(x,y)=0$, называемой направляющей, которая движется по прямым линиям, параллельным оси Oz и называемым образующими.

Примером цилиндрической поверхности является параболический цилиндр с параболой в основании, показанный на рис.27а.

Если уравнение поверхности в цилиндрической системе координат не содержит угла φ и описывается уравнением $F(\rho, z) = 0$, то говорят о поверхности вращения с осью вращения, параллельной оси Oz. Такая поверхность не изменяется при произвольных поворотах относительно оси вращения. Поверхности вращения обычно задаются уравнением кривой $F(x, z) = 0$, которая вращением вокруг оси Oz образует поверхность вращения. Используя формулы перехода к цилиндрическим координатам, из которых следует $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, можно получить уравнение поверхности вращения из уравнения кривой как $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. На рис.27(б) показана поверхность вращения, описывающаяся уравнением $x^2 + y^2 = 2z^4$.

Если поверхность образована прямолинейными образующими, проходящими через направляющую $F(x, y) = 0$ и через фиксированную точку $M(x_0, y_0, z_0)$, то говорят о конической поверхности с вершиной в точке M. Примером конической поверхности является конус с эллиптическим сечением, показанный на рис.27в.

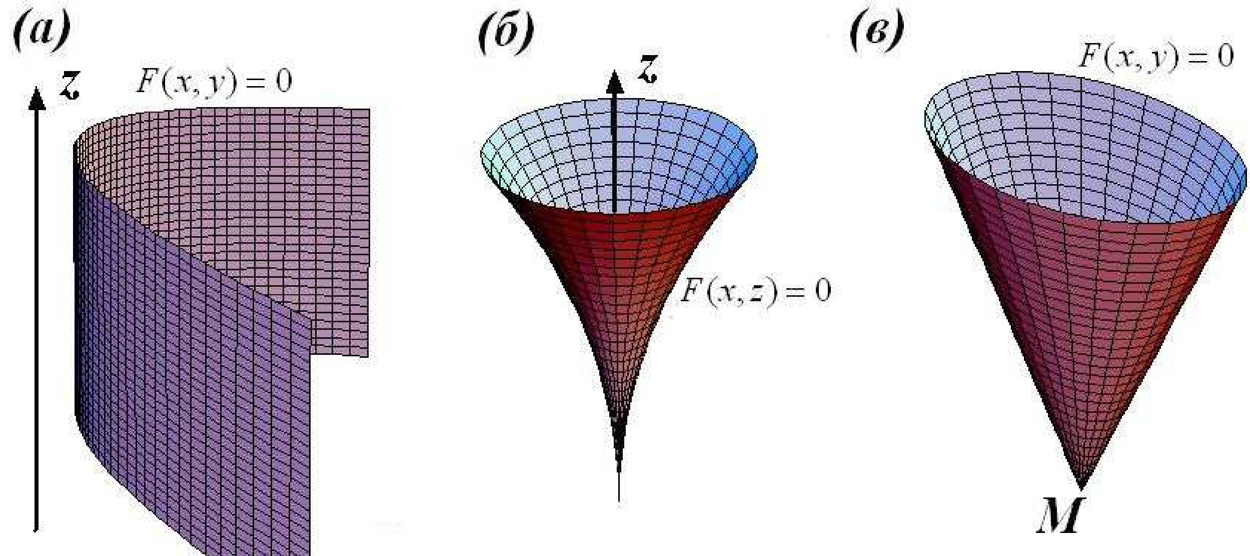

Рис.27. примеры (а) цилиндрической поверхности; (б) поверхности вращения; (в) конической поверхности

По аналогии с кривыми второго порядка, уравнения поверхностей второго порядка в канонической системе координат задаются как сумма квадратичных по координатам слагаемых с минимальным числом членов. Основные типы поверхностей второго порядка следующие:

Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис.28а);

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис.28б);

Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис.28в);

Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис29а);

Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ (рис.29(б));

Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ (рис.29в).

Из данных уравнений видно, что при равенстве двух геометрических параметров $a=b$, все поверхности, кроме гиперболического параболоида, будут представлять собой поверхности вращения. Эллипсоид при равенстве трёх параметров $a=b=c=R$ представляет собой сферу радиуса R.

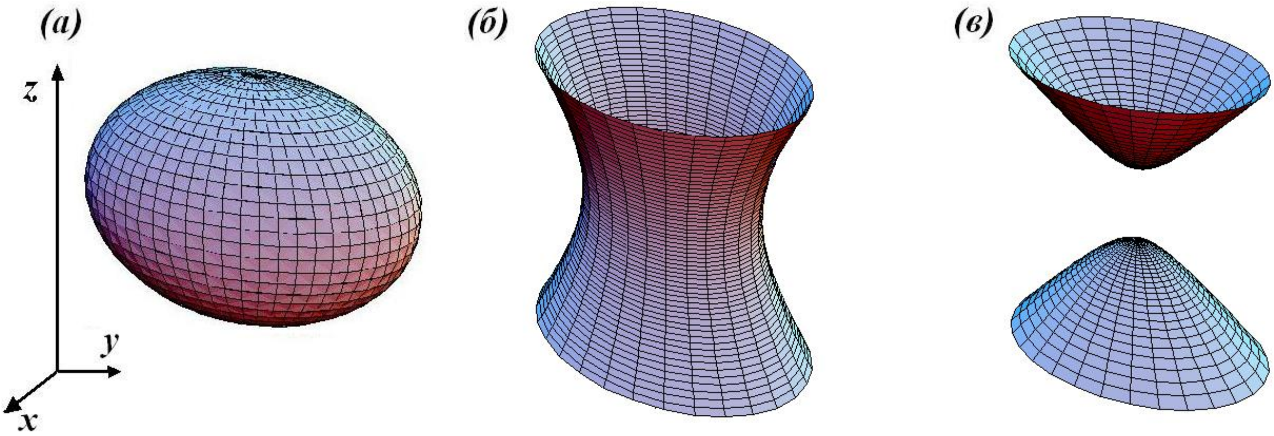

Рис.28. Примеры поверхностей второго порядка: (а) эллипсоид; (б) однополостный гиперболоид; (в) двуполостный гиперболоид.

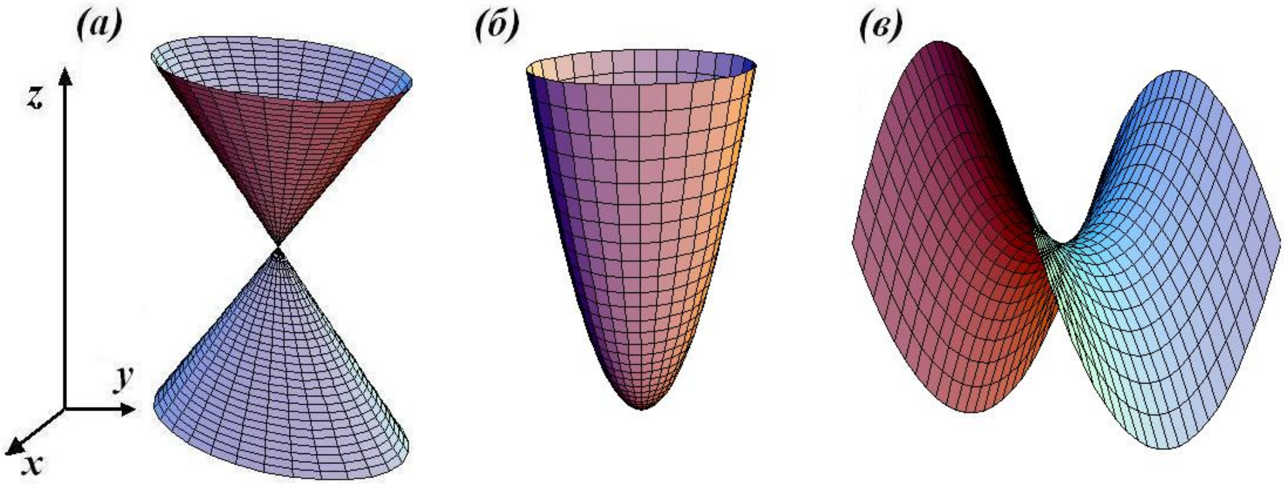

Рис.29. Примеры поверхностей второго порядка: (а) конус; (б) эллиптический параболоид; (в) гиперболический параболоид.

Пример 1. Дано уравнение эллипса $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$, лежащего в плоскости $y = 0$. Получить уравнение эллипсоида вращения, полученного вращением этого эллипса вокруг оси Oz.

Решение. В уравнении эллипса, имеющем вид $F(x, z) = 0$, производим замену $x \to \sqrt{x^2 + y^2}$, что сразу приводит нас к искомому уравнению эллипсоида вращения $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Пример 2. Дано уравнение оси L круглого цилиндра: $x = 9 - t$, $y = 4 - 2t$, $z = 7 + 2t$, и координаты точки $M_0(1, -2, 3)$, лежащей на его поверхности. Составить уравнение цилиндра в декартовых координатах.

Решение. Круглый цилиндр можно определить как геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от прямой линии, являющейся осью цилиндра (рис.30).

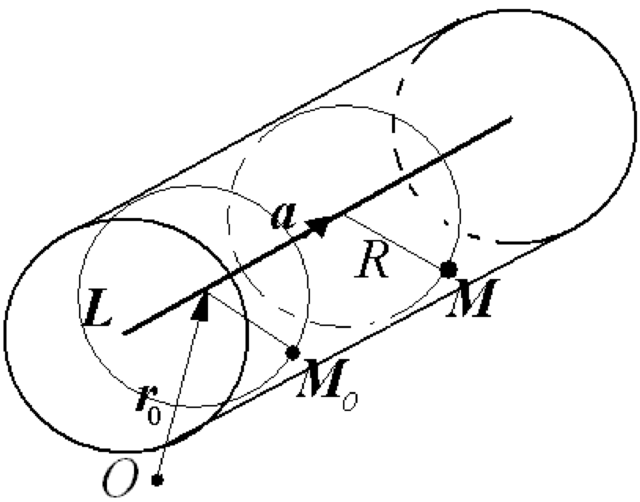

Рис.30. Расположение элементов, определяющих цилиндр в пространстве.

Пусть некоторая точка $M(x,y,z)$ лежит на поверхности цилиндра. Тогда условие $d_{ML} = d_{M_0 L}$ будет являться уравнением для переменных (x,y,z), которое и является уравнением цилиндра. Расстояние от точки в пространстве до прямой линии даётся формулой

$$d_{ML} = \frac{\left|\left[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}\right]\right|}{|\mathbf{a}|},$$

в которой по условиям задачи $\mathbf{r}_1 = (x,\quad y,\quad z)$, начальная точка на прямой $\mathbf{r}_0 = (9,\quad 4,\quad 7)$ и направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = (-1,\quad -2,\quad 2)$. Вычисляя с помощью определителя векторное произведения и записывая его модуль, получаем, что

$$d_{ML} = \frac{1}{3}\sqrt{(2y+2z-22)^2 + (25-2x-z)^2 + (14-2x+y)^2}.$$

Подставляя вместо переменных (x,y,z) координаты точки M_0, находим радиус цилиндра $R = d_{M_0 L} = 10$. Таким образом, уравнение цилиндра имеет вид

$$\frac{1}{3}\sqrt{(2y+2z-22)^2 + (25-2x-z)^2 + (14-2x+y)^2} = 10.$$

Несмотря на наличие квадратного корня, это уравнение алгебраической поверхности второго порядка. Возводя обе части в квадрат и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение цилиндра в виде

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 8yz - 156x - 60y - 138z + 405 = 0.$$

Оно имеет значительно более сложный вид, чем уравнения поверхностей в каноническом виде, поскольку исходная декартова система координат не является канонической системой координат для данной поверхности. Если бы ось цилиндра была выбрана в качестве новой оси Oz', а оси Ox' и Oy' располагались перпендикулярно ей, то цилиндр был бы задан в каноническом виде простым уравнением $(x')^2 + (y')^2 = 100$.

Пример 3. Составить векторное уравнение прямого кругового конуса с вершиной в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ и осью $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, зная, что угол между его образующей и осью равен α.

Решение. Радиус-вектор любой точки конуса, если начало координат находится в его вершине, образует угол с направляющим вектором оси конуса, равный углу α. Следовательно, уравнение конуса можно представить как скалярное произведение вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r} = (x,y,z)$, и вектора $\mathbf{a}$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{r}_0| \cdot |\cos\alpha|,$$

где равенство угла между векторами заданному углу α обеспечивает нахождение вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ на поверхности конуса. Модуль у косинуса угла обеспечивает выполнение равенства как для верхней половины конуса, когда угол между $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ острый, так и для нижней половины, когда этот угол тупой. Записав данное векторное равенство в декартовых координатах и возведя его в квадрат, чтобы избавиться от корня, мы вновь получим сумму квадратичных по координатам слагаемых, определяющих поверхность второго порядка.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Найти точки пересечения сферы $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=81$ и прямой линии $x=3-t$, $y=-3+2t$, $z=4-2t$.

9.2. Составить уравнение однополостного гиперболоида вращения, полученного вращением гиперболы $x^2/a^2-z^2/c^2=1$, лежащей в плоскости $y=0$, вокруг оси Oz.

9.3. Направляющая конуса задана уравнениями $x^2/9+z^2/25=1$, $y=0$, а вершина находится в точке $S(0,-3,4)$. Составить уравнение конуса.

9.4. Составить уравнение конуса, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=4$ (т.е. касающегося данной сферы по некоторой окружности), если вершина конуса находится в точке $S(0,0,8)$.

9.5. Показать, что конус с направляющей кривой, заданной системой

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$$

и с вершиной в начале координат, может быть задан в параметрической форме с параметрами u и v в виде системы равенств

$$\begin{cases} x=u\varphi(v) \\ y=u\psi(v). \\ z=u\chi(v) \end{cases}$$

9.6. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением, содержащим произвольный параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

1) $x^2+y^2+z^2=\lambda$; 2) $\lambda x^2+y^2+z^2=1$;

3) $\lambda x^2+y^2+z^2=\lambda$; 4) $x^2+y^2-z^2=\lambda$;

5) $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$; 6) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$;

7) $x^2 + y^2 = \lambda z$; 8) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z + 1$;

9) $x^2 + y^2 = \lambda$; 10) $x^2 - y^2 = \lambda$.

9.7. Определить, лежит ли точка $M(1,1,1)$ внутри или вне эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

9.8. Ось Oz направлена вверх. Определить, лежит ли точка $M(1,1,1)$ выше или ниже параболоида $x^2 + 2y^2 = 2z$.

9.9. Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Описать и изобразить эти проекции.

9.10. Является ли линия пересечения двух поверхностей второго порядка плоской кривой? Привести примеры.

9.11. Пусть линия пересечения двух поверхностей второго порядка плоская. Будет ли эта линия алгебраической? Если да, то какого порядка? Привести примеры.

10. Канонический вид уравнений кривых и поверхностей второго порядка

В общем случае кривая второго порядка на плоскости задаётся уравнением вида $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, а поверхность второго порядка в пространстве описывается уравнением сходной структуры, где добавляются члены с третьей координатой z и её всевозможными комбинациями с x и y, имеющими первый и второй порядки. Для определения типа кривой или поверхности необходимо применять преобразования координат, приводящие уравнения кривой или поверхности к одному из описанных выше канонических видов. Канонический вид уравнения кривой или поверхности второго порядка есть его запись в такой системе координат, в которой уравнение содержит лишь слагаемые в виде квадратов каждой из координат, либо в виде линейных членов, если порядок какой-то координаты в исходном уравнении не второй, а первый.

Если уравнение не содержит членов с произведением координат, то от линейных членов можно избавиться параллельным переносом начала отсчёта, что на алгебраическом языке описывается последовательным выделением полного квадрата в уравнении с последующем обозначением выражений под знаком квадрата как новых координат. Данный метод также носит название метода Лагранжа. Если же в уравнении фигурируют члены с произведением координат, то необходимо производить преобразование поворота. Для кривых второго порядка, лежащих в плоскости, поворот также происходит в этой плоскости, а его угол φ определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C}.$$

Из этого выражения следует, что при равенстве коэффициентов A и C в исходном уравнении независимо от величины ненулевого недиагонального коэффициента B поворот происходит на угол $\varphi = \pi/4$, а новые координаты связаны со старыми по формулам $x = (x' - y')/\sqrt{2}$ и $y = (x' + y')/\sqrt{2}$. Для приведения уравнения поверхности к каноническому виду при наличии одного слагаемого с произведением координат может быть применён аналогичный поворот в плоскости, содержащий эти координаты. Если же слагаемых с произведением координат несколько, то возможно применение метода Лагранжа, либо использование инвариантов, о которых будет рассказано ниже.

Некоторые свойства кривых и поверхностей второго порядка могут быть определены непосредственно через коэффициенты исходного уравнения, что является следствием постоянства некоторых комбинаций этих коэффициентов при замене координат. Подобные постоянные при замене координат величины называются инвариантами преобразований координат. Так, для кривых второго порядка является инвариантом величина

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

знак которой позволяет классифицировать кривую второго порядка:

$\delta > 0$ - кривая эллиптического типа;
$\delta < 0$ - кривая гиперболического типа;
$\delta = 0$ - кривая параболического типа.

Кривые эллиптического и гиперболического типа имеют геометрический центр и называются центральными кривыми. Координаты центра (x_0, y_0) можно определить из исходного уравнения кривой, решая систему уравнений

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}.$$

Поскольку определителем данной системы является инвариант δ, у системы есть решение и кривая является центральной лишь при $\delta \neq 0$, т.е. при принадлежности к эллиптическому или гиперболическому типу.

Для поверхностей второго порядка, определяемых в трёхмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) уравнением вида

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{k=1}^{3} a_{k4} x_k + a_{44} = 0,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, также существует ряд инвариантов. Наиболее важным из них является определитель третьего порядка

$$I_3 = \det(a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Если этот определитель отличен от нуля, это означает наличие у поверхности геометрического центра, координаты которого (x_{01}, x_{02}, x_{03}) определяются, как и в случае кривой второго порядка, системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_{0j} + a_{i4} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

детерминант которой есть I_3. Для центральной поверхности её уравнение может быть записано в виде

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \eta = 0,$$

где коэффициенты λ_i и η, определяющие геометрический тип поверхности, могут быть найдены при помощи инвариантов непосредственно из исходного уравнения поверхности. Так, канонические коэффициенты λ_i являются корнями алгебраического уравнения третьего порядка относительно λ

$$\det(a_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}) = 0,$$

где $i, j = 1, 2, 3$, а символ $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ называется символом Кронекера и определяет элементы единичной матрицы. Данное уравнение третьего порядка называется характеристическим уравнением для матрицы a_{ij}, а его корни $\lambda_{1,2,3}$ - её собственными значениями. Симметричность матрицы $a_{ij} = a_{ji}$ гарантирует, что все три корня являются вещественными. Параметр η также может быть найден через инварианты по формуле

$$\eta = \frac{I_4}{I_3},$$

где инвариант I_4 есть определитель четвёртого порядка, сформированный из всех коэффициентов уравнения поверхности, включая линейные члены:

$$I_4 = \det(a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Подробное исследование собственных значений матриц и их связь с каноническим видом квадратичных форм содержится в курсе линейной алгебры.

Пример 1. Определить тип и расположение кривой $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0$ на плоскости.

Решение. Вычисляем значение инварианта

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -36 < 0,$$

что говорит о принадлежности данной кривой к гиперболическому типу. Поскольку в уравнении кривой отсутствуют слагаемые с произведением координат, привести уравнение к каноническому виду можно с помощью одних лишь параллельных переносов, т.е. через выделение полного квадрата. Производя эту операцию, получаем:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 4y + 4) - 4 + 36 - 68 = 0, \text{ или}$$

$$4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 - 36 = 0.$$

Производя преобразование параллельного переноса

$$\begin{cases} x - 1 = x' \\ y + 2 = y' \end{cases},$$

получаем в новых координатах уравнение кривой в канонической форме

$$\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{4} = 1,$$

описывающее гиперболу с полуосями $a = 3$ и $b = 2$, центр которой находится в точке $(1, -2)$ исходной системы координат (x, y).

Пример 2. Определить тип кривой $2x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 9 = 0$ и составить её каноническое уравнение.

Решение. Записываем инвариант $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -3$, что определяет тип данной кривой как гиперболический. Поскольку в уравнении имеется слагаемое с произведением координат, необходимо совершить преобразование поворота

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

на угол φ, тангенс которого определяется равенством

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A - C} = \frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{2 - 0} = -\sqrt{3},$$

откуда $\varphi = -\pi/6$, и преобразование поворота имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \\ y = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}.$$

Подставляя эти выражения для координат в исходное уравнение кривой, получаем уравнение в виде

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 9 = 0,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов уже не будет содержать слагаемых с произведением координат:

$$3(x')^2 - (y')^2 + 9 = 0,$$

или в канонической форме

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(y')^2}{(3)^2} = -1,$$

что определяет сопряжённую гиперболу с полуосями $a = \sqrt{3}$ и $b = 3$.

Пример 3. Показать, что уравнение $z = xy$ определяет гиперболический параболоид.

Решение. Уравнение содержит одно слагаемое с произведением координат, именно, xy, что говорит о необходимости использования преобразования поворота в плоскости (Oxy). Поскольку коэффициенты при x^2 и y^2 в исходном уравнении равны между собой (оба равны нулю), поворот выполняется на угол $\varphi=\pi/4$, а новые координаты связаны со старыми по формулам $x=(x'-y')/\sqrt{2}$ и $y=(x'+y')/\sqrt{2}$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем уравнение

$$\frac{(x')^2-(y')^2}{2}=z,$$

что является каноническим уравнением гиперболического параболоида с параметрами $a=b=1$.

Пример 4. С помощью инвариантов определить тип поверхности, заданной уравнением $5x^2+11y^2+2z^2-16xy+20xz+4yz=18$.

Решение. Прежде всего вычисляем инвариант I_3:

$$I_3=\begin{vmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-1458=-18\cdot 81,$$

т.е. поверхность является центральной и может быть описана уравнением вида $\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2+\eta=0$. Характеристическое уравнение для канонических коэффициентов $\lambda_{1,2,3}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 & 10 \\ -8 & 11-\lambda & 2 \\ 10 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } \lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+18\cdot 81=0.$$

Данное кубическое уравнение имеет целочисленные корни $\lambda_1=18$, $\lambda_2=9$ и $\lambda_3=-9$. Параметр $\eta=I_4/I_3$, где определитель четвёртого порядка

$$I_4=\begin{vmatrix} 5 & -8 & 10 & 0 \\ -8 & 11 & 2 & 0 \\ 10 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix}=-18\cdot I_3,$$

откуда $\eta=-18$ и каноническое уравнение имеет вид

$$18(x')^2+9(y')^2-9(z')^2-18=0, \text{ или}$$

$$(x')^2+\frac{(y')^2}{2}-\frac{(z')^2}{2}=1,$$

что является уравнением однополостного гиперболоида с полостью вдоль оси Oz.

Задачи для самостоятельного решения.

10.1. Определить тип кривой второго порядка, составить её каноническое уравнение и указать каноническую систему координат:

1) $xy-2x-y+6=0$; 2) $y=\dfrac{9-x}{x-3}$;

3) $6x^2+6y^2+6x-2y-1=0$; 4) $9x^2-16y^2-6x+8y-144=0$;

5) $2x^2+6xy+10y^2-121=0$; 6) $9xy+4=0$.

10.2. Проверить, что данная кривая второго порядка является центральной. Найти координаты центра и избавиться в уравнении от членов первой степени при помощи переноса начала координат в центр:

1) $x^2-8xy+17y^2+8x-38y+24=0$;

2) $5x^2+xy-4x-y-1=0$;

3) $8x^2-24xy+16y^2+3x-7y-2=0$.

10.3. Доказать, что множество центров симметрии алгебраической кривой либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является прямой линией.

10.4. Определить тип поверхности и привести её уравнение к каноническому виду:

1) $9x^2+16y^2+36z^2-18x+64y-216z+253=0$;

2) $x^2+4y^2-6x+16y+9=0$;

3) $4x^2-9y^2+36z^2-16x-54y-72z-65=0$;

4) $z^2=xy$; 5) $3x^2-4y^2+6z^2+24x+8y-36z+122=0$;

6) $4x^2-9y^2-8x-36y-72z+184=0$;

7) $y^2-4x-6y+17=0$;

8) $2x^2-6y^2+3z^2-12x-24y-24z+30=0$.

10.5. Определить тип поверхности при помощи инвариантов:

1) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+2yz-4xz+2x-10y-2z-1=0$;

2) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$;

3) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$;

4) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz-x+2y-3z-6=0$.

10.6. Определить тип поверхности в зависимости от параметра α:

$$x_1^2-2x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2-6x_1x_3-2x_1+4x_2+6x_3+\alpha=0.$$

Литература

1. Д.В. Беклемишев, *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*, М., Наука, 1987г, 320 с.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Аналитическая геометрия*, М., Наука, 1988г, 224с.
3. А.В. Погорелов, *Аналитическая геометрия*, М., Наука, 1968г, 176с.
4. Н.В. Ефимов, *Краткий курс аналитической геометрии*, М., Наука, 1975г, 275с.
5. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров, *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*, М., Наука, 2003г, 496 с.
6. Д.В. Клетеник, *Сборник задач по аналитической геометрии*, М., Наука, 1986г, 224с.
7. О.Н. Цубербиллер, *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, М., Наука, 1968г, 336с.
8. А.А. Гусак, *Справочное пособие к решению задач. Аналитическая геометрия и линейная алгебра*, Минск, Тетрасистемс, 2006г, 288с.
9. *Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии*, под редакцией А.С. Феденко, Минск, Университетское , 1999г, 302с.

Содержание