

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского

## **ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С КОНДЕНСАТОРАМИ**

*Практикум*

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальностям 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 10.05.07 «Противодействие техническим разведкам», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

*Нижний Новгород*

**2018**

УДК 621.391  
ББК 31.221  
П27

**П27 ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С КОНДЕНСАТОРАМИ:**  
Составитель: Услугин Н.Ф. Практикум. – Нижний Новгород:  
Нижегородский госуниверситет, 2018. – 14 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент каф. акустики радиофизического факультета **И.Ю. Демин**

Рассмотрены переходные процессы в простейших RC- цепях. В качестве примера применения таких цепей изучается работа RC-моста при измерении неизвестной емкости конденсатора. Особое внимание уделено вопросам точности измерений при использовании баллистического гальванометра и осциллографа в качестве "нуль индикаторов".

Практикум предназначен для студентов радиофизического факультета ННГУ в качестве пособия при подготовке и проведении лабораторных работ по курсу «Общий физический практикум».

Ответственный за выпуск:  
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета  
ННГУ,  
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 621.391  
ББК 31.221

Переходные процессы (процессы установления) возникают в электрических цепях при действии различной коммутационной аппаратуры, например, различных ключей, переключателей, при включении (выключении) источников питания, обрывах цепей, коротких замыканиях и т. п. В частности, эти процессы могут приводить к изменению формы и увеличению длительности импульсных сигналов при передаче их по каналам связи.

Основным фактором, приводящим к появлению переходных процессов, является емкость и индуктивность электрических цепей. В данной работе переходные процессы рассматриваются на примере электрических цепей с конденсаторами.

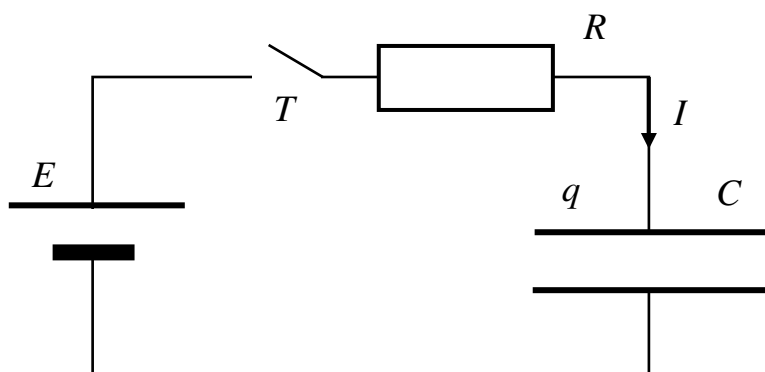


Рис. 1

На рис. 1 показана простейшая  $RC$  цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкости  $C$  и резистора сопротивлением  $R$ . К цепи можно подключать батарейку, ЭДС которой равна  $E$  (для простоты будем считать внутреннее сопротивление батарейки нулевым). Рассмотрим процесс заряда конденсатора после замыкания ключа на контакт "Т". Положительное направление тока  $I$  соответствует стрелке на рисунке. Учитывая, что напряжение на конденсаторе связано с зарядом конденсатора как  $U_C = q/C$  и, используя закон Ома, можно записать

$$I \cdot R + \frac{q}{C} = E. \quad (1 a)$$

Если учесть, что ток в цепи связан с зарядом конденсатора как  $I = \frac{dq}{dt}$ , то уравнение (1 a) принимает вид

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R \cdot C} = \frac{E}{R}. \quad (2)$$

Разделяя переменные

$$\frac{dq}{q - E \cdot C} = - \frac{dt}{R \cdot C}$$

и интегрируя, находим

$$q = C \cdot E + A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}. \quad (3)$$

Постоянная интегрирования  $A$  находится из начальных условий. Например, если в начальный момент  $t = 0$  конденсатор не был заряжен, т. е.  $q(0) = 0$ , то  $A = -E \cdot C$  и

$$q(t) = C \cdot E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{C \cdot R}} \right). \quad (4 a)$$

Произведение значения сопротивления  $R$  на величину емкости  $C$ , стоящее в показателе экспоненты, имеет размерность времени и называется постоянной времени  $RC$ -цепи. Величина постоянной времени определяет, как быстро заряжается конденсатор. За время  $\tau = RC$  заряд конденсатора, как легко видеть, достигает значения  $q(\tau) = C \cdot E \cdot (1 - e^{-1})$ , что составляет примерно 0.63 от максимально возможного при данном источнике напряжения. Обычно значение  $\tau$  используется для оценки времени заряда конденсатора.

Поскольку в эксперименте удобнее измерять напряжение, а не заряд, запишем выражение для напряжения на конденсаторе:

$$U_C(t) = E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{C \cdot R}} \right). \quad (5 a)$$

Графики зависимости напряжения на конденсаторе от времени для двух значений постоянной времени приведены на рис. 3.

Выражение, описывающее процесс разряда конденсатора (предварительно заряженного) можно получить из соотношения (3), формально полагая ЭДС батарейки равным нулю и используя соответствующие начальные условия.

Для измерения сопротивлений, емкостей и индуктивностей часто применяются мостовые схемы. В таких схемах (см. рис.2) элементы соединяются "четырёхугольником", в одну диагональ которого включается источник напряжения, а в другую – измерительный прибор. При определенном соотношении между параметрами элементов измерительный прибор показывает отсутствие напряжения в диагонали (баланс моста). По известным значениям трех элементов из условия баланса моста можно рассчитать значение четвертого.

В данной лабораторной работе измерительный мост используется для нахождения электрической емкости конденсатора.

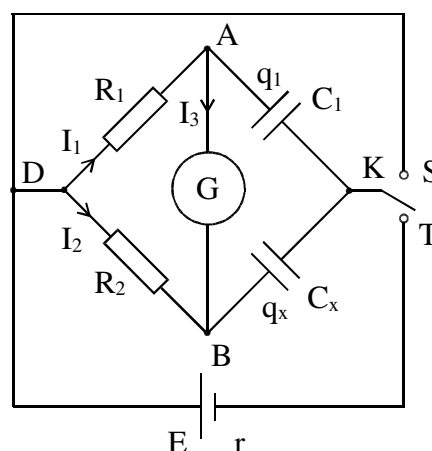


Рис. 2

В схеме, изображенной на рис. 2,  $R_1$  и  $R_2$  – магазины сопротивлений,  $C_1$  – конденсатор известной емкости,  $C_X$  – измеряемая емкость,  $G$  – прибор для измерения напряжений,  $E$  – источник напряжения.

Ключ  $K$  может быть замкнут на контакт "Т" (при этом конденсаторы  $C_1$  и  $C_X$  заряжаются от источника напряжения) или на контакт "S" (при этом конденсаторы разряжаются через сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ ).

Рассмотрим процесс изменения напряжений на конденсаторах после замыкания ключа  $K$  на контакт "Т".

Для упрощения выкладок будем считать внутреннее сопротивление измерительного прибора бесконечно большим, а источника напряжения – пренебрежимо малым. Такие предположения справедливы, если выполняются неравенства:  $R_G \gg R_1, R_2 \gg r$ . В этом случае током, текущим через измерительный прибор, можно пренебречь и цепь фактически разбивается на две независимые RC цепочки.

Применяя к контуру DATD второе правило Кирхгофа, получаем уравнение полностью аналогичное (1):

$$I_1 R_1 + \frac{q_1}{C_1} = E, \quad (1 b)$$

решение которого нам уже известно:

$$q_1(t) = C_1 \cdot E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{C_1 R_1}} \right). \quad (4 b)$$

Выражение для напряжения на конденсаторе  $C_1$ :

$$U_C(t) = E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{C_1 R_1}} \right). \quad (5 b)$$

Рассматривая контур DBTD, получаем аналогичное выражение для напряжения на втором конденсаторе

$$U_X(t) = E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{C_X R_2}} \right). \quad (5 c)$$

Напряжение на измерительном приборе  $G$  равно разности напряжений на конденсаторах:

$$U_G^{zap}(t) = U_1(t) - U_X(t) = E \cdot \left( e^{-\frac{t}{R_2 C_X}} - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \right). \quad (6)$$

Из (6) следует, что при выполнении равенства

$$R_1 C_1 = R_2 C_X \quad (7)$$

разность потенциалов между точками *A* и *B* все время равна нулю. Условие (7) называется условием баланса моста. Если условие (7) нарушено, то в течение некоторого времени, в процессе зарядки конденсаторов, напряжение  $U_G^{zap}(t)$  будет отлично от нуля, что может быть обнаружено при достаточной чувствительности и быстродействии измерительного прибора.

На рис. 3 приведены временные зависимости напряжений на конденсаторах и на измерительном приборе в случае отсутствия баланса моста.

После замыкания ключа *K* на клемму "S" разряд конденсаторов происходит по экспоненциальному закону:

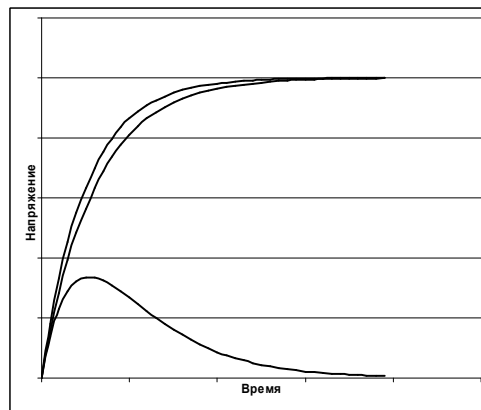


Рис. 3

$$U_1(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{C_1 R_1}}, \quad U_X(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{C_X R_2}}, \quad (8 a)$$

$$U_G^{pazp}(t) = E \cdot \left( e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} - e^{-\frac{t}{R_2 C_X}} \right) = -U_G^{zap}(t). \quad (8 b)$$

В этом случае при балансе моста напряжение на измерительном приборе также равно нулю.

Для того, чтобы измерить емкость конденсатора  $C_X$ , надо, изменяя значения сопротивлений  $R_1$  и (или)  $R_2$ , добиться того, чтобы при переключениях ключа *K* измерительный прибор *G* не давал отклонения. В этом случае справедливо равенство (7), из которого, по известным сопротивлениям  $R_1$  и  $R_2$  и емкости  $C_1$ , определяется неизвестная емкость  $C_X$ :

$$C_X = C_1 \frac{R_1}{R_2}. \quad (9)$$

При реализации данного метода следует учитывать, что время зарядки (разрядки) конденсаторов, а, следовательно, и длительность импульса напряжения на измерительном приборе *G*, оказываются достаточно малыми и поэтому отклик прибора будет зависеть не только от его чувствительности, но и от его инерционных свойств.

В данной лабораторной работе предусмотрено проведение измерений в двух режимах: безынерционном и инерционном.

В **безынерционном** (малоинерционном) **наблюдении** время, в течение которого измерительный прибор производит измерение (постоянная времени прибора), много меньше характерного времени изменения измеряемой величины, т.е. прибор как бы "отслеживает" все изменения измеряемой величины. В качестве безынерционного "нуль индикатора" в работе можно использовать ос-

циллограф, быстродействие которого позволяет наблюдать форму импульсов (6), (8 b). О величине разбаланса измерительного моста можно судить по максимальному значению напряжения  $U_G(t)$ .

При **инерционном наблюдении** постоянная времени прибора сравнима с характерным временем изменения измеряемой величины или даже много больше. Высокочувствительный нуль-гальванометр, установленный в диагональ моста, является типичным примером прибора, реализующего инерционное наблюдение. Время установления стрелки в таком гальванометре существенно больше времени перезарядки конденсаторов. Процесс измерения в этом случае можно представить в виде двух последовательных этапов: сначала, из-за проходящего через рамку гальванометра кратковременного тока, рамка получает некоторый момент импульса (приобретает угловую скорость), а затем, когда ток уже прекратился, эта рамка по инерции отклоняется на некоторый угол. Такой режим измерений гальванометром называется баллистическим. В баллистическом режиме отклонение стрелки гальванометра пропорционально прошедшему через гальванометр заряду (см. Приложение 1).

При анализе работы схемы в данном режиме следует учитывать, что у чувствительных гальванометров условие  $R_G \gg R_{1,2}$  как правило, не выполняется. Однако, если между точками А и В разность потенциалов отсутствует, то ток через измерительный прибор будет равен нулю при любом значении  $R_G$  и, следовательно, величина  $R_G$  на условие (7) баланса моста влиять не будет.

### Экспериментальная часть

1. Собрать схему, показанную на рис. 4. На вход измерительного моста с генератора подать напряжение типа "меандр".

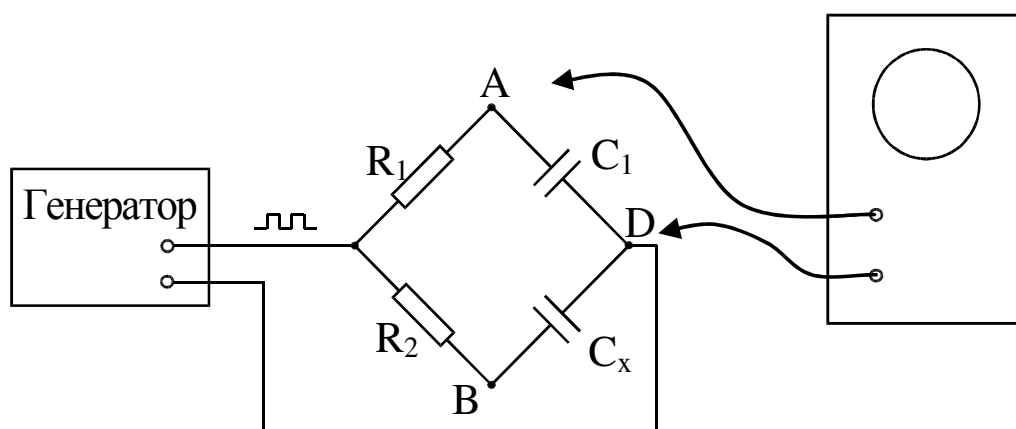


Рис.4

Подключив осциллограф к точкам А, D схемы, наблюдать осциллограммы напряжения  $U_1(t)$  при разных значениях  $R_1$  (Значение  $R_2$  при этом поставить максимально возможным). Измерить соответствующие времена заряда (разряда) конденсатора.

Построить график зависимости времени заряда (разряда) конденсатора от значения постоянной времени  $R_1 C_1$ .

2. Установить частоту развертки осциллографа в три-четыре раза меньше чем частота генератора меандра. Наблюдать (зарисовать, сфотографировать) форму сигнала «снимаемого» с конденсатора при различных значениях постоянной времени цепочки.
3. Поочередно подключая осциллограф к точкам AD и AB наблюдать на осциллографе и зарисовать (сфотографировать) осциллограммы напряжений  $U_I(t)$ ,  $U_{AB}(t)$  (при одинаковых скоростях развертки осциллографа и "почти" сбалансированном мосте).
4. Измерить неизвестную емкость  $C_X$ . В качестве нуля индикатора использовать осциллограф. Для этого подключить осциллограф к точкам AB, фиксируя значение  $R_1$  и подбирая  $R_2$  добиться баланса моста. Рассчитать неизвестную емкость конденсатора  $C_X$ . Измерения провести несколько раз с различными  $R_1$  (не менее 6-8 значений).  
*При всех измерениях фиксировать диапазон значений  $R_2$  ( $\Delta R_2$ ), внутри которого отклонение луча осциллографа от нулевого уровня не превышает некоторого фиксированного значения, выбираемого в зависимости от уровня шумов.*
5. Собрать схему, приведенную на рис. 2, с гальванометром в качестве "нуля индикатора". Аналогично предыдущему заданию измерить неизвестную емкость конденсатора  $C_X$ . Измерения провести несколько раз с различными  $R_1$  (от  $R_1 \ll R_G$  до  $R_1 \gg R_G$ ).  
*При всех измерениях фиксировать диапазон значений  $R_2$  ( $\Delta R_2$ ), внутри которого отклонение стрелки гальванометра от нуля не превышает некоторого фиксированного значения (например, не превышает половины одного деления шкалы гальванометра).*
6. По результатам, полученным в п. 4 и п. 5, построить графики зависимостей погрешностей измерений от величины  $R_1$ .

### ***Контрольные вопросы и задания***

#### **Для схемы, показанной на рис.1**

1. Нарисовать примерный график зависимости напряжения на конденсаторе при его зарядке. Как изменится график при увеличении сопротивления цепи в два раза (в три раза)?
2. Как будет зависеть от времени напряжение на предварительно заряженном конденсаторе после замыкания его контактов на резистор?
3. Конденсатор емкости  $C=1 \text{ мкФ}$  начинают заряжать от батарейки через резистор сопротивлением  $R=1 \text{ кОм}$ . ЭДС батарейки равна  $E$ , а внутренним сопротивлением можно пренебречь. Через сколько секунд напряжение на конденсаторе достигнет значения  $0.9 E$ ?
4. Нарисовать примерный вид осциллограмм напряжения на конденсаторе, если в качестве источника напряжения использовать генератор единичных импульсов. Рассмотреть случаи с различными соотношениями между длительностью импульса и постоянной времени цепи.



**Для схемы, показанной на рис.2**

5. Пользуясь правилами Кирхгоффа, записать систему уравнений, описывающую работу схемы (рис. 2). Рассмотреть различные приближения
6. Определить максимальное значение напряжения на измерительном приборе (между точками А и В) как функцию  $\Delta R_2$  (см. (11)).
7. Оценить длительность импульса  $U_G(t)$ .

***Литература***

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 688с.
2. Овсянникова И.А. Определение емкости конденсатора. Описание к лабораторной работе. ГГУ им. Н.И. Лобачевского, Горький, 1960.
3. Услугин Н.Ф. Измерение емкости конденсатора: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 12с.

## Приложение

### Баллистический режим работы гальванометра

Гальванометр – магнитоэлектрический прибор для измерения малых токов. Рамка, состоящая из большого числа витков тонкого провода, помещена в магнитное поле постоянного магнита и может поворачиваться вокруг своей оси. Положение рамки фиксируется пружинками специальной формы, по которым, как правило, к ней и подводится измеряемый ток. На рамку с током действуют момент сил Ампера, пропорциональный току  $I_G$  в рамке, и момент упругих сил пружинки, пропорциональный углу отклонения подвижной системы гальванометра от положения равновесия.

Запишем уравнение моментов относительно оси вращения рамки:

$$J \frac{d\omega_z}{dt} = I_G \cdot N \cdot S \cdot B - D \cdot \alpha. \quad (10)$$

Здесь  $J$  – момент инерции подвижной системы гальванометра,  $\omega_z = \frac{d\alpha}{dt}$  – угловая скорость вращения подвижной системы,  $N$  – число витков, а  $S$  – площадь рамки,  $B$  – индукция магнитного поля, создаваемого постоянным магнитом,  $D$  – коэффициент, характеризующий упругость пружинки.

В уравнении (10) не учтено вязкое трение, оказывающее демпфирующее действие на рамку.

При кратковременном протекании тока подвижная система гальванометра практически не успевает отклониться. В этом случае уравнение (10) легко интегрируется:

$$J d\omega_z = I_G N S B dt, \quad \omega_{z0} = \frac{N S B}{J} \cdot \int I_G dt = \frac{N S B}{J} Q,$$

где  $\omega_{z0}$  – угловая скорость, полученная подвижной системой, а  $Q$  – заряд, прошедший через гальванометр. После прекращения действия сил Ампера подвижная система гальванометра отклоняется на некоторый угол, который можно оценить, используя закон сохранения энергии

$$\frac{J\omega_{z0}^2}{2} = \frac{D\alpha_{\max}^2}{2}, \quad \alpha_{\max} = \frac{N \cdot S \cdot B}{\sqrt{J \cdot D}} Q.$$

На практике, из-за вязкого трения, отклонение стрелки гальванометра будет несколько меньше, но оно все равно будет пропорционально заряду, прошедшему через гальванометр.

### Расчет погрешности, вносимой конечной чувствительностью нуля индикатора

Баланс моста невозможно определить абсолютно точно. Измерительный прибор, стоящий в диагонали моста, имеет конечную чувствительность и поэтому не будет реагировать на очень малые токи. Ошибку, вносимую в процесс

измерения емкости конечной чувствительностью прибора G, можно оценить, определив вариацию (изменение) сопротивления (например  $R_2$ ), при которой уже можно заметить «ненулевые» показания прибора.

В случае слабого «разбаланса» измерительного моста сопротивление  $R_2$  удобно представить в виде

$$R_2 = R_2^* + \Delta R_2 = R_2^* \cdot \left( 1 + \frac{\Delta R_2}{R_2^*} \right) = R_2^* \cdot (1 + \delta R_2), \quad (11)$$

где  $R_2^* = \frac{R_1 C_1}{C_X}$  соответствует условию баланса моста, а  $\frac{\Delta R_2}{R_2^*} = \delta R_2$  – будет характеризовать относительное отклонение  $R_2$  от  $R_2^*$  (погрешность определения  $R_2$ ).

### ***Расчет погрешности, вносимой конечной чувствительностью осциллографа (безынерционное измерение)***

При малоинерционном наблюдении о величине разбаланса измерительного моста можно судить по максимальному значению напряжения  $U_G(t)$ . Максимум функции  $U_G(t)$  находится из выражения (6). С учетом малости  $\delta R_2$  в (11), можно получить

$$\max |U_G| \approx \left| E \cdot \frac{\delta R_2}{(1 + \delta R_2) \frac{1}{\delta R_2}} \right| \approx \left| \frac{E}{e} \cdot \delta R_2 \right|, \quad (12)$$

где  $e$  – основание натурального логарифма.

Пусть  $U_{\min}$  минимальное напряжение, которое уверенно регистрируется прибором как не нулевое. Тогда условие обнаружения разбаланса можно записать, как  $\max |U_G| \geq |U_{\min}|$  и, следовательно, относительная ошибка, связанная с конечной чувствительностью измерительного прибора, пересчитанная в погрешность определения  $R_2$ , равна  $\delta R_2^G \approx \frac{e \cdot U_{\min}}{E}$ , уменьшается при увеличении  $E$  и не зависит от значений  $R_1$  и  $R_2$ .

### ***Расчет погрешности, вносимой конечной чувствительностью гальванометра (инерционное измерение)***

У чувствительных гальванометров условие  $R_G \gg R_{l,2}$  как правило не выполняется. Поэтому проведем анализ работы схемы, показанной на рис. 2, в предположении конечности сопротивления измерительного прибора. Пользуясь правилами Кирхгофа, запишем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 R_1 + \frac{q_1}{C_1} = E, \\ I_2 R_2 + \frac{q_X}{C_X} = E, \\ I_1 R_1 + I_G R_G - I_2 R_2 = 0, \\ I_1 - I_G - \frac{dq_1}{dt} = 0, \\ I_2 + I_G - \frac{dq_X}{dt} = 0. \end{array} \right. \quad (13)$$

Исключая токи  $I_{1,2}$  и  $I_G$ , эту систему можно свести к системе из двух уравнений для напряжений на конденсаторах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{R_1 C_1} = \frac{E}{R_1 C_1} - \frac{U_1 - U_X}{R_G C_1}, \\ \frac{dU_X}{dt} + \frac{U_X}{R_2 C_X} = \frac{E}{R_2 C_X} + \frac{U_1 - U_X}{R_G C_X}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Так же как и при безынерционном измерении, рассмотрим случай слабого разбаланса моста.

Используя (11) и малость величины  $\delta R_2$ , второе уравнение системы (14) сводится к следующему виду:

$$\frac{dU_X}{dt} + \frac{U_X}{R_1 C_1} (1 - \delta R_2) = \frac{E}{R_1 C_1} (1 - \delta R_2) + \frac{U_1 - U_X}{R_G C_X}.$$

Вычитая полученное уравнение из первого в (14) и, учитывая, что  $U_1 - U_X = U_G$ , получаем:

$$\frac{dU_G}{dt} + U_G \cdot \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_G} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_X} \right) \right) = \frac{\delta R_2}{R_1 C_1} (E - U_X). \quad (15)$$

Подставим в правую часть выражения (15) в качестве нулевого приближения  $U_X(t)$  из (4 с) и найдем  $U_G(t)$ :

$$U_G(t) = \frac{E \cdot \delta R_2 \cdot \tau}{R_1 \cdot C_1} \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (16)$$

где  $\tau = \frac{R_G \cdot C_1 \cdot C_X}{C_1 + C_X} = \frac{R_G \cdot C_1 \cdot R_1}{R_1 + R_2^*}$ .

Заряд, прошедший через гальванометр, можно подсчитать, интегрируя по времени выражение (16) (поделенное на  $R_G$ ):

$$Q = \frac{R_1 \cdot C_1}{R_1 + R_2^* + R_G} \cdot E \cdot \delta R_2. \quad (17)$$

Пусть  $Q_{min}$  – это минимальный заряд, прохождение которого через гальванометр мы еще можем обнаружить. Тогда соответствующая относительная ошибка, "пересчитанная" в ошибку определения  $R_2$ , составит:

$$\delta R_2 = Q_{min} \frac{R_1 + R_2^* + R_G}{R_1 C_1 E} = Q_{min} \frac{1 + \frac{C_1}{C_X} + \frac{R_G}{R_1}}{C_1 E}. \quad (18)$$

Как видно из выражения (18), относительная ошибка должна уменьшаться при увеличении  $R_1$ .

# **ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С КОНДЕНСАТОРАМИ**

Составитель  
Николай Федорович Услугин

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.