

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

**Национальный исследовательский университет**

**Учебно-научный и инновационный комплекс  
«Модели, методы и программные средства»**

**Основная образовательная программа**  
010400.62 «Прикладная математика и информатика», общий профиль,  
квалификация (степень) бакалавр  
**Учебно-методический комплекс по дисциплине**  
«Теория управления»

**Основная образовательная программа**  
010400.68 «Прикладная математика и информатика», профиль  
«Математическое моделирование», квалификация (степень) магистр  
**Учебно-методический комплекс по дисциплине**  
«Моделирование управления колебательными процессами»

**Баландин Д.В., Городецкий С.Ю.**

## **КЛАССИЧЕСКИЕ И СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ В ПРИМЕРАХ**

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижегород  
2012

КЛАССИЧЕСКИЕ И СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ В ПРИМЕРАХ. Баландин Д.В., Городецкий С.Ю. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 122 с.

В учебно-методическое пособие в краткой форме включен теоретический материал по вопросам устойчивости и управления, а также основным классическим и современным методам построения регуляторов по состоянию. На ряде прикладных примеров показаны основные этапы решения этой задачи, начиная с построения математических моделей и заканчивая получением законов регулирования с желаемыми свойствами. На каждом примере в форме сопоставления демонстрируются несколько методов построения регуляторов.

Основная часть материала изложена в форме диалога-обсуждения, в форме заданий и решений с ориентацией на освоение материала в форме самостоятельной работы. Для возможности проведения численных экспериментов по большинству разбираемых в пособии примеров авторами подготовлены оконные приложения для системы MatLab, размещенные в открытом доступе.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010400.62 «Прикладная математика и информатика», изучающих курс «Теория управления», и по направлению 010400.68 «Прикладная математика и информатика», изучающих курс «Моделирование управления колебательными процессами».

# Оглавление

Введение .....	6
1. Элементы теории устойчивости и управления .....	8
1.1. Устойчивость .....	8
1.1.1. Основные понятия теории устойчивости .....	8
1.1.2. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости .....	10
1.1.3. Устойчивость по первому приближению .....	11
1.1.4. Устойчивость линейных систем .....	12
1.1.5. Методы исследования устойчивости стационарных линейных систем .....	13
1.1.5.1. Алгебраический критерий устойчивости Рауса-Гурвица .....	14
1.1.5.2. Частотные методы исследования устойчивости .....	15
1.1.5.3. Применение линейных матричных неравенств ( <i>LMI</i> ) к исследованию устойчивости линейных систем .....	16
1.2. Управление .....	16
1.2.1. Задача стабилизации .....	16
1.2.2. Стабилизация линейной управляемой системы .....	17
1.2.3. Модальное управление .....	19
1.2.3.1. Прямая задача модального управления .....	19
1.2.3.2. Применение метода <i>D</i> -разбиения к построению модального управления .....	20
1.2.3.3. Синтез модального управления с использованием <i>LMI</i> .....	21
1.3. Оптимальность .....	25
1.3.1. Идея оптимальности в задачах управления .....	25
1.3.2. Синтез линейно-квадратичного регулятора .....	25
2. Управление перевернутым маятником и подъемное управление .....	29
2.1. Построение математической модели .....	29
2.1.1. Упражнение: кинематика .....	30
2.1.2. Упражнение: потенциальная энергия .....	31
2.1.3. Упражнение: кинетическая энергия .....	31
2.1.4. Упражнение: функция Лагранжа .....	32
2.1.5. Упражнение: момент сил инерции .....	32
2.1.6. Упражнение: уравнения движения Эйлера-Лагранжа .....	33
2.1.7. Упражнение: изменение уравнений динамики .....	34
2.2. Построение стабилизирующего регулятора .....	35
2.2.1. Замкнутая система: объект – регулятор .....	35
2.2.2. Состояние равновесия замкнутой системы и линеаризованные уравнения .....	35
2.2.3. Упражнение: построение стабилизирующего управления с порядком затухания переходных процессов не ниже заданного значения .....	36
2.3. Построение подъемного регулятора .....	37
2.3.1. Упражнение: получение выражения полной механической энергии .....	37
2.3.2. Упражнение: принцип построения подъемного управления .....	38
2.3.3. Упражнение: функция Ляпунова .....	41
2.3.4. Упражнение: построение подъемного управления .....	43
2.3.5. Упражнение: анализ построенного подъемного управления .....	45

3. Управление неустойчивым объектом движениями балансирующей массы...	49
3.1. Описание лабораторной установки .....	49
3.2. Упражнение: вывод нелинейных уравнений движения .....	50
3.3. Упражнение: анализ состояний равновесия замкнутой системы .....	54
3.4. Линеаризованные уравнения движения в форме Коши для замкнутой системы .....	55
3.4.1. Уравнения движения замкнутой системы, линеаризованные в окрестности основного состояния равновесия.....	55
3.4.2. Упражнение: линеаризованная система уравнений движения в форме Коши в исходных размерных переменных .....	56
3.4.3. Упражнение: уравнения движения в форме Коши в безразмерных переменных ...	57
3.5. Определение области устойчивости по параметрам регулятора.....	60
3.5.1. Упражнение: вывод условий устойчивости с использованием критерия Рауса- Гурвица .....	60
3.5.2. Упражнение: численное исследование переходных процессов в зависимости от размещения параметров регулятора в области устойчивости .....	63
3.6. Синтез регуляторов с использованием корневых методов – модальное управление.....	68
3.6.1. Модальное управление .....	68
3.6.2. Упражнение: построение области обобщенной устойчивости по параметрам регулятора $s_1$ и $s_2$ методом D-разбиения .....	70
3.6.3. Построение модального регулятора методом линейных матричных неравенств ...	80
3.6.4. Сопоставительное исследование в системе MatLab двух методов построения модальных регуляторов.....	82
3.7. Анализ области притяжения состояния равновесия в нелинейной модели для регулятора, построенного с использованием линейных матричных неравенств .....	84
4. Управление лабораторной моделью порталного крана.....	86
4.1. Описание лабораторной модели «портальный кран» и неформальная цель управления.....	86
4.2. Вывод уравнений движения .....	89
4.2.1. Уравнения движения каретки и груза без учета электрических цепей в электромоторе .....	89
4.2.1.1. Упражнение: вывод формулы для функции Лагранжа .....	89
4.2.1.2. Упражнение: вывод уравнений движения Эйлера–Лагранжа.....	90
4.2.2. Упражнение: учет электрических цепей электромотора в уравнениях движения системы .....	91
4.2.3. Упражнение: запись уравнений замкнутой системы с обратной связью по состоянию .....	93
4.2.4. Упражнение: получение линеаризованных уравнений модели порталного крана	95
4.3. Построение управления моделью порталного крана на основе современных подходов линейной теории автоматического регулирования.....	98
4.3.1. Упражнение: построение LQR–регулятора.....	98
4.3.2. Упражнение: прямые методы построения модального управления .....	101

4.3.3. Упражнение: построения модального регулятора с использованием линейных матричных неравенств.....	104
4.4. Оптимальная настройка свободных параметров при синтезе регуляторов по дополнительным нелинейным критериям качества.....	108
4.4.1. Принцип и цели оптимальной настройки свободных параметров при синтезе регуляторов.....	108
4.4.2. Дополнительные нелинейные критерии качества .....	109
4.4.3. Постановка задач оптимизации и примеры видов зависимости дополнительных критериев качества от свободных параметров.....	112
4.4.4. Примеры оптимальной настройки свободных параметров регуляторов методами нелинейной оптимизации.....	117
Литература .....	122

## Введение

Учебные курсы по теории автоматического регулирования и управления в значительной своей части включают материал, отражающий классические результаты и состояние этой науки применительно к линейным системам, сложившееся примерно к середине XX века. Этот материал касается различных способов представления линейных стационарных систем в том числе язык операционного исчисления, структурные и частотные описания; методы исследования асимптотической устойчивости, алгебраические и частотные, включая метод D-разбиения.

С 60-х и 70-х годов прошлого века и по настоящее время возникают новые постановки задач теории управления и развиваются новые подходы к их решению. Для этого периода характерны не только требования обеспечения устойчивости заданных режимов и ограничений на протекание переходных процессов, но и, как основное требование, соблюдение тех или иных принципов оптимальности при построении регуляторов, а также математическое решение вопросов о наблюдаемости и управляемости систем. Можно отметить и другие разделы: адаптивное управление, робастное управление. В этой области за последние несколько десятилетий получено огромное количество результатов, недостаточно полно или вообще не представленных в учебных курсах.

Во всяком случае, изложению современных разделов теории управления в лекционных курсах отводится недостаточно времени. Однако экстенсивный путь, связанный с увеличением временных рамок курсов невозможен. Авторы считают, что часть этого материала может быть, при соответствующей его адаптации и доступном изложении, вынесена в раздел для самостоятельного изучения студентами. При этом лекционные курсы должны включать в этой части лишь обзор основных направлений и результатов. Это соответствовало бы букве и духу государственных образовательных стандартов третьего поколения, однако требует создания существенного методического обеспечения. Предлагаемое учебно-методическое пособие ориентировано на решение этой задачи.

Авторы исходят, во-первых, из концепции о необходимости изложения основных результатов в области современной теории управления. Однако противопоставление классических и современных подходов было бы неправильным. Поэтому, во-вторых, изложение современных подходов целесообразно подробно иллюстрировать не только простыми формальными примерами, но обязательно подкреплять содержательными примерами исследования конкретных динамических систем. В этих примерах должно быть продемонстрировано комплексное применение как классических, так и современных подходов теории управления и их сопоставление.

Конкретное содержание учебно-методического пособия включает элементы теории устойчивости и управления, в том числе основные результаты

по теории устойчивости и методам исследования систем на устойчивость с использованием функций Ляпунова, вопросы построения стабилизирующего и модального управления, а также синтеза оптимального линейно-квадратичного управления. В качестве математического аппарата используются как классические хорошо зарекомендовавшие себя методы (алгебраические и частотные критерии устойчивости, метод D-разбиения, матричное уравнение Риккати), так и методы, созданные сравнительно недавно (линейные матричные неравенства, методы выпуклой оптимизации).

Основная часть пособия посвящена разбору ряда нетривиальных примеров: управление перевернутым маятником, стабилизация качели с приподнятым центром масс за счет балансирующего движения по ней каретки, управление моделью порталного крана. На примере этих систем демонстрируется применение нескольких классических методов (Рауса-Гурвица, D-разбиения по отношению к области специальной формы) в сопоставлении с более современными методами (прямые методы построения модального управления, LQ-регуляторы, методы линейных матричных неравенств). Разделы пособия, посвященные исследованию этих систем, написаны в стиле диалога со студентом-читателем. По ходу изложения обсуждаются ситуации и формулируются короткие теоретические задания, затем для них приводится решение в том виде, как его ожидают получить от студента. Поскольку пособие, в основном, рассчитано на использование при самостоятельной работе, приведенные решения можно применять для самопроверки. Формулы в текстах решений имеют отдельную нумерацию, включающую букву «s», от слова «solution» – решение. Вычислительные эксперименты, упоминаемые в пособии, студенты могут выполнить с помощью нескольких программ для системы MatLab, исходный код которых доступен по ссылкам, указанным в списке литературы. Наконец, на кафедре теории управления и динамики машин ННГУ имеются физические модели объектов (с компьютерным управлением), описанных в пособии, и, следовательно, любой интересующийся студент может поставить еще и лабораторный эксперимент.

# 1. Элементы теории устойчивости и управления

## 1.1. Устойчивость

### 1.1.1. Основные понятия теории устойчивости

Объектом дальнейшего исследования является математическая модель физического явления или технологического процесса, описываемая системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.1)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор, характеризующий состояние системы,  $f(t, x)$  –  $n$ -мерная вектор-функция, определяющая скорость изменения состояния. Пусть  $z(t, t_0, z_0)$  – некоторое решение задачи Коши системы (1.1), отвечающее начальному условию  $z(t_0) = z_0$ . Дадим теперь определение важного для дальнейшего изложения понятия устойчивости решения системы дифференциальных уравнений (1.1).

**Определение 1.1** (*Устойчивость по Ляпунову*). Решение системы (1.1)  $z(t, t_0, z_0)$  называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого сколь угодно малого положительного  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) существует  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что все решения  $x(t, t_0, x_0)$  задачи (1.1) бесконечно продолжаемы вправо, как только  $|x_0 - z_0| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ , и для этих решений справедливо неравенство

$$|x(t, t_0, x_0) - z(t, t_0, z_0)| \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t < \infty. \quad (1.2)$$

Геометрически устойчивость по Ляпунову означает, что сколь угодно узкая  $\varepsilon$ -трубка решения  $z(t)$  содержит все решения  $x(t)$  задачи (1.1), которые в начальный момент  $t_0$  отстояли от  $z_0$  не более, чем на  $\delta(\varepsilon, t_0)$  (рис. 1.1)

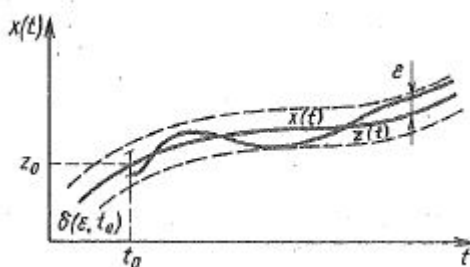


Рис 1.1 Устойчивость по Ляпунову невозмущенного решения  $z(t)$

Под устойчивостью движения динамической системы понимают обычно такое свойство этого движения, когда малые отклонения начальных условий приводят к малым отклонениям от начальной траектории движения. Теория положений устойчивого равновесия динамических систем была в основных



чертах завершена Лагранжем в его «Аналитической механике», изданной в 1788 г.

Строгое определение понятие устойчивости движения было впервые дано А.М.Ляпуновым в его знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения», опубликованной в 1892 г. Предложенные в этой работе методы исследования задач устойчивости оказались чрезвычайно плодотворными. По-видимому, не будет преувеличением сказать, что идеи этой работы в значительной степени предопределили основные результаты современной теории аналитического конструирования систем управления.



Рис. 1.2 А. М. Ляпунов (1857 - 1918)

Во многих практических задачах решения системы дифференциальных уравнений оказываются не просто устойчивыми по Ляпунову, но обладают и другим важным свойством, которое можно характеризовать как асимптотическую устойчивость.

**Определение 1.2.** Решение системы (1.1)  $z(t, t_0, z_0)$  называется *асимптотически устойчивым*, если: оно устойчиво по Ляпунову, для всякого  $t_0 \in T$  существует  $\Delta = \Delta(t_0) > 0$  такое, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0) - z(t, t_0, z_0)| = 0$  при  $|x_0 - z_0| < \Delta(t_0)$ .

Исследование устойчивости любого решения  $z(t)$  системы (1.1) можно свести к исследованию тривиального решения ( $z \equiv 0$ ) некоторой другой системы.

Действительно, обозначим

$$y = x - z(t, t_0, z_0). \quad (1.3)$$

Тогда

$$\dot{y} = f(t, x) - f(t, z(t)). \quad (1.4)$$

Теперь выразим  $x$  через  $y$  и подставим в (1.4):

$$\begin{aligned} x &= y + z(t, t_0, x_0), \\ \dot{y} &= f(t, x) - f(t, z(t)) = f(t, y + z(t, t_0, x_0)) - f(t, z(t, t_0, x_0)) = g(t, y), \\ \dot{y} &= g(t, y), \end{aligned}$$

где

$$y = x - z(t, t_0, z_0), \quad g(t, y) = f(t, x + z(t, t_0, z_0)) - f(t, z(t, t_0, z_0)).$$

Далее чаще всего будем рассматривать именно тривиальное решение системы.

### 1.1.2. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости

Универсальным методом исследования устойчивости различных классов систем является второй метод Ляпунова (см., например, [1]). В качестве инструмента исследования в этом методе используются специальные функции, называемые функциями Ляпунова.

**Определение 1.3.** Вещественную непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных функцию  $V(t, x)$ ,  $V: T \times R^n \rightarrow R^1$ , удовлетворяющую условию  $V(t, 0) \equiv 0$ , называют *функцией Ляпунова*.

**Определение 1.4.** Назовем *производной  $\dot{V}$  функции  $V(t, x)$  в силу системы (1.1)*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad} V, f(t, x)).$$

Если  $x = x(t)$  есть решение уравнения (1.1), то  $\dot{V}$  представляет собой полную производную по времени сложной функции  $V(t, x(t))$ . Заметим, что для вычисления  $\dot{V}$  фактического знания решения  $x(t)$  не требуется.

Введем скалярные непрерывные неубывающие функции  $\omega_i(u)$  ( $u \geq 0, i = 0, 1, \dots$ ) такие, что

$$\omega_i(u) > 0, \quad u > 0, \quad \omega_i(0) = 0.$$

Сформулируем теперь первую теорему Ляпунова для тривиального решения системы (1.1).

**Теорема 1.1 (Первая теорема Ляпунова).** Пусть существует функция Ляпунова  $V(t, x)$  такая, что

$$V(t, x) \geq \omega_1(|x|),$$

и производная  $\dot{V}$  в силу системы (1.1)  $\dot{V} \leq 0$ , тогда тривиальное решение системы (1.1) устойчиво по Ляпунову.

**Теорема 1.2** (Вторая теорема Ляпунова). Пусть существует функция Ляпунова  $V(t, x)$  такая, что

$$\omega_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \omega_2(|x|),$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\omega_3(|x|).$$

Тогда тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

**Задание.** Исследовать устойчивость тривиального решения для уравнения нелинейного осциллятора без трения

$$\ddot{x} + x^3 = 0.$$

**Решение.**

$$\ddot{x} + x^3 = 0.$$

Преобразуем это дифференциальное уравнение второго порядка к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3. \quad (1.s1)$$

Функция Ляпунова в этом случае может быть выбрана в виде первого интеграла данной системы

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2}.$$

Неотрицательность функции  $V$  видна из ее определения. При нахождении производной  $\dot{V}$  в силу системы получаем:

$$\dot{V} = x_1^3 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1^3 x_2 - x_2 x_1^3 = 0.$$

Производная в силу системы тождественно равно нулю. Это означает, что выполнены условия Теоремы 1.1, и тривиальное решение системы (1.s1) устойчиво по Ляпунову. •

### 1.1.3. Устойчивость по первому приближению

В приложениях устойчивость решений часто исследуется по так называемым «уравнениям первого приближения». Пусть требуется исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  системы

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad (1.5)$$

где  $f(t, x)$  - некоторая дифференцируемая вектор-функция. Линеаризуем уравнение в окрестности решения  $x(t) \equiv 0$ . Для этого запишем систему (1.5) в виде:

$$\dot{x}(t) = A(t)x + R(t, x), \quad A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad |R(t, x)| \leq C_1 |x|^{1+\alpha}, \quad (1.6)$$

здесь  $A(t) - n \times n$  – матрица  $\alpha > 0, C_1 > 0$  – некоторые положительные величины.

Наряду с системой (1.6) рассмотрим линейную систему:

$$\dot{x}(t) = A(t)x. \quad (1.7)$$

Система (1.7) называется уравнением первого приближения для (1.5). Далее изучают устойчивость системы (1.7) и по ней судят об устойчивости нелинейной системы (1.5). Такой прием без должного обоснования применялся задолго до Ляпунова. Ляпунов первым для случая стационарного уравнения первого приближения ( $A(t) = A$ ) установил, когда это является правомерным, а когда нет.

**Теорема 1.3.** Пусть тривиальное решение уравнения (1.7) с постоянной матрицей  $A$  асимптотически устойчиво, тогда тривиальное решение нелинейного уравнения (1.5) также асимптотически устойчиво.

**Теорема 1.4.** Если тривиальное решение уравнение первого приближения (1.7) с постоянной матрицей  $A$  неустойчиво, то тривиальное решение нелинейного уравнения также неустойчиво.

Случаи, рассмотренные в предыдущих двух теоремах, называют некритическими. В некритических случаях матрица  $A$  не имеет собственных значений на мнимой оси. В этих случаях характер устойчивости полной нелинейной системы совпадает с характером устойчивости системы первого приближения независимо от вида нелинейных членов.

Случаи, когда матрица  $A$  имеет собственные значения  $\lambda_j(A)$  на мнимой оси, т. е.  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) = 0$ , называются критическими. В критических случаях устойчивость или неустойчивость или неустойчивость зависит от видов нелинейных членов.

#### 1.1.4. Устойчивость линейных систем

При рассмотрении динамических систем в общем случае с использованием теоремы Ляпунова нельзя по виду системы определить характер устойчивости. Однако, если рассматривать линейную автономную с постоянными коэффициентами систему, то уже по коэффициентам правых частей можно судить об устойчивости решения системы.

Рассматриваются линейные автономные системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in R^n. \quad (1.8)$$

Для систем такого вида справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.5.** Если собственные значения матрицы  $A$  удовлетворяют неравенству  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1 \dots n$ , то тривиальное решение линейной стационарной системы асимптотически устойчиво.

Напомним, что собственные значения матрица находятся из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

здесь  $I$  - единичная матрица ( $n \times n$ )-матрица. Раскрывая определитель, можно привести это уравнение к виду:

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n = 0. \quad (1.9)$$

**Определение 1.5.** Будем говорить, что многочлен  $P_n(\lambda)$  является устойчивым многочленом (многочленом Гурвица), если все его корни  $\lambda_j$  имеют отрицательную вещественную часть, то есть

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0. \quad (1.10)$$

При выполнении условия (1.10) матрицу  $A$  также называют *устойчивой*. Итак, для решения вопроса об устойчивости стационарной линейной системы мы должны определить знак действительных частей корней характеристического уравнения. Спрашивается, можно ли, не вычисляя значение корней характеристического многочлена, определить по коэффициентам характеристического многочлена его устойчивость? Оказывается, да, можно. В следующих разделах рассматриваются некоторые способы решения этого вопроса.

Еще один важный практический вопрос, возникающий при исследовании на устойчивость стационарных линейных систем, связан с сохранением свойства устойчивости при изменении каких-либо параметров системы. Этот вопрос важен именно с практической точки зрения, поскольку точное задание параметров, как правило, невозможно. Сохранение свойства устойчивости линейной системы при вариации параметров в некоторой области называют «робастной устойчивостью» (от английского слова “robust” – грубый). Соответствующие постановки задач и методы их решения можно найти в книге [2].

### **1.1.5. Методы исследования устойчивости стационарных линейных систем**

В этом разделе обсуждаются некоторые методы исследования устойчивости линейных стационарных систем, в том числе алгебраические критерии устойчивости, частотные критерии устойчивости, а также методы, основанные на использовании линейных матричных неравенств (в англоязычной терминологии “linear matrix inequalities” – *LMI*).

### 1.1.5.1. Алгебраический критерий устойчивости Рауса-Гурвица

Начнем с обсуждения алгебраического метода исследования устойчивости многочлена вида (1.9). В научной литературе этот результат получил название критерия Рауса-Гурвица.

**Определение 1.6.** Матрицей Гурвица многочлена (1.9) называется матрица вида

$$M_{P_n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

В матрице (1.11) все  $a_s = 0$  при  $s < 0$  и  $s > n$ . Например, для многочлена шестой степени матрица Гурвица такова:

$$M_{P_6} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}$$

**Теорема 1.6.** (Критерий Рауса-Гурвица). Для устойчивости многочлена  $P_n(\lambda)$  с  $a_0 > 0$  и  $a_n \neq 0$  необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

Наряду с критерием Рауса-Гурвица часто используется также алгебраический критерий Ляпунова-Шипара [3], позволяющий в два раза сокращать число проверяемых неравенств. Кроме того, укажем на алгоритмически удобный критерий Рауса, называемый в [4] методом  $\lambda - \tau$  преобразований.

**Задание.** Для линейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами при помощи критерия Рауса-Гурвица указать такие значения действительных параметров  $a$  и  $b$ , где соответствующий характеристический многочлен является устойчивым

$$a \cdot \ddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + b \cdot y = 0,$$

**Решение.**

Составляем характеристическое уравнение:

$$a\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b = 0, \quad a_3 = a, a_2 = a_1 = 1, a_0 = b.$$

Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Соответственно, главные диагональные миноры  $\Delta_1 = 1 > 0$ ;  $\Delta_2 = 1 - ab > 0$  при  $ab < 1$ ;  $\Delta_3 = a\Delta_2 = a(1 - ab) > 0$  при  $a > 0$  и  $ab < 1$ . Итак, соответствующий характеристический многочлен является устойчивым при  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $ab < 1$ .

•

### 1.1.5.2. Частотные методы исследования устойчивости

Применение критерия Рауса-Гурвица к линейным системам высокого порядка приводит к сложным вычислениям и не позволяет выявить влияние отдельных параметров на устойчивость системы. Более удобными в приложениях оказываются частотные критерии А.В. Михайлова и Г. Найквиста [3,8].

К частотным методам исследования относится также и метод  $D$ -разбиения, разработанный Ю.И. Неймарком [4]. Применительно к задаче построения области устойчивости по двум линейно входящим в характеристический полином параметрам суть этого метода сводится к следующему приему. Характеристический многочлен (1.9) рассматривается как аналитическая функция комплексного аргумента  $\lambda$ . Коэффициенты многочлена считаются зависящими от двух линейно входящих параметров. Уравнение (1.9) будем рассматривать как точечное преобразование, ставящее в соответствие точкам  $\lambda$  комплексной плоскости точку в пространстве этих параметров.

Задавшись некоторой областью комплексной плоскости, в которой требуется разместить все корни многочлена, можно указать (по крайней мере, в принципе, а во многих случаях и практически) образ этой области в пространстве параметров. В задаче обеспечения устойчивости данная область представляет левую комплексную полуплоскость и ее образ может быть получен посредством построения образа границы, параметризуемой параметром частоты:  $\lambda = \lambda(\omega) = i \cdot \omega$ , где  $\omega$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Метод  $D$ -разбиения предоставляет правила построения образа границы и правила определения образа левой полуплоскости по построенному образу ее границы.

Метод легко обобщается на произвольные, симметричные относительно действительной оси области требуемого размещения корней.

### 1.1.5.3. Применение линейных матричных неравенств (LMI) к исследованию устойчивости линейных систем

Рассмотрим линейную автономную систему дифференциальных уравнений.

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in R_n. \quad (1.12)$$

Данная система будет асимптотически устойчива, т.е. все собственные значения матрицы  $A$  будут лежать в левой части комплексной плоскости тогда и только тогда, когда существует функция Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T X x$$

с положительно определенной симметрической матрицей  $X = X^T > 0$ , при этом производная в силу системы (1.12)

$$\dot{V} = x^T (A^T X + X A) x$$

выражается другой квадратичной формой с отрицательно определенной матрицей  $A^T X + X A < 0$ . Сказанное выше можно представить в виде системы линейных неравенств относительно неизвестной симметрической матрицы  $X$ :

$$X > 0, \quad A^T X + X A < 0. \quad (1.13)$$

В терминах линейных матричных неравенств решение вопроса об асимптотической устойчивости линейной системы (1.12) выглядит следующим образом: тривиальное решение системы (1.12) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существует решение системы (1.13). На первый взгляд кажется, что задача нахождения решения системы (1.13) является чрезвычайно сложной. Однако, ряд важных свойств, присущих линейным матричным неравенствам (см. [5]) позволил создать эффективные численные алгоритмы проверки разрешимости LMI и нахождения решения LMI. В настоящее время эти алгоритмы реализованы в различных программных пакетах, в том числе в популярном пакете MatLab (см. например, [6, 7]).

## 1.2. Управление

### 1.2.1. Задача стабилизации

Рассматривается система автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.14)$$

Предполагается, что решение системы  $x = 0$  неустойчиво. Требуется, используя дополнительное воздействие на эту систему обеспечить устойчивость (или асимптотическую устойчивость) тривиального решения. Это дополнительное воздействие будем называть управлением и рассматривать систему вида



$$\dot{x} = f(x) + b(x)u, \quad (1.15)$$

здесь  $u$  – скалярная функция, определяющая управление,  $b(x)$  – заданный вектор, характеризующий влияние управления на каждую из компонент вектора  $x$ . Заметим, что здесь приведена не самая общая постановка задачи, например, совсем не обязательно, чтобы управление входило в правую часть системы линейным образом. В задаче стабилизации требуется найти управление в форме обратной связи

$$u = k(x) \quad (1.16)$$

такое, чтобы замкнутая этим управлением система, т.е. система вида

$$\dot{x} = f(x) + b(x)k(x) \quad (1.17)$$

имела асимптотически устойчивое тривиальное решение. Рассмотрим далее частный случай задачи стабилизации, а именно: стабилизация линейной управляемой системы

### 1.2.2. Стабилизация линейной управляемой системы

Рассмотрим линейную систему с управлением

$$\dot{x} = Ax + bu. \quad (1.18)$$

Требуется найти управление в форме обратной связи  $u = Kx$ , где  $K$  –  $(1 \times n)$  – матрица (вектор-строка), подлежащая в дальнейшем определению из условия асимптотической устойчивости тривиального решения замкнутой системы

$$\dot{x} = (A + bK)x. \quad (1.19)$$

Опишем далее метод решения этой задачи, основанный на использовании линейных матричных неравенств. Согласно разделу 1.1.5.3 для асимптотической устойчивости замкнутой системы (1.19) необходимо и достаточно существование решения системы неравенств вида (1.13). В данном случае эти неравенства записываются следующим образом

$$X > 0, (A + bK)^T X + X(A + bK) < 0. \quad (1.20)$$

Заметим, что в этих неравенствах фигурируют две неизвестные матрицы: матрица  $X$ , определяющая функцию Ляпунова и матрица  $K$ , определяющая обратную связь в законе управления. Для неравенств, представленных в виде (1.20) воспользоваться непосредственно алгоритмами и программами, ориентированными на *LMI* не удастся. Проведем некоторые преобразования в системе неравенств (1.20). Введем матрицу  $Y$ , которая является обратной к матрице  $X$ . Тогда рассматриваемые неравенства переписутся в виде

$$Y > 0, YA^T + YK^T b^T + AY + bKY < 0. \quad (1.21)$$

Наконец, введем еще одно обозначение

$$Z = KY. \quad (1.22)$$

Теперь неравенства (1.21) можно представить, как линейные матричные неравенства относительно уже двух неизвестных  $Y, Z$  :

$$Y > 0, YA^T + Z^T b^T + AY + bZ < 0. \quad (1.23)$$

Воспользовавшись известными программными средствами решения линейных матричных неравенств, найдем одно из возможных решений  $Y$  и  $Z$ , тогда искомая матрица обратной связи  $K$  определяется следующим образом:  $K = ZY^{-1}$ .

**Задание.** Решить задачу стабилизации линейной системы. В качестве системы рассматривается математическую модель перевернутого маятника, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u.$$

**Решение.**

Требуется выбрать управление  $u$ , обеспечивающее асимптотическую устойчивость неустойчивого в отсутствие управления состояния равновесия  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ .

Сначала преобразуем данное дифференциальное уравнение второго порядка к системе вида (1.18). С учетом замены переменных  $x_1 = \varphi, x_2 = \dot{\varphi}$  в данном случае будем иметь следующий вид матриц из (1.18):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С их использованием нужно записать и решить систему линейных матричных неравенств (1.23). •

Приведем одно из решений указанной системы, полученное с использованием пакета MatLab:

$$Y = \begin{pmatrix} 90.97 & -30.32 \\ -30.32 & 90.97 \end{pmatrix}, Z = (-181.95 \quad -15.16), K = (-2.31 \quad -0.94).$$

Таким образом, одно из возможных стабилизирующих управлений таково:

$$u = -2.31\varphi - 0.94\dot{\varphi}.$$

Подчеркнем еще раз, что это лишь одно из бесконечного множества стабилизирующих управлений.

Для рассматриваемого примера нетрудно указать все множество стабилизирующих управлений. Действительно, пусть управление  $u = -a\varphi - b\dot{\varphi}$ , тогда система, замкнутая этим управлением, имеет вид

$$\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + (a - 1)\varphi = 0.$$

Построим соответствующий этому уравнению характеристический полином

$$\lambda^2 + b\lambda + (a - 1) = 0.$$

Простой анализ показывает, что этот полином устойчив тогда и только тогда, когда

$$b > 0, a > 1.$$

Последние неравенства и определяют всё множество стабилизирующих управлений вида  $u = -a\varphi - b\dot{\varphi}$  для перевернутого маятника.

### 1.2.3. Модальное управление

Довольно часто в задачах управления из всего обширного множества стабилизирующих управлений требуется выделить некоторое подмножество управлений, обеспечивающих для системы дополнительные свойства. Таковым свойством может быть, например, расположение корней характеристического многочлена замкнутой системы в заданной области комплексной плоскости. Управление, обладающее такими дополнительными свойствами, называют модальным управлением. Если в этой постановке задачи пойти несколько дальше, то возникает следующая задача: выбором управления обеспечить точное совпадение корней характеристического уравнения замкнутой системы с наперед заданным набором комплексных чисел, расположенных в левой части комплексной плоскости. Такую задачу будем называть *прямой задачей модального управления*.

Опишем далее методы решения этой прямой задачи и некоторых других задач модального регулирования, в которых требование точного размещения корней в левой комплексной полуплоскости уже не накладывается, а требуется лишь их принадлежность ее заданной подобласти.

#### 1.2.3.1. Прямая задача модального управления

Рассмотрим опять линейную систему с управлением

$$\dot{x} = Ax + bu. \quad (1.24)$$

Оказывается, что при выполнении определенных алгебраических условий для  $A, b$  (условия управляемости пары  $(A, b)$ , см. например, [1,8]) существует специальное преобразование  $P$  переменных системы ( $x = Py$ ) такое, что в новых переменных  $y$  система приобретает вид

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{b}u, \quad (1.25)$$

где матрица  $\tilde{A}$  и вектор  $\tilde{b}$  таковы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

где  $a_i$  – коэффициенты характеристического многочлена, отвечающего исходной матрице  $A$

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Данное представление системы называется каноническим представлением управляемой системы в форме Фробениуса. Теперь для системы (1.25) требуется построить управление в форме обратной связи такое, что замкнутая этим управлением система имеет заданный характеристический многочлен

$$\tilde{P}_n(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Покажем далее, как следует в этом случае выбрать матрицу обратной связи  $\tilde{K}$ . Зададим элементы матрицы обратной связи (в данном случае это вектор-строка) следующим образом

$$\tilde{k}_{i+1} = -c_i + a_i, \quad i = 0, 2, \dots, n-1.$$

Непосредственная проверка показывает, что  $\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K}$  – следующее выражение:

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times (\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Наконец, чтобы определить матрицу обратной связи исходной системы требуется вернуться к исходным переменным применив обратное преобразование  $P^{-1}$ . Тогда матрица  $K$  обратной связи для системы (1.24) определяется согласно формуле  $K = \tilde{K}P^{-1}$ .

### 1.2.3.2. Применение метода $D$ -разбиения к построению модального управления

В разделе 1.1.5.2 уже был сформулирован принцип построения областей в пространстве варьируемых параметров линейной системы, отвечающих расположению корней характеристического уравнения в левой комплексной полуплоскости.

Для применения метода  $D$ -разбиения к построению модального управления достаточно, во-первых, считать такими варьируемыми параметрами элементы матрицы обратной связи в законе управления. Во-вторых, вместо левой полуплоскости нужно использовать область требуемого размещения

корней. Для границы этой области следует использовать специальную параметризацию  $\lambda = \lambda(\omega)$ . Применение метода  $D$ -разбиения в этом варианте подробно рассмотрено в разделе 3 данного учебно-методического пособия применительно к синтезу модального управления линейной системой 4-го порядка.

### 1.2.3.3. Синтез модального управления с использованием $LMI$

Еще один полезный способ решения задач модального управления связан с применением квадратичных функций Ляпунова и техники линейных матричных неравенств. Покажем сначала, как решается задача синтеза управления, обеспечивающего расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы на комплексной плоскости строго левее некоторой вертикальной линии, отстоящей левее мнимой оси на расстоянии  $\beta$ . По-существу, данное дополнительное условие означает, что абсолютная величина действительной части корня характеристического уравнения не меньше заданной величины  $\beta$ . Выберем функцию Ляпунова, как и прежде, в виде квадратичной формы  $V = x^T X x$ , а условие отрицательности производной функции Ляпунова несколько усилим:

$$\dot{V} = x^T [(A + bK)^T X + X(A + bK)]x < -2\beta x^T X x. \quad (1.27)$$

Некоторые подробности вывода этого неравенства можно найти в [5]. Применяя далее технику, описанную в разделе 1.2.2, приходим к системе линейных матричных неравенств

$$Y > 0, YA^T + Z^T b^T + AY + bZ + 2\beta Y < 0. \quad (1.28)$$

Разрешив эту систему относительно неизвестных матриц  $Y$  и  $Z$ , найдем матрицу обратной связи по формуле  $K = ZY^{-1}$ .

Рассмотрим теперь общий подход к синтезу модального управления, основанный на использовании  $LMI$ . Оказывается, что области определенного вида на комплексной плоскости  $z$ , в которых требуется разместить собственные значения матрицы замкнутой линейной системы можно описать на языке линейных матричных неравенств, относительно переменных  $x = \operatorname{Re}(z)$  и  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Такие области называют  $LMI$ -областями.

Пусть  $G$  – некоторая область левой комплексной полуплоскости. Линейную систему

$$\dot{x} = Ax$$

будем называть  $G$ -устойчивой, если все собственные значения матрицы  $A$ , лежат в области  $G$ . В этом случае матрицу  $A$  так же будем называть  $G$ -устойчивой.

В частном случае, когда  $G$  совпадает со всей левой комплексной полуплоскостью,  $G$ -устойчивость сводится к асимптотической устойчивости. Левая полуплоскость, очевидно, является  $LMI$ -областью. Выше уже говорилось о том, что существует критерий асимптотической устойчивости системы с матрицей  $A$  в виде требования разрешимости относительно симметрической положительно определенной матрицы  $X$  неравенства Ляпунова, являющимся линейным матричным неравенством:

$$AX + XA^T < 0, X > 0. \quad (1.29)$$

В общем случае для  $LMI$ -областей существует формальная процедура получения линейных матричных неравенств, подобных (1.29), определяющих критерии размещения всех собственных чисел матрицы  $A$  в требуемой  $LMI$ -области. Решения линейных матричных неравенств могут быть получены численно с использованием функций системы MatLab.

Для достаточно общего случая разработан простой аппарат получения линейных матричных неравенств, определяющих критерий  $G$ -устойчивости.

Введем функцию комплексного переменного  $f(z)$  специального вида, принимающую значения в пространстве эрмитовых ( $m \times m$ ) матриц:

$$f(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T, \alpha = \alpha^T \in R^{m \times m}, \beta \in R^{m \times m}. \quad (1.30)$$

Очевидно, что область  $G = \{z \in C : f(z) < 0\}$  может быть описана линейными матричными неравенствами относительно переменных  $x = \text{Re}(z)$  и  $y = \text{Im}(z)$ , т.е. является  $LMI$ -областью. Для области с таким описанием построение системы линейных матричных неравенств, определяющих критерий  $G$ -устойчивости, сводится к выполнению следующего алгоритма.

**Алгоритм** получения системы линейных матричных неравенств.

1. Используя подстановку

$$(1, z, \bar{z}) \leftrightarrow (X, AX, XA^T), \quad (1.31)$$

поставим в соответствие функции  $f(x)$  блочную матрицу ( $m \times m$ ) вида:

$$M(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T, \quad (1.32)$$

где  $\otimes$  - произведение Кронекера. Блоки матрицы можно записать в виде:

$$M_{ij}(A, X) = \alpha_{ij}X + \beta_{ij}AX + \beta_{ji}XA^T, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (1.33)$$

2. Записать систему вида:

$$M(A, X) < 0, X > 0, \quad (1.34)$$

где  $X$  - симметрическая матрица.

**Утверждение 1.1.** Матрица  $A$  является  $G$ -устойчивой тогда и только тогда, когда существует симметрическая матрица  $X$ , являющаяся решением системы (1.14).

**Важное свойство:**  $LMI$ -области замкнуты относительно операции пересечения, т.е. пересечение  $LMI$ -областей –  $LMI$ -область.

Функция  $f$ , порождающая результирующую область  $D$ , записывается в блочном виде

$$f = \text{diag}(f_1; f_2) \quad (1.35)$$

через функции  $f_1$  и  $f_2$  исходных областей  $G_1$  и  $G_2$ . Следовательно,

$$M(A, X) = \text{diag}(M_1(A, X); M_2(A, X)). \quad (1.36)$$

**Вывод.** Матрица  $A$  является  $G$ -устойчивой для  $G = G_1 \cap G_2$  тогда и только тогда, когда существует симметрическая матрица  $X = X^T > 0$ , являющаяся решением системы

$$M_1(A, X) < 0, M_2(A, X) < 0.$$

Рассмотрим несколько примеров элементарных  $LMI$ -областей

1.  $G_1 = \{z : \text{Re } z < -\mu\}$  (по существу, этот пример был уже рассмотрен выше с использованием подходящей функции Ляпунова).

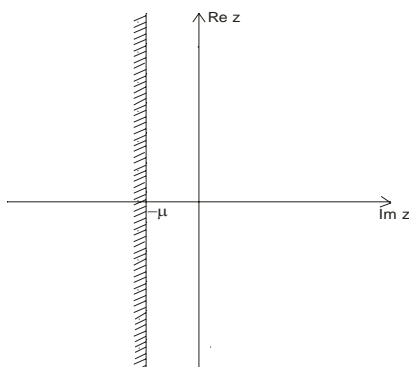


Рис. 1.3. Область  $G_1$

Эту область определяет функция

$$f_1(z) = z + \bar{z} + 2\mu, \quad (1.37)$$

здесь  $m = 1$ . Критерий  $G_1$ -устойчивости примет вид:

$$AX + XA^T + 2\mu X < 0, X > 0. \quad (1.38)$$

2.  $G_2 = \{z : \text{Re } z \cdot \text{tg } \varphi < -|\text{Im } z|\}$ .

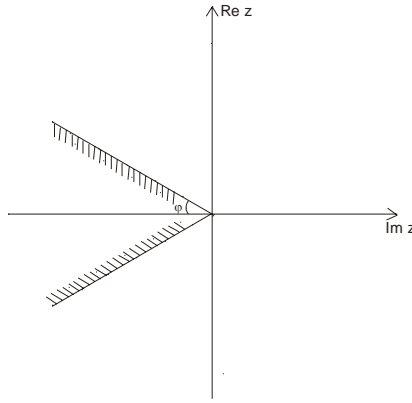


Рис. 1.4. Область  $G_2$

Эту область определяет функция

$$f_2(z) = \begin{pmatrix} (z + \bar{z}) \sin \phi & (z - \bar{z}) \cos \phi \\ -(z - \bar{z}) \cos \phi & (z + \bar{z}) \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Критерий  $G_2$ -устойчивости примет вид:

$$\begin{pmatrix} (AX + XA^T) \sin \phi & (AX - XA^T) \cos \phi \\ -(AX - XA^T) \cos \phi & (AX + XA^T) \sin \phi \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (1.40)$$

Покажем теперь, как синтезируется управление, обеспечивающее  $G_2$ -устойчивость. Обратимся опять к линейной системе с управлением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.41)$$

где управление ищется в виде

$$u = Kx. \quad (1.42)$$

Задача состоит в определении матрицы  $K$  из условия существования матрицы  $X = X^T > 0$ , удовлетворяющей неравенству:

$$M(A + bK, X) < 0,$$

которое не является линейным относительно пары  $(K; X)$ . Обозначая  $Z = K \cdot X$ , представим последнее неравенство, как линейное матричное неравенство относительно неизвестных матриц  $X$  и  $Z$ :

$$M(A, X) + \beta \otimes bZ + \beta^T \otimes Z^T b^T < 0. \quad (1.43)$$

После того, как эти матрицы будут найдены, искомая матрица параметров регулятора находится как

$$K = Z \cdot X^{-1}. \quad (1.44)$$

Более подробное изложение применения  $LMI$  к синтезу модального управления можно найти в учебном пособии [5].



## 1.3. Оптимальность

### 1.3.1. Идея оптимальности в задачах управления

В предыдущих разделах обсуждались задачи управления, в результате решения которых получалось целое множество управлений, обеспечивающих достижение поставленной цели. Около 60 лет тому назад специалисты в области теории управления и ее применения к различным техническим системам (в то время это были в основном ракетно-космические системы) стали предпринимать попытки значительно улучшить качество управления. Так возникли новые содержательные постановки задач оптимального управления. В этих задачах нашли свое новое применение классическое вариационное исчисление и теория экстремума функций многих переменных.

В качестве одного из примеров рассмотрим далее задачу оптимальной стабилизации. Рассмотрим систему с управлением вида (1.15)

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u. \quad (1.45)$$

При синтезе управления дополнительно к задаче обеспечения асимптотической устойчивости тривиального решения системы, замкнутой управлением  $u = k(x)$ , потребуем, чтобы управление также минимизировало некоторую величину, характеризующую качество переходных процессов, называемую далее функционалом и выражаемую, например, в виде

$$J = \int_0^{\infty} F(x, u) dt. \quad (1.46)$$

Указанный функционал может характеризовать, например, расход ракетного топлива при полете ракеты, либо какие-то другие важные величины, «запас» которых весьма ограничен. Некоторые методы решения подобных задач, а также иные их постановки описаны, в частности в учебном пособии [3], а также [9]. Мы в дальнейшем ограничимся кратким рассмотрением задачи оптимальной стабилизации для линейной системы с управлением и функционалом, в котором подынтегральная функция выражается в виде квадратичной формы переменных  $x$  и  $u$ . В научной и учебной литературе эта задача получила название задачи о линейно-квадратичном регуляторе.

### 1.3.2. Синтез линейно-квадратичного регулятора

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + bu. \quad (1.47)$$

Требуется найти линейную обратную связь вида  $u = Kx$  (фактически требуется найти матрицу  $K$ ), обеспечивающую минимизацию вдоль любой траектории системы критерия качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + Ru^2) dt. \quad (1.48)$$

Здесь  $Q$  – заданная неотрицательно определенная  $n \times n$  – матрица, а  $R$  – заданное фиксированное положительное число. Покажем далее, как строится решение этой задачи с использованием метода динамического программирования Р.Беллмана. Будем считать, что в произвольный момент времени  $t$  система (1.47) имеет состояние  $x$ . Введем функцию Беллмана  $S(x)$ , определяемую следующим образом

$$S(x) = \min_u \int_t^{\infty} (x^T Qx + Ru^2) dt. \quad (1.49)$$

Эта функция определяет минимальное значение функционала для системы (1.48), находящейся в момент времени  $t$  в состоянии  $x$ . Известно [3, 9], что функция Беллмана удовлетворяет так называемому функциональному уравнению Беллмана:

$$\min_u \left[ x^T Qx + Ru^2 + (\text{grad } S)^T (Ax + bu) \right] = 0. \quad (1.50)$$

Запишем необходимое условие минимума по  $u$  в форме равенства нулю градиента по этой переменной от выражения в квадратных скобках. В результате получим уравнение:

$$2Ru + b^T \text{grad } S = 0. \quad (1.51)$$

Выразив отсюда  $u$ , получим

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} b^T \text{grad } S. \quad (1.52)$$

Подставив (1.52) в уравнение (1.50), после приведения подобных получим

$$x^T Qx - \frac{1}{4} (\text{grad } S)^T b R^{-1} b^T \text{grad } S + (\text{grad } S)^T Ax = 0. \quad (1.53)$$

Уравнение (1.53) представляет собой уравнение в частных производных относительно неизвестной функции Беллмана  $S(x)$ . Решение этого уравнения будем искать в виде положительно определённой квадратичной формы, определяемой симметрической матрицей  $P$ :

$$S(x) = x^T Px.$$

Вычисляя далее градиент, получим

$$\text{grad } S = 2Px.$$

Подставляя последнее выражение в (1.53) и учитывая симметричность матрицы  $P$ , получим

$$x^T Qx - x^T P b R^{-1} b^T P x + x^T P A x + x^T A^T P x = 0.$$

Левую часть последнего равенства можно также записать в виде квадратичной формы:

$$x^T [Q - PbR^{-1}b^T P + PA + A^T P]x = 0. \quad (1.54)$$

Таким образом, квадратичная форма (1.54) обращается в нуль для произвольного вектора  $x$ . Очевидно, что это возможно лишь в том случае, если матрица, определяющая эту квадратичную форму является нулевой, т.е.

$$A^T P + PA + Q - PbR^{-1}b^T P = 0. \quad (1.55)$$

С другой стороны, если существует неотрицательно определенная симметрическая матрица  $P$ , являющаяся решением матричного уравнения (1.55), то существует и соответствующее решение уравнения Беллмана (1.50). Заметим, что уравнение (1.55) называется *матричным уравнением Риккати*. Итак, если указанное выше решение (1.55) существует, то искомое оптимальное управление имеет следующий вид

$$u = -R^{-1}b^T P x. \quad (1.56)$$

Оптимальное значение функционала зависит от начального состояния  $x_0$  системы и задается выражением

$$J_{opt} = S(x_0) = x_0^T P x_0. \quad (1.57)$$

В заключение подчеркнем еще раз нетривиальность и красоту данного результата: управление вида (1.56) (заметьте, что матрица обратной связи  $K = -R^{-1}b^T P$  является матрицей с постоянными элементами) обеспечивает оптимальный в смысле принятого функционала режим движения из любого начального состояния системы.

**Задание.** Для системы второго порядка, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = u.$$

Требуется построить управление в форме обратной связи вида  $u = -ax - b\dot{x}$ , минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + \dot{x}^2 + u^2) dt.$$

**Решение.**

Перейдем от дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

с функционалом

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt.$$

В данной задаче

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

Решение матричного уравнения Риккати (1.55) в этом случае имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

а искомое оптимальное управление

$$u = -x_1 - \sqrt{3}x_2. \quad \bullet$$

Заметим, что оптимальное линейно-квадратичное управление существенно зависит от подбора матриц  $Q$  и  $R$ . Выбирая различные матрицы, будем получать различные оптимальные управления. Имеющаяся свобода выбора позволяет ставить задачу о нахождении (за счет варьирования матриц  $Q$  и  $R$ ) среди множества «оптимальных», но неравноценных, управлений тех, которые обладают дополнительными требуемыми свойствами. Примеры использования такого подхода будут рассмотрены в разделе 4.

## 2. Управление перевернутым маятником и подъемное управление

Изучение примеров динамических систем, требующих синтеза законов управления по принципу обратной связи целесообразно начать с простой, хорошо знакомой системы. Перевернутый маятник – это классический пример, используемый для изучения управляемых динамических систем. Для описания движений маятника используются уравнения Лагранжа. Рассмотрены две задачи управления:

1. проектирование регулятора, стабилизирующего неустойчивое верхнее положение при соблюдении дополнительных требований на скорость затухания переходных процессов;
2. проектирование подъемного управления, переводящего маятник в окрестность перевернутого положения.

В качестве управляющего воздействия, для упрощения, выберем величину горизонтального ускорения точки подвеса. Если маятник вручную приведён в верхнее положение, стабилизирующий регулятор должен создавать такое ускорение точки подвеса, при котором маятник будет оставаться в этом положении, а при небольших отклонениях – возвращаться в него, хотя бы в пределе. Для реализации такого управления будут использованы различные методики.

Подъемный регулятор за счет специальной стратегии раскачивания должен переводить маятник из исходного состояния, когда он висит перевернутым вниз, в окрестность верхнего положения. Затем может быть использован стабилизирующий регулятор для выведения и поддержания маятника в верхнем положении. Подъемный регулятор проектируется на основе построенной математической модели маятника с использованием функции Ляпунова.

Функции Ляпунова часто используются в теории управления для решения задач стабилизации, для данного примера они будут применены для построения нелинейного подъемного управления.

### 2.1. Построение математической модели

Составим математическую модель, описывающую движения маятника, показанного на рис. 2.1, в плоскости  $x_0, y_0$  (обозначения приведены в табл. 2.1). Будем предполагать, что дополнительный вращающий момент на оси маятника возникает за счет управляющего воздействия  $u(t)$ , в качестве которого выберем величину горизонтального ускорения точки подвеса. В этом пособии мы не будем обсуждать вопрос о том, как технически реализовать такое управление

Начало координат системы  $x_0, y_0$  свяжем с точкой подвеса. Эта система будет перемещаться с ускорением  $u(t)$ , т.е. будет неинерциальной системой

координат. Примем, что в начальный момент времени ее положение совпадает с положением неподвижной системы  $x, y$ . Для получения нелинейных уравнений маятника используем метод Лагранжа. В первую очередь определим кинематику, потенциальную и кинетическую энергии. Затем запишем сами уравнения движения, учитывая наличие сил инерции в неинерциальной системе координат, порождаемых управлением.

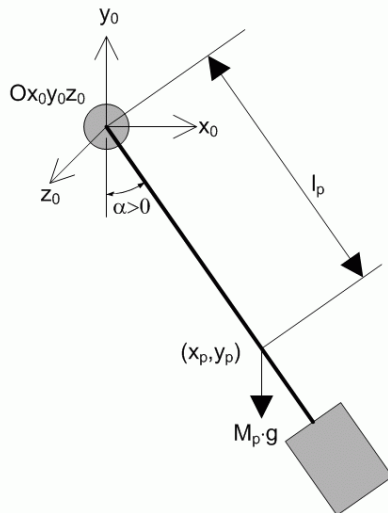


Рис. 2.1. Рассматриваемая система маятника

Табл. 2.1.

Основные обозначения

Обозначение	Описание	Значение	Си
$M_p$	Общая масса маятника (собственная масса в совокупности с соединениями)	0.027	кг
$l_p$	Расстояние от центра масс маятника до оси вращения на верхнем конце стержня	0.153	м
$L_p$	Общая длина маятника	0.191	м
$g$	Гравитационная постоянная	9.810	м/с <sup>2</sup>
$J_p$	Момент инерции маятника относительно оси вращения на верхнем конце стержня	$1.10 \cdot 10^{-4}$	кг/м <sup>2</sup>
$B_p$	Коэффициент вязкого трения маятника по $\dot{\alpha}$	0.000	Н*м/(рад/с)

### 2.1.1. Упражнение: кинематика

Маятник на рис.2.1 может поворачиваться вокруг оси  $Oz_0$ . Угол  $\alpha$  считается положительным, когда маятник двигается против часовой стрелки. В дальнейшем считаем  $\alpha = 0$ , когда маятник находится в нижнем вертикальном положении.

**Задание.** Необходимо определить кинематику движения центра масс маятника относительно системы координат  $O_0x_0y_0$ , которая показана на рис. 2.1. Точнее необходимо выразить положение центра масс маятника  $x_p$  и  $y_p$ , а также скорость движения его центра масс  $\dot{x}_p$  и  $\dot{y}_p$  в системе  $O_0x_0y_0$ , если он отклонился на угол  $\alpha$ .

**Решение.**

Положение центра масс в координатной системе  $O_0x_0y_0z_0$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} x_p &= l_p \sin(\alpha(t)) \\ y_p &= -l_p \cos(\alpha(t)) \end{aligned} \quad (2.s1)$$

а компоненты скорости в этой системе вычисляются в результате дифференцирования по времени этих соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l_p \cos(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) \\ \dot{y} &= l_p \sin(\alpha(t))\dot{\alpha}(t). \quad \bullet \end{aligned} \quad (2.s2)$$

### 2.1.2. Упражнение: потенциальная энергия

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести зависит от величины вертикального смещения центра масс. Потенциальную энергию примем равной нулю, когда маятник находится в вертикальном нижнем положении, т. е. при  $\alpha = 0$ . Она должна достигать своего максимального значения, когда маятник находится в вертикальном верхнем положении.

**Задание.** Необходимо получить общее выражение потенциальной энергии  $V(\alpha)$  для системы вращающегося маятника.

**Решение.**

Потенциальная энергия силы тяжести зависит от вертикального смещения положения центра масс. Таким образом, используя выражение  $y_p$  из (2.s1), выразим общую потенциальную энергию системы следующим образом:

$$V(\alpha) = M_p g l_p (1 - \cos(\alpha(t))) \quad (2.s3)$$

потенциальная энергия равна нулю, когда маятник находится в нижнем вертикальном положении,  $V(0) = 0$  Дж, и принимает максимальное значение, когда маятник переходит в верхнее вертикальное положение  $V(\pi) = 2M_p g l_p$ . •

### 2.1.3. Упражнение: кинетическая энергия

**Задание** предполагает получение формулы для вычисления кинетической энергии маятника. Поскольку нас будет интересовать лишь угол отклонения

маятника, то уравнения движения будем записывать в неинерциальной системе координат, перемещающейся вместе с точкой его подвеса. В этом случае кинетическая энергия – это только кинетическая энергия вращения.

**Решение.**

Общая кинетическая энергия может быть записана в виде формулы:

$$T = J_p \dot{\alpha}^2(t) / 2 \quad (2.s4)$$

где  $J_p$  — это момент инерции маятника относительно точки подвеса. •

**2.1.4. Упражнение: функция Лагранжа**

Функция Лагранжа для маятника выглядит следующим образом:

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = T - V \quad (2.9)$$

где  $T$  – общая кинетическая энергия, вычисленная в упражнении 2.1.3, и  $V$  – это общая потенциальная энергия системы, полученная в упражнении 2.1.2.

**Решение.**

Функция Лагранжа выглядит следующим образом:

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = J_p \dot{\alpha}^2 / 2 - M_p g \cdot l_p (1 - \cos(\alpha)). \quad \bullet \quad (2.s5)$$

**2.1.5. Упражнение: момент сил инерции**

Положение маятник описано в неинерциальной системе координат, движущейся с ускорением  $u(t)$ . Поэтому на его цент масс будет действовать направленная по горизонтали сила инерции, равная произведению общей массы маятника на ускорение системы, взятое с обратным знаком:  $(-u(t))$ . Эта сила создаст вращающий момент  $\tau_{pend}$  на оси вращения маятника.

**Задание.** Необходимо вычислить величину вращающего момента сил инерции, действующих на маятник.

**Решение.**

Поскольку движения маятника описаны в системе координат, перемещающейся с ускорением, на его цент масс будет действовать сила инерции

$$f(t) = -M_p u(t), \quad (2.s6)$$

направленная вдоль оси  $x_0$ . Расстояние от линии действия силы до оси вращения равно  $l_p \cdot \cos(\alpha)$ , поэтому величина момента сил инерции, приложенного к оси вращения маятника, с учетом выбора положительного направления изменения угла  $\alpha$ , примет вид:

$$\tau_{pend} = -M_p u(t) \cdot l_p \cos(\alpha). \quad \bullet \quad (2.s7)$$



### 2.1.6. Упражнение: уравнения движения Эйлера-Лагранжа

Общий вид уравнений движения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial q_i} L \right) = Q_i \quad i=1 \dots n \quad (2.10)$$

где  $n$  – число степеней свободы, а  $q_i$  – обобщенные координаты и  $Q_i$  – обобщенные силы, которые определяются как коэффициенты при виртуальных перемещениях в выражении для работы активных сил на этих перемещениях.

Для единственной обобщённой координаты маятника  $q_1(t) = \alpha(t)$  обобщённая сила выражается следующим образом:

$$Q_1 = \tau_{pend} - B_p \cdot \dot{\alpha}(t), \quad (2.11)$$

где  $\tau_{pend}$  – вращательный момент сил инерции, прикладываемый к оси вращения маятника. Выражение для обобщённой силы, представленное выше, может быть заменено просто на  $\tau_{pend}$ , если коэффициент вязкого трения маятника  $B_p$  становится незначительным.

Нелинейные уравнения движения маятника получаются при подстановке функции Лагранжа, вычисленной в упражнении 2.1.4, в общее уравнение Эйлера – Лагранжа (10). Окончательное уравнение может быть записано в следующей форме:

$$F(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \tau_{pend}(u(t)), \quad (2.12)$$

где  $F$  представляет собой функцию, зависящую от углового положения  $\alpha$  и углового ускорения маятника.

**Задание.** Выполнить вывод уравнения.

**Решение.**

Для получения уравнения Эйлера – Лагранжа необходимо найти выражения для двух производных:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L = -M_p g l_p \sin(\alpha) \quad (2.s8)$$

и

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} L \right) = J_p \ddot{\alpha}(t). \quad (2.s9)$$

Таким образом, нелинейное уравнение движения маятника имеет следующий вид:

$$J_p \ddot{\alpha} + B_p \dot{\alpha} + M_p g \cdot l_p \sin(\alpha) = -u(t) \cdot M_p l_p \cos(\alpha). \quad \bullet \quad (2.s10)$$

### 2.1.7. Упражнение: изменение уравнений динамики

При изучении движений маятника вокруг его верхнего вертикального положения, уравнения динамики удобно записать относительно новой переменной  $\alpha_{up}$  – угла отклонения от вертикали, как это показано на рис. 2.2. Для этого нужно выполнить замену переменной:

$$\alpha = \pi + \alpha_{up} . \quad (2.13)$$

Требуется переписать нелинейные уравнения движения маятника, найденные в упражнении 2.1.6, по отношению к переменной  $\alpha_{up}$ . Кроме того, примем, что в уравнениях можно пренебречь моментом силы вязкого трения на оси вращения маятника, в силу его относительной малости, приняв  $B_p = 0$ .

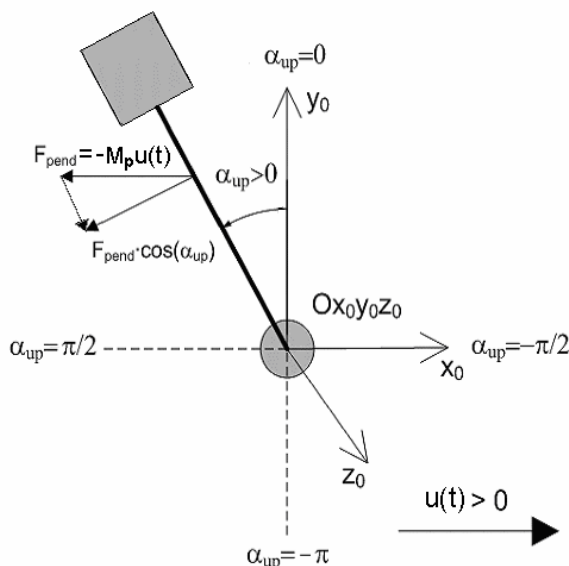


Рис. 2.2. Введение новой точки отсчета угла отклонения – от верхнего положения

**Задание.** Записать уравнение движения в отклонениях от верхнего вертикального положения.

**Решение.**

Выполним замену переменной, используя тригонометрические тождества. Также, положим  $B_p = 0$ . Получим уравнение движения маятника по отношению к переменной  $\alpha_{up}$ :

$$J_p \cdot \ddot{\alpha}_{up} - M_p g l_p \sin(\alpha_{up}) = \tau_{pend}(\alpha_{up}, u(t)), \quad (2.s11)$$

где, в силу выбора положительного направления изменения угла и точки его отсчета,

$$\tau_{pend}(\alpha_{up}, u(t)) = u(t) \cdot M_p l_p \cdot \cos(\alpha_{up}). \quad \bullet \quad (2.s12)$$

## 2.2. Построение стабилизирующего регулятора

По отношению к переменной  $\alpha_{up}$ , описывающей отклонение маятника от верхнего вертикального положения, уравнение движения, согласно (2.s11)-(2.s12) имеет вид:

$$J_p \cdot \ddot{\alpha}_{up} - M_p g l_p \sin(\alpha_{up}) = u(t) \cdot M_p l_p \cdot \cos(\alpha_{up}), \quad (2.14)$$

В отсутствие управления, т.е. при  $u(t) = 0$  решение уравнения (2.14)  $\alpha_{up} = 0$  является неустойчивым. В этом нетрудно убедиться, если провести линеаризацию системы в окрестности рассматриваемого решения и записать соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$J_p \cdot \ddot{\alpha}_{up} - M_p g l_p \alpha_{up} = 0. \quad (2.15)$$

Характеристическое уравнение, отвечающее этому линейному уравнению  $J_p \lambda^2 - M_p g l_p = 0$ , имеет два действительных корня, один из которых положительный, а другой – отрицательный. Следовательно, по теореме 1.4 исследуемое решение является неустойчивым.

### 2.2.1. Замкнутая система: объект – регулятор

Сформируем управление в форме обратной связи  $u(t) = -c_1 \alpha_{up} - c_2 \dot{\alpha}_{up}$ , которое обеспечивало бы стабилизацию маятника в верхнем положении. В дальнейшем удобно перейти к новым (безразмерным) переменным и параметрам по формулам

$$t = \tau T, \quad T = \left( \frac{J_p}{M_p g l_p} \right)^{1/2}, \quad k_1 = \frac{c_1 T^2}{J_p} M_p l_p, \quad k_2 = \frac{c_2 T}{J_p} M_p l_p. \quad (2.16)$$

Здесь  $\tau$  безразмерное время. Обозначая по-прежнему точкой производную по безразмерному времени, запишем уравнения (2.14) в новых переменных

$$\ddot{\alpha}_{up} - \sin(\alpha_{up}) = -(k_1 \alpha_{up} + k_2 \dot{\alpha}_{up}) \cos(\alpha_{up}). \quad (2.17)$$

### 2.2.2. Состояние равновесия замкнутой системы и линеаризованные уравнения

Рассмотрим решение  $\alpha_{up} = 0$  уравнения (2.17) и проведем его линеаризацию в окрестности этого решения. Опуская простейшие выкладки, приведем окончательный вид линеаризованного уравнения

$$\ddot{\alpha}_{up} + k_2 \dot{\alpha}_{up} + (k_1 - 1) \alpha_{up} = 0.$$

Представим это уравнение второго порядка в эквивалентной форме двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(k_1 - 1)x_1 - k_2x_2 = 0, \quad (2.18)$$

где  $x_1 = \alpha_{up}$ ,  $x_2 = \dot{\alpha}_{up}$ .

### 2.2.3. Упражнение: построение стабилизирующего управления с порядком затухания переходных процессов не ниже заданного значения

**Задание.** Найти параметры  $k_1, k_2$  обратной связи в системе (2.18), обеспечивающие положение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости строго левее вертикальной линии, отстоящей левее мнимой оси на расстоянии, равном  $\beta$ . Другими словами, требуется построить стабилизирующее управление с порядком затухания переходных процессов не хуже, чем у функции  $e^{-\beta \cdot \tau}$ , зависящей от заданного значения  $\beta$ .

#### **Решение.**

Для решения этой задачи можно было бы воспользоваться методами, описанными в разделе 1.2.4. Однако, в данном случае гораздо проще решить задачу, непосредственно используя выражение для характеристического уравнения замкнутой системы

$$\lambda^2 + k_2\lambda + (k_1 - 1) = 0 \quad (2.s13)$$

и его корней, которые имеют следующий вид

$$\lambda_1 = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4(k_1 - 1)}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4(k_1 - 1)}}{2}. \quad (2.s14)$$

Условия для параметров обратной связи, обеспечивающих асимптотическую устойчивость системы, т.е. условия расположения корней характеристического многочлена строго левее мнимой оси комплексной плоскости имеют вид

$$k_1 > 1, \quad k_2 > 0. \quad (2.s15)$$

Условия расположения корней (2.s14) строго левее вертикальной прямой, отстоящей левее от мнимой оси на расстоянии, равном  $\beta$ , состоят в том, что  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < -\beta$ . Они могут быть легко получены для случая, когда корни (2.s14) являются комплексно-сопряженными. В этом случае, очевидно,  $k_2^2 < 4(k_1 - 1)$  и  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -k_2/2$ . Таким образом, получаем следующие неравенства

$$k_1 > k_2^2/4 + 1, \quad k_2 > 2\beta. \quad (2.s16)$$

Заметим, что этими двумя неравенствами всё множество искомых параметров обратной связи, обладающей требуемыми свойствами, не описывается. Впрочем, задача нахождения всего множества параметров

обратной связи, обеспечивающих выполнение указанных требований, здесь и не ставилась.

## 2.3. Построение подъёмного регулятора

В отличие от стабилизирующего регулятора, подъёмный регулятор должен быть построен так, чтобы маятник автоматически раскачивался, и за счет этого обеспечивалось его попадание в определенную окрестность вертикального верхнего положения. Когда маятник первый раз окажется в этой окрестности, в действие вступит стабилизирующий регулятор, который будет приближать его к строго вертикальному положению. Структура системы, использующей подъёмное и стабилизирующее управление, замкнутая обратной связью по состоянию, изображена на рис. 2.3.

Подъёмный регулятор будет формировать величину горизонтального ускорения  $u(t)$  точки подвеса, которое необходимо создать, чтобы маятник за счет силы инерции оказался приведён в окрестность верхнего вертикального положения. Подъёмный регулятор будет строиться с использованием функции Ляпунова.

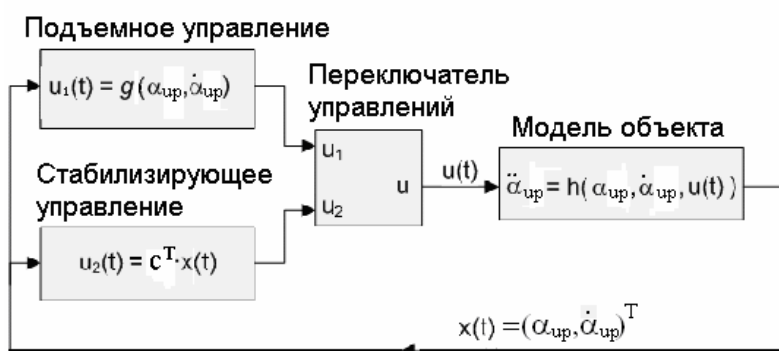


Рис. 2.3. Замкнутая система подъёма и стабилизации маятника

### 2.3.1. Упражнение: получение выражения полной механической энергии

При проектировании подъёмного регулятора будет использовано выражение полной механической энергии системы. Поскольку нас интересуют движения маятника вокруг верхнего вертикального положения, полную механическую энергию  $E$  системы удобно записать относительно новой переменной  $\alpha_{up}$  – угла отклонения от этого положения (рис. 2.2). Выражение для  $E$  следует записать в виде функции от угла  $\alpha_{up}$  и его производной по времени.

$$E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = T + V \quad (2.19)$$

При этом удобно выбрать новый нулевой уровень потенциальной энергии, так чтобы энергия маятника была равна нулю, когда он находится в верхнем состоянии равновесия,  $E(0,0)=0$  Дж, и была отрицательной в нижнем состоянии равновесия, а именно

$$E(-\pi,0) = -2M_p g l_p. \quad (2.20)$$

**Задание.** Получить выражение полной механической энергии.

**Решение.**

Изменим, по отношению к ранее выбранному, уровень отсчета значений потенциальной энергии, приняв нулевое значение в верхнем вертикальном положении маятника.

Выполним замену переменной (2.13) в выражении (2.s3) для потенциальной энергии, но при этом учтем изменения нулевого уровня отсчета для  $E$ .

Получим следующее выражение полной механической энергии:

$$E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = J_p \dot{\alpha}_{up}^2 / 2 - M_p g \cdot l_p (1 - \cos(\alpha_{up})). \quad (2.s17)$$

Выражение энергии обращается в ноль, когда маятник находится в верхнем положении равновесия, и принимает значение  $(-2M_p g l_p)$  — в нижнем.

•

### 2.3.2. Упражнение: принцип построения подъемного управления

Цель подъемного управления состоит в том, чтобы значения функции  $\alpha_{up}(t)$  попадали в окрестность нуля за конечное время. Обратите внимание, что мы не требуем обязательного одновременного приведения в ноль или в окрестность нуля угловой скорости  $\dot{\alpha}_{up}(t)$ , поскольку это — задача стабилизирующего управления. Назначение подъемного управления более скромно: в окрестность нуля должно попасть только значение угла отклонения от вертикали. Если при этом регулятор не переключится на стратегию стабилизирующего управления, угол  $\alpha_{up}(t)$  может вновь покинуть данную окрестность. Такое поведение допускается, и вполне будет отвечать поставленной задаче.

Вместе с тем понятно, что если при  $\alpha_{up}(t) \rightarrow 0$  будет дополнительно выполняться  $\dot{\alpha}_{up}(t) \rightarrow 0$ , то это лишь улучшит качество подъемного управления, поскольку при малой начальной скорости ухода от вертикального положения его будет проще стабилизировать.

Сейчас сделаем важное для дальнейшего замечание. Вместо того чтобы иметь дело непосредственно с приведением к нулю угла  $\alpha_{up}(t)$ , регулятор будем конструировать из соображений приведения к нулю полной механической энергии (2.19) маятника, т.к. в дальнейшем окажется, что этого

легко добиться. Идея следующая: если  $\alpha_{up}(t) \rightarrow 0$  и  $\dot{\alpha}_{up}(t) \rightarrow 0$ , то в силу (2.19)  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \rightarrow 0$ . Поэтому можно попытаться спроектировать регулятор так, чтобы он обеспечивал  $E(t) = E(\alpha_{up}(t), \dot{\alpha}_{up}(t)) \rightarrow 0$ .

**Задание.** Необходимо проанализировать предложенную идею.

**Решение.**

Действительно, при одновременном стремлении к нулю угла отклонения маятника от вертикали, а также производной по времени от этого угла (т.е. угловой скорости маятника) полная механическая энергия  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \rightarrow 0$ .

Выполним обратные рассуждения. Пусть  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \rightarrow 0$ . Поскольку выражение для энергии (2.s17) является разностью двух неотрицательных элементов, то ее равенство нулю означает лишь, что эти элементы становятся равны друг другу. Это равенство порождает в фазовом пространстве  $\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}$  геометрическое место точек, лежащих на одномерном нелинейном многообразии вида:

$$J_p \dot{\alpha}_{up}^2 = 2M_p g \cdot l_p (1 - \cos(\alpha_{up})). \quad (2.s18)$$

Точка  $(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = (0,0)$  принадлежит этому многообразию, но не является единственной.

Таким образом, выполнение условия  $E(\alpha_{up}(t), \dot{\alpha}_{up}(t)) \rightarrow 0$  на первый взгляд означает лишь стремление фазовых траекторий системы к многообразию (2.s18) и не может гарантировать попадание  $\alpha_{up}$  в окрестность нуля. •

Верен ли этот вывод?

В действительности, приведенное выше решение является неполным, а полученный вывод – неверным. Требуется более подробный анализ. Допустим, фазовая точка  $(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$  попала на многообразие (2.s18). Что будет происходить с ней дальше?

Заметим, что равенство (2.s18) порождает две ветви этого многообразия при  $\alpha_{up} \neq 0$ : одну – с  $\dot{\alpha}_{up} > 0$  (назовем эту ветвь положительной), другую – с  $\dot{\alpha}_{up} < 0$  (назовем ее отрицательной). Эти ветви показаны на рис. 2.4. Условие  $E(\alpha_{up}(t), \dot{\alpha}_{up}(t)) \rightarrow 0$  означает стремление фазовой точки к многообразию, но оно не означает, что все ветви многообразия обладают устойчивостью. Какие-то обладают, а какие-то – могут не обладать.

Попав на устойчивую ветвь многообразия (2.s18), фазовая точка останется на ней и равенство (2.s18) будет выполняться не только для конкретного момента времени, а на некотором промежутке времени, т.е. превратится в дифференциальное уравнение, в силу которого фазовая точка  $(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$  начнет перемещаться по этому многообразию. Поскольку при  $\alpha_{up} = 0$  ветви

многообразия соприкасаются, то возможны переходы фазовой точки с одной ветви на другую.

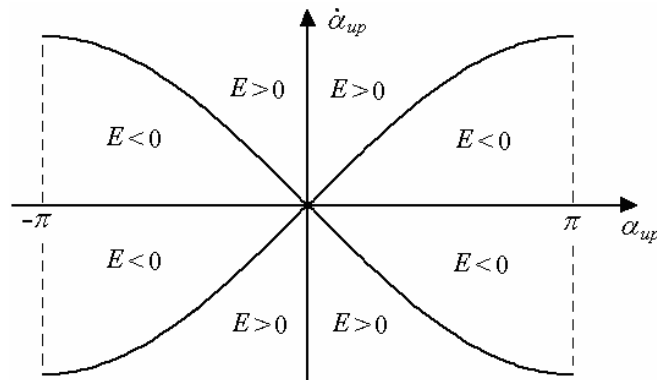


Рис. 2.4. Разбиение фазового пространства ветвями многообразия  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = 0$

Нужно проанализировать поведение решений дифференциального уравнения (2.s18). Если выяснится, что  $\alpha_{up}(t)$ , в силу этого уравнения, обязательно попадает в окрестность нуля, то принцип построения подъемного управления из условия  $E(\alpha_{up}(t), \dot{\alpha}_{up}(t)) \rightarrow 0$  может быть применен.

Теперь стало понятно, что нужно вначале исследовать уравнение (2.s18). Для этого необходимо вначале найти его состояния равновесия и исследовать их устойчивость. Возможно, что этого будет достаточно, чтобы сделать выводы о поведении  $\alpha_{up}(t)$ .

**Задание.** Выполнить предложенный анализ.

**Решение.**

Разрешив уравнение (2.s18) относительно производной, получим два варианта дифференциального уравнения:

$$\dot{\alpha}_{up} = \pm \sqrt{2M_p g \cdot l_p \cdot (1 - \cos(\alpha_{up}))} / J_p . \quad (2.s19)$$

Первое получается, если перед корнем выбрать знак «+», а второе, если «-». Однако, поскольку на плоскости  $(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$  положительная и отрицательная ветви многообразия (2.s18) соприкасаются в точке  $(0,0)$ , то в (2.s19) определено не два, а четыре дифференциальных уравнения за счет того, что при переходе через  $\alpha_{up} = 0$  в правой части можно изменять знаки перед корнем с «+» на «-» или наоборот.

Для определения состояний равновесия будем искать решения в виде  $\alpha_{up} = \alpha_{up}^* = const$ . Поскольку  $\alpha_{up} \in [-\pi, \pi]$ , то состояние равновесия единственное:  $\alpha_{up}^* = 0$ . Выясним его устойчивость. Рассмотрим значения  $\alpha_{up} \neq 0$ . Тогда при знаке «+» в (2.s19) всегда  $\dot{\alpha}_{up} > 0$ , следовательно,  $\alpha_{up}(t)$



возрастает. Если же принять знак «-», то всегда  $\dot{\alpha}_{up} < 0$ , следовательно,  $\alpha_{up}(t)$  убывает. Таким образом, в предположении устойчивости (в силу уравнения динамики (2.s11), (2.s12), дополненного подъемным управлением) всех четырех фрагментов  $a, b, c, d$  многообразия (2.s18), движения по ним будут происходить в направлениях, указанных на рис.2.5. Для возможности попадания в  $\alpha_{up} = 0$  должен обладать устойчивостью хотя бы один из фрагментов, входящих в  $(0,0)$ : фрагмент  $a$  или  $d$ .

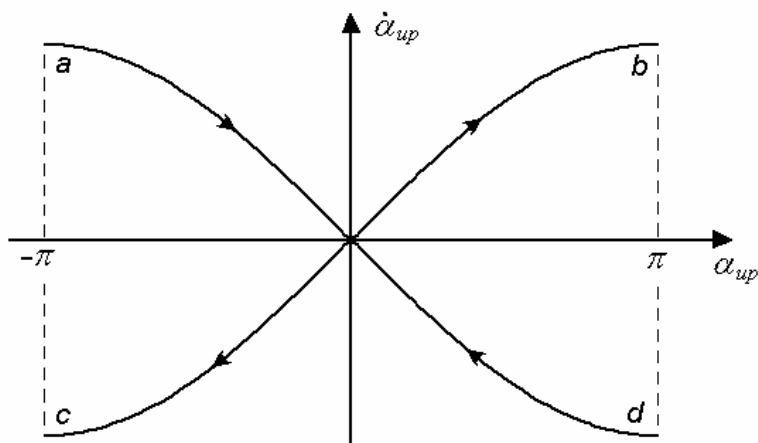


Рис. 2.5. Направления движения по четырем фрагментам многообразия  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = 0$  в случае устойчивости этих фрагментов

Будет ли один из них устойчив, зависит от конкретного вида подъемного управления. Таким образом, до его окончательного построения ответить на вопрос о поведении  $\alpha_{up}(t)$  невозможно. •

Дополнительный анализ, приведенный в последнем решении, является правильным и подтверждает возможность конструирования подъемного управления исходя из принципа обеспечения стремления к нулю полной механической энергии:  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \rightarrow 0$ . Однако, после построения этого управления необходимо дополнительно подтвердить устойчивость фрагментов многообразий  $a$  или  $d$  (рис. 2.5).

### 2.3.3. Упражнение: функция Ляпунова

Принятый принцип построения подъемного управления будем основывать на стремлении к нулю  $E$  – полной потенциальной энергии системы. Поэтому целесообразно использовать следующую функцию Ляпунова:

$$U(E) = \frac{1}{2} E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})^2, \quad (2.21)$$

где  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$  – это функция, полученная в разделе 2.3.1 (см. (2.s17)).

Согласно теореме Ляпунова (см. подраздел 1.1.2) равновесная точка  $E = 0$  устойчива по Ляпунову, если имеют место следующие условия:

$$U(0) = 0,$$

$U(E) > 0$  для всех значений энергии  $E \neq 0$ ,

$\frac{d}{dt}U(E) \leq 0$  для всех значений энергии  $E$ , где производная берется в силу уравнений.

Таким образом, при выполнении условий 1-2 равновесная точка  $E = 0$  устойчива по Ляпунову, если производная по времени от функции  $U(E)$  отрицательна или равна нулю при всех значениях  $E = E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$ . При отрицательности этой производной при всех  $E \neq 0$  будем иметь асимптотическую устойчивость.

При выполнении условий теоремы Ляпунова, за счет неотрицательности производной по времени от  $U(E)$ , значение функции  $U(E)$ , а значит и  $|E|$  не может увеличиваться, а при отрицательности этой производной – будет уменьшаться с течением времени.

Производная от функции Ляпунова вычисляется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}U(E) = E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cdot \frac{d}{dt}E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}), \quad (2.22)$$

что требует предварительного вычисления производной по времени от  $E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$  с выполнением соответствующих замен, вытекающих из уравнения движения (2.s11)- (2.s12). Это уравнение содержит в правой части значение  $u(t)$  – линейное ускорение точки подвеса, которое выполняет роль управления.

**Задание.** Вычислить производную по времени от функции Ляпунова в силу уравнения движения.

**Решение.**

Формула для вычисления производной по времени от выражения для энергии:

$$\frac{d}{dt}E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = (J_p \cdot \ddot{\alpha}_{up} - M_p g l_p \sin(\alpha_{up})) \cdot \dot{\alpha}_{up}. \quad (2.s20)$$

Сравнивая результат с левой частью нелинейного уравнения (2.s11)-(2.s12), получим:

$$\frac{d}{dt}E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = M_p u(t) l_p \cos(\alpha_{up}) \cdot \dot{\alpha}_{up}. \quad (2.s21)$$

Эта замена – ключ к выявлению зависимости производной функции Ляпунова от переменной управления  $u(t)$ . Производная от функции Ляпунова, взятая в силу уравнения движения (2.s11)-(2.s12) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}U(E) = E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cdot M_p l_p \dot{\alpha}_{up} \cos(\alpha_{up}) \cdot u(t). \quad (2.s22)$$

### 2.3.4. Упражнение: построение подъёмного управления

Согласно предшествующим рассуждениям полная производная по времени от функции Ляпунова может быть представлена в виде:

$$\frac{d}{dt}U(E) = E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cdot g(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cdot u \quad (2.23)$$

где  $g(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = M_p l_p \dot{\alpha}_{up} \cos(\alpha_{up})$

Подъёмное управление  $u$  – это функция, которая должна зависеть от состояния системы так, чтобы гарантировать неположительность правой части выражения (2.23) для всех значений переменных.

Попробуем определить управление  $u$  наиболее простым способом, приняв  $u = -\mu$ , где  $\mu > 0$  — заданный параметр. Подставляя такое управление  $u$  в выражение (2.23), получаем

$$\frac{d}{dt}U(E) = -E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) g(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \mu. \quad (2.24)$$

Нельзя гарантировать устойчивости значения  $E = 0$  при использовании такого рода управления, т. к. производная от функции Ляпунова может принимать положительные значения, если функций  $g$  и  $E$  станут разных знаков. Таким образом, можно сделать вывод, что такого рода управление не может обеспечить соблюдение принципа  $E \rightarrow 0$ .

Рассмотрим другие способы построения управления  $u(t)$ , пытаюсь добиться нужного знака производной. Для каждого из способов необходимо проверять соблюдение нужного знака производной.

**Задание.** Пусть  $u = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$ , где  $\mu > 0$  – определяемый пользователем параметр управления. Необходимо проверить наличие нужного знака у производной функции Ляпунова.

**Решение.**

Подставляем выбранное управление в выражение для производной функции Ляпунова  $U(E)$  (2.s22)

$$\frac{d}{dt}U(E) = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})^2 M_p l_p \dot{\alpha}_{up} \cos(\alpha_{up}) \quad (2.s23)$$

Если при  $E \neq 0$  угловая скорость маятника и  $\cos(\alpha_{up})$  окажутся разных знаков, выражение (2.s23) станет положительным. Поэтому нельзя гарантировать устойчивость значения  $E = 0$  при использовании управления  $u = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})$ .

•

**Задание.** Пусть  $u = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cdot \cos(\alpha_{up})$ . Необходимо проверять соблюдение условия на знак производной функции Ляпунова:

**Решение.**

Подставляем управление в выражение для производной функции Ляпунова  $U(E)$  (2.s22)

$$\frac{d}{dt}U(E) = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})^2 M_p l_p \dot{\alpha}_{up} \cos(\alpha_{up})^2 \quad (2.s24)$$

Если при ненулевых членах произведения угловая скорость маятника отрицательна, выражение (2.s24) становится положительным. Поэтому значение  $E = 0$  может быть неустойчиво при использовании управления  $u = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cos(\alpha_{up})$ . •

**Задание.** Пусть  $u = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cos(\alpha_{up}) \cdot \dot{\alpha}_{up}$ . Необходимо выполнить проверку.

**Решение.**

Подставляем это управление в выражение для производной функции Ляпунова  $U(E)$  (2.s22)

$$\frac{d}{dt}U(E) = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up})^2 M_p l_p \dot{\alpha}_{up}^2 \cos(\alpha_{up})^2 \quad (2.s25)$$

Производная по времени от функции Ляпунова (2.s25) неположительна для всех значений переменных. При  $E \neq 0$  за исключением множества точек, где  $\dot{\alpha}_{up} = 0$  или  $\alpha_{up} = \pm\pi/2$  эта производная строго меньше нуля. Поэтому значение  $E = 0$  устойчиво при использовании управления  $u = -\mu \cdot E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cos(\alpha_{up}) \cdot \dot{\alpha}_{up}$  и может быть асимптотически устойчиво. •

Недостатком полученного управления является неограниченность его значений при больших по модулю величинах  $E$  и  $\dot{\alpha}_{up}$ . Поскольку в реальных устройствах ускорение  $u(t)$  является следствием приложенного усилия, а усилие, как правило, создается двигательными установками, то исходя из их ограниченной мощности, ускорения всегда ограничены по величине. Поэтому, следует построить аналогичное управление, но с соблюдением условия его ограниченности.

Введем функцию

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} -1, & z < 0 \\ 0, & z = 0 \\ +1, & z > 0. \end{cases}$$

**Задание.** Пусть  $u = -\mu \cdot \text{sgn}(E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cos(\alpha_{up}) \cdot \dot{\alpha}_{up})$ . Необходимо проверить выполнение требования на знак производной функции Ляпунова.

**Решение.**

Подставляем управление в выражение для производной функции Ляпунова  $U(E)$  (2.s22):

$$\frac{d}{dt}U(E) = -\mu \cdot |E(\alpha_{up})| \cdot M_p l_p |\cos(\alpha_{up})| \cdot |\dot{\alpha}_{up}| \quad (2.s26)$$

Производная по времени от функции Ляпунова (2.s26) неположительна для всех значений переменных. Как и в предыдущем случае, при  $E \neq 0$  за исключением множества точек, где  $\dot{\alpha}_{up} = 0$  или  $\alpha_{up} = \pm\pi/2$  эта производная строго меньше нуля. Поэтому значение  $E = 0$  устойчиво при использовании управления

$$u = -\mu \cdot \text{sgn}(E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cos(\alpha_{up}) \cdot \dot{\alpha}_{up}) \quad (2.s27)$$

и может быть асимптотически устойчиво. •

### 2.3.5. Упражнение: анализ построенного подъемного управления

В упражнении 2.3.2 было выяснено, что построенное по принципу обеспечения  $E \rightarrow 0$  подъемное управление будет приводить систему маятника в окрестность вертикального положения, если в силу этого управления окажется устойчивым один из фрагментов  $a$  или  $d$  многообразия (2.s18). Необходимо проверить наличие этих свойств у построенного управления (2.s27).

Для этого запишем уравнение замкнутой системы:

$$J_p \cdot \ddot{\alpha}_{up} - M_p g l_p \sin(\alpha_{up}) = -\mu \cdot M_p l_p |\cos(\alpha_{up})| \text{sgn}(E(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) \cdot \dot{\alpha}_{up}) \quad (2.25)$$

Вначале анализ целесообразно выполнить в малом, в окрестности точки  $(\alpha_{up}, \dot{\alpha}_{up}) = (0, 0)$ . Для этого заменим гладкие нелинейные функции в (2.25) их линейными приближениями в окрестности нуля, а сигнатуру заменим значениями  $\pm 1$ , исходя из знаков  $E$ , показанных на рис. 4, а также знаков  $\dot{\alpha}_{up}$ . Значения сигнатуры  $\pm 1$  сохраняются в пределах подобластей, показанных на рис. 2.4, на которые разделена окрестность нуля.

**Задание.** Необходимо качественными методами построить фазовый портрет и выделить фрагменты многообразия (2.s18), обладающие устойчивостью.

**Решение.**

Выполняя линеаризацию в окрестности нуля гладких функций в (2.25) и заменяя сигнатуру на  $\pm 1$ , получим уравнение движения замкнутой системы в малом:

$$J_p \cdot \ddot{\alpha}_{up} = M_p g l_p \alpha_{up} - \mu \cdot M_p l_p \cdot (\pm 1) \quad (2.s28)$$

где соответствие значений «+1», «-1» подобластям фазовой плоскости показано на рис. 2.6.

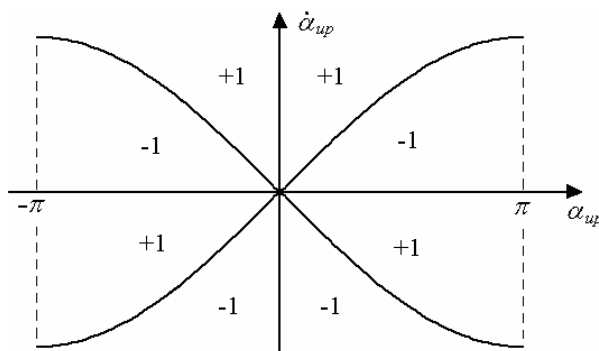


Рис. 2.6. Знаки сигнатуры в различных подобластях фазового пространства

Запишем то же уравнение в другой форме:

$$\frac{d\dot{\alpha}_{up}}{d\alpha_{up}} = \frac{\alpha_{up} - \gamma \cdot (\pm 1)}{\beta \cdot \dot{\alpha}_{up}}, \quad (2.s29)$$

где  $\gamma = \mu/g$ , а  $\beta = J_p / (M_p l_p g)$ .

При  $|\alpha_{up}| < \gamma$  знак числителя всегда противоположен знаку сигнатуры  $\pm 1$ . Поэтому знак тангенса угла наклона поля направлений для (2.s28) и (2.s29), определяемый знаком правой части уравнения (2.s29), легко установить. Значения этого знака отметим знаками «+» или «-» в кружках на рис.2.7. В подобластях, где поставлен знак «+», величина  $\dot{\alpha}_{up}$  должна возрасть с увеличением  $\alpha_{up}$  вдоль интегральных кривых уравнения (2.s29), а в областях, отмеченных знаком «-» – убывать.

Интегрируя уравнение (2.s29), легко получим вид семейства его интегральных кривых в виде гипербол:

$$\beta \cdot \dot{\alpha}_{up}^2 = (\alpha_{up} - \gamma \cdot (\pm 1))^2 + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Учитывая наклоны поля направлений, а также то, что в верхней полуплоскости (за счет  $\dot{\alpha}_{up} > 0$ ) значения угла отклонения  $\alpha_{up}$  всегда

возрастают, а в нижней – убывают, получим вид фазового портрета в окрестности нуля (см. рис. 2.7).

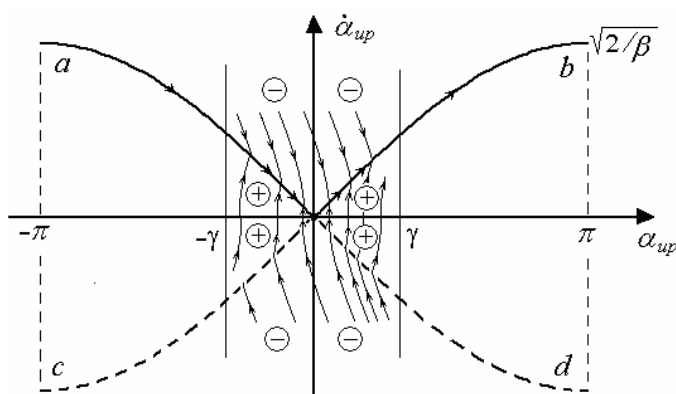


Рис.2.7. Фазовый портрет в окрестности нуля замкнутой системы (2.s28), использующей подъемное управление

Анализ полученного рисунка показывает, что отрицательная ветвь многообразия (2.s18), (2.s19) (фрагменты *c* и *d*) является неустойчивой и не реализуется. К фрагментам *a* и *b* положительной ветви многообразия (2.s18), (2.s19) фазовые траектории подходят с двух сторон, обеспечивая устойчивость этой части многообразия. Таким образом, устойчивы фрагменты *a* и *b*. •

Итак, найдены устойчивые фрагменты. Оказалось, что это *a* и *b*. Эффект движения фазовой точки вдоль этих фрагментов в системе с разрывной правой частью (2.s28) называют скользящим режимом. Движения системы в скользящем режиме описывается дифференциальным уравнением (2.s19), где перед корнем нужно оставить только знак «+». Для этого уравнения, согласно результатам упражнения 2.3.2, точка  $\alpha_{up} = 0$  является полуустойчивым состоянием равновесия. По фрагменту *a* система за конечное время будет приходить в окрестность верхнего вертикального положения  $\alpha_{up} = 0$ . Это будет обеспечивать решение задачи подъема маятника.

**Задание.** Можно попытаться выяснить еще один вопрос: что произойдет, если после попадания в окрестность нулевого значения угла не будет выполнено переключения на стабилизирующее управление?

**Решение.**

Поскольку физическая система никогда точно не придет в точку (0,0), то после попадания в окрестность нуля система покинет ее, двигаясь в скользящем режиме вдоль фрагмента *b*.

Поскольку переменная угла  $\alpha_{up}$  является циклической (значения  $-\pi$  и  $+\pi$  отождествляются), фазовое пространство системы является не плоскостью, а цилиндром, который получается из своей развертки, показанной на рис.2.7, «склеиванием» по вертикальным пунктирным прямым. Следовательно, фазовая

точка, уйдя вправо по фрагменту  $b$ , вернется слева по фрагменту  $a$ . Тем самым, возникнет вращение маятника с прохождением точки максимального подъема с угловой скоростью, близкой к нулю. К таким результатам приведет применение построенного подъемного управления. •



### 3. Управление неустойчивым объектом движениями балансирующей массы

В этом разделе рассмотрен пример управления неустойчивой системой: качелями, центр масс которых приподнят над осью вращения. Стабилизация возможна за счет балансирующего движения по ее поверхности управляемой тележки. На этом примере демонстрируется несколько подходов к построению регуляторов, исходя как из требований асимптотической устойчивости, так и более жестких требований на поведение переходного процесса, характерных для модального управления.

Показано использование классических методов: критерия Рауса-Гурвица, а также D-разбиения по отношению к области размещения корней характеристического полинома в виде усеченного конуса. Кроме того, решение той же задачи демонстрируется с использованием современного метода линейных матричных неравенств, и проводится сопоставление результатов.

В целях расширения возможностей самостоятельного изучения рассматриваемого примера разработаны программы для MatLab, которые позволяют исследовать процесс построения регуляторов, включая построение областей D-разбиения, а также проводить компьютерное моделирование при нескольких законах регулирования. Коды программ доступны по ссылке [10].

#### 3.1. Описание лабораторной установки

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, представляющую собой качели с перемещающейся по их поверхности балансирующей массой – тележкой. На тележке находится электромотор с моментом инерции ротора  $J_m$ , вращающий ведущее зубчатое колесо радиуса  $r_{mp}$  через редуктор с передаточным числом  $K_g$ . Ведущее колесо тележки движется по зубчатой направляющей, проложенной вдоль качели. Ось вращения качелей, расположенная в точке  $O$ , находится ниже уровня центра масс качелей.

В качестве управляющего воздействия рассматривается линейная сила тяги  $F_c$ , действующая на тележку и направленная вдоль поверхности качели. Величина силы тяги должна определяться регулятором, обеспечивающим, как минимум, стабилизацию качели. Хотя, в действительности, сила тяги тележки порождается электромотором и зависит от приложенного напряжения, мы не будем это учитывать в целях упрощения модели и примем  $F_c$  в качестве внешнего фактора.

Схема модуля, состоящего из качелей, тележки и направляющей, изображена на рис. 3.1. Система координат  $OXY$  неподвижна. Смещение центра масс тележки  $x_c$  вправо вдоль поверхности качелей будем считать положительным. За положительное направление изменения угла  $\theta$ ,

описывающего отклонение качелей от горизонтального положения, примем отклонение против часовой стрелки. Значение  $\theta = 0$  отвечает горизонтальному положению качелей.

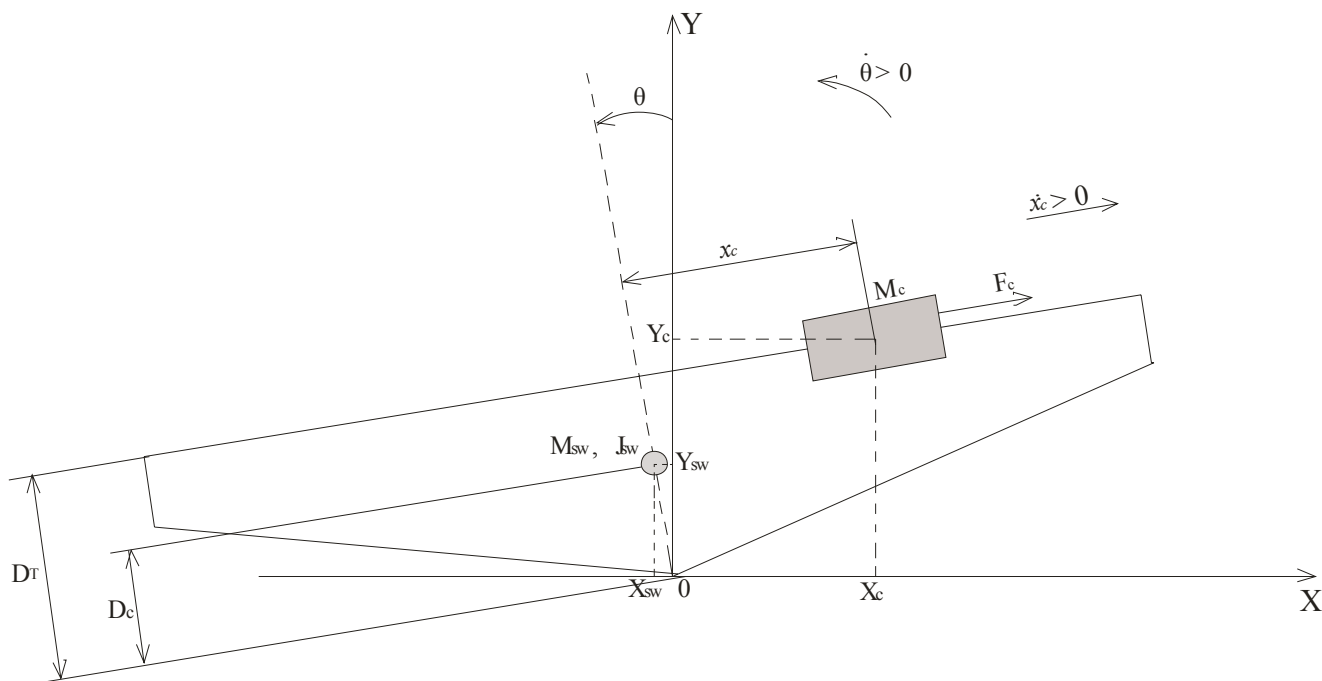


Рис. 3.1. Схематичное представление рассматриваемой системы

Используем следующие обозначения:  $M_{sw}, M_c$  – массы качели и тележки,  $J_{sw}$  – момент инерции качели относительно оси поворота  $O$ ,  $X_{sw}, Y_{sw}$  – координаты центра масс качели. Остальные обозначения понятны из рисунка.

### 3.2. Упражнение: вывод нелинейных уравнений движения

Прежде, чем перейти к решению задачи синтеза регулятора, необходимо построить математическую модель изучаемой системы, т. е. вывести уравнения движения. Для упрощения модели размеры тележки учитывать не будем. Получим уравнения, используя формализм Лагранжа.

**Задание.** Ввести обобщенные координаты для системы качели–тележка и выразить через них координаты центра масс качели и тележки.

**Решение.**

Система качели–тележка, очевидно, имеет две части, способные совершать независимые движения: качели могут изменять величину наклона, а тележка – смещаться вдоль качелей. Других вариантов движений в системе нет, поэтому она имеет две степени свободы. Введем две обобщенные координаты:  $x_c$  –

смещение тележки относительно центра верхней поверхности качелей и  $\theta$  – угол наклона качели.

Выразим координаты центра масс качели и тележки в абсолютной системе координат:

$$X_{sw} = -D_c \sin(\theta), \quad Y_{sw} = D_c \cos(\theta), \quad (3.s1)$$

$$X_c = -D_T \sin(\theta) + x_c \cos(\theta), \quad Y_c = D_T \cos(\theta) + x_c \sin(\theta). \quad \bullet \quad (3.s2)$$

Для использования формализма Лагранжа при выводе уравнений движения необходимо получить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы.

Примем, что уровень нулевой потенциальной энергии соответствует значению  $Y = 0$ . Необходимо учесть, что общая кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии тележки, энергии вращения ротора ее электромотора и вращательной кинетической энергии качелей. В последующем, в целях учебного исследования, целесообразно перейти к упрощенной модели, в которой тележка мотора не имеет и совершает свои движения за счет некоторой внешней силы.

**Задание.** Получить формулы для кинетической и потенциальной энергии.

**Решение.**

При выборе нулевого уровня потенциальной энергии для  $Y = 0$  и с учетом значений  $Y_{sw}, Y_c$  из (3.s1), (3.s2), общая потенциальная энергия всей системы запишется в виде:

$$V_T = g(M_c D_T \cos(\theta) + M_c x_c \sin(\theta) + M_{sw} D_c \cos(\theta)) \quad (3.s3)$$

Кинетическая энергия поступательного движения тележки  $T_{tc}$  определяется как функция мгновенной скорости её центра масс. При этом масса электродвигателя учитывается в общей массе тележки:

$$T_{tc} = (M_c/2) \sqrt{(\dot{X}_c)^2 + (\dot{Y}_c)^2},$$

$$\dot{X}_c = -D_T \cos(\theta) \dot{\theta} + \dot{x}_c \cos \theta - x_c \sin(\theta) \dot{\theta}, \quad \dot{Y}_c = D_T \sin(\theta) \dot{\theta} + \dot{x}_c \sin \theta - x_c \cos(\theta) \dot{\theta}.$$

После подстановки имеем:

$$T_{tc} = (M_c/2) \left( D_T^2 \dot{\theta}^2 - 2D_T \dot{\theta} \dot{x}_c + \dot{x}_c^2 + x_c^2 \dot{\theta}^2 \right). \quad (3.s4)$$

К переносной кинетической энергии тележки добавляем кинетическую энергию вращения ротора ее электромотора, через редуктор связанного с колесами. При этом моменты инерции колес и редуктора после соответствующего пересчета можно включить в момент инерции ротора электромотора  $J_m$ . Получим:

$$T_{rc} = (J_m/2) (K_g^2 \dot{x}_c^2 / r_{mp}^2). \quad (3.s5)$$

Кинетическая энергия вращения качели выражается простым соотношением:

$$T_{r_{sw}} = (J_{sw}/2)\dot{\theta}^2 \quad (3.s6)$$

Общая кинетическая энергия складывается из трех полученных составляющих:  $T_T = T_{t_c} + T_{r_c} + T_{r_{sw}}$ .

Для упрощения модели пренебрежем кинетической энергией вращения ротора электромотора. Это эквивалентно случаю, когда балансирующая тележка мотора не имеет и перемещается по поверхности качелей под действием внешней управляющей силы. С учетом этого упрощения полная кинетическая энергия системы примет вид:

$$T_T = \frac{1}{2}M_c\dot{x}_c^2 - M_c D_T \dot{\theta} \dot{x}_c + \left( \frac{1}{2}J_{sw} + \frac{1}{2}M_c D_T^2 + \frac{1}{2}M_c x_c^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (3.s7)$$

Используя полученные выражения кинетической и потенциальной энергии из (3.s7) и (3.s3), можно составить функцию Лагранжа  $L = T_T - V_T$  и затем записать систему уравнений движения в виде двух уравнений второго порядка:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_c} \right) = Q_{x_c}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = Q_{\theta}, \quad (3.1)$$

Обобщенные силы определяются как коэффициенты в выражении для работы неучтенных в функции Лагранжа активных сил, совершаемой на виртуальных перемещениях  $\delta x_c$  и  $\delta \theta$ .

**Задание.** Получить выражения для обобщенных сил и записать конкретный вид уравнения движения (3.1).

**Решение.**

Рассмотрим виртуальные перемещения тележки  $\delta x_c$ , совершаемые вдоль поверхности качелей. На этих перемещениях работу совершают: сила вязкого трения с эквивалентным коэффициентом  $h_{eq}$ , направленная вдоль поверхности качели (против направления смещения), а также управляющая внешняя сила  $F_c(t)$ , действующая на тележку, направленная вдоль поверхности качели.

При виртуальных перемещениях  $\delta \theta$  работу совершает момент силы вязкого трения с коэффициентом  $h_{sw}$  на оси вращения качелей. Следовательно, обобщенные силы запишутся следующим образом:

$$Q_{x_c} = F_c(t) - h_{eq} \dot{x}_c, \quad Q_{\theta} = -h_{sw} \dot{\theta} \quad (3.s8)$$

Используя (3.s7) и (3.s3), составим функцию Лагранжа  $L = T_T - V_T$ , вычислим ее частные производные по обобщенным переменным и их производным. После подстановки получим окончательный вид уравнений:

$$M_c \ddot{x}_c - M_c D_T \ddot{\theta} - M_c x_c \dot{\theta}^2 + g M_c \sin(\theta) = F_c - h_{eq} \dot{x}_c, \quad (3.s9)$$

$$M_c \ddot{\theta} x_c^2 + (2 M_c \dot{x}_c \dot{\theta} + g M_c \cos(\theta)) x_c - M_c D_T \ddot{x}_c + (J_{sw} + M_c D_T^2) \cdot \ddot{\theta} + (3.s10) \\ + g \cdot (-M_c D_T \sin(\theta) - M_{sw} D_c \sin(\theta)) = -h_{sw} \dot{\theta}.$$

Уравнения движения получены, однако легко видеть, что они не разрешены относительно старших (вторых) производных. Поскольку относительно производных  $\ddot{x}_c$  и  $\ddot{\theta}$  система (3.s9)-(3.s10) линейна и ее главный определитель  $\Delta = M_c^2 x_c^2 + J_{sw} M_c > 0$ , она однозначно разрешима относительно этих производных. Применяя правило Крамера, получим систему уравнений движения в явной форме:

$$\ddot{x}_c = (M_c^2 x_c^3 \dot{\theta}^2 + (F_c(t) M_c - g M_c^2 \sin(\theta) - h_{eq} \dot{x}_c M_c) x_c^2 + \\ + (-2 M_c^2 D_T \dot{x}_c \dot{\theta} + (M_c^2 D_T^2 + M_c J_{sw}) \dot{\theta}^2 - M_c^2 D_T g \cos(\theta)) x_c + \\ + (-M_c D_T^2 h_{eq} - h_{eq} J_{sw}) \dot{x}_c - M_c D_T h_{sw} \dot{\theta} + (F_c(t) - g M_c \sin(\theta)) J_{sw} + \\ + M_c D_T^2 F_c(t) + M_c D_T g M_{sw} D_c \sin(\theta)) \cdot ((M_c x_c^2 + J_{sw}) M_c)^{-1} \quad (3.2)$$

$$\ddot{\theta} = ((M_c D_T \dot{\theta}^2 - 2 M_c \dot{x}_c \dot{\theta} - g M_c \cos(\theta)) x_c + D_T F_c(t) - D_T h_{eq} \dot{x}_c + \\ + g M_{sw} D_c \sin(\theta) - h_{sw} \dot{\theta}) \cdot (M_c x_c^2 + J_{sw})^{-1}. \quad (3.3)$$

В уравнениях (3.2), (3.3)  $F_c(t)$  – определяет величину внешнего управляющего силового воздействия на тележку. Состоянием этой динамической системы является вектор значений обобщенных переменных и обобщенных скоростей  $(x_c, \theta, \dot{x}_c, \dot{\theta})$ . Горизонтальному неподвижному положению качели при центрированном неподвижном положении тележки соответствует нулевое значение вектора состояния  $(x_c, \theta, \dot{x}_c, \dot{\theta}) = (0, 0, 0, 0)$ .

Чтобы уравнения объекта (3.2), (3.3) стали замкнутыми, нужно определить закон управления как функцию от компонент вектора текущего состояния. Будем исследовать задачу регулирования по полному состоянию в классе линейных регуляторов, полагая

$$F_c = c_1 x_c + c_2 \theta + c_3 \dot{x}_c + c_4 \dot{\theta}. \quad (3.4)$$

Регулятор (3.4) реализует линейную обратную связь по состоянию. Выбранный вид управления (3.4) соответствует тому, что при нулевых значениях обобщенных переменных и их производных по времени управляющее воздействие также должно становиться равным нулю. Это требование, очевидно, выполнено.

### 3.3. Упражнение: анализ состояний равновесия замкнутой системы

Состояния равновесия замкнутой системы (3.2)-(3.4), это такие ее решения, которые имеют вид констант.

**Задание.** Составить систему уравнений для определения состояний равновесия в (3.2)-(3.4) и выполнить анализ их положения.

**Решение.**

Для определения состояний равновесия положим  $x_c(t) = x_c = const$ ,  $\theta(t) = \theta = const$  и подставим эти значения в (3.2)-(3.4). Система для определения состояний равновесия примет вид:

$$\begin{cases} -g M_c \sin(\theta) x_c^2 - M_c D_T g \cos(\theta) x_c - g \sin(\theta) J_{sw} + D_T g M_{sw} D_c \sin(\theta) = \\ \qquad \qquad \qquad = -(c_1 x_c + c_2 \theta) \cdot (x_c^2 + J_{sw}/M_c + D_T^2); \\ -g M_c \cos(\theta) x_c + g M_{sw} D_c \sin(\theta) = -D_T \cdot (c_1 x_c + c_2 \theta). \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения ..... и подставим это выражение в первое уравнение, получим преобразованную систему:

$$\begin{cases} \sin(\theta) \left( -M_c x_c^2 - J_{sw} - \frac{(x_c^2 M_c + J_{sw}) D_c M_{sw}}{D_T M_c} \right) = -\cos(\theta) \left( \frac{(x_c^2 M_c + J_{sw}) x_c}{D_T} \right) \\ (c_1 x_c + c_2 \theta) = \frac{g M_c \cos(\theta) x_c - g M_{sw} D_c \sin(\theta)}{D_T} \end{cases} \quad (3.s11)$$

Рассмотрим два случая: первый, когда в состоянии равновесия выражение  $c_1 x_c + c_2 \theta$  равно нулю, и второй, когда это выражение отлично от нуля.

Вначале проанализируем случай  $c_1 x_c + c_2 \theta = 0$ . При этом условии из (3.s11) следует:

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta) &= \frac{M_c}{D_T M_c + D_c M_{sw}} x_c; & \operatorname{tg}(\theta) &= \frac{M_c}{D_c M_{sw}} x_c. \end{aligned} \right.$$

Для качелей с приподнятым центром масс параметр  $D_T > 0$ , поэтому две приведенные дроби могут совпадать только при  $x_c = 0$ . Для рассматриваемой задачи  $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$ , поэтому из условия  $x_c = 0$  следует, что в состоянии равновесия  $\theta = 0$ . Таким образом, в первом случае получили единственное состояние равновесия  $x_c = 0$ ,  $\theta = 0$ .

Рассмотрим второй случай, когда  $c_1 x_c + c_2 \theta \neq 0$ . Вначале предположим, что  $\sin(\theta) = 0$ , тогда  $\theta = 0$ . При этом из первого уравнения системы (3.s11) следует, что,  $x_c = 0$ . Если же  $\sin(\theta) \neq 0$ , тогда поделив это уравнение на выражение  $\sin(\theta) \cdot (x_c^2 M_c + J_{sw}) x_c / D_T$  получим систему:

$$\left\{ \begin{aligned} ctg(\theta) &= \frac{D_T M_c + D_c M_{sw}}{M_c x_c}; & x_c &= \frac{-g M_{sw} D_c \sin(\theta) - D_T c_2 \theta}{c_1 D_T - g M_c \cos(\theta)}. \end{aligned} \right. \quad (3.s12)$$

Одним из ее решений, очевидно, является  $(0,0)$ , однако, нетрудно видеть, что, например, при  $c_2 > 0$  и  $c_1 D_T < 0$  могут существовать еще два ее симметричных решения  $x_c^1 > 0, \theta^1 > 0$  и  $x_c^2 < 0, \theta^2 < 0$ . Первое из них соответствует наклону качели влево при смещении тележки вправо, при этом от скатывания по наклонной плоскости качели ее должна удерживать положительная по величине сила  $F_c$ . •

Приведенное решение показывает, что в замкнутой системе всегда существует состояние равновесия  $x_c = 0, \theta = 0$ , но при некоторых значениях коэффициентов регулятора могут быть и другие состояния равновесия. С точки зрения задачи регулирования нас будет интересовать обеспечение приведения системы в состояние равновесия при  $x_c = 0, \theta = 0$ .

### 3.4. Линеаризованные уравнения движения в форме Коши для замкнутой системы

#### 3.4.1. Уравнения движения замкнутой системы, линеаризованные в окрестности основного состояния равновесия.

Линеаризуем систему (3.2)-(3.4) в окрестности основного состояния равновесия  $x_c = 0, \theta = 0$ . Для этого все нелинейные элементы, входящие в (3.2), (3.3) заменим их линейными приближениями. Уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c &= -\frac{M_c D_T g}{J_{sw}} x_c + \left( -g + \frac{g D_T M_{sw} D_c}{J_{sw}} \right) \theta + \left( -\frac{h_{eq}}{M_c} - \frac{D_T^2 h_{eq}}{J_{sw}} \right) \dot{x}_c - \\ &\quad - \frac{D_T h_{sw}}{J_{sw}} \dot{\theta} + \frac{F_c(t)}{M_c} + \frac{D_T^2 F_c(t)}{J_{sw}}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g M_c}{J_{sw}} x_c + \frac{g M_{sw} D_c}{J_{sw}} \theta - \frac{D_T h_{eq}}{J_{sw}} \dot{x}_c - \frac{h_{sw}}{J_{sw}} \dot{\theta} + \frac{D_T F_c(t)}{J_{sw}}. \quad (3.6)$$

Подставляя значение  $F_c(t)$ , формируемое регулятором (3.4), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x}_c &= -\frac{M_c D_T g}{J_{sw}} x_c + \left( -g + \frac{g D_T M_{sw} D_c}{J_{sw}} \right) \theta + \left( -\frac{h_{eq}}{M_c} - \frac{D_T^2 h_{eq}}{J_{sw}} \right) \dot{x}_c - \frac{D_T h_{sw}}{J_{sw}} \dot{\theta} \\ &\quad + \left( \frac{1}{M_c} + \frac{D_T^2}{J_{sw}} \right) (c_1 x_c + c_2 \theta + c_3 \dot{x}_c + c_4 \dot{\theta}) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g M_c}{J_{sw}} x_c + \frac{g M_{sw} D_c}{J_{sw}} \theta - \frac{D_T h_{eq}}{J_{sw}} \dot{x}_c - \frac{h_{sw}}{J_{sw}} \dot{\theta} + \frac{D_T}{J_{sw}} (c_1 x_c + c_2 \theta + c_3 \dot{x}_c + c_4 \dot{\theta}) \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – параметры регулятора.

### 3.4.2. Упражнение: линеаризованная система уравнений движения в форме Коши в исходных размерных переменных

Линеаризованные уравнения движения объект–регулятор (3.7) представлены в виде системы двух дифференциальных переменных второго порядка. Для дальнейшего исследования удобно записать эти уравнения в стандартной форме Коши.

**Задание.** Записать систему уравнений (3.7) в форме Коши в исходных физических переменных.

**Решение.**

Чтобы перейти от системы двух уравнений второго порядка (3.7) к записи той же системы в форме Коши, введем вектор фазовых переменных

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (x_c, \theta, \dot{x}_c, \dot{\theta})^T.$$

Запишем линеаризованную систему (3.7) в форме Коши:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.s13)$$

$$u = C^T x, \quad (3.s14)$$

где  $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$  – вектор-столбец коэффициентов регулятора.

Из (3.7) очевидно, что матрица  $A$  размером 4x4 и матрица-столбец  $B$  размером 4x1 имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{M_c D_T g}{J_{sw}} & -g + \frac{g D_T M_{sw} D_c}{J_{sw}} & -\left(\frac{h_{eq}}{M_c} + \frac{D_T^2 h_{eq}}{J_{sw}}\right) & -\frac{D_T h_{sw}}{J_{sw}} \\ -\frac{g M_c}{J_{sw}} & \frac{g M_{sw} D_c}{J_{sw}} & -\frac{D_T h_{eq}}{J_{sw}} & -\frac{h_{sw}}{J_{sw}} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_c} + \frac{D_T^2}{J_{sw}} \\ \frac{D_T}{J_{sw}} \end{bmatrix} \bullet$$

Полученная запись системы линеаризованных уравнений имеет тот недостаток, что содержит громоздкие выражения коэффициентов матриц через физические параметры. Удобно перейти к новым обобщенным параметрам, выбрав в качестве них группы физических параметров, возникшие в результате преобразования уравнений. Кроме того, с точки зрения дальнейшего исследования, можно внести дополнительное упрощение в систему уравнений движения. А именно, можно учесть, что коэффициент вязкого трения на оси качелей весьма мал, и им можно пренебречь.

**Задание.** Ввести обобщенные размерные параметры и упростить систему для случая отсутствия вязкого трения на оси вращения качелей.

**Решение.**

Введем обозначения для элементов матрицы  $A$  и вектора  $B$ :



$$\begin{aligned}
a &= \frac{M_c D_T g}{J_{sw}}, & b &= g - \frac{g D_T M_{sw} D_c}{J_{sw}}, & c &= \frac{h_{eq}}{M_c} + \frac{D_T^2 h_{eq}}{J_{sw}}, & d &= \frac{D_T h_{sw}}{J_{sw}}, \\
e &= \frac{g M_c}{J_{sw}}, & f &= \frac{g M_{sw} D_c}{J_{sw}}, & k &= \frac{D_T h_{eq}}{J_{sw}}, & m &= \frac{h_{sw}}{J_{sw}}, \\
l &= \frac{J_{sw} + M_c D_T^2}{M_c J_{sw}}, & p &= \frac{D_T}{J_{sw}},
\end{aligned}$$

получим более короткую форму записи замкнутой системы уравнений:

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = & x_3 \\
\dot{x}_2 = & x_4 \\
\dot{x}_3 = & -a x_1 \quad -b x_2 \quad -c x_3 -d x_4 + l u(t) \\
\dot{x}_4 = & -e x_1 \quad + f x_2 \quad -k x_3 -m x_4 + p u(t).
\end{cases} \quad (3.s15)$$

Некоторые коэффициенты в ней взаимосвязаны:  $a = D_T e$ ,  $c = h_{eq} \cdot l$ ,  $k = h_{eq} \cdot p$ .

Теперь учтем малость коэффициента трения  $h_{sw}$  на оси поворота качели. Примем его величину равной нулю, т.е. полностью пренебрежем моментом силы трения, действующим на этой оси. При  $h_{sw} = 0$  несколько обобщенных параметров обратится в ноль, а именно,  $d = m = 0$ .

Система линеаризованных уравнений движения без учета трения на оси качели примет вид:

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = & x_3 \\
\dot{x}_2 = & x_4 \\
\dot{x}_3 = & -a x_1 \quad -b x_2 \quad -c x_3 + (c/h_{eq}) \cdot u(t) \\
\dot{x}_4 = & -(a/D_T) x_1 \quad + f x_2 \quad -k x_3 + (k/h_{eq}) \cdot u(t),
\end{cases} \quad (3.s16)$$

где управление  $u(t)$  определяется согласно (2s.14). •

Система уравнений (3.s16) записана в размерных «физических» переменных с обобщенными размерными параметрами–коэффициентами. Для повышения общности последующего исследования этой системы целесообразно перейти от размерных переменных к безразмерным, введя также безразмерные обобщенные параметры.

### 3.4.3. Упражнение: уравнения движения в форме Коши в безразмерных переменных

Для перехода к безразмерным переменным и безразмерному времени нужно ввести новые переменные  $x_1^{new}, x_2^{new}, t^{new}$ , линейно связанные с исходными посредством размерных коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$x_1 := \alpha \cdot x_1^{new}, \quad x_2 := \beta \cdot x_2^{new}, \quad t := \gamma \cdot t^{new}. \quad (3.8)$$

Далее следует определить связь производных от новых переменных по новому безразмерному времени с прежними значениями производных. После этого следует перейти в уравнения к новым безразмерным переменным.

**Задание.** Выполнить переход к безразмерным переменным и времени в уравнениях движения.

**Решение.**

Установим связь между производными по старому и новому времени:

$$\dot{x}_{t^{new}} = \frac{d}{dt^{new}} x(\gamma t^{new}) = \dot{x} \gamma$$

Используя найденную зависимость определим связь между производными в старых и новых переменных по новому и старому времени:

$$x_3^{new} = (x_1^{new})'_{t^{new}} = \dot{x}_1 \cdot (\gamma/\alpha) = x_3 \cdot (\gamma/\alpha); \quad x_4^{new} = (x_2^{new})'_{t^{new}} = \dot{x}_2 \cdot (\gamma/\beta) = x_4 \cdot (\gamma/\beta);$$

$$(x_3^{new})'_{t^{new}} = (x_3 \cdot (\gamma/\alpha))'_{t^{new}} = \dot{x}_3 \cdot (\gamma^2/\alpha); \quad (x_4^{new})'_{t^{new}} = (x_4 \cdot (\gamma/\beta))'_{t^{new}} = \dot{x}_4 \cdot (\gamma^2/\beta).$$

Сделаем в системе (3.s16) замену переменных. Однако, чтобы не загромождать запись, пометку «new» всюду опустим и вместо символа «штрих» для дифференцирования по новому времени вновь будем использовать символ «точка». Тогда система в безразмерных переменных примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_3 \\ \dot{x}_2 = & x_4 \\ \dot{x}_3 = & -\gamma^2 a x_1 & -\frac{\beta \gamma^2}{\alpha} b x_2 & -\gamma c x_3 + \frac{\gamma^2 c}{\alpha h_{eq}} u(t) \\ \dot{x}_4 = & -\frac{\alpha \gamma^2 a}{\beta D_T} x_1 & +\gamma^2 f x_2 & -\frac{\alpha \gamma}{\beta} k x_3 + \frac{\gamma^2 k}{\beta h_{eq}} u(t). \bullet \end{cases} \quad (3.s17)$$

Получена система уравнений в безразмерных переменных. Однако, значения коэффициентов замены  $\alpha, \beta, \gamma$  пока не выбраны. Следует распорядиться свободой их выбора, чтобы уменьшить количество параметров системы уравнений. За счет выбора величин трех коэффициентов в общем случае можно избавимся от трех параметров модели.

**Задание.** Выбрать параметры замены  $\alpha, \beta, \gamma$  таким образом, чтобы избавиться от трех коэффициентов в системе уравнений.

**Решение.**

Рассмотрим систему уравнений (3.s17). За счет трех свободных параметров можно избавиться от трех коэффициентов, зависящих от этих параметров. Например, можно сделать равными единице коэффициенты в двух последних уравнениях при  $u(t)$ , а также при  $x_2$  в первом из этих двух уравнений. Для

этого потребуем выполнения трех условий и получим из них значения параметров замены:

$$\begin{cases} \frac{\gamma^2 c}{\alpha h_{eq}} = 1 \\ \frac{\gamma^2 k}{\beta h_{eq}} = 1 \\ \frac{\beta \gamma^2}{\alpha} b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\gamma^2 c}{h_{eq}} \\ \beta = \frac{\gamma^2 k}{h_{eq}} \\ \gamma^2 = \frac{\alpha}{\beta b} \end{cases} \quad (3.s17)$$

Из последнего уравнения находим  $\gamma^2 = \frac{\alpha}{\beta b} = \frac{\gamma^2 c h_{eq}}{\gamma^2 k h_{eq} b} = \frac{c}{k b}$ . Подставив найденное выражение в (3.s17), окончательно получим:

$$\alpha = \frac{c^2}{k b h_{eq}}, \quad \beta = \frac{c}{b h_{eq}}, \quad \gamma^2 = \frac{c}{k b}$$

Подставим найденные значения коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$  в исходную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -A x_1 - x_2 - B x_3 + u(t) \\ \dot{x}_4 = -C x_1 + D x_2 - B x_3 + u(t) \end{cases}, \quad (3.s18)$$

где  $A = \frac{a c}{b k}$ ;  $B = c \sqrt{\frac{c}{b k}}$ ;  $C = \frac{a c^2}{b k^2 D_T}$ ;  $D = \frac{c f}{b k}$ .

Для получения уравнений замкнутой системы нужно выразить в новых переменных вид управления  $u(t)$  из (2s.14):

$$u(t) = c_1 \alpha \cdot x_1^{new} + c_2 \beta \cdot x_2^{new} + c_3 \cdot (\alpha / \gamma) \cdot x_3^{new} + c_4 \cdot (\beta / \gamma) \cdot x_4^{new}.$$

Опуская, как и в самих уравнениях, метку «new» и вводя новые коэффициенты:

$$k_1 = c_1 \alpha, \quad k_2 = c_2 \beta, \quad k_3 = c_3 \cdot (\alpha / \gamma), \quad k_4 = c_4 \cdot (\beta / \gamma), \quad (3.s19)$$

получим вид регулятора в безразмерных переменных:

$$u(t) = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3 + k_4 \cdot x_4. \quad (3.s20)$$

Замкнутая линеаризованная система уравнений в безразмерных переменных примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_3 \\ \dot{x}_2 = & x_4 \\ \dot{x}_3 = & (k_1 - A)x_1 + (k_2 - 1)x_2 + (k_3 - B)x_3 + k_4 x_4 \\ \dot{x}_4 = & (k_1 - C)x_1 + (k_2 + D)x_2 + (k_3 - B)x_3 + k_4 x_4 \end{cases} \quad (3.s21)$$

## 3.5. Определение области устойчивости по параметрам регулятора

### 3.5.1. Упражнение: вывод условий устойчивости с использованием критерия Рауса-Гурвица

Устойчивость состояния равновесия линеаризованной системы определяется расположением корней характеристического полинома матрицы коэффициентов. Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы все корни размещались в левой полуплоскости комплексной плоскости. Для получения условия асимптотической устойчивости в рассматриваемой задаче можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица, описанным в п.1.1.5.1, применительно к системе (3.s20).

**Задание.** Получить характеристический полином замкнутой системы.

**Решение.**

Рассмотрим матрицу замкнутой системы. Для сокращения записи введем дополнительные параметры:

$$z_1 = k_1 - A; \quad z_2 = k_2 - 1; \quad z_3 = k_3 - B; \quad z_4 = k_4; \quad z_5 = k_1 - C; \quad z_6 = k_2 + D.$$

Матрица примет вид:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 - A & k_2 - 1 & k_3 - B & k_4 \\ k_1 - C & k_2 + D & k_3 - B & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_5 & z_6 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

Запишем характеристический полином для матрицы X:

$$\begin{aligned} |X - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 - \lambda & z_4 \\ z_5 & z_6 & z_3 & z_4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ z_2 & z_3 - \lambda & z_4 \\ z_6 & z_3 & z_4 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ z_1 & z_2 & z_4 \\ z_5 & z_6 & z_4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda(-\lambda((z_3 - \lambda)(z_4 - \lambda) - z_3 z_4) + z_2 z_3 - z_6(z_3 - \lambda)) + \lambda(z_1(z_4 - \lambda) - z_4 z_5) + z_1 z_6 - z_2 z_5 = \\ &= \lambda^4 - (z_3 + z_4)\lambda^3 + (-z_6 - z_1)\lambda^2 + (z_3 z_6 - z_2 z_3 + z_1 z_4 - z_4 z_5)\lambda + z_1 z_6 - z_2 z_5. \end{aligned}$$

Для определения собственных значений матрицы X получаем уравнение:

$$\lambda^4 + (B - k_3 - k_4)\lambda^3 + (-k_1 - k_2 + A - D)\lambda^2 + ((k_3 - B)(1 + D) + k_4(C - A))\lambda + (k_1 - A)(D + 1) + (k_2 - 1)(C - A) = 0. \quad (3.s22)$$

**Задание.** Получить условие асимптотической устойчивости состояния равновесия для системы (3.s20), используя критерий Рауса-Гурвица.

**Решение.**

Найдем область устойчивости, используя критерий Рауса-Гурвица. Введем обозначения для коэффициентов характеристического полинома:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= B - k_3 - k_4 \\ b_2 &= A - D - k_1 - k_2 \\ b_3 &= k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1) \\ b_4 &= (k_1 - A)(D + 1) + (k_2 - 1)(C - A) \end{aligned}$$

Определитель Гурвица имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 \end{vmatrix}$$

Для асимптотической устойчивости состояния равновесия системы дифференциальных уравнений достаточно, чтобы все корни ее характеристического полинома (3.s21) размещались в левой полуплоскости комплексной плоскости. По критерию Рауса-Гурвица для того чтобы все корни полинома имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы при  $b_0 > 0$  все главные миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  определителя Гурвица были положительными.

После простых, но достаточно громоздких вычислений и преобразований можно получить следующий вид миноров:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= B - k_3 - k_4 > 0 \\ \Delta_2 &= (B - k_3 - k_4)(A - D - k_1 - k_2) - (k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1)) > 0 \\ \Delta_3 &= ((B - k_3 - k_4)(A - D - k_1 - k_2) - (k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1))) \cdot \\ &\cdot (k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1)) - (B - k_3 - k_4)^2((k_1 - A)(D + 1) + (k_2 - 1)(C - A)) > 0 \\ \Delta_4 &= \Delta_3 \cdot ((k_1 - A)(D + 1) + (k_2 - 1)(C - A)) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем условия устойчивости в виде системы неравенств относительно коэффициентов регулятора:

$$\begin{cases} B - k_3 - k_4 > 0 \\ (B - k_3 - k_4)(A - D - k_1 - k_2) - (k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1)) > 0 \\ (k_1 - A)(D + 1) + (k_2 - 1)(C - A) > 0 \\ ((B - k_3 - k_4)(A - D - k_1 - k_2) - (k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1))) \cdot (k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1)) - \\ - (B - k_3 - k_4)^2((k_1 - A)(D + 1) + (k_2 - 1)(C - A)) > 0. \end{cases} \bullet$$

Формально условия устойчивости получены, но из их вида неочевидно, как получать наглядное представление об области устойчивости.

**Задание.** Преобразовать полученные неравенства к форме, допускающей простую геометрическую трактовку условий устойчивости.

**Решение.**

В полученной системе неравенств наиболее сложным является последнее. Будем выражать требования на параметры регулятора  $k_1$  и  $k_2$  через заданные значения двух других параметров.

Чтобы разрешить последнее неравенство относительно  $k_1$  и  $k_2$ , введем обозначения для некоторых входящих в него выражений, не содержащих параметров  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\begin{aligned} E &= (B - k_3 - k_4)(k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1)), \\ F &= (k_4(C - A) + (k_3 - B)(D + 1))^2, \\ H &= (B - k_3 - k_4)^2. \end{aligned} \quad (3.s23)$$

Тогда последнее неравенство примет вид:

$$E(A - D - k_1 - k_2) - H((k_1 - A)(D + 1) + (k_2 - 1)(C - A)) - F > 0$$

Перепишывая его в явной форме, получим:

$$k_1 < \frac{E(A - D) + H(C - A) - F + AH(D + 1)}{E + H(D + 1)} - \frac{E + H(C - A)}{E + H(D + 1)} k_2$$

Явно разрешая первое неравенство в системе условий устойчивости относительно  $k_3$ , а остальные – относительно  $k_1$ , получим систему условий в новой форме:

$$\begin{cases} k_3 < B - k_4 \\ k_1 > A + \frac{C - A}{D + 1} - \frac{C - A}{D + 1} k_2 \\ k_1 < \frac{(B - k_3)(A + 1) + k_4(D - C)}{B - k_3 - k_4} - k_2 \\ k_1 < \frac{E(A + D) + H(C - A) - F + AH(D + 1)}{E + H(D + 1)} - \frac{E + H(C - A)}{E + H(D + 1)} k_2. \end{cases} \quad (3.s24)$$

Используя связь коэффициентов (3.s19), условие устойчивости (3.s24) для коэффициентов регулятора, записанного для системы с безразмерными

переменными, можно преобразовать в условие устойчивости для системы в исходных переменных. Эти условия устойчивости имеют вид, приведенный в (3.s25).

Полученную систему неравенств можно использовать в следующем порядке. Вначале выбирается значение  $c_4$  и из первого неравенства определяется ограничение на выбор  $c_3$ . После выбора  $c_3$  берется некоторое  $c_2$ . Из трех последних неравенств определяются двухсторонние ограничения на  $c_1$ . Если этот диапазон не пуст, выбирается конкретное значение  $c_1$ . Если же пуст, необходимо изменить значение  $c_2$  или  $c_3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} c_3 < \frac{\gamma}{\alpha} B - \frac{\beta}{\alpha} c_4, \\ c_1 > \left( A + \frac{C-A}{D+1} \right) \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{C-A}{D+1} \right) \frac{\beta}{\alpha} c_2, \\ c_1 < \frac{(B - \frac{\alpha}{\gamma} c_3)(A+1) + \frac{\beta}{\gamma} (D-C) c_4}{\left( B - \frac{\alpha}{\gamma} c_3 - \frac{\beta}{\gamma} c_4 \right) \alpha} \alpha - \frac{\beta}{\alpha} c_2, \\ c_1 < \frac{E(A+D) + H(C-A) - F + AH(D+1)}{E + H(D+1)} \frac{1}{\alpha} - \frac{E + H(C-A)}{E + H(D+1)} \frac{\beta}{\alpha} c_2. \end{array} \right. \quad (3.s25)$$

### 3.5.2. Упражнение: численное исследование переходных процессов в зависимости от размещения параметров регулятора в области устойчивости

Для исследования поведения переходных процессов в системе качели–тележка–регулятор на сайте [10] предоставляется код программы, написанный для системы MatLab. Программа представляет оконное приложение, вид главного окна которой представлен на рис. 3.2. Программа многофункциональна и в зависимости от режима использования позволяет исследовать несколько типов линейных регуляторов по состоянию применительно как к линейной, так и к нелинейной моделям объекта качели–тележка.

В окне программы задаются значения физических параметров системы.

При исследовании влияния выбора параметров регулятора в пределах области устойчивости на поведение переходных процессов, программа предоставляет некоторый специальный сервис по выбору параметров из условий (3.s25).

Для того чтобы было проще выбрать точку в области устойчивости, при нажатии кнопки «Принять» над окнами ввода коэффициентов регулятора появляются неравенства с конкретными числовыми ограничителями областей ввода параметров регулятора. Значения ограничителей вычисляются согласно

неравенств из (3.s25). С помощью кнопки «Добавить» параметры регулятора поочередно заносятся в программу.

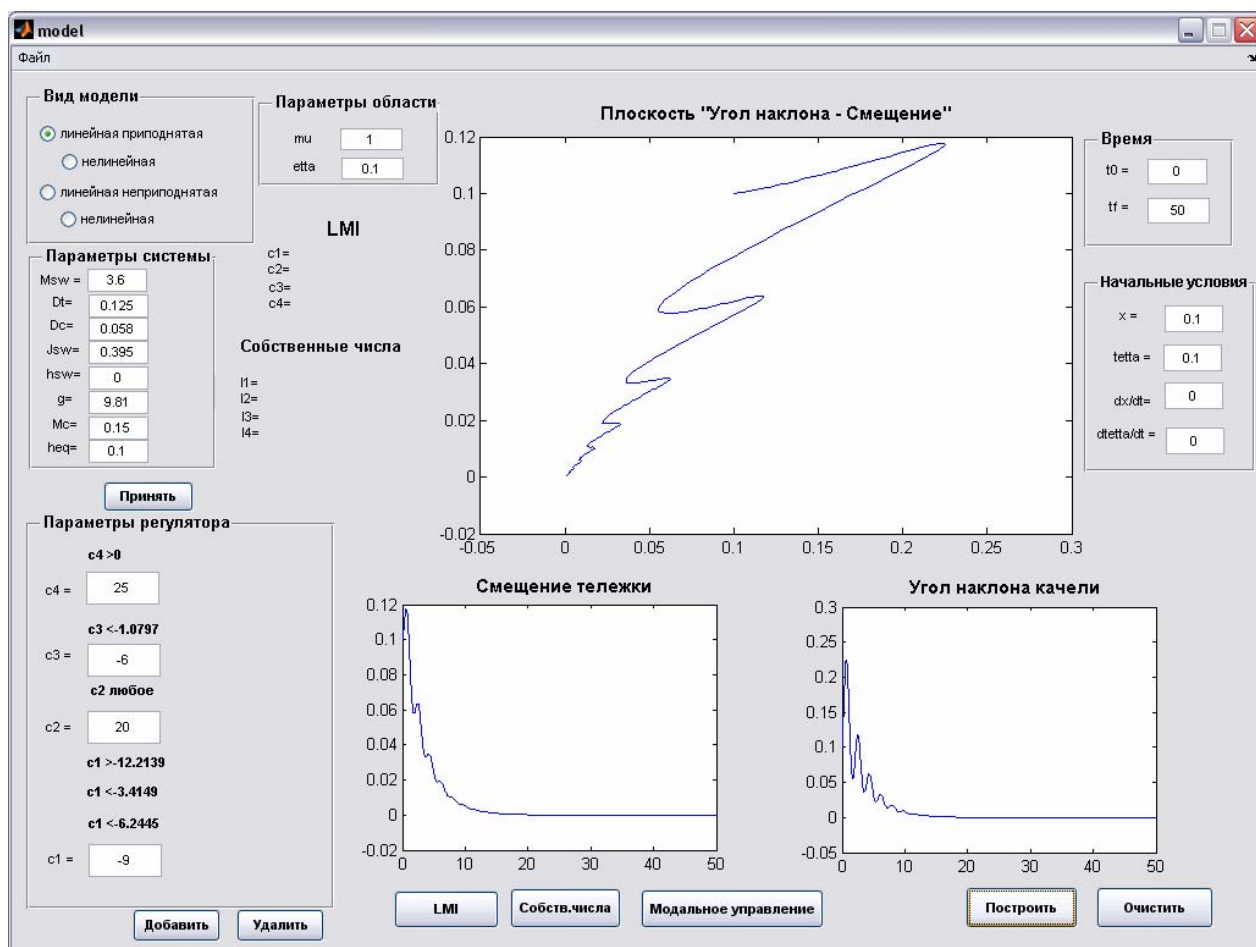


Рис. 3.2. Вид главного окна исследовательской программы: показан расчет по линейной модели при коэффициентах регулятора  $(-9; 20; -6; 25)$

Приложение позволяет выполнить расчет изменений во времени значений обобщенных координат модели, используя методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядков. Находятся решения систем как линеаризованных, так и нелинейных дифференциальных уравнения, с предварительно заданными начальными условиями и временем расчета. При нажатия на кнопку «Построить» программа строит графики зависимости от времени и выбранных параметров регулятора: смещение тележки  $x_c$  относительно центра качелей и угол наклона качелей  $\theta$ , а так же строит проекцию фазовых траекторий на плоскости  $x_c$  и  $\theta$ . Так же в программе можно получить график функции управляющего воздействия  $u(t) = F_c(t)$ .

Для облегчения интуитивного восприятия и интерпретации результатов все расчеты выполняются программой в исходных размерных переменных.

Приведем три примера с результатами моделирования, выполненными с использованием программы для MatLab [10] для значений коэффициентов



регулятора, выбираемых как внутри области устойчивости, так и при небольшом выходе за ее границы. Расчеты проведены как по линейной, так и нелинейной моделям. Значения физических параметров системы «качели–тележка» в этих экспериментах выбирались в соответствие с табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Принятые значения физических параметров системы «качели–тележка» при проведении вычислительного эксперимента

Параметр	$M_{sw}$	$M_c$	$J_{sw}$	$g$	$h_{sw}$	$h_{eq}$	$D_T$	$D_c$
Значение	3.6	1.15	0.395	9.81	0.0	0.1	0.125	0.058
Размерность, СИ	кг	кг	кг·м <sup>2</sup>	кг·м/с <sup>2</sup>	н·м·(рад/с) <sup>-1</sup>	н·(м/с) <sup>-1</sup>	м	м

**Пример А.** Выберем параметры регулятора согласно рис. 3.3 глубоко в области устойчивости:  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-9; 20; -6; 25)$ .

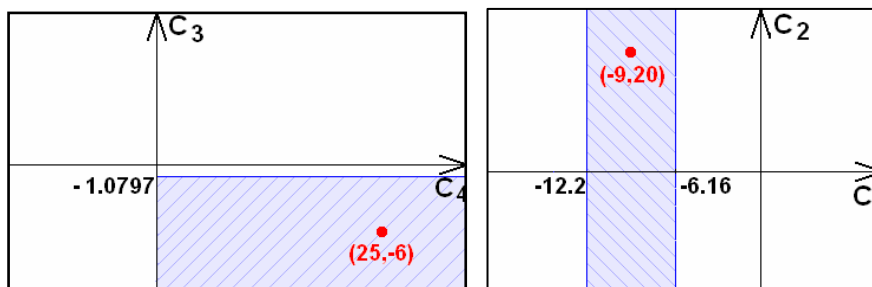


Рис. 3.3. Сечения области устойчивости: слева – по  $c_4, c_3$  при  $(c_1; c_2) = (-9; 20)$ ; справа – по  $c_1, c_2$  при  $(c_3; c_4) = (-6; 25)$ ; параметры выбраны глубоко в области устойчивости

Поведение переходных процессов в линейной и нелинейной моделях при этих параметрах практически совпадает. На рис. 3.4-3.5 показаны переходные процессы для нелинейной модели.

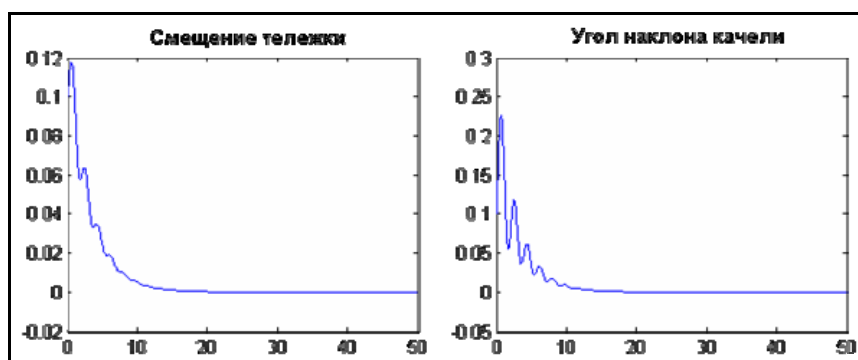


Рис. 3.4. Изменения  $x_c$  и  $\theta$  при параметрах регулятора  $(-9; 20; -6; 25)$

На правом из рисунков на рис. 3.5 показано также изменение во времени величины управляющего воздействия.

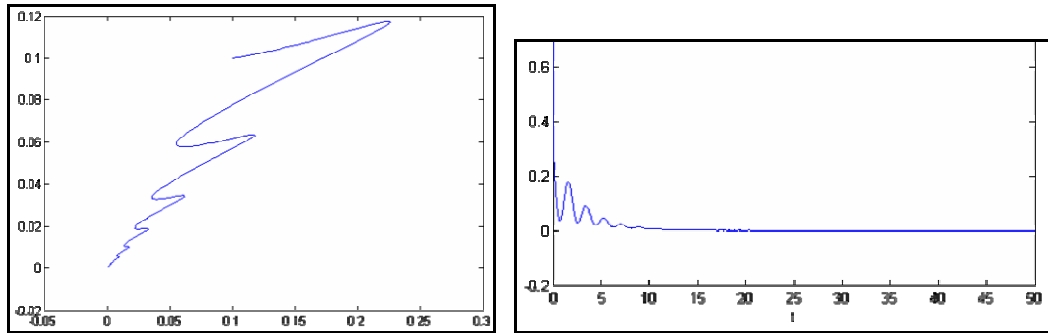


Рис. 3.5. Переходный процесс на плоскости  $(\theta; x_c)$  из состояния  $(0.1; 0.1; 0; 0)$  и значения управления  $u(t)$  в нелинейной модели для параметров регулятора  $(-9; 20; -6; 25)$

**Пример В.** Выберем параметры регулятора согласно рис. 3.6 в области устойчивости, но близко к ее границе:  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-6.5; 20; -6; 25)$ .

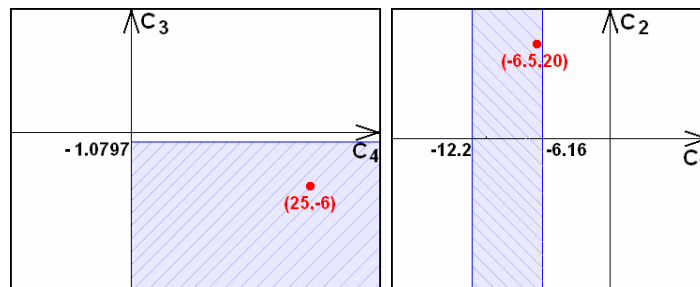


Рис. 3.6. Сечения области устойчивости: слева – по  $c_4, c_3$  при  $(c_1; c_2) = (-6.5; 20)$ ; справа – по  $c_1, c_2$  при  $(c_3; c_4) = (-6; 25)$ ; параметры выбраны близко к границе области устойчивости

Поведение переходных процессов в линейной и нелинейной моделях при этих параметрах практически совпадает. На рис. 3.7-3.8 показаны переходные процессы для нелинейной модели. Если сравнить их поведение с поведением в примере *A*, можно отметить заметное ухудшение характера сходимости в примере *B*. Это связано с приближением параметров в примере *B* к границам области устойчивости. Таким образом, эти два примера наглядно показывают, что выполнение условий асимптотической устойчивости само по себе совершенно не обеспечивает хорошего качества переходного процесса. Следовательно, выбор параметров регулятора необходимо выполнять исходя из более жестких требований, чем условия асимптотической устойчивости.

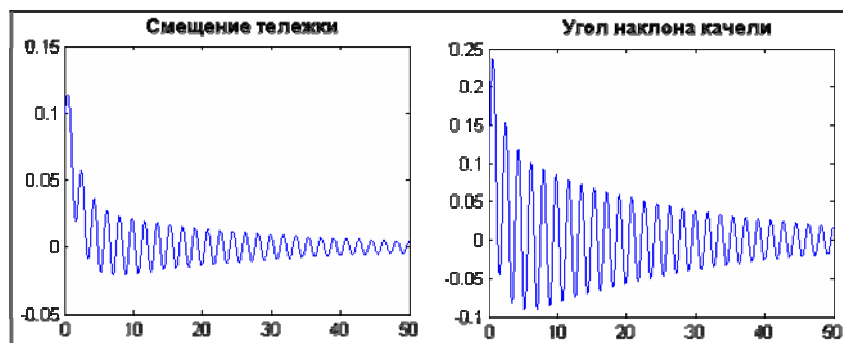


Рис. 3.7. Изменения  $x_c$  и  $\theta$  при параметрах регулятора  $(-6.5; 20; -6; 25)$

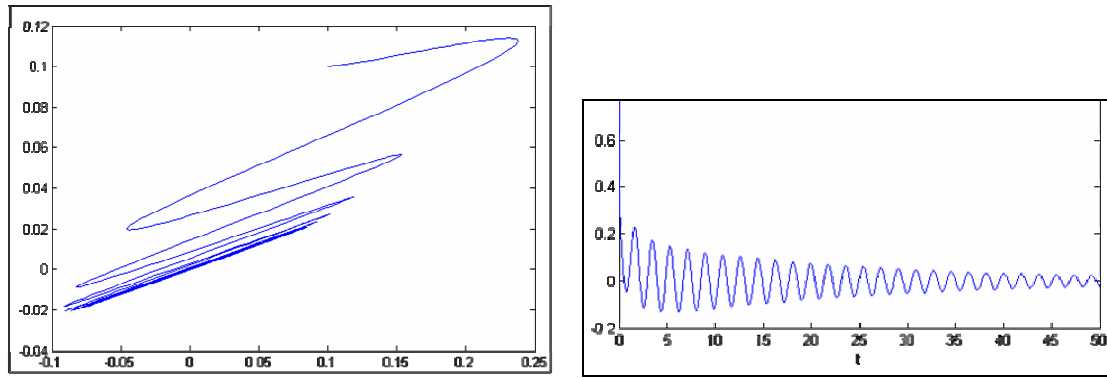


Рис. 3.8. Переходный процесс на плоскости  $(\theta; x_c)$  из состояния  $(0.1; 0.1; 0; 0)$  и значения управления  $u(t)$  в нелинейной модели для параметров регулятора  $(-6.5; 20; -6; 25)$

**Пример С.** Теперь выберем параметры регулятора согласно рис. 3.9 так, чтобы они немного вышли за границы области устойчивости, а именно  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-5; 20; -6; 25)$ .

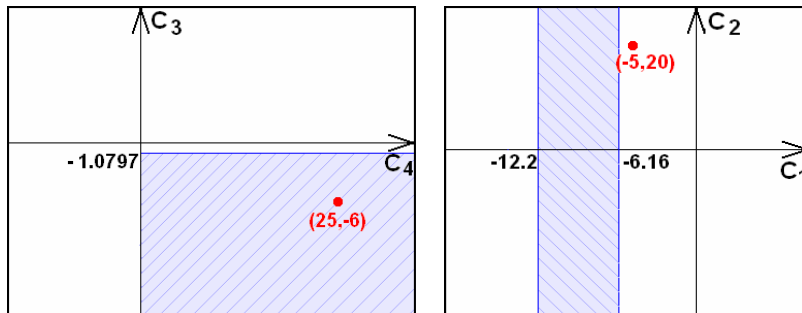


Рис. 3.9. Сечения области устойчивости: слева – по  $c_4, c_3$  при  $(c_1; c_2) = (-5; 20)$ ; справа – по  $c_1, c_2$  при  $(c_3; c_4) = (-6; 25)$ ; параметры выведены за границы области устойчивости

Поведение переходных процессов в линейной и нелинейной моделях при этих параметрах количественно отличаются из-за возникновения значительных отклонений от состояния равновесия вследствие неустойчивости. На рис. 3.10-3.12 показаны переходные процессы для обоих случаев.

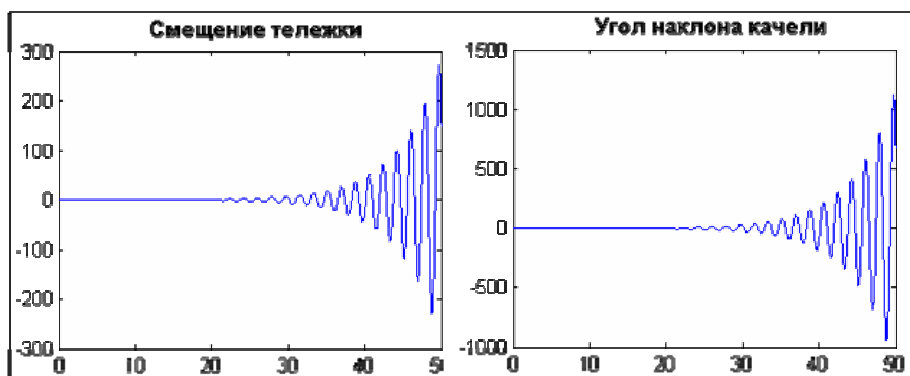


Рис. 3.10. Изменения  $x_c, \theta$  при параметрах регулятора  $(-5; 20; -6; 25)$  в линейной модели

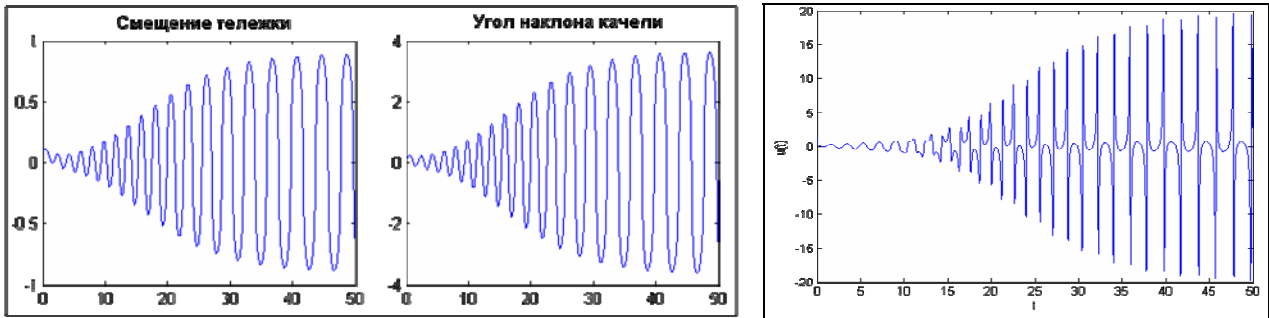


Рис. 3.11. Изменения  $x_c$ ,  $\theta$  и управления  $u(t)$  при параметрах регулятора  $(-5; 20; -6; 25)$  в нелинейной модели

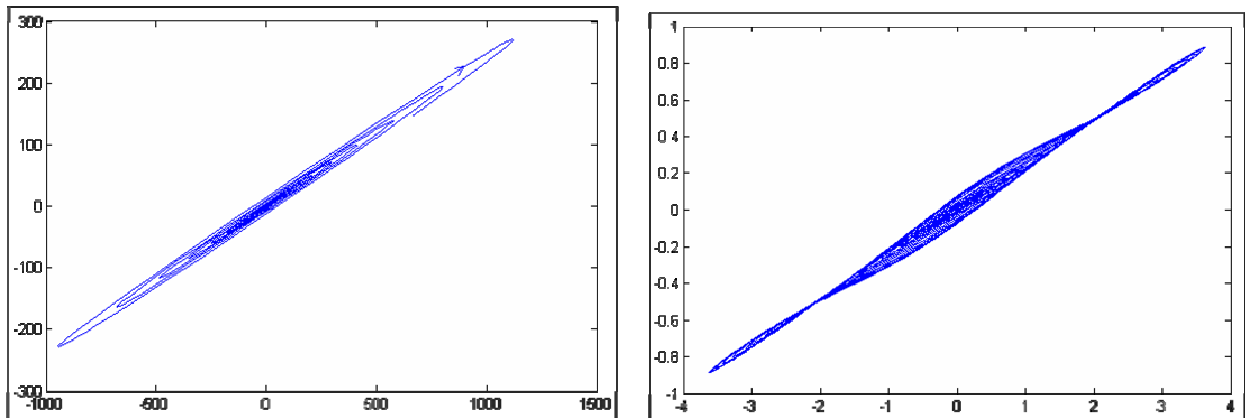


Рис. 3.12. Переходный процесс на плоскости  $(\theta; x_c)$  из состояния  $(0.1; 0.1; 0; 0)$  в линейной (слева) и нелинейной (справа) моделях для параметров регулятора  $(-5; 20; -6; 25)$

Пример С иллюстрирует эффект дестабилизации системы при незначительном выходе параметров регулятора за пределы области устойчивости.

**Задание.** Проведите с помощью компьютерной программы [10] собственные расчеты при других значениях параметров регулятора, выбирая их с различной степенью близости от границ области устойчивости.

В следующих пунктах 3.6-3.7, применительно к объекту качели–тележка, рассмотрены методы выбора параметров линейного регулятора по состоянию, обеспечивающие не только асимптотическую устойчивость, но и заданное качество переходных процессов, а также проведено их сопоставление и исследование.

## 3.6. Синтез регуляторов с использованием корневых методов – модальное управление

### 3.6.1. Модальное управление

Под задачей модального управления обычно понимают задачу поиска параметров линейного регулятора, обеспечивающих размещение всех корней характеристического полинома замкнутой системы в заданной области

комплексной плоскости или же в заданных точках комплексной плоскости. Такая постановка задачи определяется тем, что отклик линейной системы на конечное по времени внешнее возмущение определяется корнями характеристического полинома.

В п. 3.6.2 будет рассмотрен вариант постановки, связанный с размещением корней в заданной области. Выберем ее форму. В общем случае (т.е. при некрратных корнях) переходный процесс по вектору состояния линеаризованной системы имеет вид:

$$x(t) = \sum C_k e^{\lambda_k t} = \sum e^{\delta_k t} C_k (\cos(\omega_k t) + i \sin(\omega_k t)) = \sum e^{\delta_k t} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)), (3.9)$$

где последняя сумма берется по всем действительным и всем парам комплексно-сопряженных корней характеристического полинома,  $A_k, B_k$  – постоянные векторы, зависящие от начальных условий,  $\lambda_k = \delta_k + i \omega_k$  – корни характеристического полинома.  $k$ -й элемент суммы называют модой, соответствующей собственному значению  $\lambda_k$ .

К конкретному виду области требуемого размещения корней можно прийти исходя из следующих соображений. Наложим два требования на характер протекания переходного процесса.

1. Потребуем, чтобы все составляющие суммы, т.е. все моды, затухали по порядку не хуже, чем экспонента  $e^{-\eta \cdot t}$ .

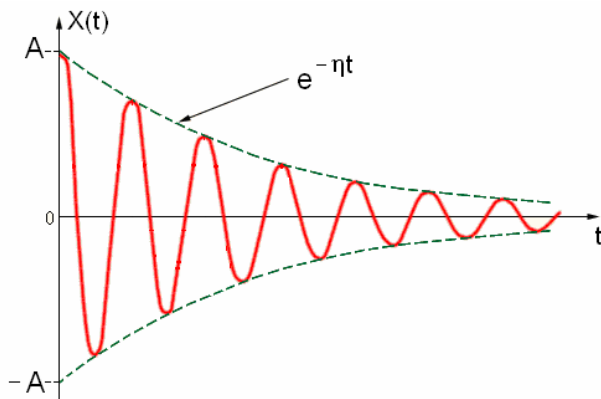


Рис. 3.13. Требование к скорости затухания всех мод переходного процесса

2. Заметим, что период  $k$ -й составляющей, если она имеет колебательный характер, определяется значением  $T_k = 2\pi / \omega_k$ . Исходя из предпосылки, что колебания на высоких частотах менее желательны, чем на низких, потребуем их более быстрого затухания.

Это удобно формализовать таким образом (см. рис. 3.14), чтобы коэффициент  $\xi_k$  затухания любой колебательной составляющей за ее период был всегда ограничен одной и той же величиной, определяемой некоторым параметром  $\mu$ :

$$\xi_k = e^{2\pi\delta_k/\omega_k} \leq e^{-2\pi/\mu} < 1.$$

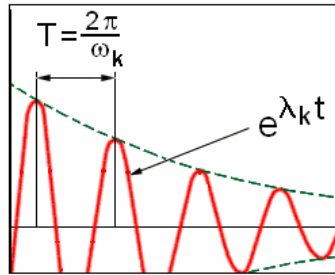


Рис. 3.14. Качество процесса определяется еще и заданной степенью затухания за период колебаний для каждой из собственных частот

Таким образом, получим два условия, определяющие требования к качеству протекания переходного процесса:

$$\delta_k \leq -\eta; \quad \left| \frac{\delta_k}{\omega_k} \right| \geq \frac{1}{\mu}. \quad (3.10)$$

Условия (3.10) определяют требования к области размещения корней  $G$ , показанной на рис. 3.15.

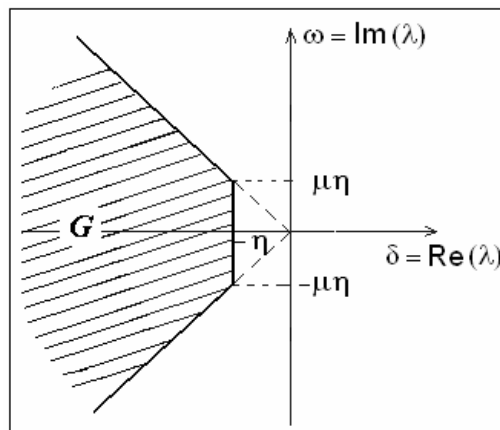


Рис. 3.15. Область  $G$  желаемого размещения корней

Для рассматриваемой задачи ниже в п. 3.6.2-3.6.3 будут продемонстрированы два подхода к выбору параметров модального регулятора.

В качестве первого будет применен метод  $D$ -разбиения по отношению к области размещения корней  $G$  вида (3.10). В качестве второго будет продемонстрирован метод линейных матричных неравенств. Результаты применения обоих методов сопоставляются в п. 3.6.4.

### 3.6.2. Упражнение: построение области обобщенной устойчивости по параметрам регулятора $s_1$ и $s_2$ методом $D$ -разбиения

Сформулируем задачу. Рассмотрим линеаризованную систему уравнений в безразмерных переменных (3.s18), замыкаемую линейным регулятором вида (3.s20). Полная замкнутая система имеет вид (3.s21). Требуется построить

методом  $D$ -разбиения область обобщенной устойчивости по параметрам регулятора  $c_1, c_2$ , соответствующую желаемой области  $G$  размещения корней из (3.10). Значения двух остальных параметров  $c_3, c_4$  следует выбрать исходя из первого неравенства в условиях устойчивости (3.s25).

Общая идея метода  $D$ -разбиения рассмотрена в п. 1.1.5.2 и п. 1.2.3.2. Его полное описание можно найти в монографии [4].

Следует отметить, что при проведении подобных исследований  $D$ -разбиение строят, как правило, по безразмерным параметрам, поскольку при этом повышается общность результата. Здесь же поставлена задача построения области обобщенной устойчивости по размерным «физическим» параметрам регулятора. Это связано с тем, что при такой форме представления результат проще интерпретировать применительно к конкретной лабораторной установке.

**Задание.** Записать характеристическое уравнение системы и ввести параметризацию границы области  $G$  для построения  $D$ -разбиения по размерным параметрам регулятора  $c_1, c_2$ .

**Решение.**

Характеристическое уравнение замкнутой системы в безразмерных переменных было получено в (3.s22). Запишем его с использованием размерных коэффициентов регулятора, используя связи между размерными и безразмерными коэффициентами из (3.s19). Получим:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (B - c_3 \cdot \alpha/\gamma - c_4 \cdot \beta/\gamma) \lambda^3 + (-c_1 \cdot \alpha - c_2 \cdot \beta + A - D) \lambda^2 + \\ + ((c_3 \cdot \alpha/\gamma - B)(D + 1) + c_4 \cdot \beta/\gamma(C - A)) \lambda + \\ + (c_1 \cdot \alpha - A)(D + 1) + (c_2 \cdot \beta - 1)(C - A) = 0. \end{aligned} \quad (3.s26)$$

где обобщенные параметры  $A, B, C, D$  заданы выражениями, приведенными при описании систем (3.s18), (3.s15), а параметры нормировки  $\alpha, \beta, \gamma$  определяются из (3.s17).

Для построения  $D$ -разбиения введем параметризацию границы области  $G$  желаемого размещения корней из (3.10). В качестве параметра традиционно выберем  $\omega$  – величину мнимой части комплексного параметра  $\lambda$ . Параметризация будет кусочно-линейной и иметь, в соответствии с рис. 3.15. следующий вид:

$$\lambda = \lambda(\omega) = \begin{cases} -\frac{\omega}{\mu} + i\omega, & \omega > \mu\eta \\ -\eta + i\omega, & -\mu\eta < \omega < \mu\eta \\ \frac{\omega}{\mu} + i\omega, & \omega < -\mu\eta \end{cases} \quad (3.s27)$$

Если в характеристическое уравнение (3.26) вместо  $\lambda$  подставить полученную параметризацию границы  $\lambda = \lambda(\omega)$ , будет получено комплексное уравнение следующей структуры:

$$E(\omega) \cdot c_1 + F(\omega) \cdot c_2 = H(\omega, c_3, c_4),$$

эквивалентное системе двух уравнений, линейных по  $c_1, c_2$ :

$$\begin{cases} c_1 \cdot \operatorname{Re} E(\omega) + c_2 \cdot \operatorname{Re} F(\omega) = \operatorname{Re} H(\omega, c_3, c_4) \\ c_1 \cdot \operatorname{Im} E(\omega) + c_2 \cdot \operatorname{Im} F(\omega) = \operatorname{Im} H(\omega, c_3, c_4). \end{cases} \quad (3.11)$$

Система (3.11) определяет отображение точки границы  $\lambda = \lambda(\omega)$  области  $G$  на плоскость параметров регулятора  $c_1, c_2$ . Для диапазонов значений  $\omega$ , при которых главный определитель системы  $\Delta(\omega) \neq 0$ , отображение однозначно и порождает параметризованную параметром  $\omega$  кривую  $\Gamma(\omega)$  на плоскости  $c_1, c_2$ , образующую нормальную часть границы  $D$ -разбиения. Причем, на участке кривой, где  $\Delta(\omega) > 0$ , локальный фрагмент области  $G$  в окрестности точки границы  $\lambda = \lambda(\omega)$  будет отображаться по левую сторону кривой  $\Gamma(\omega)$ . Имеется в виду левая сторона при направлении обхода этой кривой, связанном с возрастанием параметра  $\omega$ . Это принято отмечать нанесением штриховки на левую сторону кривой  $\Gamma(\omega)$ , проходимой в направлении возрастания  $\omega$ . При отрицательном знаке определителя штриховка наносится на правую сторону кривой  $\Gamma(\omega)$  при том же направлении обхода.

Нетрудно понять, что в силу сопряженной симметрии области  $G$ , одни и те же участки кривой  $\Gamma(\omega)$  будут дважды проходиться в противоположных направлениях для симметричных по знаку значений  $\omega$ . При этом знаки определителя при этих проходах будут противоположными. Это приведет к возникновению двойной штриховки на нормальных участках кривой  $D$ -разбиения.

Для значений  $\omega = \omega^*$ , при которых оказывается  $\Delta(\omega) = 0$  и возникает линейная зависимость уравнений в системе (3.11), отображение точки  $\lambda = \lambda(\omega^*)$  границы области  $G$  теряет однозначность. Образом такой точки на плоскости  $c_1, c_2$  является прямая, определяемая системой (3.11) при  $\omega = \omega^*$ . Такие прямые образуют особые фрагменты границы  $D$ -разбиения и называются особыми прямыми  $L_{\omega^*}$ . Особые фрагменты границы также должны иметь штриховку. Если  $\omega^*$  конечно и  $\omega^* \neq 0$ , особые прямые  $L_{\omega^*}$ , в общем случае, будут иметь двойную штриховку. В то же время, особые прямые  $L_0$  и  $L_\infty$ , если они существуют, будут иметь одинарную штриховку. Направление штриховки на особых прямых согласуется со штриховкой на нормальных участках границы  $\Gamma(\omega)$ .



Исходя из способа построения границы  $D$ -разбиения, понятно, что нанесенная на границу штриховка и ее кратность имеют следующий содержательный смысл. При пересечении границы  $D$ -разбиения на плоскости  $c_1, c_2$  с не заштрихованной стороны в заштрихованную в точке, соответствующую значению  $\tilde{\omega}$ , некоторое количество корней характеристического уравнения покинет область  $G$  через точку границы  $\lambda = \lambda(\tilde{\omega})$ , а при пересечении в противоположном направлении, корни войдут в область  $G$ . Заметим, что при этом изменение количества корней характеристического полинома, расположенных в области  $G$ , совпадает с кратностью штриховки в точке границы  $D$ -разбиения, соответствующей значению  $\tilde{\omega}$ . При одинарной штриховке в точке пересечения границы  $D$ -разбиения границу области  $G$  в общем случае будет пересекать один действительный корень, в точке с двойной штриховкой – два комплексно сопряженных корня  $\lambda = \lambda(\pm\omega)$ .

Нормальные и особые фрагменты границы  $D$ -разбиения разделяют плоскость параметров  $c_1, c_2$  на некоторое количество подобластей. Важно то, что всем значениям  $c_1, c_2$  в пределах каждой подобласти соответствует одно и то же количество корней характеристического уравнения, находящихся при этих  $c_1, c_2$  в области  $G$ . Это количество приписывается в качестве индекса ( $k$ ) данной подобласти. Если индекс хотя бы одной подобласти известен, можно легко определить индексы остальных подобластей, используя информацию о штриховке границы  $D$ -разбиения.

Подобласть  $D$ -разбиения  $D(k)$ , индекс ( $k$ ) для которой равен  $n$  – степени характеристического полинома, определяет множество значений параметров регулятора  $c_1, c_2$ , при которых все корни характеристического уравнения размещаются в требуемой области  $G$ . Регулятор с такими параметрами обеспечивает модальное управление с заданными свойствами.

**Задание.** Используя приведенное выше описание требуется получить параметрическое представление нормальных фрагментов  $\Gamma(\omega)$  границы  $D$ -разбиения и определить для них направление и кратность штриховки.

**Решение.**

Поскольку параметризация границы носит кусочно-линейный характер, систему вида (3.11) придется записывать и решать отдельно для различных ветвей параметризации.

В силу симметрии области  $G$  достаточно вместо трех рассмотреть только два варианта параметризации  $A$  и  $B$ .

**Вариант А.** Рассмотрим первую ветвь параметризации для  $\omega > \eta \cdot \mu$  из (3.s27). Подставим  $\lambda = -\omega/\mu + i\omega$  в характеристическое уравнение (3.s26):

$$(-\omega/\mu + i\omega)^4 + (B - k_3 - k_4)(-\omega/\mu + i\omega)^3 + (-k_1 - k_2 + A - D)(-\omega/\mu + i\omega)^2 + \\ + ((k_3 - B)(D + 1) + k_4(C - A))(-\omega/\mu + i\omega) + k_1(D + 1) + k_2(C - A) - (AD + C) = 0$$

где  $k_1 = c_1 \alpha$ ,  $k_2 = c_2 \beta$ ,  $k_3 = c_3 \cdot (\alpha/\gamma)$ ,  $k_4 = c_4 \cdot (\beta/\gamma)$ .

Выделим действительную и мнимую части и запишем систему двух уравнений, имеющих структуру вида (3.11). Значения  $c_3, c_4$  будем фиксировать. Получим два уравнения, отмеченные ниже одним номером:

$$-\alpha \left( \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) \omega^2 - (D + 1) \right) c_1 - \beta \left( \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) \omega^2 - (C - A) \right) c_2 = - \left( 1 - \frac{6}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4} \right) \omega^4 - \\ - G(c_3, c_4) \left( \frac{3}{\mu} - \frac{1}{\mu^3} \right) \omega^3 - (A - D) \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) \omega^2 + L(c_3, c_4) \frac{1}{\mu} \omega + (AD + C); \quad (3.s28)$$

а также

$$\frac{2\alpha}{\mu} \omega^2 c_1 + \frac{2\beta}{\mu} \omega^2 c_2 = \left( \frac{4}{\mu^3} - \frac{4}{\mu} \right) \omega^4 - G(c_3, c_4) \cdot \left( \frac{3}{\mu^2} - 1 \right) \omega^3 + \\ + (A - D) \frac{2}{\mu} \omega^2 - L(c_3, c_4) \cdot \omega. \quad (3.s29)$$

где

$$G(c_3, c_4) = B - c_3 \cdot (\alpha/\gamma) - c_4 \cdot (\beta/\gamma), \quad (3.s30)$$

$$L(c_3, c_4) = (c_3 \cdot (\alpha/\gamma) - B)(D + 1) + c_4 \cdot (\beta/\gamma) \cdot (C - A) \quad (3.s31)$$

Главный определитель  $\Delta_A(\omega)$  этой системы равен:

$$\Delta_A(\omega) = \begin{vmatrix} - \left( \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) \omega^2 - (D + 1) \right) \alpha; & - \left( \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) \omega^2 - (C - A) \right) \beta \\ \frac{2\alpha}{\mu} \omega^2 & \frac{2\beta}{\mu} \omega^2 \end{vmatrix} = - \frac{2\alpha\beta}{\mu} \omega^2 (C - A - D - 1).$$

Далее в этом разделе примеры поведения границ  $D$ -разбиения рассматривается для некоторых значений физических параметров системы «качели-тележка», несколько отличающихся от приведенных в табл. 3.1. Для выбранных значений, как, впрочем, и для значений из табл. 3.1 определитель отрицателен. То есть, для  $\omega > \eta \cdot \mu$  значение  $\Delta_A(\omega) < 0$ . Это означает, что штриховка соответствующего участка  $D$ -кривой должна производиться справа по направлению обхода.

Вычисляя остальные определители системы, получим параметризованное уравнение границы  $D$ -разбиения для значений  $\omega \geq \mu \cdot \eta$ , приведенное в (3.s32)-(3.s33).

$$c_1 = \frac{1}{\delta_A(\omega)} \left\{ \left( \frac{2}{\mu^5} + \frac{4}{\mu^3} + \frac{2}{\mu} \right) \omega^5 - G(c_3, c_4) \left( \frac{1}{\mu^4} + \frac{2}{\mu^2} + 1 \right) \omega^4 - (C - A) \left( \frac{4}{\mu^3} - \frac{4}{\mu} \right) \omega^3 + \right. \\ \left. + \left( L(c_3, c_4) \left( \frac{1}{\mu^2} + 1 \right) + G(c_3, c_4) (C - A) \left( \frac{3}{\mu^2} - 1 \right) \right) \omega^2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{\mu} ((A - D)(C - A) - (AD + C)) \omega + L(c_3, c_4) (C - A) \right\}; \quad (3.s32)$$

$$c_2 = \frac{1}{\delta_A(\omega)} \left\{ - \left( \frac{2}{\mu^5} + \frac{4}{\mu^3} + \frac{2}{\mu} \right) \omega^5 + G(c_3, c_4) \left( \frac{1}{\mu^4} + \frac{2}{\mu^2} + 1 \right) \omega^4 + (D + 1) \left( \frac{4}{\mu^3} - \frac{4}{\mu} \right) \omega^3 - \right. \\ \left. - \left( L(c_3, c_4) \left( \frac{1}{\mu^2} + 1 \right) + G(c_3, c_4) (D + 1) \left( \frac{3}{\mu^2} - 1 \right) \right) \omega^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\mu} ((A - D)(D + 1) - (AD + C)) \omega - L(c_3, c_4) (D + 1) \right\}, \quad (3.s33)$$

где  $\delta_A(\omega) = -(2\alpha\beta/\mu) \cdot \omega \cdot (C - A - D - 1)$  значения  $G(c_3, c_4)$  и  $L(c_3, c_4)$  определяются из (3.s30)- (3.s31).

Полученные соотношения являются достаточно громоздкими и требуют компьютерных методов построения вида кривой.

Заметим, что выводить формулы для фрагмента  $D$ -кривой, пробегаемой при  $\omega \leq -\mu\eta$  не нужно, поскольку этот фрагмент будет совпадать с только что рассмотренным, но станет проходиться в обратном направлении. Это приведет к двойной штриховке при построении фрагмента границы (3.s32)-(3.s33).

*Вариант В.* Рассмотрим диапазон  $-\mu \cdot \eta \leq \omega \leq \mu \cdot \eta$ . На этом промежутке изменения параметра  $\omega$  параметризация границы  $G$  имеет вид:  $\lambda = -\eta + i\omega$ . В действительности, в силу симметрии, достаточно рассмотреть лишь промежуток  $0 \leq \omega \leq \mu \cdot \eta$ . Подставим вид параметризации вместо параметра  $\lambda$  в характеристическое уравнение (3.s26). Получим:

$$(-\eta + i\omega)^4 + (B - k_3 - k_4)(-\eta + i\omega)^3 + (-k_1 - k_2 + A - D)(-\eta + i\omega)^2 + \\ + ((k_3 - B)(D + 1) + k_4(C - A))(-\eta + i\omega) + k_1(D + 1) + k_2(C - A) - (AD + C) = 0,$$

где  $k_1 = c_1 \alpha$ ,  $k_2 = c_2 \beta$ ,  $k_3 = c_3 \cdot (\alpha/\gamma)$ ,  $k_4 = c_4 \cdot (\beta/\gamma)$ .

Выделим действительную и мнимую части и приравняем их к нулю. Получим линейную систему двух уравнений относительно  $c_1, c_2$ , считая значения  $c_3, c_4$  фиксированными:

$$\begin{cases} -\alpha \cdot ((\eta^2 - \omega^2) - (D + 1))c_1 - \beta \cdot ((\eta^2 - \omega^2) - (C - A))c_2 = -\omega^4 + 6\omega^2\eta^2 - \eta^4 - \\ \quad - G(c_3, c_4) \cdot (3\omega^2\eta - \eta^3) - (A - D)(\eta^2 - \omega^2) + L(c_3, c_4) \cdot \eta + (AD + C); \\ 2\omega\eta \alpha c_1 + 2\omega\eta \beta c_2 = -4\omega^3\eta + 4\omega\eta^3 - G(c_3, c_4) \cdot (3\omega\eta^2 - \omega^3) + \\ \quad + 2(A - D)\omega\eta - L(c_3, c_4) \cdot \omega, \end{cases} \quad (3.s34)$$

где значения  $G(c_3, c_4)$  и  $L(c_3, c_4)$  определяются из (3.s20)- (3.s31).

Главный определитель  $\Delta_B(\omega)$  равен:

$$\Delta_B(\omega) = \begin{vmatrix} -((\eta^2 - \omega^2) - (D+1))\alpha & -((\eta^2 - \omega^2) - (C-A))\beta \\ 2\omega\eta\alpha & 2\omega\eta\beta \end{vmatrix} = -2\omega\eta\alpha\beta \cdot (C - A - D - 1).$$

При изменении параметра  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \mu \cdot \eta$  значение определителя  $\Delta_B(\omega) < 0$ , значит штриховка этого участка  $D$ -кривой производится справа.

Вычисляя остальные определители системы, получим параметрическое представление (3.s31) для участка кривой  $D$ -разбиения при  $-\mu\eta \leq \omega \leq \mu\eta$ . Поскольку в выражения вошли только четные степени, этот фрагмент границы будет проходиться дважды в разных направлениях. Поскольку при значениях  $\omega$  от  $-\mu\eta$  до  $-0$  определитель  $\Delta_B(\omega) > 0$ , штриховка окажется двойной.

$$c_1 = (1/\delta_B) \left\{ (2\eta - G(c_3, c_4))\omega^4 + (4\eta^3 - G(c_3, c_4)(2\eta^2 + C - A) + L(c_3, c_4) + 4\eta(C - A))\omega^2 + \right. \\ \left. + [2\eta^5 - G(c_3, c_4)(\eta^4 - 3\eta^2(C - A)) + (\eta^2 + (C - A))L(c_3, c_4) + \right. \\ \left. + (-4\eta^3(C - A) + 2\eta((AD + C) - (A - D)(C - A)))] \right\}; \quad (3.s35)$$

$$c_2 = (1/\delta_B) \left\{ -(2\eta - G(c_3, c_4))\omega^4 - (4\eta^3 - G(c_3, c_4)(2\eta^2 + D + 1) + L(c_3, c_4) + 4\eta(D + 1))\omega^2 - \right. \\ \left. + [-2\eta^5 + G(c_3, c_4)(\eta^4 - 3\eta^2(D + 1)) + (\eta^2 + (D + 1))L(c_3, c_4) + \right. \\ \left. + (-4\eta^3(D + 1) + 2\eta \cdot ((AD + C) - (A - D)(D + 1)))] \right\},$$

где  $\delta_B = -2\eta\beta(C - A - D - 1)$ , а значения  $G(c_3, c_4)$  и  $L(c_3, c_4)$  определяются из (3.s30)- (3.s31). •

Таким образом, описание нормальной части границы  $D$ -разбиения получено и определено направление и кратность штриховки. Осталось найти и построить особые прямые, которые могут входить в состав границы.

**Задание.** Выполнить анализ наличия особых прямых в составе границы  $D$ -разбиения. Получить уравнение особой прямой или прямых.

**Решение.**

В рассматриваемой задаче параметризация границы области  $G$  требуемого размещения корней является кусочно-линейной. Для каждого из фрагментов границы были получены системы уравнений (3.s28)-(3.s29) и (3.s35), определяющие отображения точки  $\lambda = \lambda(\omega)$  с границы  $G$  на плоскость параметров  $c_1, c_2$ . Особые прямые могут возникать при потере однозначности этих отображений.

Для потери однозначности необходимо, чтобы при соответствующих особых значениях  $\omega = \omega^*$  определители  $\Delta_A(\omega)$  или  $\Delta_B(\omega)$  обращались в ноль. В рассматриваемом примере как первый, так и второй определители обращаются в ноль только при  $\omega^* = 0$ . Однако нулевое значение  $\omega$  относится к области определения только одной из ветвей параметризации в (3.s27), а именно к центральной, т.е. к варианту  $B$ .

Для этого варианта при  $\omega = \omega^* = 0$  в системе (3.s35) второе уравнение превращается в тождество  $0 \equiv 0$ , а первое – определяет линейное многообразие множества значений  $c_1, c_2$ , соответствующих значению  $\omega^* = 0$ . Это и будет искомая особая прямая  $L_{\omega^*=0}$ .

$$\begin{aligned} & (\eta^2 - (C - A))\beta \cdot c_2 = \\ & = \eta^4 - G(c_3, c_4) \cdot \eta^3 + (A - D)\eta^2 - L(c_3, c_4) \cdot \eta - (AD + C) - (\eta^2 - (D + 1))\alpha c_1 \end{aligned} \quad (3.s36)$$

Штриховка этой особой прямой одинарная и ее направление должно быть согласовано со штриховкой фрагмента нормальной части границы  $D$ -разбиения, имеющего общую точку с этой прямой. При переходе через эту точку направление штриховки особой прямой должно изменяться на противоположное. •

Поскольку аналитическое представление границы  $D$ -разбиения в (3.s32)-(3.s33), (3.s35), (3.s36) является достаточно громоздким, границу  $D$ -разбиения приходится получать с использованием компьютерных построений.

На рис. 3.16 показан вид  $D$ -разбиения, полученного при значениях двух последних коэффициентов регулятора  $c_3 = -10$ ,  $c_4 = 100$ . Вид кривых построен с использованием программы, написанной в системе MatLab. Изображение главного окна программы представлено на рис. 3.2. Построение

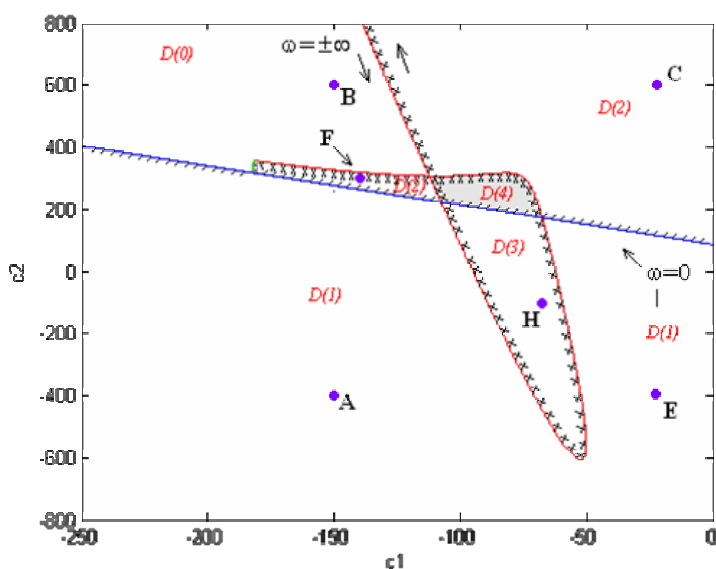


Рис. 3.16. Структура  $D$ -разбиения в плоскости параметров  $c_1, c_2$  при  $c_3 = -10$ ,  $c_4 = 100$

Нормальная часть границы  $D$ -разбиения, состоит из небольшого отрезка (отмечен зеленым) и продолжающей его кривой (отмечена красным). Особый участок границы  $L_{\omega^*=0}$  представляет собой прямую с одинарной штриховкой, проходящую через свободный конец упомянутого отрезка. В этой точке на особой прямой направление штриховки изменяется.

При пересечении границ  $D$ -разбиения с заштрихованной стороны на не заштрихованную один действительный или два комплексно сопряженных корня (их количество определяется кратностью штриховки в точке пересечения) покидают область  $G$  желаемого размещения корней. В рассматриваемом нами примере возможна только однозначная индексация подобластей разбиения. Она показана на рис. 3.29. Область  $D(4)$  является областью обобщенной устойчивости, т.е. областью параметров, обеспечивающих размещение корней в области  $G$ . Любые значения коэффициентов регулятора, выбранные в области  $D(4)$ , соответствуют модальному управлению.

### ***Анализ результатов $D$ -разбиения: миграция корней при изменениях параметров регулятора***

На рис. 3.16 отмечено несколько точек А, В, С, Е, Н, F из разных подобластей. В табл. 3.2 приведены соответствующие этим точкам значения собственных чисел, иллюстрирующие миграцию корней при изменении параметров регулятора. Значения корней характеристического полинома определялись с помощью специальной функции системы MatLab. При вычислениях были приняты следующие параметры области  $G$ :  $\mu = 1$ ,  $\eta = 1.5$  (см. рис. 3.15). Значения двух последних коэффициентов регулятора были зафиксированы на значениях:  $c_3 = -10$ ,  $c_4 = 100$ .

Таблица 3.2.

Размещение корней характеристического полинома для различных тестовых точек подобластей  $D$ -разбиения

Тестовая точка	Индекс подобласти	Корни характеристического полинома	Номер рисунка
A(-150, - 400)	D(3)	$\lambda_{1,2} = -25.58 \pm i \cdot 42.4$ ; $\lambda_3 = -7.99$ ; $\lambda_4 = 4.26$	3.17 (слева)
B(-150, 600)	D(0)	$\lambda_{1,2} = -25.68 \pm i \cdot 31.73$ ; $\lambda_{3,4} = -1.76 \pm i \cdot 5.15$	3.17 (средний)
C(20, 600)	D(2)	$\lambda_1 = -67.5$ ; $\lambda_2 = -6.06$ ; $\lambda_{3,4} = 9.34 \pm i \cdot 10.83$	3.17 (справа)
E(20, - 400)	D(1)	$\lambda_1 = -57.84$ ; $\lambda_{2,3} = -1.25 \pm i \cdot 12.44$ ; $\lambda_4 = 5.46$ ;	3.18 (слева)
F(-140, 300)	D(2)	$\lambda_{1,2} = -25.40 \pm i \cdot 32.89$ ; $\lambda_{3,4} = -2.04 \pm i \cdot 1.56$	3.18 (средний)
H(-70, -100)	D(3)	$\lambda_{1,2} = -19.25 \pm i \cdot 25$ ; $\lambda_3 = -18.96$ ; $\lambda_4 = 2.57$	3.18 (справа)
K(-90, 260)	D(4)	$\lambda_{1,2} = -23.39 \pm i \cdot 15.76$ ; $\lambda_{3,4} = -4.05 \pm i \cdot 1.99$	3.19

В последней колонке табл. 3.2 указаны номера рисунков, иллюстрирующих положение корней полинома по отношению к области  $G$ . Эти рисунки следует сопоставить с положением точек А-F по отношению к границам  $D$ -разбиения на рис. 3.16.

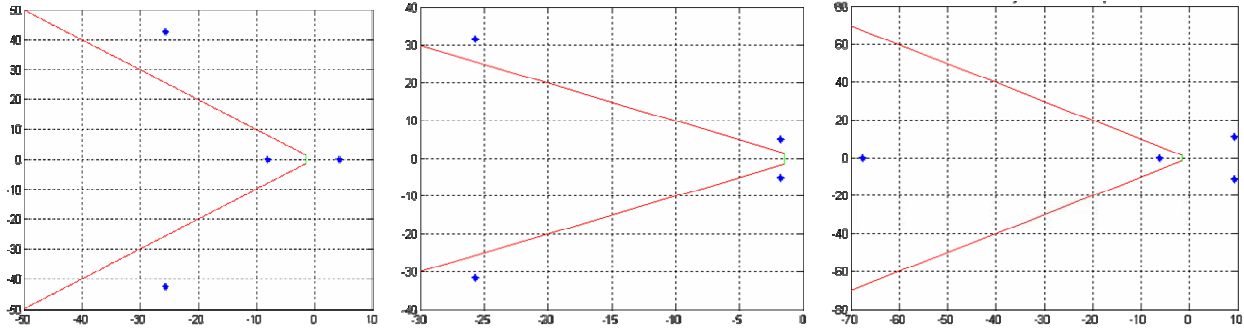


Рис. 3.17 Размещение корней характеристического полинома относительно области  $G$  для тестовых точек А, В, С

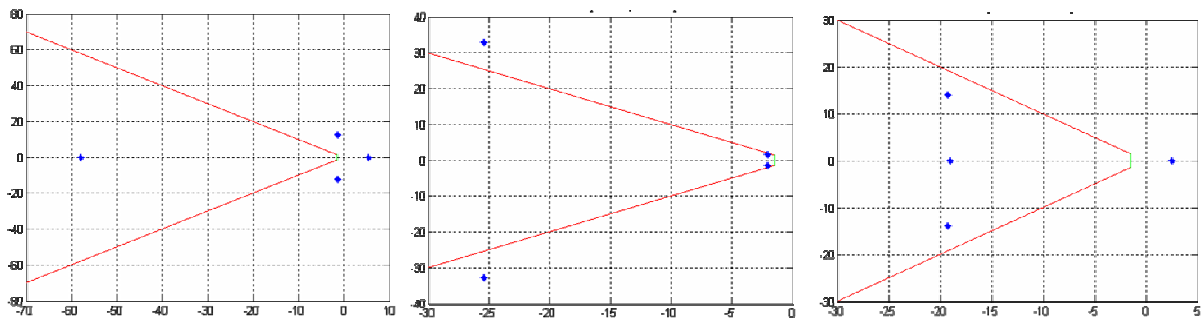


Рис. 3.18 Размещение корней характеристического полинома относительно области  $G$  для тестовых точек Е, F, Н

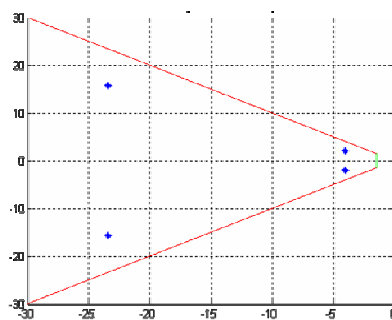


Рис. 3.19 Размещение корней характеристического полинома относительно области  $G$  для тестовой точки К

***Анализ результатов  $D$ -разбиения: изменение области обобщенной устойчивости при изменениях параметра  $\eta$  области  $G$***

Последим изменения области обобщенной устойчивости  $D(4)$  (она же является областью параметров модального регулятора) при изменении параметров  $\mu$  и  $\eta$  области  $G$ . Рассмотрим на примере изменения  $\eta$ . Примем  $c_3 = -10$ ,  $c_4 = 100$ , зафиксируем  $\mu = 1$  и будем увеличивать  $\eta$ , начиная со

значения  $\eta = 0.1$ . На рис. 2.20 приведены четыре изображения области обобщенной устойчивости для серии значений  $\eta = 0.1, 1.5, 3, 5.5$ .

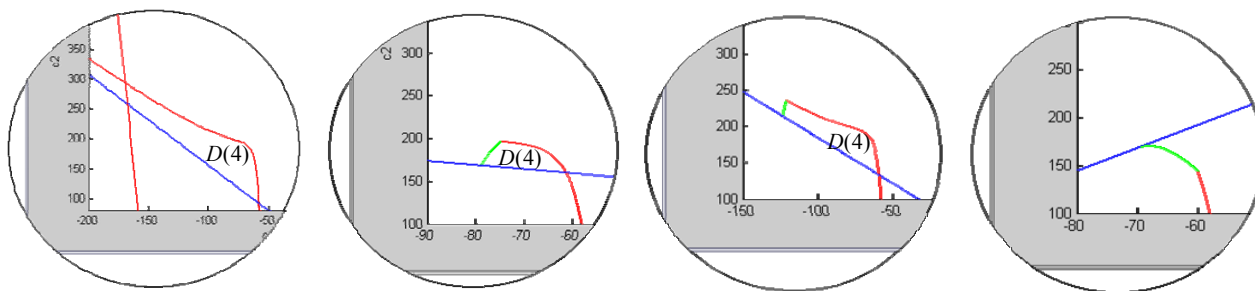


Рис. 3.20 Сокращение области  $D(4)$  параметров  $c_1, c_2$  модального регулятора при изменении характеристики  $\eta = 0.1, 1.5, 3, 5.5$  области размещения корней  $G$ ; при  $\eta = 5.5$  области  $D(4)$  нет

Видим, что с изменением  $\eta$  от 0 до 5.5 область  $D(4)$  уменьшается и исчезает. Таким образом, при выбранных значениях  $c_3$  и  $c_4$  существует критическое значения скорости затухания переходных процессов, определяемой параметром  $\eta$ . Обеспечить более высокие скорости затухания невозможно.

Кроме того, численные расчеты обнаруживают, что при достаточно большом увеличении  $\mu$  область обобщенной устойчивости  $D(4)$  изменяется, но не исчезает.

Таким образом, для выбранных значений параметров регулятора  $c_3$  и  $c_4$  при любых значениях  $\mu$  и  $\eta \in (0, 5.5)$  область  $D(4)$  требуемого качества переходных процессов существует.

### 3.6.3. Построение модального регулятора методом линейных матричных неравенств

Рассмотрим другой способ построения модального управления.

Воспользуемся (3.s16) – линейной моделью объекта управления в исходных переменных. Закроем эту систему обратной связью по состоянию через функцию управления

$$u(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4.$$

Структура замкнутой системы отвечает общему виду (3.s13)-(3.s14), а ее характеристическое уравнение имеет вид (3.s26).

Параметры модального регулятора, обеспечивающего размещение корней характеристического полинома в области  $G$  (см. рис.3.15), могут быть получены методом линейных матричных неравенств, описанным в разделе 1.

**Задание.** Следуя технике, приведенной в п. 1.4.3, получить линейные матричные неравенства, определяющие условия размещения корней характеристического уравнения (3.s26)  $G$ .



**Решение.**

Воспользуемся методикой получения требуемых условий в форме системы линейных матричных неравенств, описанной в п. 1.2.3.3 (см. также [5]). Область  $G$  вида (3.10), показанная на рис. 3.15, является пересечением двух подобластей стандартного вида, расположенных в левой комплексной полуплоскости  $\text{Re } \lambda < 0$ : подобласти в виде симметричного относительно действительной оси конуса с вершиной в точке  $(0,0)$  и углом раскрытия  $\varphi$ , а также полуплоскости  $\text{Re } \lambda < -\eta$ . Для каждой из этих подобластей известен вид записи условий расположения корней характеристического уравнения в этой подобласти. Причем эти условия записываются в форме систем линейных матричных неравенств.

Для области, являющейся пересечением стандартных подобластей, достаточно выписать условия для каждой из них и все объединить в одну систему.

Кроме неизвестной положительно определенной матрицы  $X$ , введем вспомогательную матричную переменную  $Z = C^T \cdot X$ , где столбец параметров  $C$  в (3.s14) определяет коэффициенты регулятора. Получим следующую систему линейных матричных неравенств относительно пары  $(Z; X)$ :

$$\begin{aligned}
 & AX + XA^T + 2\eta X + BZ + Z^T B^T < 0 \\
 & \left( \begin{array}{cc} (AX + XA^T + BZ + Z^T B^T) \sin \varphi & (AX - XA^T + BZ - Z^T B^T) \cos \varphi \\ (-XA^T + AX + Z^T B^T - BZ) \cos \varphi & (AX + XA^T + BZ + Z^T B^T) \sin \varphi \end{array} \right) < 0 \quad (3.s37) \\
 & X > 0, \quad X = X^T.
 \end{aligned}$$

Решение системы может быть найдено с использованием специальных функций системы MatLab.

Если система (3.s37) решена, то искомая вектор-строка параметров регулятора находится как

$$C^T = Z \cdot X^{-1}. \quad (3.s38)$$

Матрицы  $A$  и  $B$  в (3.s37) имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{M_c D_T g}{J_{sw}} & -g + \frac{g D_T M_{sw} D_c}{J_{sw}} & -\left( \frac{h_{eq}}{M_c} + \frac{D_T^2 h_{eq}}{J_{sw}} \right) & -\frac{D_T h_{sw}}{J_{sw}} \\ -\frac{g M_c}{J_{sw}} & \frac{g M_{sw} D_c}{J_{sw}} & -\frac{D_T h_{eq}}{J_{sw}} & -\frac{h_{sw}}{J_{sw}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_c} + \frac{D_T^2}{J_{sw}} \\ \frac{D_T}{J_{sw}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для построения модального управления достаточно с помощью пакета MatLab Toolbox найти решение системы линейных матричных

неравенств (3.s37) относительно неизвестных матриц  $(Z; X)$  и определить коэффициенты регулятора, используя соотношение (3.s38). Заметим, что параметр  $\mu$  области  $G$  связан со значением  $\varphi$  в (3.s37) соотношением  $\mu = ctg(\varphi)$ .

Для рассматриваемой задачи определение коэффициентов модального регулятора на основе решения системы (3.s37) и использования соотношения (3.s38) может быть выполнено с использованием готовой программы для MatLab с открытым кодом [10]. Для выполнения необходимых расчетов в главном окне программы, показанном на рис. 3.2 достаточно нажать кнопку с надписью «LMI». Открывшееся диалоговое окно позволит ввести параметры  $\eta$  и  $\mu$  области  $G$  желаемого размещения корней. Результатом будут являться конкретные найденные значения вектора  $C$  коэффициентов регулятора.

### 3.6.4. Сопоставительное исследование в системе MatLab двух методов построения модальных регуляторов

В этом подразделе приведены примеры сопоставительных расчетов, проведенных в системе MatLab. Сравняются результаты двух подходов: классического метода  $D$ -разбиения и современного метода линейных матричных неравенств.

Вначале выберем значения параметров области  $G$ :  $\mu = 1, \eta = 0.5$ . Результаты расчетов для них показаны на рис. 3.21. Стоит обратить внимание на следующее: метод линейных матричных неравенств выбрал значения коэффициентов регулятора так, что корни характеристического полинома замкнутой системы оказались глубоко в области  $G$ .

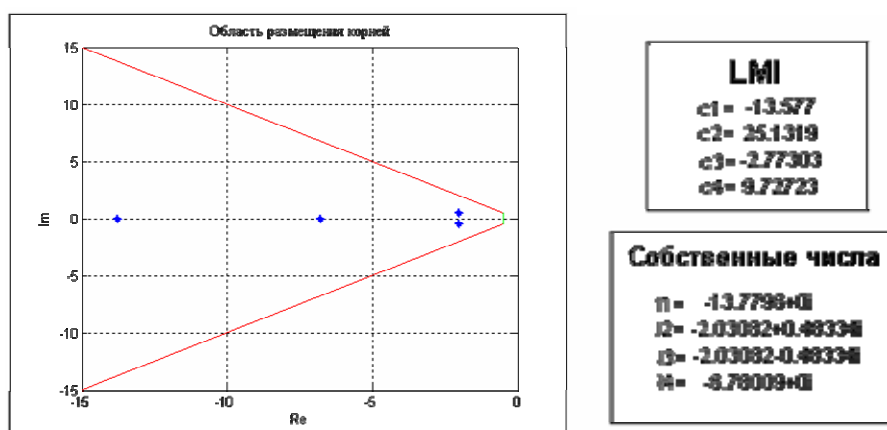


Рис. 3.21. Коэффициенты модального регулятора, полученные с помощью метода линейных матричных неравенств, и соответствующее им размещение корней характеристического полинома замкнутой системы

При тех же значениях параметров  $\mu = 1, \eta = 0.5$  построим  $D$ -разбиение плоскости  $c_1$  и  $c_2$  коэффициентов регулятора, зафиксировав остальные параметры регулятора  $c_3, c_4$  на значениях, выбранных методом линейных

матричных неравенств:  $c_3 = -2.77303$  и  $c_4 = 9.72723$ . Соответствующая область выделена серым цветом на рис. 3.22.

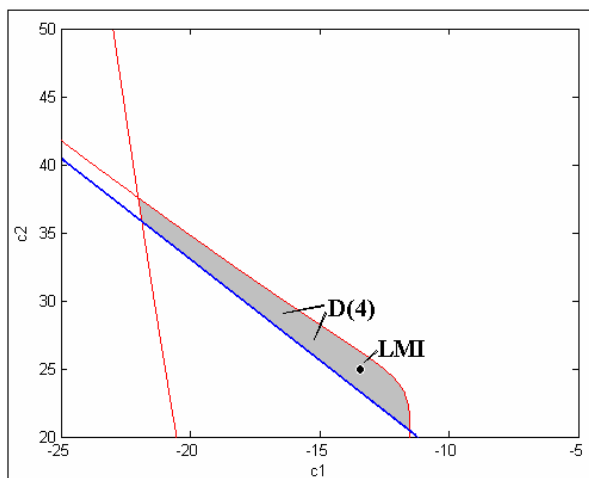


Рис. 3.22. Область  $D(4)$  параметров  $c_1$  и  $c_2$  модального регулятора, построенная по методу  $D$ -разбиения, и положение в ней точки, найденной методом  $LMI$  –линейных матричных неравенств

Сопоставляя два примененных способа выбора параметров модального регулятора, видим, что метод  $LMI$  дает только конкретную точку в пространстве параметров регулятора, тогда как метод  $D$ -разбиения позволяет получить описание всего множества возможных значений искомым параметров. Это – сильная сторона метода  $D$ -разбиения. Однако, построение  $D$ -разбиения предварительно требует проведения достаточно громоздких аналитических вычислений (см. п.3.6.2).

Также следует обратить внимание на то, что точка, полученная с помощью аппарата  $LMI$  всегда лежит глубоко внутри области обобщенной устойчивости (имеется ввиду область заданного качества регулирования), построенной по  $D$ -разбиению. Таким образом, применяемые функции системы MatLab выделяют из бесконечного множества возможных решений системы линейных матричных неравенств то, которое отвечает увеличению расстояния от границ области обобщенной устойчивости. Такое расстояние называют *мерой робастной устойчивости*.

Приведем результат еще одного эксперимента. Уменьшим значение  $\mu$  до минимально возможного  $\mu = \mu^*$ , при котором все собственные числа, приведенные на рис. 3.21, еще будут принадлежать замыканию уменьшенной области  $G$ . Легко определить, что:

$$\mu^* = \frac{\text{Re}}{\text{Im}} = \frac{2.03082}{0.48334} = 4.20.$$

Используем полученное  $\mu = \mu^*$ , зафиксируем прежние значения  $c_3 = -2.77303$  и  $c_4 = 9.72723$ . Примем, как и ранее,  $\eta = 0.5$ . Новая область размещения корней  $G$  окажется существенно суженной. Построим для нее область обобщенной

устойчивости (т.е. область возможных значений коэффициентов модального регулятора) в плоскости  $c_1$  и  $c_2$ , используя соотношения метода  $D$ -разбиения (см. п.3.6.2). Результат показан на рис. 3.23, область обобщенной устойчивости выделена серым цветом.

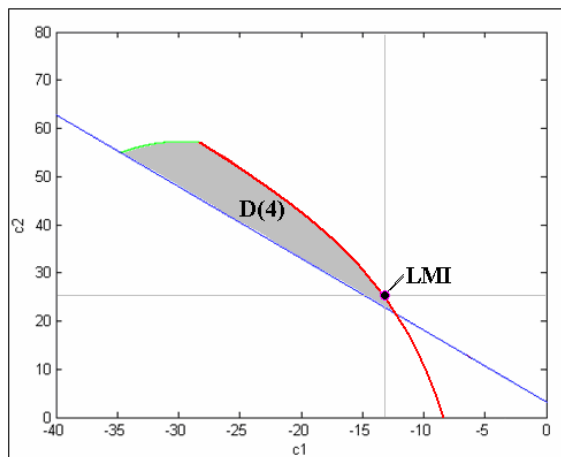


Рис. 3.23. Область  $D$ -разбиения, определяющая множество всех параметров  $c_1$  и  $c_2$ , соответствующих лучшему размещению корней, чем ранее дал метод  $LMI$  –линейных матричных неравенств

С учетом условий проведения этого эксперимента естественно, что точка, ранее найденная по методу  $LMI$  лежит на границе построенного нового  $D$ -разбиения.

### 3.7. Анализ области притяжения состояния равновесия в нелинейной модели для регулятора, построенного с использованием линейных матричных неравенств

Построение модального регулятора с использованием  $LMI$  было выполнено в п. 3.6.3 исключительно в рамках линейной модели объекта «качель-тележка». В линейной модели областью притяжения асимптотически устойчивого состояния равновесия всегда является все фазовое пространство. Применение же построенных регуляторов к нелинейной модели системы требует анализа структуры и размеров области притяжения.

Этот анализ был выполнен численно с помощью моделирования в системе MatLab по нелинейной модели при значениях физических параметров, соответствующих конкретному образцу лабораторной установки. Построены сечения области притяжения в двух плоскостях: в плоскости угла отклонения качели и перемещения тележки (при этом начальные значения скоростей по этим двум фазовым переменным принимались равными нулю), а так же в плоскости начальных скоростей по этим отклонениям (при начальном значении самих отклонений, равном нулю). Результаты изображены на рис. 3.24 - 3.25.

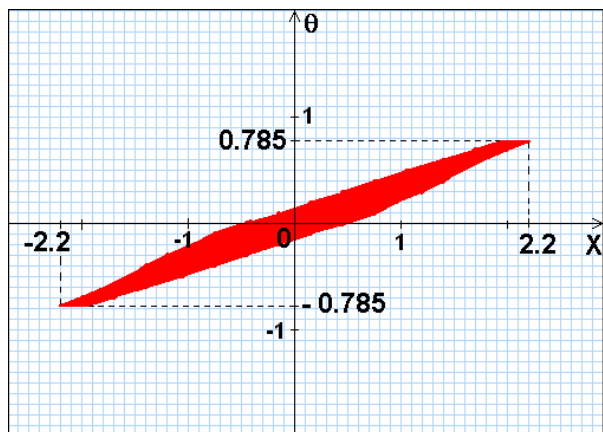


Рис. 3.24. Сечение области притяжения устойчивого состояния равновесия в нелинейной модели плоскостью  $\dot{x} = 0, \dot{\theta} = 0$  при параметрах модального регулятора, полученных с помощью *LMI*



Рис. 3.25. Сечение области притяжения устойчивого состояния равновесия в нелинейной модели плоскостью  $x = 0, \theta = 0$  при параметрах модального регулятора, полученных с помощью *LMI*

Из приведенных результатов видно, что область притяжения положения равновесия  $x = 0, \theta = 0$  имеет относительно небольшую меру по отношению к объему охватывающего ее четырехмерного гиперпараллелепипеда, соосного направлениям координатных осей. Кроме того, из результатов расчета следует неравнозначность различных направлений отклонения от положения равновесия, что, впрочем, хорошо согласуется с физической интерпретацией этого результата.

## **4. Управление лабораторной моделью порталного крана**

### **4.1. Описание лабораторной модели «портальный кран» и неформальная цель управления**

В этом разделе мы рассмотрим еще один интересный пример управляемой динамической системы – физическую лабораторную модель порталного крана.

Промышленные порталные краны используются для перемещения больших грузов над территорией рабочей площадки. Внешне такой кран представляет две вертикальные стойки, связанные длинной горизонтальной направляющей, которая как узкий мост соединяет эти стойки в единую жесткую конструкцию, образуя некоторое подобие большой буквы «П», сильно вытянутой в горизонтальном направлении. Стойки крана обычно опираются на небольшие колесные блоки-платформы, поставленные на рельсы, которые параллельно укладывают по обеим сторонам рабочей площадки. За счет этого вся конструкция крана может поступательно перемещаться вперед и назад таким образом, чтобы верхняя направляющая проходила над всей рабочей площадкой. По направляющей перемещается тележка-каретка с которой свисает трос, заканчивающийся крюком для захвата грузов. Таким образом, за счет перемещения как всего крана, так и движения каретки груз может быть перемещен с одной точки рабочей площадки на другую.

В отличие от реального порталного крана лабораторная модель имеет неподвижную зубчатую направляющую, по которой перемещается каретка, снабженная электромотором. Вместо троса с грузом в лабораторной модели к каретке свободно подвешен жесткий стержень, который при движении каретки может, за счет сил инерции, свободно отклоняться от вертикали и раскачиваться наподобие маятника. Раскачивания считаются нежелательными.

Груз за счет движения каретки должен быть перемещен из исходного неподвижного положения в новое заданное неподвижное положение. Причем на это перемещение накладываются требования следующего типа: желательнее переместить груз возможно быстрее, избегая при этом его раскачивания. В этом и заключается неформальная цель управления.

В данном разделе будет продемонстрирован двухэтапный подход к построению регуляторов для модели порталного крана. На первом этапе будут строиться параметрические классы регуляторов, асимптотически (при времени  $t \rightarrow \infty$ ) обеспечивающие перевод груза в заданное неподвижное положение. На втором этапе будет происходить оптимальный выбор их параметров, исходя из требований оптимизации качества переходных процессов с учетом имеющихся неформальных требований.

Прежде чем перейти к выводу уравнений, описывающих математическую модель портального крана, остановимся на идеализациях, принимаемых для лабораторной установки, схема которой изображена на рис. 3.1.

Начнем с каретки. Она представляет собой тележку массой  $M_K$  с легкими (примем их невесомыми) зубчатыми колесами радиуса  $r_K$ . Тележка движется по горизонтально расположенным зубчатым рельсам, что исключает проскальзывание. На каретке установлен электромотор постоянного тока, вращающий колеса через редуктор с передаточным числом  $N_p$ . Масса мотора –  $M_M$ , момент инерции вращающейся части мотора (ротора) обозначим через  $J$ .

К центру масс каретки на шарнире свободно подвешен невесомый абсолютно жесткий стержень длины  $\ell$ , с прикрепленной к его концу точечной массой  $m$ , имитирующей перемещаемый «краном» груз. Угол отклонения стержня от вертикали –  $\varphi$ . В узле крепления стержня к каретке присутствует вязкое трение с коэффициентом  $h_\varphi$ .

Остановимся подробнее на внутреннем устройстве электромотора, приводящего в движение каретку. Его схема показана в правой нижней части рис. 4.1. Корпус мотора называют статором. В статоре размещен магнит, создающий о области вращения ротора постоянное магнитное поле. На роторе мотора намотано несколько катушек медного провода таким образом, что оси катушек перпендикулярны оси мотора и разделяют окружность ротора на несколько равных секторов. Концы проводов катушек подключены к диаметрально расположенным вокруг оси ротора парам медных пластин. Совокупность таких пар пластин, ориентированных по осям катушек, образует коллектор. Питающее напряжение  $v(t)$  подается через пару скользящих по коллектору угольных контактов (их называют щетками) каждый раз только на ту из катушек, которая занимает в данный момент определенное угловое положение. За счет этого при вращении ротора катушки подключаются к питающему напряжению последовательно. Каждый раз подключена только какая-то одна катушка. Ее называют активной. Каждая из катушек ротора обладает омическим сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ . В активной катушке протекает ток, величину которого будем далее обозначать через  $I(t)$ . Протекающий ток создает магнитное поле катушки с напряженностью, пропорциональной току. Активная катушка превращается в электромагнит, полюса которого начинают отталкиваться от полюсов магнита в статоре, создавая вращающий момент, который также будет пропорционален величине тока. При написании модели электромотора следует также учитывать, что катушки вращаются вместе с ротором с угловой скоростью  $\omega_M$  в магнитном поле статора. Следовательно, в катушках наводится ЭДС, пропорциональная скорости вращения с коэффициентом  $\beta$ , которая противодействует питающему напряжению  $v(t)$ .

Далее при составлении математической модели в конечном итоге будет учитываться совокупная эквивалентная масса каретки с электромотором и колесами, обозначаемая через  $M$ , а также совокупный коэффициент трения  $h_x$  при движении каретки по рельсам.

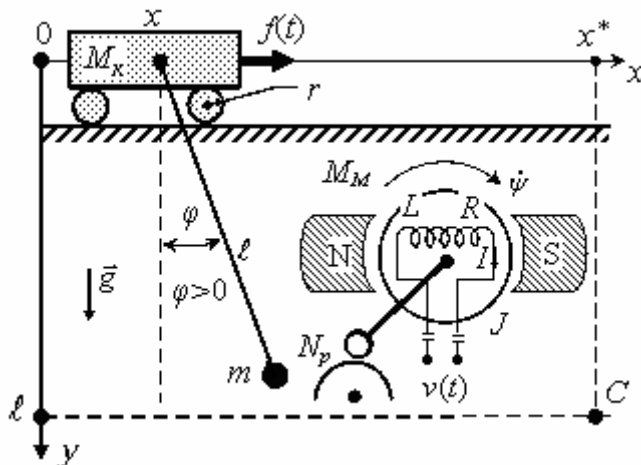


Рис. 4.1. Схема лабораторной установки «портальный кран»

Вначале каретка и груз покоятся в положении, соответствующем координате центра масс каретки  $x = 0$  (ось  $x$  направлена вдоль рельс). За счет регулирования величины напряжения  $v(t)$ , подаваемого на электромотор, требуется обеспечить перемещение  $x$ -координаты груза в заданную окрестность требуемого значения  $x = x^*$  (точка  $C$  на рис. 4.1) и стабилизацию. При этом перемещение нужно выполнить за возможно меньшее время при амплитудном ограничении колебательности переходного процесса. Должно учитываться ограничение на предельно возможное значение напряжения источника питания  $|v(t)| \leq V^+$ .

Установка снабжена датчиками, измеряющими значения  $x(t)$ ,  $\varphi(y)$  и их первые производные, поэтому управление строится по полному состоянию. Управление всегда будет выбираться в классе линейных регуляторов по отклонению.

Значения физических параметров установки приведены в таб. 4.1. Последние три параметра отражают характеристики электрической цепи электромотора.

Таблица 4.1.

Значения параметров лабораторной установки «модель портального крана»

Параметр	$M$	$m$	$l$	$R$	$g$	$h_\varphi$	$h_x$	$\beta$	$\gamma$	$\varepsilon$
Значение	1.073	0.019	0.641	2.6	9.81	0.0024	5.4	0.024	4.481	0.00767
Размерность, СИ	кг	кг	м	ом	кг·м/с <sup>2</sup>	н·м·(рад/с) <sup>-1</sup>	н·(м/с) <sup>-1</sup>	м/рад	н/а	в·(рад/с) <sup>-1</sup>



## 4.2. Вывод уравнений движения

### 4.2.1. Уравнения движения каретки и груза без учета электрических цепей в электромоторе

Сила линейной тяги  $f(t)$ , действующая на каретку, создается электродвигателем и редуктором. Для ее вычисления необходимо получить уравнения, описывающие электрический контур электродвигателя. В этом разделе будем временно считать эту силу известной. Уравнения механической части каретка – груз получим, используя формализм уравнений Лагранжа.

#### 4.2.1.1. Упражнение: вывод формулы для функции Лагранжа

Без учета электрической части электромотора рассматриваемая система имеет две степени свободы: продольное смещение каретки и угол отклонения груза от вертикали. Эти величины следует принять за обобщенные координаты. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = T - V, \quad (4.1)$$

где  $T$  – полная кинетическая энергия механической части системы,  $V$  – потенциальная энергия системы.

Кинетическая энергия системы является суммой кинетических энергий поступательного движения каретки с мотором, движения груза и вращения ротора электромотора:  $T_K, T_m, T_J$ , соответственно.

$$T = T_K + T_m + T_J. \quad (4.2)$$

Потенциальная энергия системы связана только с действием силы тяжести. Если уровень центра масс каретки с электромотором выбрать за нулевой уровень потенциальной энергии, то останется учесть только потенциальную энергию груза, т.е.  $V = V_m$ .

**Задание.** С учетом сказанного выше требуется получить выражение для функции Лагранжа.

#### **Решение.**

Поскольку лабораторная модель портального крана без учета электрических контуров система имеет две степени свободы: продольное смещение каретки и угол отклонения груза от вертикали, эти величины примем за обобщенные координаты. Используем декартову систему координат  $(x, y)$ , показанную на рис. 4.1. Имеем:  $x$  – горизонтальная координата центра масс каретки с электродвигателем,  $\varphi$  – угол отклонения стержня от вертикали. Положительное изменение угла соответствует повороту против часовой стрелки. Это и есть обобщенные координаты. Обозначим положение груза через  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , выразив его через обобщенные координаты:

$$\tilde{x} = x + \ell \sin \varphi, \quad \tilde{y} = \ell \cos \varphi,$$

Тогда

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} + \ell \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi, \quad \dot{\tilde{y}} = -\ell \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi.$$

Используя полученные выражения, получим две первые составляющие кинетической энергии (4.2):

$$T_K = (M_K + M_M) \dot{x}^2 / 2; \quad T_m = m \cdot (\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) / 2 = (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} \cdot \ell \cos \varphi + \ell^2 \dot{\varphi}^2) \cdot m / 2. \quad (4.s1)$$

Из-за отсутствия проскальзывания колес каретки угловая скорость вращения ротора электродвигателя  $\omega_M$  пропорциональна линейной скорости каретки  $\dot{x}$ . Поэтому кинетическая энергия вращения ротора:

$$T_J = J \cdot (N_p / r_K)^2 \cdot \dot{x}^2 / 2. \quad (4.s2)$$

Осталось найти потенциальную энергию  $V$ . Поскольку ее нулевое значение было выбрано на уровне центра масс каретки с электродвигателем, то потенциальная энергия равна:

$$V = V_m = -mg\ell \cos \varphi. \quad (4.s3)$$

Введем обозначение для совокупной эквивалентной массы системы каретка–электродвигатель с учетом вращательной инерционности ротора:

$$M = M_K + M_M + J \cdot (N_p / r_K)^2.$$

С использованием совокупной массы  $M$  можно коротко записать функцию Лагранжа из (4.1):

$$L = (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} \ell \cos \varphi + \ell^2 \dot{\varphi}^2) \cdot m / 2 + M \cdot \dot{x}^2 / 2 + mg\ell \cos \varphi. \quad (4.s4)$$

Предложенное решение является верным. Теперь выясним, как использовать функцию Лагранжа (4.s4) при записи уравнений движения.

#### 4.2.1.2. Упражнение: вывод уравнений движения Эйлера–Лагранжа

Общий вид уравнений Эйлера–Лагранжа следующий:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \right) - \left( \frac{\partial}{\partial q_i} L \right) = Q_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.3)$$

где  $n$  – число степеней свободы,  $q_i$  – обобщенные координаты, а  $Q_i$  – обобщенные силы, которые определяются как коэффициенты при виртуальных перемещениях в выражении для работы активных сил на этих перемещениях. Под активными подразумеваются силы, не учтенные при записи функции Лагранжа, входящей в левую часть уравнения (4.3).

В рассматриваемом примере роль таких сил будут играть силы трения и сила тяги каретки. Механическая модель портального крана имеет две степени свободы, т.е.  $n = 2$ . Для первой обобщенной координаты  $q_1 = \varphi$  на виртуальном

перемещении  $\delta\varphi$  работу совершает только момент сил вязкого трения, действующий на оси подвеса, поэтому этот момент и является обобщенной силой  $Q_1$ :

$$Q_1 = -h_\varphi \dot{\varphi}. \quad (4.4)$$

Для второй обобщенной координаты  $q_2 = x$  обобщенная сила  $Q_2$  учитывает вязкое трение между кареткой и направляющей, по которой она движется, а также силу тяги каретки, поскольку именно эти силы совершают работу на виртуальном перемещении  $\delta x$ . Поскольку эти силы направлены вдоль направления виртуального перемещения, то:

$$Q_2 = -h_x \dot{x} + f(t), \quad (4.5)$$

**Задание.** Получить выражения для производных, входящих в (4.3), используя (4.5), записать уравнения движения.

**Решение.**

Для получения уравнения Эйлера–Лагранжа необходимо найти выражения для нескольких частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} L = -(\dot{x}\dot{\varphi} + g) \cdot m\ell \sin \varphi; \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = (\dot{x}\ell \cos \varphi + \ell^2 \dot{\varphi}) \cdot m; \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} L = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L = (M + m) \cdot \dot{x} + \dot{\varphi} \cdot m \cdot \ell \cos \varphi. \quad (4.56)$$

Вычисляя полные производные по времени от частных производных по обобщенным скоростям и подставляя все, включая обобщенные силы, в (4.3), получим нелинейное уравнение движения для лабораторной модели портального крана:

$$\begin{cases} m\ell\ddot{x} \cos \varphi + m\ell^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = -h_\varphi \dot{\varphi}, \\ (M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\varphi} \cos \varphi - m\ell\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = f(t) - h_x \dot{x}. \end{cases} \bullet \quad (4.57)$$

Следует обратить внимание, что главный определитель  $\Delta$  полученной системы уравнений, линейной относительно старших производных  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\varphi}$ , имеет вид  $\Delta = m\ell^2(m(\cos^2 \varphi - 1) - M)$ , т.е. всегда отрицателен и, следовательно, никогда не обращается в ноль. Следовательно, данная система однозначно разрешима относительно старших производных и может быть представлена в форме Коши.

#### 4.2.2. Упражнение: учет электрических цепей электромотора в уравнениях движения системы

Сила тяги  $f(t)$ , стоящая в правой части второго из уравнений движения, создается электромотором, размещенным в каретке. Для определения связи этой силы с подаваемым напряжением питания  $v(t)$  необходимо построить

математическую модель электромотора, точнее, его электрического контура. Описание устройства было приведено в начале п. 4.1, а иллюстрация к этому описанию – на рис. 4.1.

Пусть в текущий промежуток времени к управляющему напряжению  $v(t)$  подключена одна из катушек ротора с индуктивностью  $L$ . В ней будет протекать ток  $I(t)$ , который создаст падение напряжения  $R \cdot I$  на омическом сопротивлении этой катушки, что приведет к уменьшению напряжения на ее концах. Кроме того, нужно учесть, что катушка вместе с ротором вращается в магнитном поле статора. В результате, на ней наводится ЭДС индукции, пропорциональная угловой скорости вращения ротора  $\omega_M$ . Наводимая ЭДС так же уменьшает напряжение, приложенное к катушке. Также следует учесть, что скорость изменения тока в индуктивности пропорциональна приложенному к ней напряжению.

Протекающий в катушке ток создает магнитное поле ротора, которое, за счет взаимодействия с магнитным полем статора (см. рис. 4.1), создает вращающий момент на валу электродвигателя, пропорциональный с коэффициентом  $\mu_M$  величине тока. Для определения создаваемой при этом силы тяги  $f(t)$  необходимо учесть передаточное число редуктора  $N_p$  и радиус  $r_K$  колеса каретки. Эти же величины должны определять однозначную взаимосвязь между скоростью поступательного движения каретки  $\dot{x}$  и скоростью  $\omega_M$  вращения вала электромотора.

**Задание.** По приведенному описанию нужно получить уравнение электрического контура электромотора и вывести связь  $f(t)$  с величиной управляющего напряжения  $v(t)$  в предположении пренебрежимой малости величины индуктивности  $L$ .

**Решение.**

Если катушка ротора обладает индуктивностью  $L$ , то закон изменения тока в катушке, в зависимости от приложенного к индуктивности напряжения  $u(t)$ , определяется простым уравнением:  $L \cdot \dot{I} = u(t)$ . Величина  $u(t)$  должна учитывать как входное управляющее напряжение  $v(t)$ , так и падение этого напряжения на омическом сопротивлении обмотки, а также за счет противодействующей ЭДС индукции:  $u(t) = v(t) - R \cdot I - \varepsilon \cdot \omega_M$

Уравнение для величины тока примет вид

$$L \cdot \dot{I} = v(t) - R \cdot I - \varepsilon \cdot \omega_M. \quad (4.s8)$$

Если  $L$  близко к нулю (а это действительно так для рассматриваемой лабораторной установки), то возникает естественный вопрос о допустимости замены произведения  $L \cdot \dot{I}$  нулем. Ясно, что это можно делать только в той части фазового пространства, где скорость изменения тока невелика. Эта

область образует многообразие медленных движений по переменной  $I(t)$ . Таким образом, заменяя нулем левую часть уравнения (4.s8), мы перестаем рассматривать области быстрых движений, что, как правило, не является существенным при анализе асимптотики поведения системы. При включении в модель индуктивность повысила бы на единицу дифференциальный порядок системы уравнений и привела к необходимости учета быстрых движений, приводящих к увеличению погрешности при численном интегрировании системы и необходимости проведения вычислений с неоправданно малым шагом.

Итак, в предположении, что  $L \approx 0$ , примем упрощенное уравнение электрической цепи:

$$R \cdot I = v(t) - \varepsilon \cdot \omega_M. \quad (4.s9)$$

За счет наличия редуктора угловая скорость вращения колеса каретки составит  $\omega_M / N_p$  радиан в секунду, что приведет к линейной скорости качения

$$\dot{x} = \beta \cdot \omega_M, \quad (4.s10)$$

где  $\beta = r_K \cdot N_p^{-1}$ .

Поскольку коэффициент пропорциональности в скоростях обратно пропорционален аналогичному коэффициенту между силой тяги и вращающим моментом на валу электромотора, то можно записать связь:

$$f(t) = \gamma \cdot I(t), \quad (4.s11)$$

где  $\gamma = \mu_M \cdot \beta^{-1}$ . Используя соотношения (4.s8)-(4.s11), окончательно получим:

$$f(t) = \gamma \cdot R^{-1} (v(t) - \varepsilon \cdot \beta^{-1} \cdot \dot{x}). \quad (4.s12)$$

Уравнение (4.s12) нужно добавить к системе нелинейных уравнений движения (4.s7). •

### 4.2.3. Упражнение: запись уравнений замкнутой системы с обратной связью по состоянию

Будем считать, что в начальном положении порталный кран находится в состоянии покоя при  $x = 0$ , т.е. положение вектора начального состояния соответствует началу координат:

$$(\varphi(0), \dot{\varphi}(0), x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0, 0, 0). \quad (4.6)$$

При этом переносимый груз, в соответствии с рис. 4.1, вначале находится в точке  $(x, y) = (0, \ell)$ . В качестве координат целевого положения груза примем точку  $(x, y) = (x^*, \ell)$ . Поскольку составляющие скоростей в конечной точке перемещения должны быть равны нулю, ей соответствует значение вектора финального состояния

$$(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, x_1, \dot{x}_1) = (0, 0, x^*, 0). \quad (4.7)$$

Будем формировать значение управляющего напряжения  $v(t)$  из (4.s12) в виде линейной функции отклонения текущего вектора состояния от требуемого финального. В результате получим линейный регулятор по состоянию, использующий величины отклонений обобщенных  $x$ ,  $\varphi$  координат от их финальных значений, а также производные по времени от этих отклонений. Такие регуляторы являются пропорционально-дифференциальными, их принято называть ПД - регуляторами.

При численном моделировании поведения нелинейной системы (4.s7), (4.s12), снабженной регулятором, необходимо учитывать, что переменная  $\varphi$  является циклической, т.е. значения  $\varphi + 2\pi \cdot k$  эквивалентны для всех  $k = 0, \pm 1, \dots$ . Поэтому при записи «линейного» регулятора значение угла необходимо предварительно пересчитывать в диапазон  $-\pi \leq \varphi < \pi$ .

**Задание.** Вид ПД - регулятора необходимо записать с учетом цикличности переменной угла отклонения, а также получить замкнутую систему уравнений движения: уравнения объекта с регулятором.

**Решение.**

Поскольку обобщенная координата  $\varphi$  является циклической переменной, перед ее использованием в регуляторе будем преобразовывать ее значения в диапазон  $-\pi \leq \varphi < \pi$ . Для этого используем кусочно-линейное выражение  $((\varphi + \pi) \bmod 2\pi - \pi)$ . Таким образом, регулятор по состоянию, формирующий входное управляющее напряжение примет вид:

$$v(t) = k_1 \cdot ((\varphi + \pi) \bmod 2\pi - \pi) + k_2 \dot{\varphi} + k_3 \cdot (x - x^*) + k_4 \dot{x}. \quad (4.s13)$$

За счет примененного преобразования выражение оказалось кусочно-линейным.

Запишем систему уравнений замкнутой системы, подставив (4.s12) в (4.s7) и добавив уравнение регулятора:

$$\begin{cases} m\ell \ddot{x} \cos \varphi + m\ell^2 \ddot{\varphi} + mg\ell \sin \varphi = -h_\varphi \dot{\varphi}, \\ (M + m)\ddot{x} + m\ell \ddot{\varphi} \cos \varphi - m\ell \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = f(t) - h_x \dot{x}, \\ f(t) = \gamma \cdot R^{-1}(v(t) - \varepsilon \cdot \beta^{-1} \cdot \dot{x}), \\ v(t) = k_1 \cdot ((\varphi + \pi) \bmod 2\pi - \pi) + k_2 \dot{\varphi} + k_3 \cdot (x - x^*) + k_4 \dot{x}. \end{cases} \bullet \quad (4.s14)$$

Полученная замкнутая система уравнений движения описывает динамику лабораторной модели портального крана без учета индуктивности катушек ротора.

#### 4.2.4. Упражнение: получение линеаризованных уравнений модели портального крана

Линеаризацию замкнутой системы нелинейных уравнений движения (4.s14) выполним в окрестности состояния равновесия, соответствующего целевой точке (4.7).

**Задание.** Нужно убедиться, что состояние равновесия действительно совпадает с целевой точкой (4.7)

**Решение.**

Состояние равновесия соответствует решению системы (4.s14), в виде константы  $x_o, \varphi_o$ . Подставив его в (4.s14), получим:

$$\begin{cases} mgl \sin \varphi_o = 0, \\ 0 = k_1 \cdot ((\varphi_o + \pi) \bmod 2\pi - \pi) + k_3 \cdot (x_o - x^*). \end{cases} \quad (4.s14)$$

Система имеет множество решений  $x_o = x^*, \varphi_o = 0 \pm 2\pi \cdot k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), соответствующих единственной точке на фазовом цилиндре  $x_o = x^*, \varphi_o = 0$ . •

Приведенный анализ показывает, что на фазовом цилиндре целевая точка (4.7) является единственным состоянием равновесия замкнутой системы.

В следующих разделах для получения параметров регулятора, обеспечивающих асимптотическую устойчивость и заданные свойства переходного процесса, будет использована линейная теория построения регуляторов. Для возможности ее применения уравнения движения объекта должны быть линейными. Если это не так, то обычно выполняют линеаризацию системы уравнений в окрестности требуемого режима функционирования.

В рассматриваемом примере задача перемещения груза свелась к задаче обеспечения устойчивости состояния равновесия замкнутой системы (при выполнении дополнительных требований к переходному процессу). Поэтому линеаризацию необходимо выполнить в окрестности этого состояния равновесия.

Конечно, при больших значениях  $x^*$  отклонения по  $x$  могут быть значительными, но это не существенно, т.к. фазовая переменная  $x$  входит в уравнения линейно. Что касается переменной  $\varphi$ , то при разумном способе управления отклонения подвеса груза от вертикали при его перемещении не должны быть слишком большими.

**Задание.** Выполнить линеаризацию замкнутой системы уравнений движения в окрестности ее состояния равновесия, представив ее в форме, разрешенной относительно старших производных.

**Решение.**

Рассмотрим разомкнутую систему, состоящую из первых трех уравнений в (4.s14) и подставим выражение  $f(t)$  из третьего уравнения во второе. Заменяем нелинейные функции  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  их линейными аппроксимациями в окрестности  $\varphi_0 = 0$ , а именно, на  $\varphi$  и 1 соответственно. После этого исключим оставшиеся нелинейные (относительно совокупности фазовых переменных) элементы уравнений. После деления первых двух из полученных уравнений на  $m\ell^2$  и  $m\ell$  соответственно, будем иметь:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \frac{1}{\ell} \ddot{x} = -\frac{g}{\ell} \varphi - \frac{h_\varphi}{m\ell^2} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} + \frac{M+m}{m\ell} \ddot{x} = -\frac{1}{m\ell} \left( \frac{\varepsilon\gamma}{R\beta} + h_x \right) \dot{x} + \frac{\gamma}{m\ell R} v(t). \end{cases} \quad (4.s15)$$

Данная система определяет значения старших производных лишь неявно. Для получения системы уравнений в явной форме достаточно разрешить ее относительно  $\ddot{\varphi}$  и  $\ddot{x}$ , используя, например, правило Крамера. Это всегда можно сделать, т.к. главный определитель  $\Delta$  системы (4.s15) всегда положителен, и, следовательно, не обращается в ноль:

$$\Delta = \frac{M}{m\ell} > 0 \quad (4.s16)$$

Запишем два других определителя:

$$\Delta_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{g}{\ell} \varphi - \frac{h_\varphi}{m\ell^2} \dot{\varphi} & \frac{1}{\ell} \\ -\frac{1}{m\ell} \left( \frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x \right) \dot{x} + \frac{\gamma}{Rm\ell} v(t) & \frac{M+m}{m\ell} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{g}{\ell} \varphi - \frac{h_\varphi}{m\ell^2} \dot{\varphi} \\ 1 & -\frac{1}{m\ell} \left( \frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x \right) \dot{x} + \frac{\gamma}{Rm\ell} v(t) \end{vmatrix}$$

Проведя вычисления и добавив линейное уравнение регулятора по входу  $v(t)$ , получим линеаризованную замкнутую систему в исходных переменных:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = -\dot{\varphi} \frac{(M+m)h_\varphi}{Mm\ell^2} - \varphi \frac{(M+m)g}{M\ell} + \dot{x} \frac{1}{M\ell} \left( \frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x \right) - \frac{\gamma}{MR\ell} v(t), \\ \ddot{x} = \dot{\varphi} \frac{h_\varphi}{M\ell} + \varphi \frac{mg}{M} - \dot{x} \frac{1}{M} \left( \frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x \right) + \frac{\gamma}{MR} v(t), \\ v(t) = k_1 \varphi + k_2 \dot{\varphi} + k_3 \cdot (x - x^*) + k_4 \dot{x}. \end{cases} \quad (4.s17)$$

Полученные уравнения линейной модели записаны в исходных переменных. Их удобнее переписать в отклонениях от состояния равновесия и представить в форме Коши.



**Задание.** Записать линеаризованную систему в форме Коши в новых переменных – отклонениях от состояния равновесия, используя стандартную матричную форму представления, описанную в разделе 1.

**Решение.**

Введем вектор-столбец новых фазовых переменных  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , описывающий отклонения от состояния равновесия:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\varphi, \dot{\varphi}, x - x^*, \dot{x})^T. \quad (4.s18)$$

Кроме того, введем вектор-столбец коэффициентов регулятора

$$k = (k_1, k_2, k_3, k_4)^T.$$

Это позволит привести систему (4.s17) к стандартной матричной форме записи вида:

$$\dot{x} = Ax + Bv(t), \quad (4.s19)$$

$$v(t) = k^T x, \quad (4.s20)$$

где  $v(t)$  – скаляр, матрица  $A_{4 \times 4}$  и вектор-столбец  $B_{4 \times 1}$  имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad (4.s21)$$

Здесь

$$a_{21} = -\frac{(M+m)g}{M\ell}, \quad a_{22} = -\frac{(M+m)h_\varphi}{Mm\ell^2}, \quad a_{24} = \frac{1}{M\ell} \left( \frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x \right),$$

$$a_{41} = \frac{mg}{M}, \quad a_{42} = \frac{h_\varphi}{M\ell}, \quad a_{44} = -\frac{1}{M} \left( \frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x \right), \quad b_2 = -\frac{\gamma}{MR\ell}, \quad b_4 = \frac{\gamma}{MR}. \quad (4.s22)$$

Следует сделать следующее замечание к приведенному решению. Замкнутая система линейных уравнений движения объект – регулятор (4.s19)-(4.s22) записана в физических размерных переменных. Даже коэффициенты регулятора имеют разные размерности. С точки зрения исследования полученной математической модели это, безусловно, неудобно. Результаты такого исследования носили бы гораздо более общий характер, в случае записи модели с безразмерными переменными и коэффициентами.

Все это, безусловно, так. Однако, интерпретировать результаты с точки зрения физической интуиции проще, если переменные оставлены размерными, а умение проводить такую интерпретацию чрезвычайно важно. Поэтому, с учетом учебного характера данного методического пособия, авторы сочли

целесообразным проводить изложение без перехода к безразмерным переменным.

Еще одно замечание касается построения регуляторов по приближенному (линейному) описанию объекта управления. В задаче об управлении лабораторной моделью порталного крана нас будет интересовать не просто асимптотическая устойчивость целевой точки, а выполнение определенных требований, накладываемых на переходный процесс. Поведение переходного процесса в линейной и нелинейной моделях может заметно отличаться. Поэтому закон регулирования (4.s20), построенный по линейной модели (4.s19), должен в последующем применяться к нелинейному объекту из (4.s17).

Нелинейность объекта должна и будет фактически учитываться в дальнейшем на стадии настройки свободных параметров в построенном классе регуляторов. Такая настройка может быть выполнена за счет прямой оптимизации по этим свободным параметрам с использованием заданных дополнительных критериев качества регулирования, вычисляемых по нелинейной модели.

### **4.3. Построение управления моделью порталного крана на основе современных подходов линейной теории автоматического регулирования**

Современная теория управления предоставляет различные методы синтеза регуляторов. В данном разделе на примере задачи перемещения груза лабораторной моделью порталного крана будут продемонстрированы три подхода: синтез LQR–регулятора, прямые методы построения модального управления, применение аппарата линейных матричных неравенств. Общее описание этих подходов было приведено в разделе 1.

Во всех трех случаях построение регулятора можно выполнить таким образом, чтобы значения его коэффициентов  $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)^T$  оставались зависящими от набора некоторых дополнительных параметров  $p$ , за счет варьирования которых можно было бы дополнительно влиять на качество переходных процессов.

Наличие такой зависимости позволит в дальнейшем оптимизировать качество регулирования за счет автоматизированной настройки значений этих параметров.

#### **4.3.1. Упражнение: построение LQR–регулятора**

При этом подходе коэффициенты линейного регулятора (4.s20) для объекта (4.s19), (4.s21)-(4.s22) определяются из условия достижения минимума квадратичного функционала вида (4.8), вычисляемого в силу замкнутой системы объект – регулятор,

$$J[v] = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + r \cdot v(t)^2) dt, \quad (4.8)$$

где скалярный параметр  $r > 0$ , а матрица  $Q$  положительно определена [3,8,9].

**Задание.** Используя материал подраздела 1.3.2 необходимо выписать соотношения для расчета коэффициентов оптимального регулятора.

**Решение.**

Согласно п. 1.3.2, в классе линейных регуляторов (4.s20) оптимальный, с точки зрения функционала  $J[v]$ , закон регулирования характеризуется вектором параметров вида

$$k = -r^{-1} B^T K^T, \quad (4.9)$$

где  $K$  – симметрическая матрица, являющаяся положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$Q - K \cdot B \cdot r^{-1} B^T K^T + K \cdot A + A^T K^T = 0. \quad \bullet \quad (4.10)$$

Действительно, коэффициенты оптимального регулятора можно вычислить из соотношений (4.9), (4.10). Однако возникает вопрос о существовании и единственности положительно определенной матрицы  $K$ , являющейся решением уравнения (4.10).

Известно, что существование и единственность такого решения гарантируется, если система  $(A; B)$  в (4.s19), (4.s21)-(4.s22) является полностью управляемой.

**Задание.** Необходимо проверить наличие полной управляемости пары  $(A; B)$  из (4.s19), (4.s21) при значениях коэффициентов (4.s22), взятых из табл. 4.1.

**Решение.**

Для выяснения полной управляемости пары  $(A; B)$  из (4.s19), (4.s21) достаточно убедиться в том, что матрица  $(B; AB; A^2B; A^3B)$  имеет полный ранг [8]. Проверим это для значений параметров, приведенных в табл. 4.1. Непосредственный подсчет определителя показывает, что

$$\det(B; AB; A^2B; A^3B) = 3794.14 \neq 0.$$

Таким образом, матрица имеет полный ранг, и, следовательно, система полностью управляема.  $\bullet$

Полная управляемость системы означает, что соотношения для построения оптимального регулятора (4.9), (4.10) корректно определены. Однако, следует понимать, что имеется ввиду оптимальность по отношению к функционалу (4.8), который зависит от  $r$  и набора элементов матрицы  $Q$ . При каждом

конкретном их выборе мы будем получать регуляторы, оптимальные для разных функционалов. При этом, неформально оцениваемое качество переходного процесса может оказаться существенно разным.

Поэтому необходимо предпринять специальные действия, направленные на дополнительный отбор наиболее хороших вариантов из набора «оптимальных». Один из подходов к решению этой задачи будет рассмотрен в подразделах 4.4, 4.5.

Для возможности отбора нужно вначале удобным образом ввести свободные параметры, определяющие семейство регуляторов (4.9)-(4.10). Известно, что данный класс регуляторов обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы регулирования при условии положительной определенности симметрической матрицы  $Q$  в (4.8).

**Задание.** Ввести набор  $p$  свободных параметров таким образом, чтобы гарантировать положительную определенность  $Q$  при любых их значениях.

**Решение.**

Заметим, что поскольку для рассматриваемой задачи в функционале (4.8) параметр  $r$  – скалярный и строго положителен, его значение, без ограничения общности, может быть принято равным единице. Это связано с тем, что деление функционала на  $r > 0$  не влияет на вид оптимального управления. Таким образом, свободные параметры, которые требуется ввести в постановку задачи, могут быть связаны только с заданием матрицы  $Q$ .

Выбор в качестве таких параметров элементов самой матрицы неудобен, т.к. не обеспечивает ее положительной определенности.

Воспользуемся фактом, известным из линейной алгебры. Его называют разложением Холесского [11]. Всякая симметрическая положительно определенная матрица  $Q$  представима в виде разложения вида

$$Q = L^T D L, \quad (4.s23)$$

где  $D$  – диагональная матрица с положительной диагональю  $d_{ii}$ , а  $L$  – верхняя треугольная с единичной диагональю и элементами  $l_{ij}$ , ( $j > i$ ) над ней. Верно и обратное: разложение (4.s23), элементы которого обладают указанными свойствами, порождает симметрические положительно определенные матрицы  $Q$ . Таким образом, в функционале (4.8) будем полагать  $r = 1$ , и использовать матрицу  $Q$  в виде разложения (4.s23). В качестве свободных параметров  $p$  следует принять набор из 10 величин:

$$p = (d_{ii} > 0 (i = \overline{1,4}), l_{ij} (i = \overline{1,3}; 4 > j > i)). \quad \bullet \quad (4.s24)$$

Итак, удалось в удобной форме ввести параметры  $LQR$ -регулятора. Свободой их выбора можно распорядиться для оптимизации переходного

процесса, порождаемого  $LQR$ -регулятором, по дополнительным нелинейным критериям качества. Это будет использовано в подразделах 4.4, 4.5.

### 4.3.2. Упражнение: прямые методы построения модального управления

Методы модального управления обеспечивают размещение корней  $\lambda_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) характеристического уравнения замкнутой системы регулирования в заданной области комплексной плоскости или в заданных точках комплексной плоскости. Под прямыми методами мы будем понимать те, которые непосредственно обеспечивают заданное положение всех корней.

Этот подход позволяет управлять всеми модами, т.е. функциями вида  $e^{\lambda_i t}$ , взвешенная сумма которых в общем случае описывает поведение переходного процесса. Влияя на моды, мы влияем на переходный процесс.

Известно, что в случае полной управляемости линейной модели объекта и использования регулятора по состоянию задача о наперед заданном размещении корней всегда разрешима. В нашем случае линеаризованная модель портального крана (4.s19) при рассматриваемых параметрах из табл. 4.1 является полностью управляемой. Это было выяснено в п. 4.3.1. Следовательно, с использованием стандартных подходов модального управления можно определить значения коэффициентов регулятора (4.s20), обеспечивающие заданное размещение корней характеристического полинома замкнутой системы (4.s19), (4.s20), (4.s21).

Способ такого определения был описан в подразделе 1.2.3.1, (см. [9]).

**Задание.** С использованием подхода, описанного в п. 1.2.3.1 получить расчетные соотношения для вычисления коэффициентов модального регулятора по заданному желаемому расположению корней характеристического полинома в замкнутой системе.

#### **Решение.**

Пусть определены коэффициенты характеристического полинома матрицы уравнений объекта  $A$  из (4.s21):

$$a(p) = |pE - A| = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0.$$

Зная требуемое размещение корней, по теореме Виета легко определить значения коэффициентов «желаемого» характеристического полинома для системы (4.s19)-(4.s21):

$$g(p) = p^4 + g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0. \quad (4.s25)$$

Если систему  $(A; B)$  привести к *нормальной форме*  $(\tilde{A}; \tilde{B})$ , выполняя замену переменных  $\tilde{x} = Px$ , то в новых переменных  $\tilde{x}$ , называемых *каноническими*, преобразованные матрица  $\tilde{A}$  и вектор  $\tilde{B}$  примут вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.s26)$$

Очевидно, что если в новых переменных коэффициенты модального регулятора принять в виде  $\tilde{k}_i = a_{i-1} - g_{i-1}$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ) и подставить управление

$$\tilde{v}(t) = \tilde{k}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{k}_2 \tilde{x}_2 + \tilde{k}_3 \tilde{x}_3 + \tilde{k}_4 \tilde{x}_4 = \tilde{k}^T \tilde{x}$$

в правую часть преобразованной разомкнутой системы, то в нижней строке матрицы замкнутой системы образуются элементы  $(-g_0, -g_1, -g_2, -g_3)$ . За счет этого ее характеристический полином совпадет с «желаемым», что и требуется.

Поскольку  $\tilde{k}^T \tilde{x} = \tilde{k}^T P x = (P^T \tilde{k})^T x$ , приходим к выводу, что в исходных переменных коэффициенты регулятора примут вид:

$$k = P^T \tilde{k} = P^T \cdot (a - g). \quad (4.s27)$$

Известно, что матрица преобразования  $P$ , определяющая переход к каноническим переменным, вычисляется по формуле

$$P = \tilde{R} \cdot R^{-1}, \quad (4.s28)$$

где  $\tilde{R}$ ,  $R$  – матрицы управляемости для системы (4.s19)-(4.s20) в новом и старом базисах:

$$\tilde{R} = \left\| \tilde{B}; \tilde{A}\tilde{B}; \tilde{A}^2\tilde{B}; \tilde{A}^3\tilde{B} \right\|; R = \left\| B \ AB \ A^2B \ A^3B \right\|. \quad \bullet \quad (4.s29)$$

В приведенном решении определены расчетные соотношения для коэффициентов модального регулятора. Они обеспечивают желаемое размещение корней характеристического полинома замкнутой линеаризованной системы. Однако, также как и в случае с  $LQR$ -регулятором, здесь остается значительная свобода влияния на вид переходного процесса, поскольку конкретное размещение корней пока что не было определено. Исходя из общих представлений о влиянии отдельных мод на переходный процесс в линеаризованной модели, можно указать множество целесообразного размещения корней  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ). Согласно обсуждению этого вопроса в подразделе 3.6.1, данное множество может быть принято в виде:

$$-\eta_2 \leq \operatorname{Re} \lambda_i \leq -\eta_1 < 0; \quad |\operatorname{Im} \lambda_i| \leq -\gamma \cdot \operatorname{Re} \lambda_i, \quad (i = \overline{1, \dots, 4}) \quad (4.11)$$

Первое двухстороннее неравенство определяет затухание переходного процесса по порядку не хуже, чем у  $e^{-\eta_1 t}$  и не лучше, чем у  $e^{-\eta_2 t}$ . Необходимость введения последнего требования связана с тем, что чрезмерное ускорение переходных процессов потребует повышения напряжения  $v(t)$ ,

подаваемого на электромотор. Это не всегда выполнимо из-за ограничений напряжения источника питания.

Второе неравенство определяет тем более быстрое затухание каждой моды за период ее колебания, чем большее значение принимает параметр  $\gamma$ . В более точном представлении это выглядит следующим образом: обеспечивается затухание не хуже, чем в  $e^{-2\pi/\gamma}$  раз за один период для колебательных составляющих на каждой из собственных частот переходного процесса.

Таким образом, корни целесообразно варьировать в пределах множества (4.11). Выбор окончательного варианта их расположения можно проводить с использованием дополнительных критериев качества переходного процесса, вычисляемых на траекториях исходной нелинейной системы уравнений объекта (4.s14), замыкаемой обратной связью с использованием построенного модального регулятора (с набором коэффициентов из (4.s27)). Для возможности автоматизации такого выбора нужно удобным образом ввести варьируемые параметры  $p$ .

**Задание.** Выбрать набор варьируемых параметров, обеспечивающих изменение корней характеристического полинома в области вида (4.11).

**Решение.**

В качестве набора  $p$  свободных параметров метода можно использовать либо вектор коэффициентов  $g = (g_0, g_1, g_2, g_3)^T$  «желаемого» характеристического полинома замкнутой системы (4.s25), либо 4 параметра, определяющие требуемое размещение корней  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) этого полинома.

В первом случае нужно указать ограничения на величины коэффициентов  $g_i$ , при которых корни полинома (4.s25) удовлетворяли бы ограничениям (4.11). К сожалению, в явной форме такие ограничения выписать невозможно. Из-за этого выбор вектора коэффициентов  $g$  в качестве набора свободных параметров невозможен. Следовательно, придется вводить параметры, определяющие положение самих корней.

Поскольку существует три варианта типов корней (по количеству комплексно сопряженных пар), то для каждого варианта придется вводить свой вид параметризации.

Первый вариант: случай двух пар комплексно сопряженных корней. В этом случае вектор свободных параметров метода примет вид:

$$p = (\text{Re } \lambda_{1,2}, | \text{Im } \lambda_{1,2} |, \text{Re } \lambda_{3,4}, | \text{Im } \lambda_{3,4} |). \quad (4.s30)$$

Областью варьирования будет множество  $D_1$ :

$$p \in D = D_1 = \{-\eta_2 \leq p_{1,3} \leq -\eta_1 < 0; 0 \leq p_{2,4} \leq -\gamma \cdot p_{1,3}\}. \quad (4.s31)$$

Второй вариант соответствует одной паре комплексно сопряженных корней  $\lambda_{3,4}$ . В этом случае примем

$$p = (\lambda_1, \lambda_2, \operatorname{Re} \lambda_{3,4}, |\operatorname{Im} \lambda_{3,4}|), \quad (4.s32)$$

$$p \in D = D_2 = \{-\eta_2 \leq p_{1,2,3} \leq -\eta_1 < 0; 0 \leq p_4 \leq -\gamma \cdot p_3\}. \quad (4.s33)$$

Третьей вариант: все корни действительные. В этом случае

$$p = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3), \quad (4.s34)$$

$$p \in D = D_3 = \{-\eta_2 \leq p_{1,2,3,4} \leq -\eta_1 < 0\}. \quad \bullet \quad (4.s35)$$

Необходимо сделать дополнение к данному решению. Во-первых, возникающий трехвариантный выбор параметров неудобен тем, что он требует решения трех задач оптимального выбора, вместо одной. Во-вторых, после получения наилучших значений  $p = p^*$  для каждого из этих трех вариантов, из них должно быть дополнительно выбрано окончательное наилучшее, исходя из полученных значений используемых нелинейных критериев качества.

### 4.3.3. Упражнение: построения модального регулятора с использованием линейных матричных неравенств

Использование линейных матричных неравенств дает альтернативный подход к реализации модального управления без возможности точного размещения каждого из корней характеристического уравнения замкнутой системы. Обеспечивается лишь их расположение в заданной области определенного вида [5]. Требуемую область размещения, аналогичную по структуре области (4.11), представим в следующем виде:

$$-\mu_2 < \operatorname{Re} \lambda_i < -\mu_1 < 0; |\operatorname{Im} \lambda_i| < -\sigma \cdot \operatorname{Re} \lambda_i, \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (4.12)$$

Ее можно описать как LMI-область, т.е. множество точек комплексной плоскости  $z$ , порождаемое системой линейных матричных неравенств относительно переменных  $x = \operatorname{Re} z$  и  $y = \operatorname{Im} z$ . Причем эта область является пересечением трех элементарных LMI-областей простой формы: двух полуплоскостей ( $x < -\mu_1$  и  $x > -\mu_2$ ) и конуса ( $|y| < -\sigma \cdot x$ ).

Используя методику, описанную в подразделе 1.2.3.3, и опуская промежуточные построения, можно констатировать, что для размещения всех собственных чисел некоторой матрицы  $C$  в соответствующей LMI-области необходимо и достаточно, чтобы для этой матрицы нашлась симметрическая матрица  $X = X^T$ , удовлетворяющая системе линейных матричных неравенств

$$M(C, X) < 0, \quad X > 0, \quad (4.13)$$

где знаки неравенств указывают на требуемую знакоопределенность. Матрица  $M(C, X)$  имеет диагонально-блочную структуру. Клетки на ее диагонали формируются по вполне определенным правилам, и их вид однозначно соответствует типам элементарных LMI-областей, пересечение которых образует требуемую область размещения корней (4.12).



**Задание.** Необходимо, используя материал п. 1.2.3.3, получить вид диагональных блоков матрицы  $M(C, X)$

**Решение.**

Рассмотрим первую элементарную область вида  $\operatorname{Re} z < -\mu_1$  и опишем ее с помощью неравенства вида  $f_1(z) < 0$ , введя функцию

$$f_1(z) = z + \bar{z} + 2\mu_1 \cdot 1.$$

Применяя правила, описанные в п. 1.2.3.3, выполним подстановку

$$(1, z, \bar{z}) \leftrightarrow (X, CX, XC^T). \quad (4.s36)$$

В результате получим первый диагональный блок матрицы  $M(C, X)$ :

$$CX + XC^T + 2\mu_1 X \quad (4.s37)$$

Поступая аналогично со второй элементарной областью вида  $\operatorname{Re} z > -\mu_2$ , представим ее в виде  $f_2(z) < 0$ , введя функцию

$$f_2(z) = -z - \bar{z} - 2\mu_2 \cdot 1.$$

Применяя подстановку (4.s36) получим второй диагональный блок матрицы  $M(C, X)$ :

$$-CX - XC^T - 2\mu_2 X \quad (4.s38)$$

Для описания третьей области  $|\operatorname{Im} z| < -\sigma \cdot \operatorname{Re} z$  с помощью неравенства вида  $f_3(z) < 0$  определим  $\psi = \operatorname{arctg}(\sigma) < \pi/2$  и введем матричную функцию

$$f_3(z) = \begin{pmatrix} (z + \bar{z}) \cdot \sin \psi & (z - \bar{z}) \cdot \cos \psi \\ -(z - \bar{z}) \cdot \cos \psi & (z + \bar{z}) \cdot \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (4.s39)$$

Правильность ее выбора подтверждается тем, что условие ее отрицательной определенности по критерию Сильвестра эквивалентно следующему условию на знаки главных миноров:  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ . Если выписать эти условия в явной форме, получим:

$$2 \cdot \operatorname{Re} z < 0, \quad 4 \cdot (\operatorname{Re} z)^2 \sin^2 \psi + 4 \cdot (\operatorname{Im} z)^2 \cos^2 \psi > 0.$$

Эти два неравенства после элементарных преобразований оказываются эквивалентны одному неравенству вида  $-\operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} z|$ . Видно, что это неравенство совпадает с исходным описанием третьей элементарной области.

Выполняя подстановку (4.s36), получим третий диагональный блок матрицы  $M(C, X)$ :

$$\begin{pmatrix} (CX + XC^T) \sin \psi & (CX - XC^T) \cos \psi \\ -(CX - XC^T) \cos \psi & (CX + XC^T) \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (4.s38)$$

Таким образом, условием размещения всех собственных чисел матрицы  $C$  в области (4.12) является существование симметрической матрицы  $X = X^T$ , удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (4.13), где матрица  $M(C, X)$  блочно-диагональная с блоками вида (4.s37)-(4.s39). •

Предложенное решение является правильным, но еще не определяет правила построения модального регулятора. Что же нужно сделать для получения этого правила? Очевидно, нужно конкретизировать вид матрицы  $C$  в (4.s37)-(4.s39). Для этого вернемся к линеаризованной системе (4.s19), (4.s21), замыкаемой обратной связью  $v(t) = k^T x$  из (4.s20).

Если подставить выражение для  $v(t)$  в правую часть системы (4.s19), то преобразования матрица  $C$ , определяющая собственные числа замкнутой системы, примет вид  $C = A + B \cdot k^T$ . Вектор коэффициентов регулятора  $k$  является неизвестным. При подстановке выражения для  $C$  в (4.s37)-(4.s39) возникнут нелинейные (по отношению к неизвестным  $X$  и  $k$ ) элементы  $k^T X$ . Чтобы система матричных неравенств (4.13) вновь стала линейной по отношению к неизвестным следует сделать замену переменных  $Z = k^T X$ .

**Задание.** Используя предложенный подход, нужно получить соотношения для коэффициентов модального регулятора, обеспечивающего размещение корней характеристического полинома замкнутой системы в области (4.12).

**Решение.**

Подставим управление в виде  $v(t) = k^T x$  в правую часть системы линеаризованных уравнений модели портального крана (4.s19), (4.s21). Матрица  $C$  замкнутой системы примет вид  $C = A + B \cdot k^T$ .

Подставим это выражение в формулы (4.s37)-(4.s39), определяющие диагональные блоки матрицы  $M(C, X)$  и выполним замену переменных  $Z = k^T X$ . Результат может быть представлен в следующем виде.

Для того, чтобы собственные числа матрицы замкнутой системы (4.s19), (4.s21) размещались в области (4.12) необходимо и достаточно, чтобы система линейных матричных неравенств (4.s39)-(4.s42) относительно неизвестных матриц  $X = X^T$  и  $Z$  имела решение  $X^*, Z^*$ .

$$M(A, B, X, Z) = \text{diag}(M_{ii}(A, B, X, Z) : i = 1, 2, 3) < 0; \quad X > 0, \quad (4.s39)$$

где

$$M_{11}(A, B, X, Z) = AX + XA^T + BZ + Z^T B^T + 2\mu_1 X; \quad (4.s40)$$

$$M_{22}(A, B, X, Z) = -AX - XA^T - BZ - Z^T B^T - 2\mu_2 X; \quad (4.s41)$$

$$M_{33}(A, B, X, Z) = \begin{pmatrix} (AX + XA^T + BZ + Z^T B^T) \sin \psi & (AX - XA^T + BZ - Z^T B^T) \cos \psi \\ -(AX - XA^T + BZ - Z^T B^T) \cos \psi & (AX + XA^T + BZ + Z^T B^T) \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (4.s42)$$

Полученная система (4.s39)-(4.s42) может быть решена с использованием специальных функций системы MatLab.

Поскольку матрица  $X^*$  – невырожденная, и имеет место зависимость  $Z = k^T X$ , то вектор коэффициентов модального регулятора определяем через решение системы  $X^*, Z^*$  по формуле

$$k^* = (Z^* (X^*)^{-1})^T. \quad \bullet \quad (4.s43)$$

Приведенное решение показывает, что метод линейных матричных неравенств ставит в соответствие области вида (4.12) единственное значение  $k^*$  параметров регулятора.

Заметим, что выбор области размещения корней (4.12) определяется тремя параметрами:  $0 < \mu_1 < \mu_2, \sigma > 0$ . Таким образом, появляется дополнительная возможность влияния на выбираемые методом коэффициенты регулятора  $k^*$  за счет варьирования указанных трех параметров.

**Задание.** Для метода линейных матричных неравенств нужно выбрать набор варьируемых параметров  $p$ , по которым можно проводить дополнительную оптимизацию качества переходных процессов в нелинейной модели, использующей построенное модальное управление. В качестве условий варьирования целесообразно использовать требование (4.11) на размещение корней характеристического полинома замкнутой линеаризованной системы.

**Решение.**

Поскольку вектор коэффициентов  $k^*$  модального регулятора, определяемый из решения системы линейных матричных неравенств (4.s39)-(4.s42) зависит от набора параметров  $\mu_1, \mu_2, \sigma$ , именно их удобно использовать в качестве компонент вектора  $p$ :

$$p = (\mu_1, \mu_2, \sigma). \quad (4.s44)$$

Область варьирования, исходя из общего требования на размещение корней замкнутой линеаризованной системы (4.11), будет иметь вид:

$$p \in D = D(\eta_1, \eta_2, \gamma) = \{ p \in R^3 : 0 < \eta_1 \leq p_1 < p_2 \leq \eta_2; 0 \leq p_3 \leq \gamma \}. \quad \bullet \quad (4.s45)$$

Введение набора свободных параметров  $p$  метода линейных матричных неравенств позволит непосредственно использовать этот аппарат в сочетании с оптимизацией вида переходного процесса по дополнительным нелинейным критериям качества и с учетом нелинейных уравнений динамики.

## 4.4. Оптимальная настройка свободных параметров при синтезе регуляторов по дополнительным нелинейным критериям качества

В этом разделе на примере задачи о модели порталного крана будет показано, как в задачах построения регуляторов могут быть использованы методы прямой численной оптимизации. Их использование позволит распорядиться выбором имеющихся свободных параметров у регуляторов различных типов для дополнительного улучшения качества переходных процессов в системе регулирования.

### 4.4.1. Принцип и цели оптимальной настройки свободных параметров при синтезе регуляторов

В разделе 4.1 при постановке задачи об управлении лабораторной моделью порталного крана была описана следующая неформализованная цель управления.

Предполагалось, что вначале каретка и груз покоятся в положении, соответствующем горизонтальной координате центра масс каретки  $x = 0$  (см. рис.4.1) За счет регулирования величины напряжения  $v(t)$ , подаваемого на электромотор, требуется обеспечить перемещение  $x$ -координаты груза в заданную окрестность требуемого значения  $x = x^*$  (точка  $C$  на рис. 4.1) и его стабилизацию. При этом перемещение нужно выполнить за возможно меньшее время при амплитудном ограничении колебательности переходного процесса. Кроме того, должно учитываться ограничение на предельно возможное значение напряжения источника питания  $|v(t)| \leq V^+$ . Имеется в виду, что все указанные характеристики должны определяться по исходной нелинейной модели лабораторной установки.

Обратим внимание, что все рассмотренные к данному моменту методы построения регуляторов обеспечивали лишь приведение замкнутой линеаризованной системы к состоянию равновесия (соответствующему в исходных переменных значениям  $x = x^*$ ,  $\varphi = 0$ ) с обеспечением определенного качества переходного процесса. Явного соблюдения указанных выше дополнительных неформальных требований не обеспечивалось. Вместе с тем, для каждого из методов построения регуляторов были введены свободные параметры  $p$ , варьирование которых в пределах допустимых множеств  $D$  могло оказывать существенное влияние на качество регулирования при сохранении, как минимум, асимптотической устойчивости, а для некоторых типов регуляторов и заданного порядка экспоненциальной скорости сходимости. Таким образом, заданное множество  $D$  допустимых значений этих параметров для каждого типа регулятора порождало свое множество переходных процессов априори приемлемого качества. Причем вид этих

переходных процессов всегда может быть получен численно как для линеаризованной, так и для исходной нелинейной системы уравнений.

Каким образом в этих условиях можно обеспечить достижение дополнительных целей управления? Основная идея состоит в том, чтобы на основе выбранного типа регулятора обеспечить наибольшее соответствие порождаемого им переходного процесса дополнительным целям за счет настройки свободных параметров этого типа регулятора.

Чтобы эта настройка могла быть выполнена с использованием известных численных методов целесообразно формализовать понятие «наибольшее соответствие». Для этого нужно ввести несколько дополнительных критериев качества, вычисляемых на траекториях замкнутой нелинейной системы регулирования (4.14). Они должны прямо или косвенно отражать такие характеристики переходного процесса, как время сходимости в заданную окрестность требуемого состояния, степень колебательности, величину перерегулирования, наибольшее значение напряжения, подаваемого на электромотор.

Имея набор формальных критериев, задачу настройки свободных параметров  $p$  можно ставить и решать как задачу оптимизации, в которой на множестве значений  $p \in D$  требуется добиться минимума основного критерия (например, времени сходимости) при заданных ограничениях на значения остальных критериев.

#### 4.4.2. Дополнительные нелинейные критерии качества

Для упрощения вида нелинейных критериев качества переходный процесс будем характеризовать поведением одной скалярной величины  $\Delta(t)$ , описывающей разность между  $x^*$  – координатой целевой точки перемещения груза и  $x$ -координатой текущего положения переносимого груза. Используя рис. 4.1 легко видеть, что

$$\Delta(t) = x^* - x(t) - \ell \cdot \sin(\varphi(t)).$$

Прежде чем определить конкретный вид критериев, сделаем важное замечание. Оно касается желательных свойств критериев, с точки зрения последующего применения к ним численных методов локальной оптимизации.

Из теории математического программирования известно, что для успешного применения этих методов желательна гладкость этих критериев по параметрам  $p$  до второго порядка. Выполнить это требование, как правило, не удастся, и необходимые критерии могут оказаться даже разрывными. В этом случае важно, чтобы геометрические места точек разрывов и других нарушений гладкости, по крайней мере, не проходили через области, содержащие оптимальные решения. Априори выполнение этого требования может оказаться неизвестным, и тогда требуется предварительное численное исследование

построенных критериев, поскольку возможность успешного применения методов численной оптимизации не является в этом случае очевидной и требует экспериментального подтверждения. В любом случае способ их построения критериев должен преследовать цель максимального соблюдения указанных выше свойств.

Заметим, что выбор набора критериев неоднозначен. Рассмотрим один из возможных вариантов их введения для рассматриваемой задачи.

Определим пять нелинейных критериев качества  $(T, H, h_1, h_2, V_{\max})$ , описанных ниже. Их значения зависят от вектора параметров  $k$  регулятора в (4.s14). В свою очередь, коэффициенты регулятора  $k$  определяются в зависимости от типа регулятора и зависят от набора свободных параметров  $p$ . Для каждого типа регулятора этот набор свой. Таким образом, всегда определена связь  $k = k(p)$ . В результате, все нелинейные критерии качества являются функциями от  $p \in D$ .

Геометрический смысл первых четырех критериев поясняет рис. 4.2.

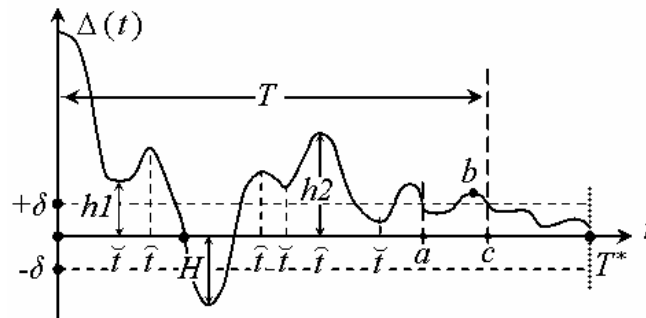


Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация нелинейных критериев качества.

Они вычисляются по виду зависимости  $\Delta(t)$  из (4.14), которую можно назвать текущим отклонением груза. Значения  $\Delta(t)$  определяются в процессе численного интегрирования на заданном промежутке  $[0, T^*]$  нелинейной системы (4.s14). Критерий  $T$  оценивает время сходимости текущего отклонения  $\Delta(t)$  в  $\delta$ -окрестность нуля, а критерии  $H, h_1, h_2$  введены для контроля немонотонности и колебательности в зависимости  $\Delta(t)$ .

Приведем формальное описание введенных критериев качества.

$$T = \begin{cases} t^*, \text{ если } \exists t^* \in [0, T^*]: (\forall t < t^* : |\Delta(t)| > \delta > 0; |\Delta(t^*)| = \delta; \forall t \in (t^*, T^*]: |\Delta(t)| \leq \delta), \\ T^*, \text{ в противном случае;} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$H = \begin{cases} 0, \text{ если } \forall t \in [0, T^*]: \Delta(t) \geq 0, \\ -\min\{\Delta(t) : t \in [0, T^*] \text{ и } \Delta(t) < 0\}, \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Обозначим через  $\tilde{t}$  точки локальных минимумов зависимости  $\Delta(t)$ , формально определяемые условиями  $\Delta'_i(\tilde{t}) = 0, \Delta''_i(\tilde{t}) > 0$ . Тогда

$$h1 = \begin{cases} \max \{ \Delta(\tilde{t}) : \tilde{t} \in [0, T^*] \& \Delta'_t(\tilde{t}) = 0 \& \Delta''_{tt}(\tilde{t}) > 0 \& \Delta(\tilde{t}) > 0 \}, & \text{если } \exists \Delta(\tilde{t}) > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Аналогично, через  $\hat{t}$  обозначим точки локальных максимумов зависимости  $\Delta(t)$ , формально определяемые условиями  $\Delta'_t(\hat{t}) = 0, \Delta''_{tt}(\hat{t}) < 0$ . Тогда

$$h2 = \begin{cases} \max \{ \Delta(\hat{t}) : \hat{t} \in [0, T^*] \& \Delta'_t(\hat{t}) = 0 \& \Delta''_{tt}(\hat{t}) < 0 \& \Delta(\hat{t}) > 0 \}, & \text{если } \exists \Delta(\hat{t}) > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Пятый критерий определим как наибольшее за время наблюдения значение модуля управляющего напряжения, формируемого регулятором в (4.14), т.е.

$$V_{\max} = \max \{ |v(t)| : t \in [0, T^*] \}. \quad (4.19)$$

Заметим, что критерий  $H$  характеризует немонотонность в изменении  $\Delta(t)$  только при наличии эффекта перерегулирования, когда  $\Delta(t)$  принимает на части промежутка  $[0, T^*]$  отрицательные значения. При этом будет получено  $H > 0$ . Если же всегда  $\Delta(t) \geq 0$ , то  $H = 0$ . В этом случае немонотонность контролируется только дополнительными критериями  $h1$  и  $h2$ , которые принимают положительные значения при наличии у зависимости  $\Delta(t)$  локальных минимумов и максимумов в области значений  $\Delta(t) > 0$  на  $[0, T^*]$ .

Как уже отмечалось выше, для применения численных методов локальной оптимизации важным является вопрос о свойствах введенных критериев, как функций от определенных ранее параметров  $p$ . Используя теорему о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметров можно показать, что в рассматриваемой задаче значения  $\Delta(t)$  будут непрерывно дифференцируемы по параметрам регулятора  $k$ , если угол отклонения  $\varphi(t)$  остается в пределах  $(-\pi, \pi)$ .

Однако сама структура критериев (4.15)-(4.19) может породить нарушение их гладкости. Например, при гладком изменении по параметрам формы зависимости  $\Delta(t)$ , приводящем к уменьшению значения максимума «b» (см. рис. 4.2) до значения, меньшего  $\delta$ , произойдет скачкообразное уменьшение значения  $T$  с «c» на «a», т.е. возникнет разрыв этого критерия.

Критерий  $H$ , в силу своей структуры, по крайней мере непрерывен. Критерии  $h1$  и  $h2$  могут изменять свои значения с нарушением непрерывности в случае исчезновения порождающих эти значения локальных экстремумов при гладком по параметрам изменении кривой  $\Delta(t)$ .

На приведенных в подразделе 4.4.3 видах линий равного уровня критериев для ряда двумерных сечений наличие разрыва критерия  $h2$  обнаруживается, например, на рис. 4.4. Непрерывная дифференцируемость  $h1$  (или  $h2$ ) может нарушаться при значениях параметров, когда локальный минимум (или максимум) с наибольшим положительным значением выравнивается по этому значению с другим локальным минимумом (максимумом).

Таким образом, следует ожидать кусочную непрерывную дифференцируемость предложенных критериев по параметрам  $k$  регулятора. Однако, введенные критерии рассматриваются как функции не от  $k$ , а от свободных параметров  $p$ . Возникающая зависимость  $k = k(p)$  может оказывать дополнительное влияние на характер гладкости критериев по свободным  $p$ .

Вопрос о методах анализа гладкости зависимости  $k = k(p)$  выходит за рамки данного пособия и здесь подробно не рассматривается. Укажем только, что если такой анализ провести, то для типов регуляторов, рассмотренных в подразделах 4.3.1, 4.3.2 можно обосновать по крайней мере непрерывную дифференцируемость зависимости  $k = k(p)$ .

Таким образом, в рассматриваемой задаче связь  $k = k(p)$  не окажет дополнительного влияния на гладкость критериев качества по параметрам  $p$ .

#### 4.4.3. Постановка задач оптимизации и примеры видов зависимости дополнительных критериев качества от свободных параметров

Поставим задачу оптимизации таким образом, чтобы она соответствовала достижению неформальной цели, сформулированной в п.4.4.1. Возможный вариант такой постановки приведен в (4.20)

$$\min_{p \in D} \left\{ T(p) : H(p) \leq H^+; h1(p) \leq h1^+; h2(p) \leq h2^+; V_{\max}(p) \leq V^+ \right\}, \quad (4.20)$$

где верхние ограничители  $H^+, h1^+, h2^+$  вычисляются по заданному проценту от уровня начального отклонения  $|\Delta(0)|$ .

В примерах расчетов, показанных в подразделе 4.4.4, использованы значения ограничителей, составляющие 3% при  $\Delta(0) = 1$ . Это соответствует абсолютным значениям ограничителей  $H^+ = h1^+ = h2^+ = 0.03$ . Исходя из параметров источника питания исследуемой лабораторной установки было выбрано значение ограничителя  $V^+ = 12$  в. Таким образом, оптимальные значения параметров  $p$  далее определяются из решения задач вида (4.20).

Примеры расчетов в подразделе 4.4.4, выполнены для двух видов задач (4.20):

- 1) для первого вида коэффициенты регулятора  $k$  в (4.s14) определялись зависимостью  $k = k(p)$ , реализующей  $LQR$ -регулятор (4.9)-(4.10), где тип вектора  $p$  соответствовал (4.s24). Размерность  $N$  этого вектора равна 10.
- 2) для второго вида, зависимость  $k = k(p)$  строилась по прямым правилам модального регулятора (4.s27)-(4.s29), где вектор  $p$  выбирался согласно (4.s30) в области  $D$  вида (4.s31). Размерность этого вектора  $N = 4$ .

**Задание.** Нужно описать действия, которые должны быть выполнены для вычисления значений критериев  $T(p), H(p), h1(p), h2(p), V_{\max}(p)$ .



**Решение.**

Для вычисления значений критериев  $T(p), H(p), h1(p), h2(p), V_{\max}(p)$  необходимо выполнить следующие действия:

- 1) для задач первого (второго) вида для заданного значения параметров  $p$  с использованием линеаризованной модели (4.s19)-(4.s22) должны быть вычислены значения коэффициентов  $k = k(p)$  LQR-регулятора (прямого модального регулятора) по соответствующим этим видам регуляторов правилам;
- 2) при найденных значениях  $k$  необходимо выполнить численное интегрирование на промежутке  $[0, T^*]$  системы нелинейных уравнений (4.s14), и по рассчитанным значениям  $\Delta(t)$  и  $v(t)$  вычислялись критерии задачи по формулам (4.15)-(4.19). •

В решении указан правильный алгоритм вычисления критериев. В приведенных ниже расчетах для численного интегрирования нелинейной системы уравнений применялась реализация метода Рунге-Кутты 4-го порядка с использованием решателя *ode45* системы MatLab при заданной точности  $10^{-6}$ .

Для выбора численных методов решения задач (4.20) двух указанных видов необходимо предварительное исследование поведения критериев в зависимости от параметров  $p$ . Оно может быть выполнено путем построения линий равного уровня основных критериев  $T(p), V_{\max}(p)$  и  $H(p), h2(p)$  в ряде сечений. Характерные виды таких сечений показаны на рис. 4.3-4.6. Поведение критерия  $h1$  не приведено, поскольку оно структурно подобно поведению  $h2$ , хотя с ним полностью и не совпадает. На рисунках, соответствующих ограничиваемым критериям  $H, h2, V_{\max}$ , темным тоном выделены подобласти в этих сечениях, где значения критериев удовлетворяет указанным в (4.20) ограничениям.

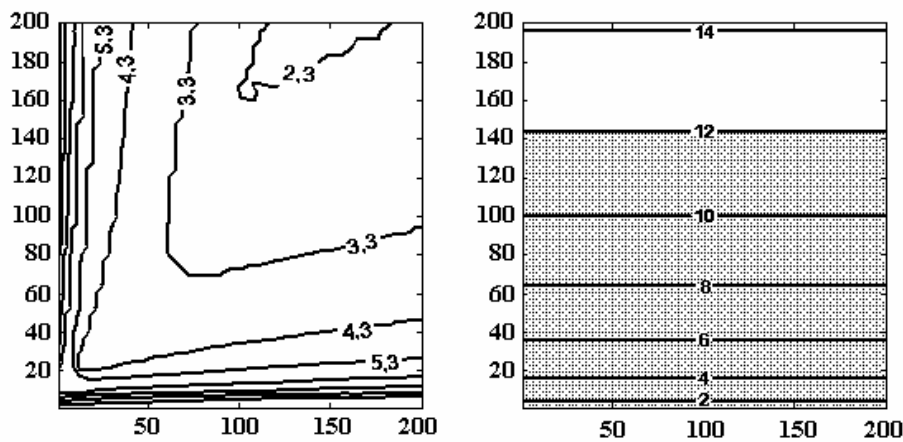


Рис. 4.3. Линии равного уровня критериев  $T$  и  $V_{\max}$  по параметрам  $Q_{11}, Q_{33}$  при диагональной форме матрицы  $Q$  в LQR-подходе (для сечения  $Q_{22} = 0.5, Q_{44} = 0.5$ ).

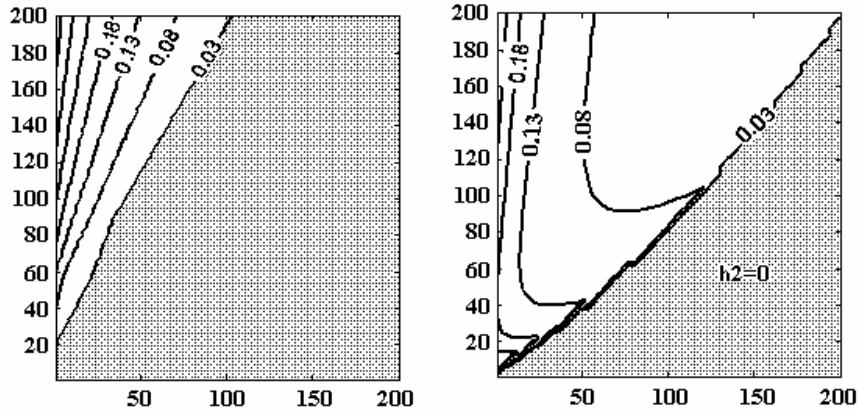


Рис. 4.4. Линии равного уровня критериев  $H$  и  $h_2$  по параметрам  $Q_{11}, Q_{33}$  при диагональной форме матрицы  $Q$  в LQR-подходе (для сечения  $Q_{22} = 0.5, Q_{44} = 0.5$ ).

Рис. 4.3-4.4 соответствуют задаче (4.20) первого вида (на основе LQR-регулятора). Показаны сечения, построенные по двум диагональным элементам матрицы  $Q$ , что соответствует параметрам  $p_1 = d_{11}$  и  $p_3 = d_{33}$  в (4.s24),  $j, f$  значения  $p_2 = d_{22}$  и  $p_4 = d_{44}$  в сечениях приняты равными 0.5, а  $p_j$  для  $j = 5, \dots, 10$  приняты равными нулю.

**Задание.** Нужно проанализировать поведение критериев в приведенном сечении и сделать предварительные выводы о свойствах задачи.

**Решение.**

В данном сечении целевой критерий  $T(p)$  выглядит как одноэкстремальный. Его значения убывают вдоль диагонального направления с ростом значений параметров.

Можно заметить, что с учетом используемых в (4.20) ограничений все ограничиваемые критерии существенны, поскольку влияют на вид допустимого множества, которое в показанном сечении представляет пересечение закрашенных темным тоном подмножеств на рис.4.3-4.4. Минимум целевого критерия в сечении будет достигаться на границе допустимого множества в окрестности пересечения фрагментов границы, порожденных ограничениями на критерии  $h_2$  и  $V_{\max}$ . По рис. 4.4, можно заметить, что граница области, порожденная ограничением  $h_2 \leq h_2^+ = 0.03$ , проходит в непосредственной близости от многообразия разрыва данного критерия. Это может затруднять работу локальных методов, и по результатам численного решения задача может выглядеть как многоэкстремальная, т.к. методы численной оптимизации, запускаемые из различных начальных точек, могут давать несколько различающиеся результаты. •

Для задачи второго вида (использующей прямой метод построения модального регулятор), на рис. 4.5-4.6 приведены результаты расчетов для

случая параметров  $p$  вида (4.s30). Показано характерное поведение в выбранном сечении основных критериев  $T(p)$ ,  $V_{\max}(p)$  и  $H(p)$ ,  $h_2(p)$ .

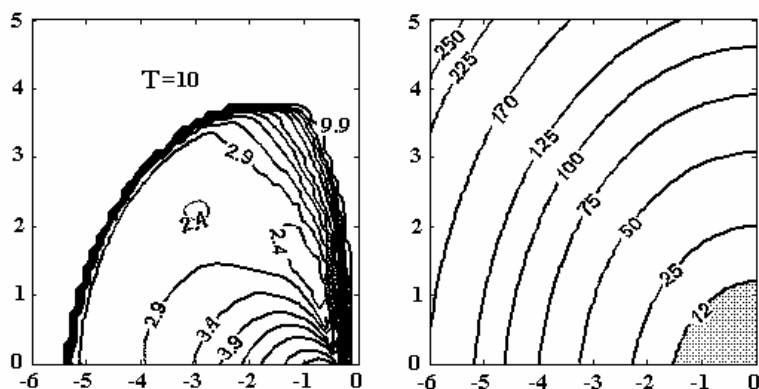


Рис. 4.5. Поведение критериев  $T$  и  $V_{\max}$  в плоскости параметров  $\text{Re } \lambda_{1,2}, |\text{Im } \lambda_{1,2}|$  при использовании модального подхода (для сечения  $\text{Re } \lambda_{3,4} = -5.6, |\text{Im } \lambda_{3,4}| = 3.7$ ).

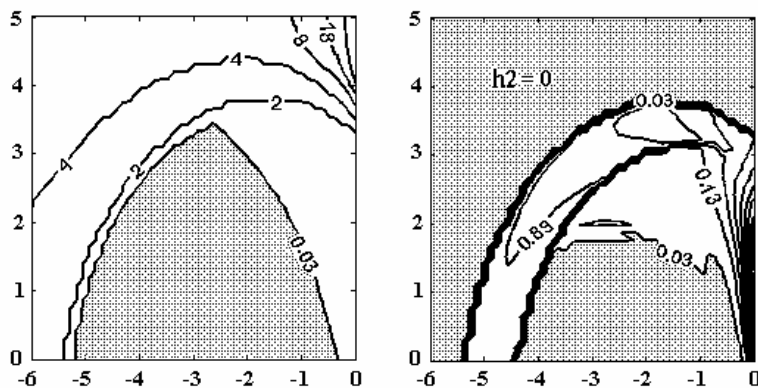


Рис. 4.6. Поведение критериев  $H$  и  $h_2$  в плоскости параметров  $\text{Re } \lambda_{1,2}, |\text{Im } \lambda_{1,2}|$  при использовании модального подхода (для сечения  $\text{Re } \lambda_{3,4} = -5.6, |\text{Im } \lambda_{3,4}| = 3.7$ ).

**Задание.** Нужно проанализировать поведение критериев в приведенном на рис. 4.5-4.6 сечении для модального регулятора и сделать предварительные выводы о свойствах задачи.

**Решение.**

На рис. 4.5 (слева) присутствует значительная подобласть стационарности критерия  $T$  со значением  $T = T^* = 10$ , а так же контур, при пересечении которого критерий  $T$  быстро изменяется. Наиболее вероятно, что при небольшом смещении от этого контура в направлении значений  $T = T^*$  происходит переход части корней характеристического полинома в правую полуплоскость с потерей устойчивости замкнутой системы.

Также у критерия  $T$  в построенном сечении наблюдается несколько локальных минимумов (один из них находится вне множества допустимых значений, образованного пересечением закрашенных темным тоном

подмножеств на рис. 4.5 (справа) и рис. 4.6). Критерий  $h_2$  также имеет многообразия разрывов и подобласть стационарности со значением  $h_2 = 0$ .

Наблюдаемые признаки многоэкстремальности целевого критерия  $T(p)$ , а также сложный характер границы допустимого множества позволяют предположить, что использовании для решения задачи (4.20) методов численной локальной оптимизации может наблюдаться значительная зависимость результата от начальной точки поиска. Если этот вывод подтвердится результатами расчетов, то для решения задачи (4.20) следует использовать методы многоэкстремальной оптимизации. •

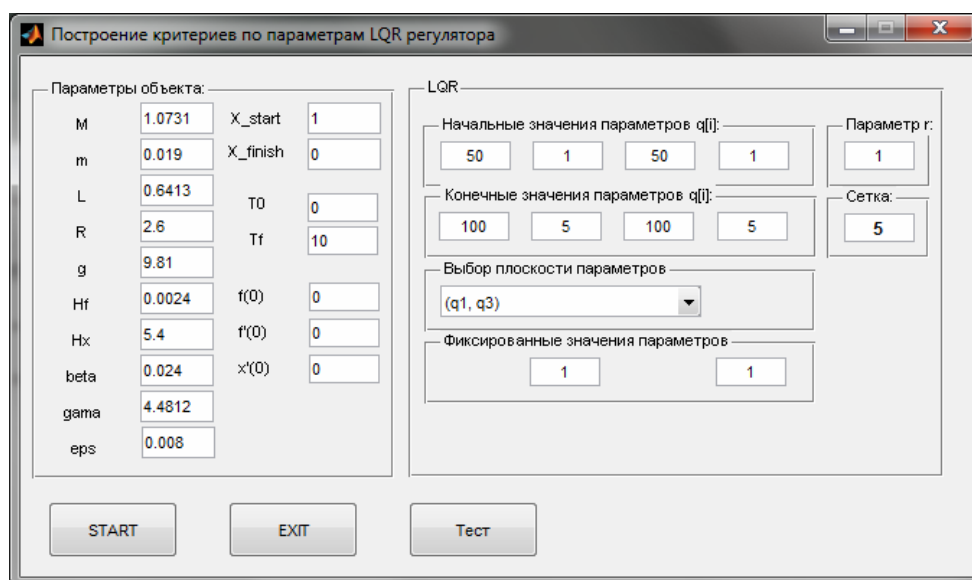


Рис.4.7. Главное окно модуля построения сечений по диагональным элементам матрицы Q LQR-регулятора

Для построения видов линий равного уровня нелинейных критериев качества, приведенных на рис. 4.3-4.6 использовалось две программы, написанные для системы MatLab: одна – для случая модального регулятора, вторая – для LQR-регулятора (см. рис. 4.7). Код программ доступен по ссылке [10].

Для получения линий равного уровня при использовании указанной программы достаточно задать физические параметры модели портального крана, начальное и конечное положение перемещаемого груза, промежуток по времени интегрирования, начальные условия, границы варьирования параметров, плоскость сечения, количество точек в сетке по каждому параметру для построения линий равного уровня. Вычисления проводятся при нажатии кнопки «Start». После их завершения в отдельном окне выполняется построение видов линий равного уровня.

#### 4.4.4. Примеры оптимальной настройки свободных параметров регуляторов методами нелинейной оптимизации

В этом разделе описаны условия и приведены характерные результаты вычислительных экспериментов по оптимальному выбору параметров регуляторов посредством решения задач (4.20) первого и второго видов с использованием методов локальной оптимизации системы MatLab.

При численном решении задач (4.20) были выбраны следующие свободные параметры и области поиска  $D$ . Для задач первого вида (при использовании  $LQR$ -регуляторов (4.9)-(4.10)) элементы вектора параметров  $p$  определяли, согласно (4.s24), четыре диагональных элемента матрицы  $Q$ , а также шесть наддиагональных элементов верхней треугольной матрицы  $L$ , входящей в разложение Холесского для  $Q$ . Множество  $D$  задавалась в виде гиперинтервала в пространстве размерности  $N = 10$ :

$$D = [p^-, p^+] \subseteq R^{10}$$

при граничных значениях  $p^- = (10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, -10^3, \dots, -10^3)$ ,  $p^+ = (10^3, \dots, 10^3)$ .

Для задач второго вида (при использовании прямого модального управления (4.s27)-(4.s29)) в случае выбора параметров  $p$  по типу (4.s30), т.е. при варианте выбора

$$p = (\operatorname{Re} \lambda_{1,2}, |\operatorname{Im} \lambda_{1,2}|, \operatorname{Re} \lambda_{3,4}, |\operatorname{Im} \lambda_{3,4}|).$$

В качестве областей поиска  $D$  применялись множества из  $R^4$  вида (4.s31), т.е.

$$p \in D = \{-\eta_2 \leq p_{1,3} \leq -\eta_1 < 0; 0 \leq p_{2,4} \leq -\gamma \cdot p_{1,3}\}.$$

При проведении вычислительных экспериментов были выбраны следующие значения параметров  $\eta_1 = 0.1$ ,  $\eta_2 = 6$ ,  $\gamma = 1$ .

Указанные задачи (4.20) решались с использованием функции *fmincon* системы MatLab. Для проведения вычислений использовалось оконное приложение для MatLab, вид главного окна которого приведен на рис. 4.8.

Исходный код программы доступен по ссылке [10]. Для проведения оптимизационного расчета достаточно задать физические параметры модели портального крана, начальное и конечное положение перемещаемого груза, промежутки по времени интегрирования, начальные условия, границы варьирования 10-ти параметров матрицы  $Q$ , начальные значения этих параметров, определить набор ограничиваемых функций-критериев, задать значения ограничителей для ограничиваемых функций, выбрать численный метод учета ограничений. Процесс численной оптимизации начинает выполняться при нажатии кнопки «Start». В процессе оптимального выбора в отдельном окне демонстрируются виды переходных процессов, соответствующие значениям варьируемых параметров в текущей точке поиска. После завершения расчетов в главном окне отображаются найденные

оптимальные значения коэффициентов регулятора, а также соответствующее им найденное оптимальное значение минимизируемого целевого критерия  $T$ .



Рис.4.8. Главное окно модуля оптимизатора по полному набору параметров LQR-регулятора

При использовании для оптимизационных расчетов функции *fmincon* для учета ограничений в этой функции применялся либо *метод активного набора* [11] в сочетании с *квазиньютоновским методом* [12] решения вспомогательных задач, либо *метод внутренней точки* (он же, метод внутреннего штрафа, или метод барьерных функций) [11]. В задачах первого вида лучшие результаты обеспечил метод внутренней точки. Параметры останова выбирались стандартными: максимальное нарушение ограничений  $TolCon = 10^{-6}$ , относительная норма текущего шага при останове  $TolX = 10^{-10}$ . Как уже отмечалось выше, во всех расчетах целевое значение  $x^*$  принималось равным 1, что соответствовало начальному отклонению положения переносимого груза от целевого положения  $\Delta(0) = 1$ .

Результаты численного решения задач представлены в табл. 4.2-4.3. Результаты, выделенные в таблицах подчеркиванием, соответствуют лучшим найденным локально-оптимальным значениям целевого критерия  $T(p)$  при наложенных ограничениях. Табл. 4.2 соответствует оптимизации свободных параметров LQR-регулятора. В ней вместо начальных и найденных значений вектора  $p$  приведены значения элементов по строкам начальной и найденной матрицы  $Q$ . В силу симметрии показаны только ее диагональные и наддиагональные элементы. Наблюдаемое различие результатов решения для различных начальных значений в табл. 4.2 свидетельствует о наличии многоэкстремальности в областях с малыми значениями целевого критерия.

Таблица 4.2.

Примеры численной оптимизации по элементам полной матрицы  $Q$  для LQR-регуляторов

№	Показатель	Значение показателя
1	Начальное значение $Q$	(10 0 0 0); (1 0 0); (10 0); (1)
	Найденное локально оптимальное $Q$	(209.2535 -9.7812 -84.6526 -13.9990); (10.4357 4.5847 11.4506); (134.8462 6.4285); (13.2875)
	Собственные числа $\lambda_{1,2}; \lambda_{3,4}$	(-5.5670 ± $i \cdot 4.0819$ ; -0.7254 ± $i \cdot 1.3688$ )
	Коэффициенты регулятора $k$	-14.6293 0.9688 11.6123 5.6851
	Критерии: $T, H, h1, h2, V_{\max}$	1.8228; 5.6·10 <sup>-5</sup> ; 0; 9.1·10 <sup>-7</sup> ; 11.6123
	Число итераций	25
2	Начальное значение $Q$	(10 1 0 0); (1 1 0); (10 1); (1)
	Найденное локально оптимальное $Q$	(224.0763 5.2483 -84.2376 7.5215); (12.1744 2.1011 9.2310); (130.1759 -12.5088); (11.8363)
	Собственные числа $\lambda_{1,2}; \lambda_{3,4}$	(-6.1133 ± $i \cdot 3.2440$ ; -0.7034 ± $i \cdot 1.3606$ )
	Коэффициенты регулятора $k$	-15.2459 0.5699 11.4095 5.7159
	Критерии: $T, H, h1, h2, V_{\max}$	1.7628; 2.5·10 <sup>-7</sup> ; 1.9·10 <sup>-5</sup> ; 4.5·10 <sup>-5</sup> ; 11.4095
	Число итераций	43
3	Начальное значение $Q$	(10 -1 -1 -1); (1 -1 -1); (10 -1); (1)
	Найденное локально оптимальное $Q$	(196.7297 -25.4903 -77.7772 -14.4188); (8.6338 7.7437 8.5840); (132.5863 11.4881); (10.8123)
	Собственные числа $\lambda_{1,2}; \lambda_{3,4}$	(-5.6074 ± $i \cdot 3.7874$ ; -0.7235 ± $i \cdot 1.3975$ )
	Коэффициенты регулятора $k$	-14.0431 0.8224 11.5146 5.5049
	Критерии: $T, H, h1, h2, V_{\max}$	<u>1.7039</u> ; 5.2·10 <sup>-5</sup> ; 0; 2.5·10 <sup>-5</sup> ; 11.5146
	Число итераций	26

Табл. 4.3 соответствует оптимизации свободных параметров  $p$  модального регулятора для случая наличия двух пар комплексно сопряженных корней. Оптимизация проводится по компонентам этих корней.

Данные табл. 4.3 также свидетельствуют о наличии многоэкстремальности, поскольку для различных начальных размещений корней методы локальной оптимизации приводят к отличающимся результатам. Методы поиска глобально оптимальных значений параметров в многоэкстремальных

ситуациях, рассчитанные на задачи со сложно вычисляемыми критериями, можно найти в [12,13].

Таблица 4.3.

Примеры численной оптимизации модального регулятора по параметрам расположения двух пар комплексно сопряженных корней

№	Показатель	Значение показателя
1	Начальные значения собственных чисел $\lambda_{1,2}; \lambda_{3,4}$	$(-1.0000 \pm i \cdot 1.0000; -1.0000 \pm i \cdot 1.0000)$
	Локально оптимальные значения собственных чисел	$(-4.8983 \pm i \cdot 3.0993; -0.6350 \pm i \cdot 1.2295)$
	Коэффициенты регулятора $k$	-11.2374    -0.5035    6.5333    2.4440
	Критерии: $T, H, h1, h2, V_{\max}$	1.8913; $1.5 \cdot 10^{-4}$ ; $3.1 \cdot 10^{-9}$ ; $6.9 \cdot 10^{-5}$ ;    6.5333
	Число итераций	79
2	Начальные значения собственных чисел $\lambda_{1,2}; \lambda_{3,4}$	$(-2.0000 \pm i \cdot 2.0000; -4.0000 \pm i \cdot 4.0000)$
	Локально оптимальные значения собственных чисел	$(-5.5702 \pm i \cdot 4.0757; -0.7060 \pm i \cdot 1.3767)$
	Коэффициенты регулятора $k$	-14.5117    0.8578    11.5789    5.4920
	Критерии: $T, H, h1, h2, V_{\max}$	<u>1.6132</u> ; $2.3 \cdot 10^{-4}$ ; $1.3 \cdot 10^{-8}$ ; $4.2 \cdot 10^{-5}$ ;    11.5789
	Число итераций	85
3	Начальные значения собственных чисел $\lambda_{1,2}; \lambda_{3,4}$	$(-0.5000 \pm i \cdot 1.0000; -2.0000 \pm i \cdot 3.0000)$
	Локально оптимальные значения собственных чисел	$(-6.3174 \pm i \cdot 3.7514; -0.6662 \pm i \cdot 1.2504)$
	Коэффициенты регулятора $k$	-17.6279    0.5298    11.0026    5.8613
	Критерии: $T, H, h1, h2, V_{\max}$	1.9098; $1.7 \cdot 10^{-6}$ ; $4.9 \cdot 10^{-9}$ ; $9.4 \cdot 10^{-8}$ ;    11.0026
	Число итераций	36

В целом, численные эксперименты, приведенные в табл. 4.2-4.3 свидетельствуют о целесообразности проведения дополнительной оптимальной настройки свободных параметров  $p$  в методах построения регуляторов.

На рис. 4.9 приведен вид переходных процессов по отклонению  $\Delta(t)$  для лучших результатов из табл. 4.2-4.3 (соответствующие лучшие значения  $T(p)$  выделены в таблицах подчеркиванием).

Поскольку в исходном масштабе переходные процессы в окрестности нулевого значения мало отличимы, графики построены в неравномерной шкале с использованием преобразования вида

$$\tilde{\Delta}(t) = \frac{\text{Log}((\sigma + |\Delta(t)|)/\sigma)}{\text{Log}((\sigma + 1)/\sigma)} \cdot \text{sign}(\Delta(t)), \quad (4.21)$$



где было выбрано  $\sigma = 0.005$ . Преобразование (4.21) сохраняет значение единицы и существенно растягивает область в окрестности нуля, позволяя наблюдать малые по модулю значения  $\Delta(t)$ .

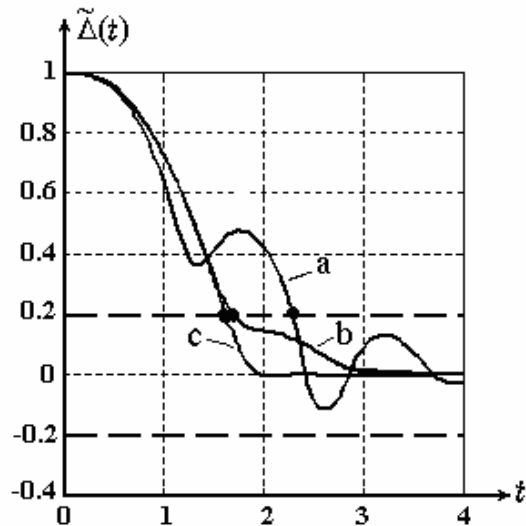


Рис. 4.9. Вид переходных процессов по нелинейно преобразованной ошибке наведения  $\tilde{\Delta}(t)$  для нескольких локально оптимальных значений параметров регулятора (a – лучший результат при «ручном» подборе параметров; b – эксперимент 3 табл. 4.2; c – эксперимент 2 табл. 4.3).

Для сравнения на рис. 4.9 показан вид лучшего переходного процесса (график *a*), полученного при «ручном» подборе элементов матрицы  $Q$  за счет варьирования только ее диагональных параметров при обнулении остальных. Хорошо видно, что автоматическая численная оптимизация позволила добиться существенно лучшего поведения переходных процессов, чем при интуитивном подборе параметров.

## Литература

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
2. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.
4. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.
6. Чурилов А.Н., Гессен А.В. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 148 с.
7. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. 2-е изд., перераб. и доп. / В. П. Дьяконов. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. 800 с.
8. Постников И.С. Теория автоматического управления движением. Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. – 138 с.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т.2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н.Е. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 736 с.
10. Web-сайт кафедры теории управления и динамики машин ВМК ННГУ: Учебные материалы по общим курсам – Теория управления // Лаб. каф. ТУиДМ: web-сайт. Размещение 2006-2012 / Разработчики: Кольцова О.Ю., Городецкий С.Ю. URL: <http://www.vmk.unn.ru/tudm/materials.htm>.
11. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 507 с.
12. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 489 с.
13. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.