МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Е.Н. Махрова

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА РАЗВЕТВЛЕННЫХ КОНТИНУУМАХ

Учебно-методическое пособие
Часть первая

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010100 "Математика"

Нижний Новгород
2010

УДК 517.9
ББК В161.6
М-36

М-36 Махрова Е.Н. ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА РАЗВЕТВЛЕННЫХ КОНТИНУУМАХ: Учебно-методическое пособие. Часть первая. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 39 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **О.В. Починка**

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются дискретные динамические системы, заданные на одномерных разветвленных континуумах как с конечным, так и со счетным числом точек ветвления. Изучаются результаты, являющиеся обобщением известных теорем для непрерывных отображений, заданных на отрезке.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся на кафедре дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010100 "Математика".

Учебно-методическое пособие издается в рамках программы развития НИУ "Разработка новых и модернизация существующих УМК для подготовки молодых специалистов для академических институтов и предприятий высокотехнологических секторов экономики".

УДК 517.9
ББК В161.6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия изучение динамики отображений на одномерных континуумах с непустым множеством точек ветвления таких, как конечных деревьях, графах и дендритах вызывают большой интерес у математиков. Это связано, например, с тем, что для отображений на многообразиях с инвариантным слоением коразмерности 1, соответствующее фактор-отображение оказывается определенным на графе. Более того, динамика псевдоаносовских гомеоморфизмов на пространствах могут быть сведены к анализу некоторых специальных отображений на графах. Кроме этого, отображения на графах иногда имитируют поведение гладкого потока в окрестности гиперболического аттрактора. Наконец, дендриты появляются как множества Жюлиа для комплексных динамических систем.

В настоящем пособии мы познакомимся с некоторыми результатами для непрерывных отображений на разветвленных континуумах, которые являются обобщением известных теорем для непрерывных отображений, заданных на отрезке.

Начнем с необходимых определений.

Под *континуумом* будем понимать компактное связное метрическое пространство.

Пусть X – континуум, точка $p \in X$, n – кардинальное число $\leq c$ (c – мощность континуума) или порядковое число ω (порядковые типы вполне упорядоченных множеств называются порядковыми числами; множество натуральных чисел и все подобные ему называются множествами типа ω). Будем говорить, что порядок точки p не превосходит n: $ord\, x \leq n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что мощность границы δ-окрестности точки p не превосходит n. Равенство $ord\, p = n$ означает, что $ord\, p \leq n$ и соотношение $ord\, p \leq m$ не имеет места ни при каком $m < n$.

Точки, порядок которых больше 2 (равен 1), называются точками ветвления (концевыми точками).

Условимся обозначать через $R(X)$ ($E(X)$) – множество точек ветвления (концевых точек) континуума X.

Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий дуг, гомеоморфных окружности. На рис. 1 приведен пример дендрита, который является множеством Жюлиа при итерировании отображения $f(z) = z^2 + i$, где z — комплексное число, i — мнимая единица [4]. Дендрит имеет не более, чем счетное число точек ветвления, причем порядок каждой точки ветвления не превосходит ω [3].

Дендрит с конечным числом точек ветвления конечного порядка будем называть *конечным деревом* или просто *деревом.*

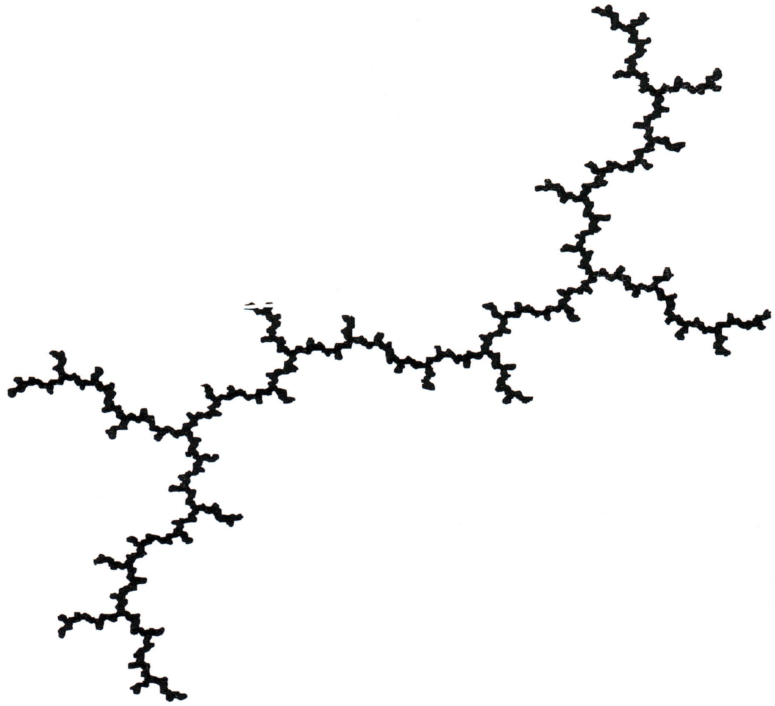

рис. 1. Дендрит

Частным случаем конечного дерева является *n-од* – множество точек комплексной плоскости, n-ая степень которых принадлежит отрезку $[0, 1]$. n-од имеет единственную точку ветвления 0.

Под *графом* будем понимать конечное связное объединение дуг и окружностей.

Пусть X — континуум, множество $J \subset X$. Отображение $r : X \to J$ называется ретракцией X на множество J, если r непрерывно и $r(x) = x$ для любой точки $x \in J$.

1. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШАРКОВСКОГО ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА n-ОДЕ

В 60-х годах прошлого столетия А.Н. Шарковский доказал теорему, описывающую соотношение между периодами периодических точек для непрерывных отображений на отрезке [5]. Пусть $\preceq$ (порядок Шарковского) будет следующий порядок на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$:

$$1 \preceq 2 \preceq 2^2 \preceq 2^3 \preceq \ldots \preceq \ldots \preceq 5 \cdot 2^2 \preceq 3 \cdot 2^2 \preceq \ldots$$

$$\preceq 9 \cdot 2 \preceq 7 \cdot 2 \preceq 5 \cdot 2 \preceq 3 \cdot 2 \preceq \ldots \preceq 9 \preceq 7 \preceq 5 \preceq 3.$$

Теорема Шарковского заключается в следующем.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $I = [0, 1]$, $f : I \to I$ — непрерывное отображение. Тогда если f имеет периодическую точку периода k, то f имеет периодическую точку периода $m \preceq k$. И обратно, если Z — начальный отрезок порядка Шарковского (множество $Z \subseteq \mathbf{N}$ называется начальным отрезком порядка $\preceq$, если из условий $k \in Z$ и $m \preceq k$ следует, что $m \in Z$), то найдется непрерывная функция $f : I \to I$ такая, что множество периодов $T(f)$ отображения f совпадает с Z.*

В настоящей главе мы докажем теорему Болдвина [10], которая является обобщением теоремы Шарковского для непрерывных отображений на n-оде, $n \geq 3$.

1.1. Необходимые определения и обозначения. Формулировка теоремы Болдвина

Пусть X — n-од. X имеет единственную точку ветвления 0, и открытое в X множество $X \setminus \{0\}$ состоит из n компонент, называемых компонентами n-ода. Замыкание любой компоненты назовем ветвью n-ода.

Начнем с определения $\preceq_n$-порядка на множестве натуральных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *$\preceq_1$-порядок (порядок Шарковского) определим следующим образом:*

$$2^i \preceq_1 2^{i+1} \preceq_1 2^{j+1}(2m+1) \preceq_1 2j(2k+3) \preceq_1 2j(2k+1)$$

для всех целых $i, j \geq 0$ и $k, m > 0$. Если $n \geq 2$, то $\preceq_n$-порядок определим следующим образом: пусть m, k — натуральные числа.
1. $k = 1$. Тогда $m \preceq_n k$, если $m = 1$.
2. k делится на n. Тогда $m \preceq_n k$, если либо $m = 1$, либо m делится на n и $(m/n) \preceq_1 (k/n)$.

3. k не делится на n. Тогда $m \preceq_n k$, если либо $m = 1$, $m = k$, либо $m = ik+jn$ для некоторых целых $i \geq 0$, $j \geq 1$.

Заметим, что $\preceq_2$ является порядком Шарковского. Диаграммы $\preceq_3$- и $\preceq_4$-порядков представлены на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

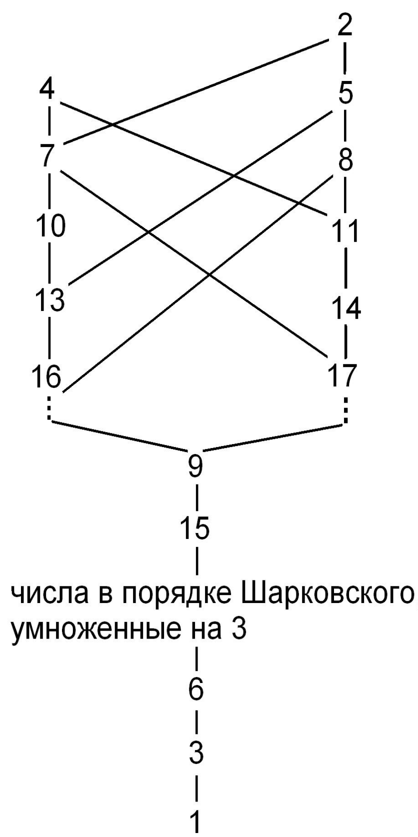

рис. 2. $\preceq_3$-порядок

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Множество $Z \subseteq \mathbf{N}$ называется начальным отрезком порядка $\preceq_n$, если из условий $k \in Z$ и $m \preceq_n k$ следует, что $m \in Z$.*

Сейчас мы готовы сформулировать теорему Болдвина, являющуюся основным результатом работы [10].

ТЕОРЕМА 1.4 [10]. *Пусть $f : X \to X$ непрерывное отображение n-ода. Тогда*
1. $T(f)$ является непустым конечным объединением начальных отрезков $\{\preceq_p\colon 1 \leq p \leq n\}$;
2. Если $Z \neq \emptyset$ и является конечным объединением начальных отрезков $\{\preceq_p\colon 1 \leq p \leq n\}$, то существует непрерывное отображение $f : X \to X$, где $f(0) = 0$, и $T(f) = Z$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Пусть X – n-од. Порядок $\preceq_X$ есть пересечение порядков $\{\preceq_p\colon 1 \le p \le n\}$. Тогда $m \preceq_X k$ тогда и только тогда когда для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ если f имеет периодическую точку периода k, то f также имеет периодическую точку периода m.*

рис. 3. $\preceq_4$-порядок

Заметим, что как следствие теоремы 1.4 мы получаем: если f имеет точку периода k, то для некоторого p $(1 \le p \le n)$ f имеет периодическую точку периода $m \preceq_p k$. На самом деле, мы будем доказывать более сильный результат, который даст нам значение p. Но сначала еще одно новое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Пусть x — периодическая точка периода k. Если $Orb(x, f) \cap \{0\} \ne \emptyset$, то будем говорить, что $Orb(x, f)$ типа 1. Предположим, что $Orb(x, f) \cap \{0\} = \emptyset$. Пусть B — множество всех ветвей в X, которые пересекаются с A. Определим функцию $g : B \to B$ следующим образом: если b — ветвь в B, а $y \in b \cap Orb(x, f)$ — точка, ближайшая к 0, то положим $g(b) = d$, где ветвь d содержит $f(y)$. Так как B конечно, то g имеет по крайней мере одну периодическую точку. Если g имеет периодическую точку периода p, то будем говорить, что $Orb(x, f)$ типа p.*

Заметим, что если $Orb(x, f)$ не содержит 0, то возможно, что $Orb(x, f)$ имеет более одного типа. Очевидно, что сумма всех типов $Orb(x, f)$ не больше, чем n.

1.2. Доказательство первой части теоремы Болдвина

Сейчас мы готовы доказать первую часть теоремы Болдвина. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.7 [10]. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение n-ода и f имеет периодическую точку периода k типа p. Тогда для каждого натурального числа $m \preceq_p k$ отображение f имеет периодическую точку периода m.*

Доказательство теоремы 1.7 начнем со случая, когда 0 — неподвижная точка f.

Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение n-ода, $f(0) = 0$, x — периодическая точка периода k типа p. Положим $x_0 = 0$, $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, $A' = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$.

Компоненту B_i назовем тривиальной, если B_i не содержит точек из A и нетривиальной в противном случае.

Так как A — периодическая орбита типа p, то мы можем обозначить компоненты таким образом, что для любого $1 \le j \le p$ точка x_j является элементом B_j, причем $[0, x_j) \cap A = \emptyset$ и $f(x_p) \in B_1$, а $f(x_j) \in B_{j+1}$, где $1 \le j \le p - 1$. Таким образом, $B_1, \dots, B_p$ являются нетривиальными компонентами.

Отрезок $[x_s, x_t]$ назовем базисным, если $x_s, x_t \in A'$ и $(x_s, x_t) \cap A' = \emptyset$. Для $1 \le j \le p$ положим $I_j = [x_0, x_j]$. Тогда каждое такое I_j является базисным отрезком. Поскольку существует k базисных отрезков, то занумеруем оставшиеся базисные отрезки $I_{p+1}, \dots, I_k$ произвольным образом.

Положим $G = \{I_1 \dots, I_k\}$. Будем говорить, что из I_i существует путь в I_j ($I_i \to I_j$), если $I_i = [x_s, x_t]$, и $I_j \subseteq [f(x_s), f(x_t)]$.

Петлей длины m называется последовательность

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \ldots \to J_{m-1} \to J_m = J_0,$$

где $J_i \in G$ — базисные отрезки. Такая петля называется неповторяющейся, если она не может быть записана как повторение целого числа раз петли, меньшей длины, то есть не существует $s < m$, где m делится на s, такого, что $J_{i+s} = J_i$, для любого $0 \le i \le m - s$.

Следующие вспомогательные леммы являются основным инструментом получения периодических точек из G.

ЛЕММА 1.8. *Пусть* $J_0 \to J_1 \to \ldots \to J_{m-1} \to J_m = J_0$ *— неповторяющаяся петля длины* m *такая, что по-крайней мере один из* J_i *не содержит 0. Тогда* f *имеет периодическую точку периода* m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $1 \le i \le m-1$ определим отображение $f_i : J_i \to J_{i+1}$ так, что $f_i(x) = r_i(f(x))$, где $r_i : X \to J_i$ — ретракция n-ода X на отрезок J_i. Положим отображение $\widetilde{f} : J_0 \to J_0$ по правилу:

$$\widetilde{f} = f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \ldots \circ f_1 \circ f_0.$$

Очевидно, что $\widetilde{f}$ — отображение "на". Поэтому существует наименьший замкнутый отрезок $J \subset J_0$ такой, что $f^m(J) = J_0$. Заметим, что для любой точки $z \in J_0$ и для любого натурального числа $i \le m$ $f^i(z) \in J_i$.

Пусть $z \in Fix(\widetilde{f}) \cap J$. Тогда $f^m(z) = z$. Покажем, что m — наименьший период точки z. Предположим противное. Тогда существует натуральное число $s < m$, такое, что $f^s(z) = z$. Заметим, что s делит m. Если z является внутренней точкой отрезка J_0, то $Orb(z, f) \cap A = \emptyset$. Следовательно, каждое $f^i(z)$, $1 \le i \le m$, принадлежит строго одному базисному отрезку, и петля $J_0 \to J_1 \to \ldots \to J_m = J_0$ является повторяющейся. Полученное противоречие с условием леммы доказывает, что точка z является концевой точкой отрезка J_0. Случай, когда $z = 0$ невозможен, так как 0 — неподвижная точка отображения f и некоторое J_i не содержит 0. Поэтому остается единственный случай, когда $Orb(z, f) = Orb(x, f)$. Но тогда если точка $y \in A$ и K — базисный отрезок, содержащий y, то существует только один базисный отрезок L такой, что $K \to L$ и L содержит $f(y)$. Отсюда получаем, что петля повторяющаяся. Полученное противоречие доказывает лемму 1.8.

Введем новую функцию $g : X \to X$ следующим образом:
$f_{|A'} = g_{|A'}$;
$g_{|I_i}$ — линейное отображение на каждом базисном отрезке;
g — константа на множестве $X \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k} I_i$.

ЛЕММА 1.9. *Если* g *имеет периодическую точку периода* m, *где* $m \ne 1$, $m \ne k$, *то существует неповторяющаяся петля длины* m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in Per(g)$ периода $m > 1$. Тогда $Orb(x, f) \cap A' = \emptyset$. Следовательно, для любого $0 \le i \le m$ существует единственный базисный отрезок J_i, содержащий $g^i(x)$. Поскольку g — линейное отображение на каждом базисном отрезке, то существует петля длины m

$$J_0 \to J_1 \to \ldots \to J_{m-1} \to J_m = J_0.$$

Покажем, что петля неповторяющаяся. Так как $g\mid_{J_i}$ линейное отображение, то существует подотрезок $K_i \subset J_i$ такие, что $g(K_i) = K_{i+1}$ и $K_m = J_m$. Предположим, что петля повторяющаяся. Тогда найдется натуральное число $0 < s < m$, кратное m такое, что $J_i = J_{i+s}$, для $0 \le i \le m - s$. Отсюда получаем, что если $0 \le i \le m - s$, то $K_i \subset K_{i+s}$. Следовательно, g^s имеет неподвижную точку $y \in K_0$. Так как m делится на s, то $g^m(y) = y$. Отсюда получаем, что отображение $g^m : K_0 \to K_m$ линейное и имеет по-крайней мере две неподвижные точки x и y. Следовательно, g^m — тождественное отображение. Поэтому $K_0 = K_s = K_m$. Так как g^s — линейное отображение на K_0, то $m = 2s$, и $m = k$, что противоречит условию леммы. Таким образом, построенная петля неповторяющаяся. Лемма 1.9 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.10. *Если g имеет периодическую точку периода $m \ge 1$, то f также имеет периодическую точку периода m.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что отображения f и g имеют периодические точки периодов 1 и k, так как $f_{|A'} = g_{|A'}$. Пусть g имеет периодическую точку периода $m \neq 1$, $m \neq k$. В силу леммы 1.9 существует неповторяющаяся петля длины m. Тогда из леммы 1.9 следует, что f имеет точку периода m.

ЛЕММА 1.11. *Пусть J — базисный отрезок. Тогда существует петля длины k, содержащая J.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $J = [x, y]$ и для каждого $0 \le i \le k$ положим $J_i = [g^i(x), g^i(y)]$. Тогда $J_0 = J_k = J$. Определим K_i, где $0 \le i \le k$, по обратной индукции по i. Пусть $K_k = J_k$ и если K_{i+1} определено и является подмножеством в J_{i+1}, то существует $K_i \subset J_i$, для которого $K_i \to K_{i+1}$. Тогда $J = K_0 \to K_1 \to \ldots \to K_k = J$ — требуемая петля. Лемма 1.11 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. *Пусть a и b — две петли в G, которые имеют один и тот же начальный базисный отрезок, то есть*

$$a: J_0 \to J_1 \to \ldots \to J_{i-1} \to J_i = J_0, \quad b: J_0 = K_0 \to K_1 \to \ldots \to K_j = J_0.$$

Тогда через ab будем обозначать петлю длиной $i + j$

$$a: J_0 \to J_1 \to \ldots \to J_{i-1} \to J_i \to K_1 \to \ldots \to K_j = J_0.$$

Если q, s — натуральные числа, то через $a^q b^s$ будем обозначать петлю длиной $iq + js$, содержащую q раз петлю a и s раз петлю b.

ЛЕММА 1.13. *Пусть k и m не делятся на p. Тогда если $m \preceq_p k$, то f имеет периодическую точку периода m.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m \neq 1$, $m \neq k$, так как известно, что f имеет периодические точки указанных периодов. Тогда в силу определения 1.2 $m = ip + jk$, где $i \geq 1$, $j \geq 0$. Так как m не делится на p, то $j \neq 0$. Используя тот факт, что f имеет периодическую точку типа p и нумерацию базисных отрезков, обозначим через a неповторяющуюся петлю $I_p \to I_1 \to \ldots \to I_{p-1} \to I_p$ длины p; через b — петлю, начинающуюся с $J = J_p$ и имеющую длину k. Тогда петля $c = a^i b^j$ имеет длину m. Если c — неповторяющаяся петля, то лемма 1.13 доказана. Если c повторяющаяся, то возможен только один случай, когда $b^j = da^i e$ для некоторых петель d и e, начинающихся с J (возможно пустых). Тогда мы можем заменить петлю c петлей $a^{2i}de$ длиной m. Повторяя этот процесс, мы получим петлю c' длиной m: $c' = a^q b'$ для некоторого натурального q и такого, что нет петель d и e, начиная с J, таких, что $b' = dae$. Так как m не делится на p, то петля b' непустая. Отсюда получаем, что петля c' неповторяющаяся. Лемма 1.13 доказана.

ЛЕММА 1.14. *Пусть для каждой нетривиальной компоненты B_i $g(B_i)$ содержится в некоторой компоненте. Тогда для каждого $m \preceq_p k$ отображение g имеет периодическую точку периода m.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что k делится на p. Поэтому $B_1, \ldots, B_p$ — нетривиальные компоненты и каждая нетривиальная компонента содержит ровно k/p точек множества A.

Случай, когда $m = 1$ очевиден.

Пусть $m > 1$. Тогда по определению $\preceq_p$-порядка m также делится на p и $\frac{m}{p} \preceq_1 \frac{k}{p}$. Тогда $g^p : B_i \to B_i$ имеет периодическую точку периода $\frac{k}{p}$, и, следовательно, точку периода $\frac{m}{p}$ в силу теоремы Шарковского. Поэтому отображение g имеет точку периода m. Лемма 1.14 доказана.

Нам также потребуется следующая вспомогательная лемма, которая является обобщением хорошо известной теоремы для непрерывного отображения на отрезке.

Обозначим через $\mathrm{Int}(\cdot)$ множество внутренних точек множества $(\cdot)$.

ЛЕММА 1.15. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение n-ода X. Существуют непустые дуги $I, J \subset K$, с непересекающимися внутренностями такие, что $(\mathrm{Int} I \cup \mathrm{Int} J) \cap \{0\} = \emptyset$ и*

$$f(I) \cap f(J) \supset I \cup J.$$

Тогда для любого натурального числа j отображение f имеет точку периода j, чья орбита содержится в $I \cup J$.

ТЕОРЕМА 1.16. *Если существует нетривиальная компонента B_i такая, что $0 \in g(B_i)$, то g имеет периодическую точку периода m, где m делится на p.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как g имеет периодическую точку типа p, и $g(0,x_j] \supseteq (0,x_{j+1}]$, для каждого числа $1 \le j < p$, а $g(0,x_p] \supseteq (0,x_1]$, то $g^{p+j}((0,x_1]) \supseteq g^j((0,x_1])$ для любого натурального j. Поэтому найдется натуральное число i такое, что $g^i((0,x_1]) \cap \{0\} \neq \emptyset$. Пусть i — наименьшее число, удовлетворяющее последнему условию.

Возможен один из следующих случаев: 1) $i \ge p$; 2) $i < p$.

Пусть имеет место случай 1). Тогда $J = g^i([0,x_1])$ содержит
$K = g^{i-p}([0,x_1])$, $g^p(K) = J$. В силу минимальности i K есть некоторый отрезок $[0,x_s]$. Так как $g^p(K) \supset K$ и $g(0)=0$, то существует отрезок $[0,y]$, для которого $g^p([0,y]) = K$. В силу минимальности i $g^p(z) = 0$ для некоторого $z \in K \setminus \{0\}$ и $z \notin [0,y]$, так как $g^{i-p}((0,x_1])$ не содержит 0. Таким образом, $g^p([0,y]) \cap g^p([y,z]) \supset K$. Поэтому в силу леммы 1.15 g^p имеет периодические точки всех периодов. Следовательно, g имеет периодические точки всех периодов, делящихся на p.

Рассмотрим случай 2). Пусть K — отрезок, принадлежащий $[0,x_{i+1}]$ такой, что $g^{p-i}(K) = [0,x_1]$; $J = g^i([0,x_i])$. Повторяя рассуждения первого случая для указанных K и J, получим справедливость леммы 1.16.

Итак, мы готовы доказать теорему 1.7 для случая, когда $f(0)=0$.

ТЕОРЕМА 1.17. *Пусть $f : X \to X$ – непрерывное отображение n-ода и $f(0)=0$. Тогда если $m \preceq_p k$, то отображение g (и, следовательно, f) имеет периодическую точку периода m.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Леммы 1.13, 1.14 и 1.16 покрывают все возможные случаи.

Рассмотрим случай, когда 0 является периодической точкой периода k. Нам понадобится следующая теорема Айреса.

ТЕОРЕМА 1.18 [9]. *Пусть X — дендрит, $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Тогда f имеет неподвижную точку.*

ТЕОРЕМА 1.19. *Пусть $f : X \to X$ – непрерывное отображение n-ода, 0 — периодическая точка периода $k \ge 2$. Тогда f имеет периодические точки всех периодов, предшествующих k в порядке Шарковского, то есть $m \preceq k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A = \{0, f(0), \ldots, f^{k-1}(0)\}$. Пусть X' — наименьшее связное подмножество X_n, содержащее A и $r : X_n \to X'$ — ретракция X_n на X'. Тогда отображение $r \circ f : X' \to X'$ удовлетворяет условиям настоящей теоремы, и очевидно, $Per(r \circ f) \subseteq Per(f)$. В силу теоремы Айреса $r \circ f$ имеет неподвижную точку; обозначим ее через $0'$. Положим $A' = A \cup \{0\}$. Нарушая раннее введенную терминологию, компонентой будем называть связное множество, принадлежащее $X' \setminus \{0'\}$. Таких компонент только две. Поэтому 0 — периодическая точка периода k типа 1 или 2. Но $\preceq_1$, $\preceq_2$-порядки являются порядками Шарковского. Легко проверить, что доказательство леммы 1.13 повторяется полностью. Леммы 1.14 и 1.16 требуют более внимательного рассмотрения для данного случая, так как одна компонента точки $0'$ не является отрезком. Проверка справедливости указанных теорем остается для самостоятельной работы.

Доказательство теоремы 1.7 для случая, когда $0 \notin Per(f)$ в настоящем пособии и одноименном спецкурсе не рассматривается.

1.3. Доказательство второй части теоремы Болдвина

Перейдем к доказательству второй части теоремы 1.4. Построим примеры непрерывных отображений n-ода, имеющие периодические точки желаемых периодов.

ПРИМЕР 1.20. Спиральные отображения.

Пусть $k > p$ и k не делится на p. Определим (k,p)-спиральное отображение $f : X_p \to X_p$ p-ода следующим образом:
• 0 — неподвижная точка;
• существует периодическая точка x периода k; точки ее орбиты обозначим через $Orb(x, f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.
Компоненты p-ода обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_p$.
Для $1 \le i \le k$ пусть $x_i \in B_j$, если $i \equiv j (mod\, p)$, то есть компонента B_j будет содержать точки $x_j, x_{j+p}, x_{j+2p}, \ldots, x_{j+tp}$, где t – наибольшее натуральное число такое, что $j + pt \le k$.
Определим f на $\{0, x_1, \ldots, x_k\}$ таким образом, чтобы $f(0) = 0$, $f(x_i) = x_{i+1}$ для $1 \le i \le k-1$, $f(x_k) = x_1$. В остальных точках X_p определим таким образом, чтобы f было кусочно-линейное. На рис. 4 приведен пример (30,8)-спирального отображения.

Изучим свойства данного отображения.

ЛЕММА 1.21. *(k,p)-спиральное отображение имеет периодические точки всех периодов $m \preceq_p k$ и больше никаких других.*

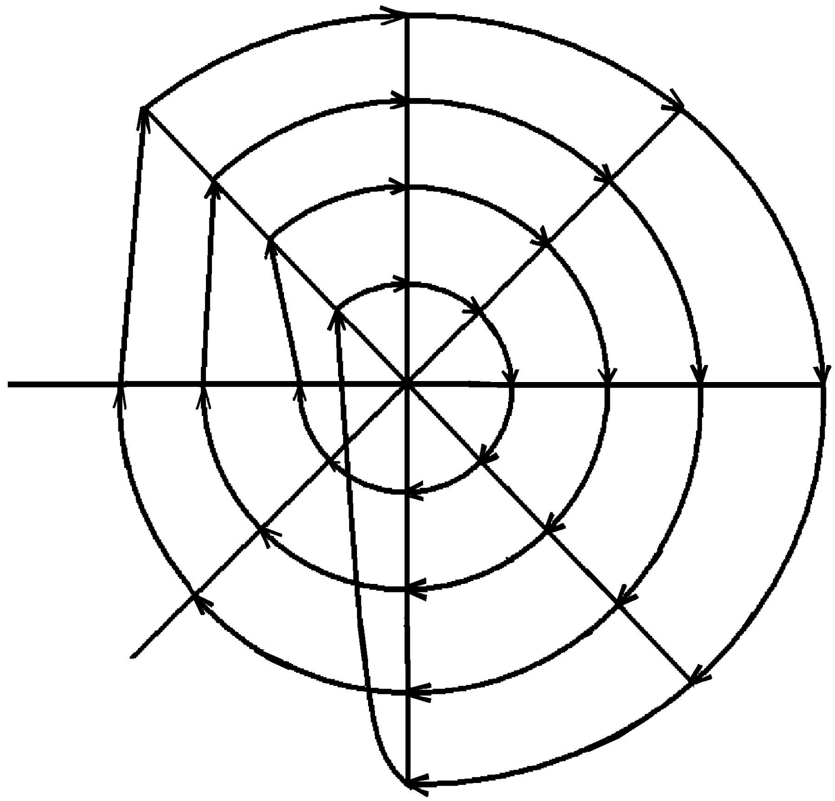

рис. 4. (30,8)-спиральное отображение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства занумеруем точки орбиты $A = Orb(x, f)$ как в начале предыдущего параграфа. Положим

$$I_i = \begin{cases} [0, i], \text{ если } i \leq p, \\ [i - p, i], \text{ если } i > p. \end{cases}$$

Заметим, что существуют следующие пути: $I_{j-1} \to I_j$, $I_k \to I_1$, $I_p \to I_1$ и $I_k \to I_j$, если $j \equiv k + 1(\mathrm{mod} p)$. Таким образом, существует петля длины k, а именно, $I_k \to I_1 \to I_2 \to \ldots \to I_{k-1} \to I_k$, внутри которой есть петли длиной, кратные p. Поэтому неповторяющиеся петли имеют длину $ik + jp$, где $i \geq 0$, $j \geq 1$. В силу определения 1.2 (k, p)-спиральное отображение имеет периодические точки всех периодов $m \preceq_p k$ и больше никаких других. Лемма 1.21 доказана.

ЛЕММА 1.22. *Пусть Z — начальный отрезок порядка Шарковского. Тогда существует непрерывное отображение $f : X_p \to X_p$ p-ода X_p такое, что множество периодов $T(f) = \{n : n = 1$ или $n/p \in Z\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему Шарковского, определим отображение $g : [0, 1] \to [0, 1]$ таким образом, чтобы $T(g) = Z$. Без ограничения общности можем предположить, что $g(0) = 0$ (в противном случае доопределим g на $[-1,0]$, полагая $g(-1)=-1$, $g(0)=f(0)$, $g|_{[-1,0]}$ – линейное отображение). Пусть $b=2\pi/p$, i — мнимая единица. Определим

$$f(re^{ijb})=\begin{cases} g(r)e^{ib}, & \text{если } j=0,\\ re^{i(j+1)b}, & \text{если } 1\le j\le p-1.\end{cases}$$

Как видим, f — требуемое отображение. Лемма 1.22 доказана.

ЛЕММА 1.23. *Пусть $f: X_p\to X_p$ — непрерывное конечно-значное отображение p-ода X_p и $f(0)=0$. Тогда существует непрерывная функция $g: X_p\to X_p$ такая, что $T(f)=T(g)$ и g тождественное отображение на некоторой открытой окрестности 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $W=\{x\in X_p:\ f^i(x)=0,\ i=1,2,\ldots\}$. Так как f — конечно-значное отображение, то W счетно. Заменим 0 копией X_p, а каждый элемент W копией отрезка $[0,1]$ таким образом, чтобы сумма длин этих отрезков была конечной. Тогда новое пространство $\widetilde{X_p}$ гомеоморфно X_p. Определим новую функцию $g:\widetilde{X_p}\to\widetilde{X_p}$ следующим образом:
$g(x)=x$, если x лежит на копии X_p, заменяющей точку 0;
$g(x)=f(x)$, если точка x принадлежит множеству нетронутых точек;
$g(x)$ – линейное отображение, если x принадлежит интервалам, заменяющим точки множества W.

Тогда g – непрерывное, конечно-значное отображение и $T(g)=T(f)$. Лемма 1.23 доказана.

ЛЕММА 1.24. *Пусть $f,g: X_p\to X_p$ – непрерывные и конечно-значные отображения. Существует непрерывное, конечно-значное отображение $h: X_p\to X_p$ такое, что $T(h)=T(f)\cup T(g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.23 можем предположить, что f – тождественное отображение на некоторой открытой окрестности U нуля. Пусть F – замкнутое множество в U, которое гомеоморфно X_p, а g' – непрерывное конечно-значное отображение на F такое, что $T(g')=T(g)$. Определим новую функцию $h: X_p\to X_p$ следующим образом:

$$h|_{X_p\setminus U}=f|_{X_p\setminus U},\ h|_F=g'|_F$$

и продолжим на все X_p, полагая h линейным на p компонентах $U\setminus F$. Тогда h – непрерывное, конечно-значное отображение и $T(h)\supseteq T(f)\cup T(g)$.

Покажем, что h не имеет периодических точек периодов, отличных от $T(f)\cup T(g)$. Пусть $x\in Per(h)$. Рассмотрим следующие случаи.
Случай 1. $x\in F$. Тогда $Orb(x,g')=Orb(x,h)$ и период точки x принадлежит $T(g)$.

Случай 2. $x \in X_p \setminus U$. Заметим, что h отображает U в себя. Поэтому любая точка из $X_p \setminus U$, которая является периодической относительно h, должна иметь орбиту, целиком принадлежащую $X_p \setminus U$, где $Orb(x, f) = Orb(x, h)$. Здесь период точки x принадлежит $T(f)$.
Случай 3. $x \in U \setminus F$. Так как h отображает F в себя и U в себя, то любая точка $x \in U \setminus F$, которая является периодической относительно h, имеет орбиту, целиком принадлежащую $U \setminus F$. Более того, так как f — тождественное отображение на U, то каждая компонента $\overline{U \setminus F}$ имеет неподвижные точки относительно h. Поскольку h — линейное отображение на каждой компоненте $\overline{U \setminus F}$, то каждая периодическая точка из $U \setminus F$ должна быть неподвижной. Но $1 \in T(f)$ и $1 \in T(g)$. Лемма 1.24 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. 2. Пусть $n \geq 1$, Z — объединение начальных отрезков $\preceq_p$-порядков, для $p \leq n$. Заметим, что если $g : X_p \to X_p$ непрерывно и конечно-значно, и $p < n$, то (рассматривая X_p как подмножество X) существует непрерывное конечно-значное отображение $h : X \to X$, для которого $h|_{X_p} = g|_{X_p}$, и $T(g) = T(h)$. Заметим, что отображение примера 1.20 конечно-значно и отображение в доказательстве леммы 1.22 может быть сделано конечно-значным, используя тот факт, что существуют унимодальные отображения на $[0, 1]$ для всех соответствующих случаев теоремы Шарковского. Применяя лемму 1.24, строится нужное отображение.

2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ И ПОДКОВА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ГРАФАХ

К основным задачам теории динамических систем относится проблема распознавания хаоса. Одним из инструментов измерения хаотичности системы является топологическая энтропия (определение топологической энтропии см. п. 2.1). Естественным образом возникает вопрос: как получить оценку топологической энтропии из свойств динамической системы? В работах [18] — [20] установлена связь между положительностью топологической энтропии и существованием подковы для непрерывных отображений, заданных на отрезке и окружности. Оказывается, что тот же самый результат справедлив и для непрерывных отображений, заданных на графах, изучением которого мы и займемся в этой части работы (см. [17].)

2.1. Определения топологической энтропии и s-подковы

Начнем с определения топологической энтропии (см., например, [6]).

Пусть X — компактное топологическое пространство, U — любое открытое покрытие X. Обозначим через $N(U)$ мощность наименьшего его подпокрытия. Энтропией покрытия U назовем $H(U) = \log N(U)$.

Для любых двух покрытий U, V пространства X положим

$$U \vee V = \{A \cap B, \text{ где } A \in U,\ B \in V\}.$$

Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Энтропией $h(f, U)$ отображения f относительно покрытия U называется*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(U \vee f^{-1}(U) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(U))}{n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Энтропией $h(f)$ отображения f называется* $\sup\limits_U h(f, U)$.

Свойства топологической энтропии можно найти, например, в [6]. Нам понадобится только одно из них: для любого натурального числа n $h(f^n) = nh(f)$.

Пусть G — граф. Объединение множеств точек ветвления и концевых точек графа G будем называть вершинами графа.

Множество $I \subset G$ будем называть интервалом, если существует гомеоморфизм $h : J \to I$, где $J = [0, 1]$ или $(0, 1]$, или $(0, 1)$, или $[0, 1)$ и внутренность I

не содержит вершины графа G. Если $J = [0,1]$, то I будем называть замкнутым интервалом; любое одноточечное множество будем считать замкнутым интервалом.

Пусть $f : G \to G$ — непрерывное отображение на G, натуральное число $s \geq 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Будем говорить, что f имеет s-подкову, если существуют замкнутый интервал $I \subset G$ и замкнутые подынтервалы $J_1, \dots, J_s \subset I$ с попарно непересекающимися внутренностями такие, что $f(J_i) = I$, для $1 \leq i \leq s$.*

s-подкова называется строгой, если все интервалы $J_1, \dots, J_s \subset I$ содержатся в $\mathrm{Int}(I)$ и попарно не пересекаются.

Если $s = 2$, то говорят, что f имеет подкову.

s-подкову будем обозначать через $(I; J_1, \dots, J_s)$, $s \geq 2$.

2.2. Оценка топологической энтропии для отображений, имеющих s-подкову

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4 [17]. *Пусть $f : G \to G$ — непрерывное отображение графа G, и f имеет s-подкову. Тогда топологическая энтропия $h(f) \geq \log s$.*

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 2.5. *Пусть $f : G \to G$ — непрерывное отображение графа G, и f имеет s-подкову $(I; J_1, \dots, J_s)$. Тогда для любого набора $\tau = (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$ элементов из $\{1, \dots, s\}$ найдется замкнутый интервал J_τ такой, что $f^i(J_\tau) \subset J_{j_i}$ для $i = 0, 1, \dots, n-2$, и $f^{n-1}(J_\tau) = J_{j_{n-1}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 1$ возьмем $J_\tau = J_{j_0}$, если $\tau = (j_0)$. Предположим, что утверждение леммы справедливо для n и возьмем $\tau = (j_0, j_1, \dots, j_n)$. Тогда в силу предположения для $\mathcal{K} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ найдется замкнутый интервал $J_\mathcal{K}$ такой, что $f^i(J_\mathcal{K}) \subset J_{j_i+1}$ для $i = 0, 1, \dots, n-2$ и $f^{n-1}(J_\mathcal{K}) = J_{j_n}$. Выберем замкнутый интервал $K \subseteq J_0$ такой, что $f(K) = J_\mathcal{K}$. Положим $J_\tau = K$ и тогда $f^i(J_\tau) \subset J_{j_i}$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$ и $f^n(J_\tau) = J_{j_n}$.

ЛЕММА 2.6. *Пусть $f : G \to G$ — непрерывное отображение графа G, и f имеет s-подкову. Тогда f^n имеет s^n-подкову для любого натурального числа $n \geq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f имеет s-подкову $(I; J_1, \ldots, J_s)$. Зафиксируем любое $n \geq 2$ и для каждого набора $\tau \in \{1, \ldots, s\}^n$ выберем замкнутый интервал J_τ, удовлетворяющий условиям леммы 2.5. Очевидно, что J_τ — замкнутый подынтервал в I и $f^n(J_\tau) = I$. Пусть J'_τ — минимальный подынтервал с указанными свойствами. Чтобы показать, что $(I; (J'_\tau)_{\tau \in \{1,\ldots,s\}^n})$ является s^n-подковой для f^n, необходимо доказать, что если $\tau \neq \mathcal{K} \in \{1, \ldots, s\}^n$, то внутренности J'_τ и $J'_\mathcal{K}$ не пересекаются. Предположим противное. Так как $\tau \neq \mathcal{K}$, то для некоторого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ множества $f^i(J'_\tau)$ и $f^i(J'_\mathcal{K})$ содержатся в некоторых интервалах J_k и J_l соответственно, внутренности которых пересекаются. Поэтому общая часть внутренностей J'_τ и $J'_\mathcal{K}$ отображается относительно f^i в точку (общую точку J_k и J_l). Последнее противоречит минимальности J'_τ и $J'_\mathcal{K}$. Лемма 2.6 доказана.

ЛЕММА 2.7 *Пусть $f : G \to G$ — непрерывное отображение графа G, и f имеет s-подкову, где $s \geq 4$. Тогда f имеет строгую $(s-2)$-подкову.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(I; J_1, \ldots, J_s)$ — s-подкова. Тогда $f(J_i) = I$, где $1 \leq i \leq s$. Можем считать, что каждое J_i минимальное с указанным свойством. Тогда каждая концевая точка J_j отображается в концевую точку I. Положим $I = [p, q]$ и введем порядок на $[p, q]$ следующим образом: что любых $x, y \in [p, q]$ $x < y$, если $\varphi(x) < \varphi(y)$, где $\varphi : [p, q] \to [0, 1]$ — гомеоморфизм, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(q) = 1$. Будем считать, что J_j лежит левее J_{j+1} для всех $1 \leq j \leq s-1$. Выберем произвольным образом точки $a \in \mathrm{Int}(J_1)$ и $b \in \mathrm{Int}(J_s)$. Положим I' замкнутый интервал в I, концевыми точками которого являются a и b. Очевидно, что $J_2, \ldots, J_{s-1} \subset \mathrm{Int}(I')$ и $f(J_j) \supset I'$ для $2 \leq j \leq s-1$. Следовательно, для каждого $2 \leq j \leq s-1$ найдется подынтервал $J'_j \subset J_j$ такой, что $f(J'_j) = I'$. Легко заметить, что $(I; J'_2, \ldots, J'_{s-1})$ является строгой $(s-2)$-подковой. Лемма 2.7доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Пусть $(I; J_1, \ldots, J_s)$ — s-подкова.
I. Рассмотрим случай, когда подкова строгая. Положим $U_j = (G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} \overline{J_i}) \cup J_j$. Тогда $U = \{U_1, \ldots, U_s\}$ — открытое покрытие графа G, причем $N(U) = s$. В силу определения покрытия U $N(U \vee f^{-1}(U) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(U)) \geq s^n$. Тогда

$$h(f) \geq h(f, U) \geq \lim_{n \to \infty} \frac{\log s^n}{n} = \log s.$$

II. Рассмотрим теперь случай, когда данная подкова не является строгой. По определению подковы $s \geq 2$. В силу леммы 2.6 отображение f^n имеет s^n-подкову для любого натурального n. Из леммы 2.7 получаем, что f^n имеет строгую $(s^n - 2)$-подкову. Тогда в силу доказанного пункта I имеем:

$$h(f) = (1/n) h(f^n) \geq (1/n) \log(s^n - 2).$$

Следовательно, $h(f) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(s^n - 2) = \log s$.

2.3. Положительность топологической энтропии влечет существование подковы

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.8 [17]. *Пусть $f : G \to G$ — непрерывное отображение графа G, и топологическая энтропия $h(f) > 0$. Тогда найдутся последовательности натуральных чисел $\{k_n\}_{n\geq 1}$, $\{s_n\}_{n\geq 1}$ такие, что f^{k_n} имеет s_n-подкову и*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \log s_n = h(f).$$

Начнем с новых определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. *Будем говорить, что множество $D \subset G$ удовлетворяет условию (*), если существует связное множество E, содержащее не более одной вершины, такое, что $E \subseteq D \subseteq \overline{E}$.*

В частности, каждый интервал удовлетворяет условию (*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. *Пусть $f : G \to G$ — непрерывное отображение графа G. Разбиение $\mathbf{A}$ графа G называется собственным относительно f, если каждый элемент из $\mathbf{A}$ является интервалом, и $f(A)$ удовлетворяет условию (*) для любого $A \in \mathbf{A}$.*

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.11. *Для любого открытого покрытия $\boldsymbol{B}$ графа G существует собственное относительно f разбиение $\boldsymbol{A}$ в G мельче, чем $\boldsymbol{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие условия на множество $A \subset G$:
(1) A открыто;
(2) A связно;
(3) $A \subset B$, где B — некоторый элемент из $\mathbf{B}$;
(4) A удовлетворяет условию (*);
(5) $f(A)$ удовлетворяет условию (*).

Очевидно, что для каждой точки $x \in G$ существует окрестность $U(x)$, удовлетворяющая условиям (1) — (5). Из покрытия $\{U(x)\}_{x\in G}$ графа G выберем конечное подпокрытие $\{U(x_i)\}_{i=1}^n$. Заметим, что пересечение двух множеств, удовлетворяющих условиям (1) — (5), также есть множество, удовлетворяющее (1) — (5); разность двух множеств, удовлетворяющих (2) — (5), есть объединение конечного числа множеств, удовлетворяющих (2) — (5). Поэтому если мы обозначим $U^0(x_i) = U(x_i)$, $U^1(x_i) = G \setminus U(x_i)$, то для каждого $j_1, \ldots, j_n \in \{0, 1\}$ множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U^{j_i}(x_i)$ есть объединение конечного числа множеств, удовлетворяющих условиям (2) — (5) (может случится, что это множество пусто, например, если все $j_i = 1$).

Пусть Λ — семейство всех множеств вида $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U^{j_i}(x_i)$. Если $(j_1, \ldots, j_n) \neq (k_1, \ldots, k_n)$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U^{j_i}(x_i) \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} U^{k_i}(x_i) = \emptyset$. Поэтому элементы семейства Λ образуют конечное разбиение графа G и удовлетворяют условиям (2) — (5). Сейчас мы модифицируем это разбиение, удаляя пустые множества и разбивая элементы разбиения, содержащие вершины графа, на конечное число интервалов. Таким образом, мы получим собственное относительно f разбиение $\mathbf{A}$, которое мельче, чем $\mathbf{B}$. Лемма 2.11 доказана.

ЛЕММА 2.12. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — собственное относительно f разбиение графа G, $A \in \boldsymbol{A}^n$, где $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A} \vee f^{-1}(\boldsymbol{A}) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\boldsymbol{A})$. Тогда*
(a) существует интервал $K \subset A$ такой, что $f^n(K) = f^n(A)$;
(b) множество $f^n(A)$ удовлетворяет условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 1$ возьмем $K = A$. Оба условия (a), (b) выполнены в силу определения 2.10.

Предположим, что утверждение леммы справедливо при n, и докажем при $n+1$. Пусть $A \in \mathbf{A}^{n+1}$. Так как $A \in \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n \vee f^{-n}(\mathbf{A})$, то найдутся $B \in \mathbf{A}$ и $C \in \mathbf{A}^n$ такие, что $A = C \cap f^{-n}(B)$. Мы получим $f^n(A) = f^n(C) \cap B$. В силу предположения существует интервал $L \subset C$, удовлетворяющий условию $f^n(L) = f^n(C)$. Следовательно, $f^n(A) = f^n(L) \cap B$. Отсюда получаем, что $f^n(A)$ — интервал.

Так как $f^n(A) \subset f^n(L)$, то найдется интервал $K \subset L$ такой, что $f^n(A) = f^n(K)$. С другой стороны, $f^n(A) = f^n(K) \subset B$. Поэтому $K \subset f^{-n}(B)$. Таким образом, мы получили, что $K \subset C$, и $K \subset f^{-n}(B)$, то есть $K \subset C \cap f^{-n}(B) = A$. Кроме этого, $f^{n+1}(K) = f(f^n(K)) = f(f^n(A)) = = f^{n+1}(A)$. Таким образом, утверждение (a) доказано.

Докажем истинность утверждения (b). Поскольку $f^n(A) \subset B$, то $f^{n+1}(A) \subset f(B)$, где $f(B)$ удовлетворяет условию (*). Следовательно, $f^{n+1}(A)$ также удовлетворяет условию (*). Лемма 2.12 доказана.

Следующие три леммы являются техническими. Мы докажем только одну из них, остальные останутся для самостоятельного изучения.

ЛЕММА 2.13. *Пусть* $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ *— последовательности действительных чисел. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{k=0}^{n}\exp(\alpha_k+\beta_{n-k})\right)\leq\max\{\limsup_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n},\limsup_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{n}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t=\max\{\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n/n,\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n/n\}$. Выберем любое число $u>t$. Тогда найдутся $s\geq u$ и натуральное число p такие, что $\alpha_n/n\leq u$, $\beta_n/n\leq u$ для всех $n\geq n_0$, а $\alpha_n/n\leq s$, $\beta_n/n\leq s$ для любого $n\geq 1$. Если $n\geq 2n_0$ и $k\in\{0,\ldots,n\}$, то либо $k\geq n_0$, либо $n-k\geq n_0$. Следовательно,

$$\alpha_k+\beta_{n-k}<n_0s+nu.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{n}\log\left(\sum_{k=0}^{n}\exp(\alpha_k+\beta_{n-k})\right)\leq\frac{1}{n}\log(n+1)+\frac{n_0s+nu}{n}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{k=0}^{n}\exp(\alpha_k+\beta_{n-k})\right)\leq u.$$

Так как u — произвольное число, большее t, то из последнего неравенства получаем справедливость леммы 2.13.

ЛЕММА 2.14. *Если* $a_{n,i}$, $i=1,\ldots,k$, $n=0,1,\ldots$ *— неотрицательные числа, то*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{k}a_{n,i}=\max_{1\leq i\leq k}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log a_{n,i}.$$

ЛЕММА 2.15. *Пусть последовательность действительных чисел* $\{a_n\}_{n\geq 1}$, *числа* $b,u\in\boldsymbol{R}$ *и* $p\in\boldsymbol{N}$ *удовлетворяют следующим условиям:*
1) $u>0$;
2) $a_{n+1}\leq a_n+b$ *для всех натуральных чисел* n;
3) если $n\geq p$ *и* $a_n/n\geq u$, *то* $a_{n+1}\leq a_n+u$.
Тогда $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n/n\leq u$.

Пусть $\mathbf{A}$ — собственное относительно f разбиение графа G. Для любого $J\subset G$, удовлетворяющего условию (*), имеем

$$Card\{A\in\mathbf{A}:A\cap J\neq\emptyset\text{ и }A\setminus J\neq\emptyset\}\leq q,\tag{2.1}$$

где q — максимальный порядок точки ветвления графа G, $Card(\cdot)$ — мощность множества $(\cdot)$.

Положим $\varepsilon = \{A \in \mathbf{A} : \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Card(\ \mathbf{A}^n|_A) = h(f, \mathbf{A})\}$. Покажем, что $\varepsilon \neq \emptyset$.

Так как $\mathbf{A}$ — разбиение, то $N(\mathbf{A}^n) = Card\mathbf{A}^n$ для любого натурального $n \geq 1$. Тогда по определению топологической энтропии и леммы 2.14 имеем:

$$h(f, \mathbf{A}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\ N(\mathbf{A}^n) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\ Card(\ \mathbf{A}^n) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{A\in\mathbf{A}} Card(\ \mathbf{A}^n|_A) = \max_{A\in\mathbf{A}} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\ Card(\ \mathbf{A}^n|_A).$$

Отсюда получаем, что $\varepsilon \neq \emptyset$.

ЛЕММА 2.16. *Для любого* $A \in \varepsilon$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Card\ (\varepsilon^n|_A) = h(f, \boldsymbol{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Card\ (\varepsilon^n|_A) \leq h(f, \mathbf{A}).$$

Покажем обратное неравенство.

Положим $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\alpha_n = \log Card\ (\varepsilon^n|_A)$, $\beta_n = \log \left(\sum\limits_{B\in\mathbf{A}\setminus\varepsilon} Card\ (\mathbf{A}^n|_B) \right)$, где $n = 1, 2, \ldots$.

Разобьем множество $\mathbf{A}^n|_A$ на множества T_k, $1 \leq k \leq n$, где для $k < n$ $T_k = \{B \in \mathbf{A}^n|_A : B = \bigcap\limits_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_j),\ B_j \in \varepsilon$, если $j < k$ и $B_k \in \mathbf{A} \setminus \varepsilon\}$, и $T_n = \varepsilon^n$. Из определения T_k следует, что $Card(T_k) \leq \exp{(\alpha_k)} \exp{(\beta_{n-k})}$ для любого $1 \leq k \leq n$. Поэтому

$$Card(\mathbf{A}^n|_A) \leq \sum_{k=0}^{n} \exp(\alpha_k + \beta_{n-k}).$$

Для любого множества $B \in \mathbf{A} \setminus \varepsilon$ имеем:

$$\limsup_{n\to\infty} (1/n) \log Card(\mathbf{A}^n|_B) < h(f, \mathbf{A}).$$

Следовательно, в силу леммы 2.14 получаем:

$$\limsup_{n\to\infty} (\beta_n/n) < h(f, \mathbf{A}).$$

Из определения множества ε следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Card(\mathbf{A}^n|_A) = h(f, \mathbf{A}).$$

Применяя лемму 2.13, получаем неравенство $\limsup\limits_{n\to\infty}(\alpha_n/n) \geq h(f, \mathbf{A})$. Лемма 2.16 доказана.

Для любых $A, B \in \varepsilon$ обозначим

$$\gamma(A, B, n) = Card\{E \in \varepsilon^n|_A :\ f^n(E) \supset B\}.$$

ЛЕММА 2.17. *Пусть* $h(f, \boldsymbol{A}) > \log(q+1)$. *Тогда найдется интервал* $A_0 \in \varepsilon$ *такой, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \gamma(A_0, A_0, n) \geq h(f, \boldsymbol{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно и зафиксируем интервал $A \in \varepsilon$, число u таким образом, чтобы $\log(q+1) < u < h(f, \mathbf{A})$. Предположим, что существует натуральное число p такое, что при любом $n \geq p$ из неравенства $\frac{1}{n}\log Card(\varepsilon^n|_A) > u$ следует, что

$$Card(\varepsilon^{n+1}|_A) < (q+1)Card(\varepsilon^n|_A).$$

Тогда $\log Card(\varepsilon^{n+1}|_A) \leq \log(q+1) + \log Card(\varepsilon^n|_A) < \log Card(\varepsilon^n|_A) + u$. В силу леммы 2.15 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Card\ (\varepsilon^n|_A) < u$. Последнее противоречит лемме 2.16. Отсюда получаем, что

$$\text{для каждого } p \in \mathbf{N} \text{ найдется натуральное } n \geq p \text{ такое, что,}$$
$$\frac{1}{n}\log Card(\varepsilon^n|_A) > u \text{ и } Card(\varepsilon^{n+1}|_A) \geq (q+1)Card(\varepsilon^n|_A). \qquad (2.2)$$

Зафиксируем элемент $E \in \varepsilon^n|_A$. В силу леммы 2.12(b), множество $f^n(E)$ удовлетворяет условию (*). Следовательно, в силу (2.1), если $f^n(E)$ пересекается с r элементами множества ε, то оно содержит, по крайней мере, $r - q$ из них. Но в силу определения ε^{n+1}, получаем, что $Card(\varepsilon^{n+1}|_E) = r$. Следовательно,

$$Card\{B \in \varepsilon :\ f^n(E) \supset B\} \geq Card(\varepsilon^{n+1}|_E) - q.$$

Суммируя по $E \in \varepsilon^n|_A$, получаем:

$$\sum_{B\in\varepsilon} \gamma(A, B, n) \geq Card(\varepsilon^{n+1}|_A) - q\,Card(\varepsilon^n|_A).$$

В силу (2.2) для каждого $p \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число $n \geq p$ такое, что

$$\frac{1}{n}\log \sum_{B\in\varepsilon} \gamma(A, B, n) \geq \frac{1}{n}\log Card(\varepsilon^n|_A) > u.$$

Поэтому $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum\limits_{B\in\varepsilon} \gamma(A, B, n) \geq u$. Число u может быть выбрано произвольно близко к $h(f, \mathbf{A})$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{B\in\varepsilon} \gamma(A, B, n) \geq h(f, \mathbf{A}).$$

Так как ε конечно, то в силу леммы 2.14 для каждого $A \in \varepsilon$ найдется $\varphi(A) \in \varepsilon$ такое, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{B\in\varepsilon} \gamma(A, \varphi(A), n) \geq h(f, \mathbf{A}). \tag{2.3}$$

Отображение $\varphi : \varepsilon \to \varepsilon$ должно иметь периодическую точку; обозначим ее через A_0, m — ее период. Из определения $\gamma(A, B, n)$ следует, что если $A, B, C \in \varepsilon$, $D \in \varepsilon^n|_A$,$f^n(D) \supset B$, $D' \in \varepsilon^k|_B$ и $f^k(D') \supset C$, то $D \cap f^{-n}(D') \in \varepsilon^{n+k}|_A$ и $f^{n+k}(D \cap f^{-n}(D')) \supset C$. Поэтому

$$\gamma(A, C, n+k) \geq \gamma(A, B, n) \cdot \gamma(B, C, k).$$

Применяя последнюю формулу $m-1$ раз, получим:

$$\gamma(A_0, A_0, \sum_{i=0}^{m-1}) \geq \prod_{i=0}^{m-1} \gamma(\varphi^i(A_0), \varphi^{i+1}(A_0), n_i)$$

для любого n_i, $0 \leq i \leq m-1$. Отсюда и из (2.3) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \gamma(A_0, A_0, n) \geq h(f, \mathbf{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. Пусть G — конечный граф, и непрерывное отображение $f : G \to G$ имеет положительную топологическую энтропию. Возьмем целое $r > (\log(q+1)+1)/h(f)$ (если $h(f) = \infty$, то возьмем $r = 1$). Для любого натурального n выберем открытое покрытие $\mathbf{B}$, для которого $h(f^r, \mathbf{B}) \geq h(f^r) - 1/n > \log(q+1)$ (если $h(f) = \infty$, то $h(f, \mathbf{B}) > n + \log(q+1)$). В силу леммы 2.11 существует конечное разбиение $\mathbf{A}$ графа G на интервалы, которое будет мельче, чем $\mathbf{B}$. Применяя лемму 2.17 к отображению f^r и $\mathbf{A}$, получим существование интервала $A_0 \in \varepsilon$ и натурального числа m_n таких, что

$$\frac{1}{m_n} \log \gamma(A_0, A_0, m_n) \geq h(f^r, \mathbf{A}) - \frac{1}{n}.$$

Положим $s_n = \gamma(A_0, A_0, m_n)$. Тогда по определению γ существуют элементы $E_1, E_2, \ldots, E_{s_n}$ из $\varepsilon_{f^r}^{m_n}|_{A_0}$ такие, что $(f^r)^{m_n}(E_i) \supset A_0$ для каждого i. В силу леммы 2.12(a) для каждого i существует интервал $K_i \subset E_i$, для которого $(f^r)^{m_n}(K_i) = (f^r)^{m_n}(E_i)$. Таким образом, мы получили непересекающиеся интервалы $K_1, K_2, \ldots, K_{s_n}$ в A_0 такие, что $f^{rm_n}(K_i) \supset A_0$ для каждого i. Положим $I = \overline{A}_0$, $k_n = rm_n$. Тогда $f^{k_n}(\overline{K_i}) \supset I$. Следовательно, для каждого $1 \leq i \leq s_n$ найдется замкнутый интервал $J_i \subseteq \overline{K}_i$ такой, что $f^{k_n}(J_i) = I$. Так как интервалы K_i попарно не пересекаются, то внутренности интервалов J_i также не пересекаются. Таким образом, мы получили подкову $(I; J_1, J_2, \ldots, J_{s_n})$ для отображения f^{k_n}.

Покажем, что
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\log s_n = h(f). \tag{2.4}$$
Мы имеем
$$\frac{1}{k_n}\log s_n = \frac{1}{rm_n}\log\gamma(A_0,A_0,m_n) \geq \frac{1}{r}\left(h(f^r,\mathbf{A})-\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{r}\left(h(f^r,\mathbf{B})-\frac{1}{n}\right).$$
Если $h(f)$ конечно, то
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\log s_n \geq \frac{1}{r}\left(h(f^r)-\frac{2}{n}\right) = h(f).$$
Если $h(f)=\infty$, то
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\log s_n \geq \lim_{n\to\infty}\left(n+\log{(q+1)}-\frac{1}{n}\right) = \infty.$$
В обоих случаях
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\log s_n \geq h(f).$$
С другой стороны, из теоремы 2.4 следует, что
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\log s_n \leq h(f).$$
Из последних двух неравенств получаем справедливость равенства (2.4). Теорема 2.8 доказана.

В заключении настоящего раздела рассмотрим пример непрерывного отображения на дендрите с положительной топологической энтропией, у которого f^n не имеет подковы в смысле определения 2.3 для любого натурального числа n.

ПРИМЕР 2.18. Начнем с построения дендрита (построение дендрита описано в доказательстве теоремы C [2]). Пусть $\triangle$ — равносторонний треугольник со стороной 1, лежащий в первом квадранте плоскости OX_1x_2, основанием которого служит отрезок $[0,1]$ оси Ox_1. Разобьем его боковые стороны на три равные части и каждый конец интервала $(1/3, 2/3 \subset [0,1])$ соединим с ближайшей точкой деления. Получим два равносторонних треугольника, опирающиеся на отрезки $[0,1/3]$, $[2/3,1]$ и пятиугольник, две смежные стороны которого принадлежат боковым сторонам исходного треугольника. Удалив внутренность пятиугольника и интервал $(1/3,2/3)$, получим замкнутое множество $\triangle_1 \subset \triangle$. С каждым из оставшихся треугольником повторим то же построение. Получим замкнутое множество $\triangle_2 \subset \triangle_1$. Продолжая построение, получим замкнутое множество $\triangle_n \subset \triangle_{n-1}$, которое содержит

2^n равносторонних треугольников. И так далее... Таким образом, построена последовательность замкнутых множеств

$$\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots \supset \triangle_n \supset \ldots .$$

Положим $G = \bigcap\limits_{n\geq 1} \triangle_n$. Легко проверить, что G — дендрит, имеющий счетное множество точек ветвления, предельным множеством которого служит множество концевых точек $E(G)$, являющееся канторовым дисконтинуумом (рис. 5).

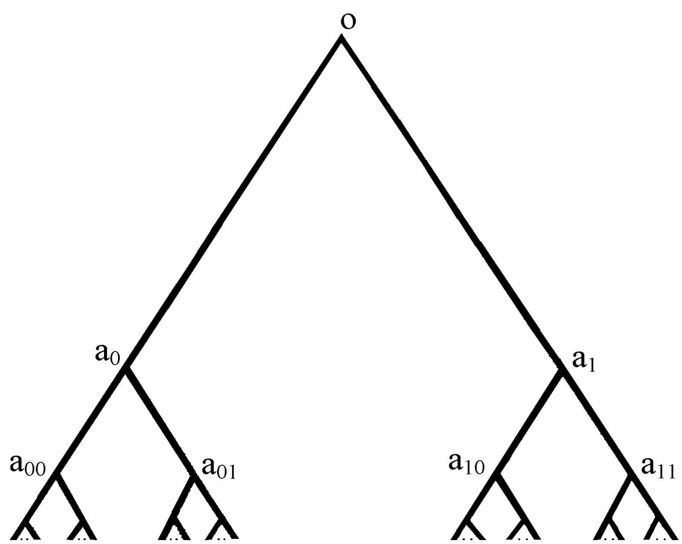

рис. 5. Дендрит G

Обозначим через o вершину дендрита G, a_0, a_1 точки ветвления дендрита G, ближайшие к вершине o и отстоящие от нее на одинаковом расстоянии, соответственно левую и правую. Через $a_{i_1 0}$, $a_{i_1 1}$ – точки ветвления (левую и правую соответственно), ближайшие к a_{i_1} и также отстоящие от нее на одинаковом расстоянии, $i_1 \in \{0,1\}$. Продолжая описанную процедуру, мы каждой точке ветвления поставим в соответствие совокупность номеров $i_1 \ldots i_n$, где $i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\}$; такую точку будем обозначать через $a_{i_1 \ldots i_n}$, где $i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\}$. Концевым точкам дендрита G ставится в соответствие бесконечная последовательность

$$i_1 i_2 \ldots i_n \ldots, \quad i_n \in \{0,1\}. \tag{2.5}$$

При этом, точкам первого рода множества $E(G)$ соответствуют последовательности (2.5), у которых все i_n, начиная с некоторого номера, равны между собою. Если среди i_n при сколь угодно большом n имеются как нули, так и единицы, то последовательность (2.5) соответствует точке второго рода.

Точку множества $E(G)$, соответствующую последовательности (2.5), будем обозначать через $a_{i_1 \dots i_n \dots}$, где $i_n \in \{0, 1\}$.
Обозначим через G_j дендрит, принадлежащий $G \setminus (a_0, a_1)$ с вершиной в точке a_j, где $j \in \{0, 1\}$, (a_0, a_1) — дуга, соединяющая точки a_0, a_1 и не содержащая их. Отметим, что каждый дендрит G_j гомеоморфен дендриту G.

Определим отображение $f : G \to G$, положив
I) $f(x) = o$, если $x \in \gamma[a_0, a_1]$;
II) для каждого $j \in \{0, 1\}$ определим $f_{|G_j} : G_j \to G$ — линейный гомеоморфизм такой, что $f(G_j) = G$, причем $f(a_{i_1}) = o$, $f(a_{i_1 i_2 \dots i_n}) = a_{i_2 i_3 \dots i_n}$ при $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$. Тогда $f(a_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}) = a_{i_2 i_3 \dots i_n \dots}$, где $i_n \in \{0, 1\}$.
Построенное отображение f непрерывно. Изучим его свойства.
1) $f(G_j) = G \supset G_0 \cup G_1$ для каждого $j \in \{0, 1\}$. Следовательно, топологическая энтропия $h(f) > 0$.
2) $f(E(G)) = E(G)$.
3) Так как $f(a_{i_1 i_2 \dots i_n}) = a_{i_2 i_3 \dots i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$, то $f^n(a_{i_1 i_2 \dots i_n}) = o$, где $o \in Fix(f)$. Следовательно, для любой точки $z \in G \setminus E(G)$ найдется натуральное число $k = k(z)$ такое, что $f^k(z) = o$. Отсюда получаем, что для любого натурального числа n отображение f^n не имеет подковы в смысле определения 2.3.

3. ОЦЕНКА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ДЕРЕВЬЯХ

В настоящем разделе мы получим оценку топологической энтропии для непрерывных отображений на конечных деревьях, имеющих неделимую периодическую орбиту или свойство транзитивности.

3.1. Отображения, имеющие неделимую периодическую орбиту

Понятие неделимой периодической орбиты впервые появилось для непрерывных отображений на отрезке в [15], [16]. В [13] показано: если непрерывное отображение $f : I \to I$ отрезка I имеет неделимую периодическую орбиту (то есть периодическую орбиту нечетного периода), то топологическая энтропия $h(f) > \log 2/2$. Понятие неделимой периодической орбиты обобщено для непрерывных отображений на деревьях в работах [7], [8]. С него и начнем.

Пусть Y — дерево, A — множество в Y. Обозначим через $[A]$ — наименьшее связное замкнутое множество, содержащее A. Пусть $f : Y \to Y$ — непрерывное отображение дерева Y, $P = Orb(x, f)$ — периодическая орбита периода больше 1. Положим $f_{[P]} = r_{[P]} \circ f|_{[P]} : [P] \to [P]$. Обозначим через y неподвижную точку отображения $f_{[P]}$, через Z связную компоненту множества $[P] \setminus P$, содержащую y, а $Z_1, \dots Z_l$ — связные компоненты множества $[P] \setminus Z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Будем говорить, что P имеет деление, если существует неподвижная точка y относительно $f_{[P]}$ и разбиение $M_1, \dots, M_m$ ($m \geq 2$) множества $Z_1, \dots, Z_l$ такое, что*

$$f(M_i \cap P) = M_{i+1(\mathrm{mod m})} \cap P, \ 1 \leq i \leq m.$$

В противном случае будем говорить, что P не имеет деление.

Рассмотрим пример непрерывного отображения на 3-оде, у которого существует периодическая орбита, имеющая деление.

ПРИМЕР 3.2. Положим $Y = [-2, 2] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-2, 2] \subset R^2$, $p_1 = (1, 0)$, $p_2 = (0, 2)$, $p_3 = (-2, 0)$, $p_4 = (0, -2), p_5 = (-1, 0), p_6 = (0, 1), p_7 = (2, 0)$ и $p_8 = (0, -1)$. Пусть $P = \{p_i : 1 \leq i \leq 8\}$, а $f : Y \to Y$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условию: $f(p_i) = p_{i+1(\mathrm{mod}\, m)}$ для каждого $1 \leq i \leq 8$.

Положим $A = \{p_1, p_5, p_6, p_8\}$. Поскольку неподвижные точки отображения $r_{[A]} \circ f|_{[A]}$ являются неподвижными точками отображения f, то f имеет неподвижную точку в $[A] \setminus A$. Тогда P имеет деление, взяв $M_1 = [p_2, p_6] \cup [p_8, p_4]$, $M_2 = [p_3, p_5] \cup [p_1, p_7]$.

В этой части работы мы получим оценку для топологической энтропии непрерывных отображений деревьев, имеющих неделимую периодическую орбиту [21]. Докажем следующую теорему.

Обозначим через $\mathrm{End}(Y)$ число концевых точек дерева Y.

ТЕОРЕМА 3.3 [21]. *Пусть $f : Y \to Y$ — непрерывное отображение дерева Y и f имеет неделимую периодическую орбиту. Тогда существует натуральное число $1 \leq k \leq \mathrm{End}(Y)$ такое, что f^k имеет подкову. Следовательно, $h(f) \geq \log 2/\mathrm{End}(Y)$.*

Начнем с доказательства вспомогательных утверждений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *Пусть Y — дерево, $z \in Y$. Последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ называется z-независимой, если для различных $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $x_i \notin [z, x_j]$.*

Справедливость следующей леммы очевидна.

ЛЕММА 3.5. *Пусть Y — дерево. Если $z \in \mathrm{Int}(Y)$, то любая z-независимая последовательность имеет длину $\leq \mathrm{End}(Y)$; если $z \in E(Y)$, то любая z-независимая последовательность имеет длину $\leq \mathrm{End}(Y) - 1$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. *Последовательность $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ называется обратной последовательностью, если $f(x_{i+1}) = x_i$, $0 \leq i \leq n-1$.*

ЛЕММА 3.7. *Пусть $f : Y \to Y$ — непрерывное отображение дерева Y, x_0 — неподвижная точка отображения f. Если существует обратная последовательность $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ такая, что $x_1 \neq x_0$ и $x_{n+1} \in (x_0, x_i)$, где $1 \leq i \leq n$, то отображение f^k имеет подкову для некоторого $k \leq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $n + 1 - i > i$. Положим $I_1 = [x_0, x_{n+1}]$, $I_2 = [x_{n+1}, x_i]$. Тогда f^k имеет подкову, где $k = n + 1 - i \leq n$.

Пусть теперь $n + 1 - i \leq i$.

2. Рассмотрим случай, когда $i = l(n + 1 - i)$, $l \geq 1$. Тогда найдется точка $y \in (x_0, x_{n+1}]$ такая, что $f^i(y) = x_i$. Положим $I_1 = [x_0, y]$, $I_2 = [y, x_i]$. Тогда отображение f^k имеет подкову I_1, I_2, где $k = i$.

3. Рассмотрим случай, когда i не делится на $n + 1 - i$ (следовательно, $n+1-i \geq 2$). Пусть $i = l(n+1-i)+q$, где $l \geq 1$, $1 \leq q < n+1-i$. Так как $i + (n + 1 - i - q) = n + 1 - q \leq n$ и $f(x_{j+1}) = x_j$, $0 \leq j \leq n$, то существует точка $x_{n+2} \in (x_0, x_{i+1})$ такая, что $f(x_{n+2}) = x_{n+1}$. По индукции найдется точка $x_{n+1+j} \in (x_0, x_{i+j})$ с условием $f(x_{n+1+j}) = x_{n+j}$, $1 \leq j \leq n + 1 - i - q$. Заметим, что

$$n+1-q = i+(n+1-i-q) = (l+1)(n+1-i) = (l+1)[(2n+2-i-q)+(n+1-q)].$$

Следовательно, отображение f^k $(k = n + 1 - q \le n)$ имеет подкову в силу доказанного пункта 2 (заменяя i на $n + 1 - q$, $n + 1$ на $2n + 2 - i - q$, l на $l + 1$). Лемма 3.7 доказана.

ЛЕММА 3.8. *Пусть $f : Y \to Y$ — непрерывное и сюръективное отображение дерева Y, x_0 — неподвижная точка такая, что $f^{-1}(x_0) \ne \{x_0\}$ и не существует собственного инвариантного поддерева, содержащего точку x_0. Тогда если $x_0 \in \mathrm{Int}(Y)$ $(x_0 \in E(Y))$, то найдется натуральное число $1 \le k \le \mathrm{End}(Y)$ $(1 \le k \le \mathrm{End}(Y) - 1)$ такое, что f^k имеет подкову, и, следовательно, топологическая энтропия $h(f) \ge \log 2/\mathrm{End}(Y)$ $(h(f) \ge \log 2/(\mathrm{End}(Y) - 1))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Рассмотрим случай, когда $x_0 \in \mathrm{Int}(Y)$. Предположим противное, то есть

$$f^k \text{ не имеет подковы для } 1 \le k \le \mathrm{End} Y. \tag{3.6}$$

Так как $f^{-1}(x_0) \ne x_0$, то существует точка $x_1 \ne x_0$ такая, что $f(x_1) = x_0$.

Положим $A_1 = \{x_1\}$. Для $2 \le i \le \mathrm{End}(Y)$ определим

$$A_i = \{y \in Y : f^{i-1}(y) = x_1 \text{ и } (f^{i-1}(y), \dots, y) \text{ — } x_0\text{-независимая}\}.$$

Положим $j_0 = \max\{i : A_i \ne \emptyset\}$, Y_j замыкание связной компоненты в $Y \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i$, содержащей точку x_0, для $1 \le j \le j_0$. Заметим, что $x_0 \notin \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i}$. Если мы обозначим $Y_0 = Y$, то $Y_j \subset Y_{j-1}$ и каждая концевая точка Y_j является либо концевой точкой Y_{j-1}, либо принадлежит $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i}$, где $1 \le j \le j_0$. Заметим также, что в силу определения A_i $\bigcup\limits_{i=1}^{j_0} A_i \subset Y_1$. Следовательно, применяя лемму 3.5, получим, что $j_0 \le \mathrm{End}(Y_1)$.

Докажем, что $Y_j \cap \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i} = E(Y_j) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i$ для каждого $1 \le j \le j_0$.

Доказательство проведем методом математической индукции. Для $j = 1$ утверждение очевидно. Предположим истинность утверждения для $2 \le j \le j_0 - 1$ и докажем, что $Y_{j+1} \cap \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i} = E(Y_{j+1}) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i$.

Включение $E(Y_{j+1}) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i \subseteq Y_{j+1} \cap \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i}$ очевидно, поэтому докажем обратное включение. Положим $n = \mathrm{End}(Y_1)$ и пусть $x \in Y_{j+1} \cap \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i}$. Так как $x \in \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i}$, то

$$f(x) \in f(\overline{\bigcup_{i=1}^{j+1} A_i}) \subseteq \overline{f(\bigcup_{i=1}^{j+1} A_i)} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{j} A_i} \cup \{x_0\}.$$

Если $f(x) = x_0$, то $x = x_1$, то есть $x \in \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i}$. Рассмотрим случай, когда $f(x) \neq x_0$. Тогда $f(x) \in \bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i$. Покажем, что $f(Y_{j+1}) \subseteq Y_j$. Предположим противное. Тогда найдется точка $y \in Y_{j+1}$ такая, что $f(y) \notin Y_j$. В силу непрерывности f найдется точка $e \in E(Y_j) \cap (x_0, f(y))$. Отсюда получаем существование точки $z \in (x_0, y)$ (следовательно, $z \in \mathrm{Int}(Y_{j+1})$), для которой $f(z) = e$. Так как $e \notin E(Y)$, то $f(z) \in \bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i$. Поскольку $z \in \mathrm{Int}(Y_{j+1})$, то $z \in \bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i$. Полученное противоречие доказывает, что $f(Y_{j+1}) \subseteq Y_j$. Таким образом,

$$f(x) \in Y_j \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{j} A_i} = E(Y_j) \cap \bigcup_{i=1}^{j} A_i.$$

В силу предположения (3.6) и леммы 3.7 $x \notin (x_0, f^i(x))$ для каждого $1 \leq i \leq j_1 - 1$, где j_1 определяется так, что $f^{j_1-1}(x) = x_1$. Таким образом, последовательность $(x_1, \ldots, f(x), x)$ является x_0-независимой, то есть $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{j+1} A_i$. Обратное включение доказано.

Покажем, что $j_0 = n$. Предположим, что $j_0 < n$. Если $Y_{j_0} = Y$, то $A_{j_0} \subseteq E(Y_{j_0})$ и в силу сюръективности отображения f существует точка $x \in Y$ такая, что $f(x) \in E(Y_{j_0}) \cap A_{j_0}$. Пусть $Y_{j_0} \neq Y$. Поскольку Y_{j_0} не инвариантно относительно f и $x_0 \in T_{j_0}$, то существует точка $x \in \mathrm{Int}(Y_{j_0})$ такая, что $f(x) \in E(Y_{j_0}) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{j_0} A_i$. В обоих случаях существует точка $x \in Y_{j_0}$, для которой $f(x) \in E(Y_{j_0}) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{j_0} A_i$. В силу предположения (3.6) и леммы 3.7 последовательность $(x_1, \ldots, f(x), x)$ является x_0-независимой. По построению Y_{j_0} $f(x) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{j_0-1} A_i$. Следовательно, $f(x) \in A_{j_0}$, то есть $x \in A_{j_0+1}$, что противоречит выбору точки x. Поэтому $j_0 = n$.

Повторим рассуждения последнего абзаца, заменяя Y_{j_0} на Y_n. Заметим, что $A_n \subset Y_1$. Найдется точка $x \in \mathrm{Int}(Y_n)$ такая, что $f(x) \in E(Y_n) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Снова в силу построения Y_n $f(x) \in A_n$. Применяя лемму 3.5, получаем, что $x \in (x_0, f^i(x))$ для некоторого $1 \leq i \leq n$. Согласно лемме 3.7 найдется натуральное число $1 \leq k \leq n \leq \mathrm{End}(Y)$ такое, что отображение f^k имеет подкову, что противоречит предположению (3.6). Таким образом, сделанное предположение не верно и отображение f^k имеет подкову, где $1 \leq k \leq \mathrm{End}(Y)$. Используя свойство топологической энтропии п. 3.2, теорему 2.4 и полученную оценку для k, получаем:

$$h(f) = h(f^k)/k \geq \log 2/k \geq \log 2/\mathrm{End}(Y).$$

В случае I лемма 3.8 доказана.

II. Рассмотрим случай, когда $x_0 \in E(Y)$. Повторяя все рассуждения пункта I, заменив (3.6) на предположение: f^k не имеет подковы для $1 \leq k \leq \mathrm{End}(Y) - 1$, и, замечая, что любая x_0-независимая последовательность имеет длину $\leq \mathrm{End(Y)} - 1$, получаем существование натурального числа $1 \leq k \leq \mathrm{End}(Y) - 1$, для которого f^k имеет подкову. Лемма 3.8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Пусть P — периодическая орбита, не имеющая деление. Положим $T = [P]$, $g = r_T \circ f|_T$.

Обозначим через $y_0 \in T$ неподвижную точку отображения g, относительно которой P не имеет деление, через Z связную компоненту $T \setminus P$, содержащую y_0, через Z_i связные компоненты множества $T \setminus Z$, $1 \leq i \leq l$.

Пусть $\mathcal{C}$ — совокупность всех замкнутых связных подмножеств в Z, которые содержат точку y_0 и инвариантны относительно f. Заметим, что $\mathcal{C} \neq \emptyset$, так как $y_0 \in \mathcal{C}$. Положим $A = \overline{\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C}$. Очевидно, что $g(A) = A$. Заметим, что $A \subset \overline{Z}$. Покажем, что $A \subset Z$. Предположим противное. Тогда найдется точка $p \in A \cap P$. Отсюда следует, что $P \subset A \subset \overline{Z}$. Поскольку $P \cap Z = \emptyset$, то точки периодической орбиты P являются граничными точками множества Z. Тогда каждое множество Z_i состоит из единственной точки орбиты P, что означает, что P имеет деление. Полученное противоречие с условием теоремы доказывает, что $A \subset Z$. Стягивая A в точку, мы получим дерево Y', непрерывное отображение $f' : Y' \to Y'$ такое, что $p \circ g = f' \circ p$, $y_0 = p(A)$ — неподвижная точка отображения f', где $p : T \to Y'$– естественная проекция. Очевидно, что $p(P)$ имеет неделимую периодическую орбиту относительно отображения f', и f' является сюръективным. Более того, если B — собственное поддерево в Y', содержащее точку y_0, то B не инвариантно относительно f'. Также мы имеем, что $(f')^{-1}(y_0) \neq \{y_0\}$.

Так как $y_0 \in \mathrm{Int}(Y')$, то в силу леммы 3.8 существует натуральное число $1 \leq k \leq \mathrm{End}(Y') \leq \mathrm{End}(Y)$ такое, что отображение $(f')^k$ имеет подкову. Отсюда получаем, что f^k также имеет подкову. Следовательно, $h(f) \geq \log 2/\mathrm{End}(Y)$. Теорема 3.3 доказана.

3.2. Транзитивные отображения на деревьях

Оценкой топологической энтропии для транзитивных отображений на одномерных разветвленных континуумах занимались различные авторы. В [1] А. Блох показал, что для транзитивных отображений отрезка топологическая энтропия $h(f) \geq \log 2/2$. В [11] получена оценка снизу для топологической энтропии транзитивных отображений, заданных на окружности и n-оде. В настоящем параграфе мы получим оценку для топологической энтропии непрерывных отображений, заданных на конечных деревьях (см., например, [22], [12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. *Пусть $f : Y \to Y$ — непрерывное отображение дерева Y. Будем говорить, что f транзитивно, если любых непустых открытых подмножеств $U, V \subset Y$ найдется натуральное число $n \geq 1$ такое, что $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Условие транзитивности на дереве эквивалентно существованию точки $x \in Y$, траектория которой $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ всюду плотна на Y (см., например, [14]).

Приведем пример транзитивного отображения на 3-оде.

ПРИМЕР 3.10. Пусть Y — 3-од. Обозначим концевые точки Y через e_1, e_2, e_3. Разобьем отрезок $[0, e_3]$ точками $0 > c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > e_3$ на подотрезки одинаковой длины. Определим отображение $f : Y \to Y$ следующим образом: $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = c_1$, $f(e_3) = e_2$, $f(0) = c_3$, $f(c_1) = c_1$, $f(c_2) = 0$, $f(c_3) = e_1$, $f(c_4) = 0$, и f непрерывно и инъективно на замыкании каждой связной компоненты $Y \setminus \{0, c_1, c_2, c_3, c_4\}$.

Покажем, что построенное отображение транзитивно. Положим $V_1 = [c_1, e_3]$, $V_2 = Y \setminus (c_1, e_3]$ и заметим, что $f^2(V_i) = V_i$, $i \in \{1, 2\}$. Более того, $f^2 : V_1 \to V_1$ есть *tent*-отображение, которое является транзитивным. Отсюда получаем, что f транзитивно на Y.

В этой части работы мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.11. *Пусть $f : Y \to Y$ – транзитивное отображение дерева Y. Тогда топологическая энтропия $h(f) \geq \log 2/\mathrm{End}(Y)$.*
Более того, если некоторая концевая точка дерева Y является неподвижной, то $h(f) \geq \log 2/(\mathrm{End}(Y) - 1)$.

Нам потребуется вспомогательная лемма.

ЛЕММА 3.12. *Пусть $f : Y \to Y$ — транзитивное отображение дерева Y, точка $x \in Y$ такая, что $f^{-1}(x) = \{x\}$. Тогда f имеет 3-подкову, если $x \in E(Y)$ и f^k ($k \leq \mathrm{End}(Y)$) имеет 3-подкову, если $x \in \mathrm{Int}(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in E(Y)$. Так как Y – дерево, то найдется дуга $[x, x']$, не содержащая точек ветвления. Обозначим $x = 0$, $x' = 1$ и на дуге $[0, 1]$ введем обычный порядок $<$.

Положим $y_0 = \min\{f(y) : y \in Y \setminus [0, 1],\ f(y) \in [0, 1]\}$,
$y_1 = \min\{y \in [0, 1];\ f(y) = 1\}$ и $y_2 = \min\{y_0, y_1\}$. Заметим, что в силу транзитивности f ни одно из множеств $[0, y]$ и $Y \setminus [0, y]$, где $y \in [0, 1]$, не является инвариантным.

Обозначим через

$$A_l = \{y \in [0, y_2] : \ f(y) \leq y \text{ и } f(z) \geq f(y) \text{ для всех } z \in [y, 1]\},$$

$$A_r = \{y \in [0, y_2] : \ f(y) \geq y \text{ и } f(z) \leq f(y) \text{ для всех } z \in [0, y]\}.$$

Очевидно, что A_l и A_r замкнутые множества и в силу транзитивности отображения f $A_l \cap A_r = \{0\}$. Также в силу транзитивности f и определения множеств A_l и A_r легко показать справедливость следующих свойств:
(1) $A_l \cap (0, y] \neq \emptyset$ для каждой точки $y \leq y_2$;
(2) $A_r \cap (0, y] \neq \emptyset$ для каждой точки $y \leq y_2$;
(3) $A_l \cap [f(y), y) \neq \emptyset$ для каждой точки $y \in A_l$;
(4) $A_r \cap (y, f(y)] \neq \emptyset$ для каждой точки $y \in A_r$ такой, что $f(y) \leq y_2$.

Так как A_l и A_r замкнутые множества, то из свойств (1) и (2) следует существование точек $w < t$ таких, что $w \in A_r$, $f(w) \leq y_2$, $t \in A_l$ и $(w, t) \cap (A_l \cup A_r) = \emptyset$. В силу свойств (3) и (4) найдутся точки $v \in [f(t), t) \cap A_l$ и $u \in (w, f(w)] \cap A_r$. Таким образом, мы имеем $v < w < t < u$ и $f(v), f(t) \leq v$, $f(w), f(u) \geq u$. Это означает, что отображение f имеет 3-подкову $([v, w], [w, t], [t, u])$.

Рассмотрим случай, когда $x \in \mathrm{Int}(Y)$. Пусть k – число компонент множества $Y \setminus \{x\}$. Поскольку $f^{-1}(x) = \{x\}$, то компоненты из $Y \setminus \{x\}$ отображаются друг в друга, и каждая такая компонента отображается на себя относительно отображения f^k. Повторяя рассуждения выше для компоненты из $Y \setminus \{x\}$ и отображения f^k, получаем, что f^k имеет 3-подкову.

Сейчас мы готовы доказать основную теорему настоящего параграфа.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.11. Пусть x — неподвижная точка отображения f. Если $f^{-1}(x) = \{x\}$, то справедливость теоремы 3.11 следует из леммы 3.12.

Рассмотрим случай, когда $f^{-1}(x) \neq \{x\}$. Так как f транзитивное отображение, то выполнены условия леммы 3.8, в силу которой для $x \in \mathrm{Int}(Y)$ $(x \in E(Y))$ существует натуральное число $1 \leq k \leq \mathrm{End}(Y)$ $(1 \leq k \leq \mathrm{End}(Y) - 1)$ такое, что f^k имеет подкову, и, следовательно, топологическая энтропия $h(f) \geq \log 2/\mathrm{End}(Y)$ $(h(f) \geq \log 2/(\mathrm{End}(Y) - 1))$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Блох, А. О сенсетивных отображениях интервала // Мат. заметки. – 1982. – Т. 37. – № 2. С. 203-204.

[2] Ефремова, Л.С., Махрова, Е.Н. Динамика монотонных отображений дендритов // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192. – № 6. – С. 15-30.

[3] Куратовский, К. Топология: Издательство "Мир". М. 1968. Т. 2. – 624 с.

[4] Пайтген, Х.-О.б Рихтер, П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Издательство "Мир". М. 1993. – 176 с.

[5] Шарковский, А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. Мат. Журнал. – 1964. – Т. 16. – № 1. – С. 61-71.

[6] Adler, R.L., Konheimand, A.G., McAndrew, M.H. Topological entropy // Trans. AMS. – 1965. – V. 114. – P. 309-319.

[7] Alseda, L., Ye, X. Division for star maps with the central point fixed // Acta Math. Univ. Comennianae. – V. LXII. – P. 237-248.

[8] Alseda, L., Ye, X. No-division and the set of periods for tree maps // Ergod. Th. Dyn. Syst. – 1995. – V. 15. – P. 221-237.

[9] Ayres, W.L. Some generalizations of the Scherrer fixed-point theorem // Fund. Math. – 1930. – V. 16. – P. 332-336.

[10] Baldwin, St. An extension of Šarkovskii's Theorem to the n-od // Ergod. Th.& Dynam. Sys. – 1991. – V. 11. – P. 249-271.

[11] Alseda, Ll., Kolyada, S., Llibre, J., Snoha, L. Entropy and periodic points for transitive maps // Transactions of AMS. – 1999. – V. 351. – № 4. – P. 1551-1573.

[12] Alseda, L., Baldwin, St., Libre, J., Misiurewicz, M. Entropy of transitive tree maps // Topology. – 1997. – V. 36. – № 2.– P. 519-532.

[13] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M., Young, L.S. Periodic points and topological entropy of one-dimentional maps // Lecture Notes in Mathematics. – V. 819.

[14] Denker, M., Grillenberger, C., Sigmund, K. Ergodic theory on compact spaces // Lecture Notes in Math. Springer. Berlin. – 1976. – V. 527.

[15] Li, T.-Y., Misiurewicz, M., Pianigiani, G., Yorke, J.A. Odd chaos // Phys. Lett. – 1981. – V. 87. – P. 271-273.

[16] Li, T.-Y., Misiurewicz, M., Pianigiani, G., Yorke, J.A. No division implies chaos // Trans. AMS. – 1982. – V. 273. – P. 191-199.

[17] Libre, J., Misiurewicz, M. Horseshoes, entropy and periods for graph maps // Topology. – 2003. – V. 32. – P. 649-664.

[18] Misiurewicz, M. Horseshoes for mappings of an interval // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. – 1979. – V. 27. – P. 167-169.

[19] Misiurewicz, M., Szlenk, W. Entropy of piecewise monotone mappings // Studia Math. – 1980. – V. 67. – P. 45-63.

[20] Rees, M. A minimal positive entropy homeomorphism of the 2-torus // J. London Math. Soc. – 1981. – V. 23. – P. 537-550.

[21] Ye, X. No-division and the entropy of tree maps // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. – 1999. – V. 9. – P. 1859-1865.

[22] Ye, X. Topological entropy of transitive maps of a tree // Ergod. Th. & Dynam. Sys. – 2004. – V. 20. – P. 289-314.

Елена Николаевна **Махрова**

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА РАЗВЕТВЛЕННЫХ КОНТИНУУМАХ

Учебно-методическое пособие
Часть первая

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01