Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций

Михаил Александрович Солдатов
Светлана Серафимовна Круглова
Евгений Валентинович Круглов

Математический анализ функций нескольких переменных
Часть 1
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебное пособие

Предназначено для студентов физического и радиофизического факультетов

Рекомендовано Методической комиссией
механико-математического факультета

Нижний Новгород, 2014

§ 1 Начальные понятия

1. При изучении различных явлений приходится иметь дело с функциями нескольких (многих) независимых переменных. Так, площадь S прямоугольника со сторонами x, y определяется формулой $S = x \cdot y$; объём V прямоугольного параллелепипеда со сторонами x, y ,z есть $V = x \cdot y \cdot z$, а объём кругового цилиндра с радиусом основания r и высотой h выражается формулой $V = \pi r^2 h$; напряжение V в электрической цепи при силе тока I и сопротивлении R есть $V = I \cdot R$. И так далее.

Понятие функции нескольких переменных даётся в тех же выражениях, что и для случая одной независимой переменной. Как обычно, пользуемся понятием «множество» – оно не определяется, а просто понимается.

Пусть дано некоторое множество D упорядоченных пар чисел (x,y). Геометрически его можно изобразить как множество точек $P(x,y)$ декартовой плоскости Oxy: отождествляем понятия «упорядоченная пара чисел (x,y)» и «точка $P(x,y)$ плоскости».

Определение. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых переменных x и y из некоторой области $D=\{(x,y)\}$ их изменения по некоторому правилу (закону) приводится в соответствие определённое значение z величины z, то говорят, что z есть функция двух переменных x и y; она обозначается символами $z = f(x,y), z = F(x,y), z = z(x,y)$ и т.д..

Величины x и y называются также *аргументами функции*, множество D – *областью (множеством) определения* или *областью задания* функции, а совокупность $Z = \{z\} = \{f(x,y)\}$ всех значений функции называется её *областью (множеством) изменения* или *областью значений.*

Очень удобным и плодотворным является трактовка функции двух переменных как функции точек $P(x,y)$ плоскости и обозначение в форме $z = f(P)$: при этом используется терминология такая же, как и для функций одного переменного.

Если функция задана аналитически, некоторой формулой $z = f(x,y)$, без оговорок об области задания, то за эту область принимают множество всех пар (x,y) (всех точек $P(x,y)$), для которых эта формула имеет смысл. Эту область задания называют: область существования или естественная область определения.

<u>Примеры.</u> 1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Область существования: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leq 1$ – это круг с центром в точке $O(0,0)$ радиуса 1 (включая границу – окружность $x^2 + y^2 = 1$).

2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 5\sqrt[3]{y}$. Область существования – полуплоскость $x > 0$.

3) $z = 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{y}$. Область определения $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \neq 0\}$ – полуплоскость $x \geq 0$ без оси Ox.

Область *задания* функции, описывающей какой-либо процесс, может отличаться от естественной области определения. Например, формула площади прямоугольника $S = xy$ употребима лишь для $x > 0$ и $y > 0$, хотя сама функция определена во всей плоскости. Аналогично обстоит дело с формулой для напряжения $V = I \cdot R$, с уравнением газового состояния вещества и т.д..

Замечание. Было дано определение *однозначной* функции; только для таких функций имеют смысл исходные понятия: предел, непрерывность, производные, интеграл и т. п. Случай многозначных функций оговаривается особо.

2. Области на плоскости. Часть плоскости, ограниченная одной или несколькими линиями, называется областью, а сами линии – её границей.

Если граница причисляется к области, то область называется замкнутой, если не причисляется – то открытой. Например, $x^2 + y^2 \leq 1$ – замкнутая область, $x^2 + y^2 < 1$ – открытая. Вся плоскость – это открытая и замкнутая область одновременно. Множество $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\}$ - область не открытая и не замкнутая.

Если открытую область обозначить буквой D, то соответствующую замкнутую область иногда обозначают $\overline{D}$, а именно $\overline{D} = D \cup \partial D$, где ∂D– обозначение границы области (D – начальная буква от фр. *Domaine* – область).

Под *окрестностью* точки $P_0(x_0, y_0)$ понимают любую область D, содержащую эту точку *внутри* себя. В частности, это могут быть δ-окрестности, как-то: открытый круг $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ с центром $P_0(x_0, y_0)$ радиуса δ или открытый квадрат $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\quad y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$. Если точка $P_0(x_0, y_0)$ не причисляется (не принадлежит) к окрестности, то говорят о проколотой окрестности этой точки (как и для функции одного переменного). Так же как и в [13, глава 1] даются определения внутренней, предельной, граничной точек множества (области).

Область называется *связной,* если любые две её точки P_1 и P_2 можно соединить непрерывной линией (например, ломаной), целиком лежащей внутри области.

Простую замкнутую гладкую (или кусочно-гладкую) кривую Γ будем называть *замкнутым контуром.* Его внутренность обозначают через $\operatorname{int}\Gamma$ или $I(\Gamma)$, а внешность – $\operatorname{ext}\Gamma$ или $E(\Gamma)$ (от франц. *Interieur – внутренность, exterieur – внешность,* рис. 1.1).

Область называется *односвязной,* если внутренность *любого* замкнутого контура Γ, лежащего в области, $\Gamma \subset D$ тоже принадлежит области: $\operatorname{int}\Gamma \subset D$. В противном случае связная область называется многосвязной (двусвязной, трехсвязной и т.д., Рис.1.2).

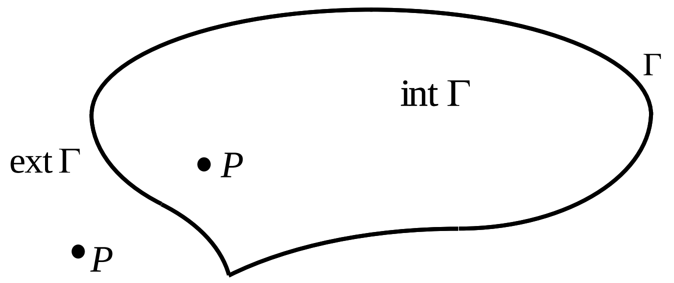
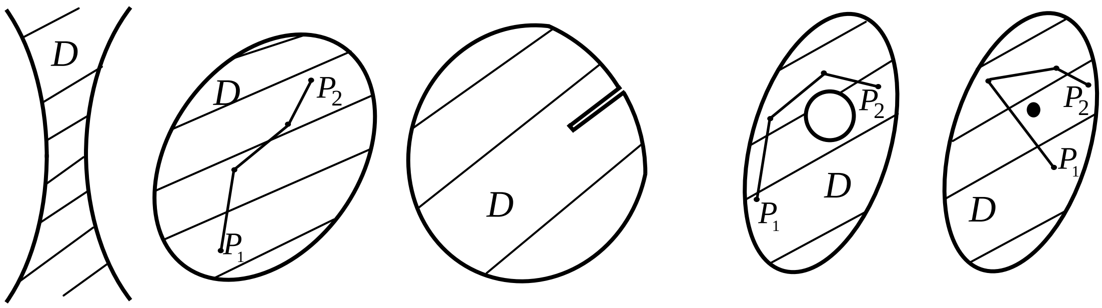
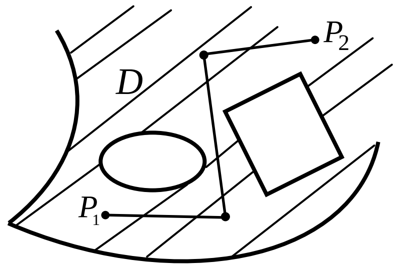


Рис. 1.1. Замкнутый контур, внутренность, внешность



Односвязные области Двусвязные области



Трехсвязная область

Рис. 1.2

Область D называется ограниченной, если существует круг $x^2 + y^2 \le R^2$, с центром в начале координат O(0,0), целиком содержащий всю область D, так что $\forall P(x,y) \in D \Rightarrow расстояние\, OP \le R$. Термин «замкнутая область» употребляется именно для ограниченных областей. Однако часто говорят «ограниченная замкнутая область».

Можно сказать, что понятие области есть обобщение понятия промежутка от случая одного переменного на случай двух переменных.

Пример. 4) Область определения функции $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$ - концентрические круги. Это несвязная область.

3. Геометрическое изображение функции двух переменных.

Рассмотрим в пространстве декартову систему координат $Oxyz$ и пусть функция $z = f(x,y) \equiv f(P)$ определена на некотором куске D плоскости Oxy. Из точки $P(x,y) \in D$ восстановим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нём отложим отрезок, равный $z = f(x,y)$ (вверх – при $z > 0$, или вниз – при $z < 0$). В пространстве получим точку $M(x,y,z)$. Когда точка $P(x,y)$ пробегает множество D, соответствующая точка M опишет в пространстве некоторое геометрическое место точек S, которое называется *поверхностью* (рис. 1.3). Эта поверхность S и служит геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$, её *графиком*. Говорят, что поверхность S *задана* уравнением $z = f(x, y)$. Так как функция однозначная, то каждая вертикаль пересекает поверхность S не более, чем в одной точке. Говорят ещё, что функция двух переменных *отображает*, переводит плоскую область D в «искривлённую» поверхность S. Область изменения $Z = \{z\} = \{f(x, y)\}$ изобразится на оси Oz.

Примеры. 5) $z = 3x^2$ – параболический цилиндр с образующеми, параллельными оси Oy; направляющая – парабола $z = 3x^2$ в плоскости Oxz (рис. 1.4).

6) $z = x^2 + y^2$ - параболоид вращения.

7) $z = xy$ - гиперболический параболоид (седло).

8) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ - верхняя часть конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

9) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ - верхняя часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (Рис.1.5)

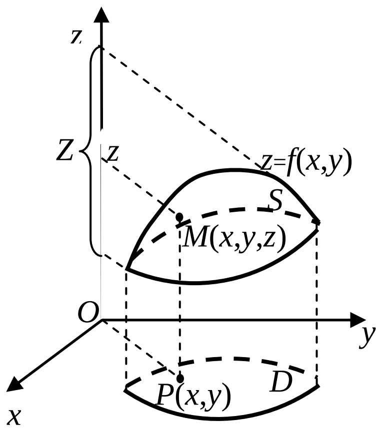


Рис.1.3

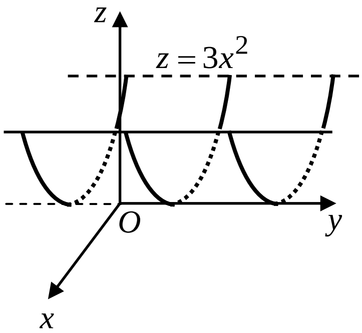


Рис.1.4

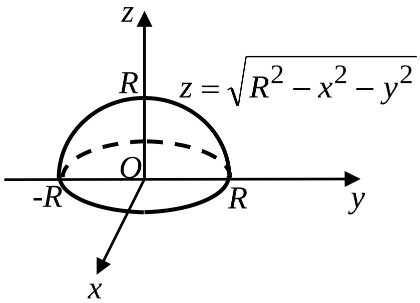


Рис.1.5

4. Понятие функции трёх и более переменных – совершенно аналогично.Так, если значениями переменной u *управляют* тройки (x, y, z), то говорят о функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$ - её удобно трактовать как функцию $u = f(P)$ от точек $P(x, y, z)$ пространства $Oxyz$. Здесь область определения обычно некоторое *тело*. Функцию четырёх переменных $u = f(x, y, z, t)$ иногда трактуют как функцию пространственных координат x, y, z и времени t. (Совокупность четвёрок чисел (x, y, z, t) называют «четырёхмерный мир Минковского».)

Также говорят о функциях n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Конечно, дать непосредственное геометрическое изображение функции трёх, и вообще n переменных при $n \geq 3$, уже невозможно. Однако геометрический язык (терминология) сохраняется и в этих случаях.

5. Понятие n-мерного арифметического пространства. Числам x, парам чисел (x,y), тройкам (x,y,z) можно дать простое геометрическое истолкование – это точки.

Множество всех точек $P(x)$ образует прямую. Это числовая ось или *одномерное пространство*.

Множество всех пар точек $P(x,y)\,(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ образует плоскость или *двумерное пространство*; множество всех троек $P(x,y,z)$ – пространство, или *трёхмерное пространство*.

Геометрический язык полностью переносится и на совокупности из n чисел. Совокупность всех систем из n чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (так называемые n-ки, «энки» чисел; $-\infty < x_k < \infty,\ k = \overline{1,n}$) называется n-мерным арифметическим пространством $Ox_1x_2..x_n$, или координатным пространством A^n, а сами эти системы – (n-мерными) точками его, причём числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами этой точки. Точку обозначают одной буквой, например P, и пишут $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. Точка $O(0,0,...,0)$ называется началом координат.

Если *расстояние* (или, как говорят, *метрику*) в пространстве A^n между точками $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $P^0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ определить формулой

$$PP^0 = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2} \equiv \rho(P, P^0),$$

то A^n называется n-мерным эвклидовым пространством E^n (или R^n). Можно проверить, что выполняется *неравенство треугольника*

$$\rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3) \geq \rho(P_1, P_3).$$

Множество всех точек P, удовлетворяющих неравенству $\rho(P, P^0) < r$, называется *открытым шаром* с центром P^0 радиуса r, или r-*окрестностью* точки P^0. И так далее.

Функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно трактовать как функцию $u = f(P)$ точек n-мерного пространства и говорят, что она определяет поверхность (или гиперповерхность) в $(n+1)$-ом пространстве $Ox_1x_2..x_nu$.

Будем в основном рассматривать функции двух переменных – этот случай нагляден и проще в записи. Иногда будем полагать $n = 3$. Рассмотрение случая трёх и более переменных не вносит никаких принципиальных изменений, но вносит дополнительные технические трудности.

§ 2. Предел и непрерывность

1. Определение 1. Внутренность круга радиуса δ с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$ называется δ-окрестностью точки P_0: это есть множество точек $P(x,y)$, удовлетворяющих неравенству $\rho(P, P_0) < \delta$ или $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ (рис. 1.6).

Определение 2. Число A (если оно существует) называется пределом (или двойным пределом) функции $z = f(P)$ при $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ (или: в точке P_0), если по любому наперёд заданному числу $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех точек P, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(P, P_0) < \delta$, выполняется условие

$$|f(P) - A| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Предполагается (как и ранее для функции одного переменного), что функция $f(P)$ определена в некоторой окрестности точки P_0, исключая, может быть, саму эту точку, и вообще: точка P_0 должна быть предельной точкой для множества точек $P(x, y)$ из области определения функции.

Запись $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ означает, что расстояние $\rho(P, P_0) \to 0$ и читается: точки P стремятся к точке P_0.

Предел обозначается символами

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A. \tag{1.2}$$

Пишут также $f(P) \to A$ при $P \to P_0$.

Так как $\varepsilon > 0$ можно брать как угодно малым, то значения $f(P)$ будут *сколь угодно близки* к A, когда точки P *достаточно близки* к точке P_0; с приближением ε к нулю обычно и δ приближается к нулю.

Отметим, что здесь $f(P) \to A$ *при любом способе* стремления точек P к P_0; ясно, что *если это не выполняется, то функция в точке* P_0 *предела не имеет*. Например, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует, так как $\lim\limits_{\substack{x \to kx_0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} =$ $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \dfrac{k}{1 + k^2}$, т. е. предел оказался зависящим от направления лучей $y = kx$; следовательно, двойной предел не существует.

В определении предела вместо неравенства $0 < PP_0 < \delta$ часто берутся (что равносильно) два неравенства $\{|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ - такие точки (x, y) образуют квадрат с центром (x_0, y_0) и сторонами 2δ, однако центр не учитывается (рис.1.7).

<u>Замечание.</u> Все теоремы о пределах функции одного переменного верны и для двойных пределов. Например, теорема о связи функций, имеющих предел и бесконечно малыми: если $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$, то $f(P) = A + \alpha(P)$, $\alpha(P) \to 0$ при $P \to P_0$; и наоборот.

2. <u>Повторные пределы.</u> Зафиксируем $y \neq y_0$ и пусть существует предел функции $z = f(x, y)$ одного переменного x при $x \to x_0$. Он, конечно, зависит от y, обозначим его $\varphi(y)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y). \qquad (1.3)$$

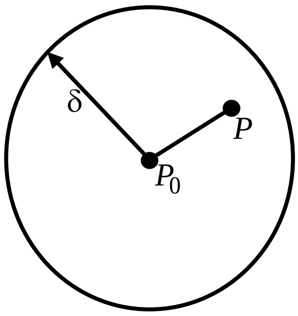


Рис.1.6

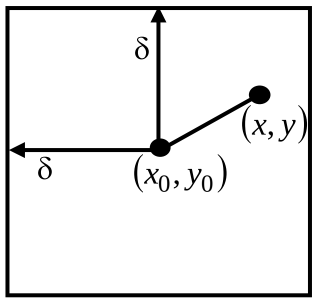


Рис.1.7

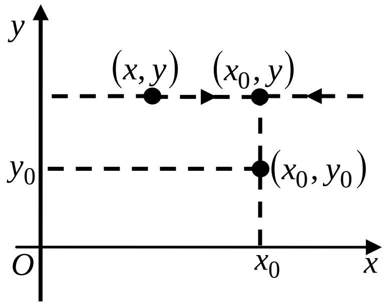


Рис.1.8

Потом рассмотрим предел

$$B=\lim_{y\to y_0}\varphi(y) \ - \qquad (1.4)$$

он называется *повторным* пределом (рис. (1.8). Равенства (1.3) – (1.4) можно переписать в виде

$$B=\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)).$$

Аналогично можно рассмотреть другой повторный предел

$$C=\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)).$$

Как связаны все три введённые предела? Оказывается, одни из них могут существовать, а другие нет (ситуации могут различные).

Примеры. 1) $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ и $P_0(0{,}0)$. Пусть $y\neq 0$, то $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=y-1$, $B=\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y)=-1$. Однако $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=x+1$, поэтому $C=1\neq B$. Двойной предел A не существует, т.к. пределы по направлениям лучей $y=kx$ различны, именно $A_k=\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\dfrac{1-k}{1+k}$.

2) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$; $P_0(0{,}0)$. $A=0$, $B=0$, C не существует.

Теорема 1.1 (о связи двойного и повторных пределов). *Если 1) существует двойной предел (1.2), 2) при любом $y\neq y_0$ существует простой предел (1.3), то существует повторный предел (1.4) и он равен двойному:*

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).[1]$$

Δ В силу условия 1) имеем: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, что

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon, \qquad (1.5)$$

[1] Аналогично для другого повторного предела.

как только $|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta$. Фиксируя $y\in(y_0-\delta, y_0+\delta),\ y\neq y_0$, в (1,5) переходим к пределу при $x\to x_0$. Имея ввиду условие 2), получим $|\varphi(y)-A|\le\varepsilon$. Поскольку это неравенство верно для всех y, удовлетворяющих неравенству $|y-y_0|<\delta$, то это и означает, что $\exists \lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$. ▲

Упражнение. Пусть $B\neq C$. Существует ли тогда двойной предел A? Ответ обоснуйте.

3. Непрерывные функции.

Определение 3. Функция $f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если в определении 2 считать, что она определена и в самой точке P_0 и $f(P_0)=A$, то есть если

$$\exists \lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

или (на «языке $\varepsilon-\delta$»): $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0: PP_0<\delta\Rightarrow|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$.

(Когда $P=P_0$ последнее неравенство тем более выполняется.)

Если же функция не является непрерывной в точке P_0, хотя определена в некоторой её окрестности, то P_0 называется *точкой разрыва* функции. Точки разрыва могут составлять целые линии – их называют *линии разрыва* функции.

Примеры. 3) Функции $f_1(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-3}$ и $f_2(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ имеют линии разрыва соответственно окружность $x^2+y^2-3=0$ и прямую $x-y=0$; области определения у этих функций не являются связными.

4) Функция $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ имеет одну точку разрыва $O(0,0)$.

Свойства непрерывных функций двух переменных в точке такие же, как и для функции одного переменного, например, суперпозиция (сложная функция) непрерывных функций тоже является функцией непрерывной.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

4. Свойства функций, непрерывных в области.

Свойство 1 (Первая теорема Вейерштрасса). *Функция $f(P)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, ограничена в ней, то есть существует число $M>0$ такое, что $|f(P)|\le M,\ \forall P(x,y)\in\overline{D}$.*

Свойство 2 (Вторая теорема Вейерштрасса). *Функция $f(P)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения, то есть: $\exists P_1\in\overline{D}$ и $P_2\in\overline{D}$, что $f(P_1)\le f(P)\le f(P_2)$, $\forall P(x,y)\in\overline{D}$.*

Свойство 3 (теорема Больцано-Коши или теорема о промежуточных значениях функции). *Если функция $f(P)$ непрерывна в некоторой связной области D и в каких-либо двух её точках принимает не равные значения $f(P_1)=A$*

и $f(P_2)=B$*, то она в этой области принимает и все промежуточные значения между A и B, то есть* $\forall C\in[A,B]$, $\exists P'\in D:\ f(P')=C$.

(В частности, при $A\cdot B<0,\ \exists P'\in D:\ f(P')=0$).

Δ Соединим точки P_1 и P_2 непрерывной линией $l\subset D$ (это можно, так как D связная область) и пусть $\{x=x(t),y=y(t)\}$ её параметрические уравнения; функции эти по условию непрерывны. Точке P_1 пусть соответствует значение параметра $t=t_1$, а точке P_2 – значение $t=t_2$. Так как суперпозиция непрерывных функций тоже функция непрерывная, то $F(t)=f(x(t),y(t))$ есть непрерывная функция от t, причём $F(t_1)=A$, $F(t_2)=B$. Возьмём любое число $C\in[A,B]$. По теореме Больцано-Коши для функции одного переменного $\exists t'\in[t_1,t_2]$ такое, что $F(t')=C$, $f(x(t'),y(t'))=C$, где точка $P'(x(t'),y(t'))\in l\subset D$. ▲

<u>Контрпример.</u> $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-3}$. Здесь $f(0,0)=-\frac{1}{3}<0$, $f(2,2)=\frac{1}{5}>0$, однако $f(x,y)\neq 0=C$ нигде. В чём причина?

§ 3. Частные производные и дифференциал

1. <u>Понятие частных производных.</u>

Пусть дана функция $z=f(x,y)$. Зафиксируем переменное *y*, то есть считаем $y=const$, тогда получим функцию одного переменного *x*. Её производная называется частной производной по *x* в данной точке (x,y) и обозначается символами $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x,y)$, $z'_x(x,y)$. Аналогично, при условии $x=const$, определится частная производная по *y*. Она обозначается символами $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $z'_y(x,y)$, …. Таким образом, если

$$\Delta_x f(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y) \text{ и } \Delta_y f(x,y)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

есть *частные приращения* функции $f(x,y)$ в точке (x,y) соответственно по *x* и по *y*, то частные производные определятся как пределы

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} \text{ и } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}.$$

Отметим, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, как и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, есть *всегда единый, цельный, нераздельный символ – всегда не дробь*.

Поскольку определение частных производных такое же, как и для функций одного переменного, *то все правила дифференцирования сохраняются*.

Примеры. 1) $z=3x^2-xy$; $z'_x=6x-y$, $z'_y=-x$.

2) $z=x^y$. Если $y=const$, то это есть степенная функция и $z'_x=y\cdot x^{y-1}$; а в случае $x=const$ – это показательная функция от y и $z'_y=x^y\cdot\ln x$.

3) $z=\ln(x^2-y^2)$; $z'_x=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$, $z'_y=-\dfrac{2y}{x^2-y^2}$.

Замечание1. В отличие от функции одного переменного, функция двух переменных может иметь частные производные в точке (x,y), но не быть непрерывной в этой точке, и даже может не иметь предела в ней. Это связано с тем, что для частных производных учитываются только два направления движения к точке (x,y): горизонтальное и вертикальное, а в случае непрерывности – вся окрестность (рис.1.9).

Пример. $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{если } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, \quad \textit{если } x=y=0.\end{cases}$ Эта функция имеет частные производные в точке (0,0):

$$\Delta_x f(0,0)=f(0+\Delta x,0)-f(0,0)=0-0=0\Rightarrow\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}=0.$$

Аналогично, $\exists f'_y(0,0)=0$. Убедимся, что в точке (0,0) функция не является непрерывной и более того – не имеет предела. Для этого рассмотрим значения функции на луче $y=kx$ и пусть $(x,y)\to(0,0)$ вдоль этого луча (рис. 1.10): $z=\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\dfrac{k}{1+k^2}$. По разным направлениям пределы разные; в этом достаточно убедиться, если взять два направления, например $k=0$ и $k=1$. Поэтому предела в точке (0,0) нет. Очевидно, что эта функция в точке (0,0) непрерывна по каждому переменному в отдельности при фиксированном значении другого переменного, т. к. $f(x,0)=f(0,y)=0=f(0,0)$ (то есть, рассматриваем значения этой функции на горизонтали и вертикали).

Замечание. Из определения предела на языке $\varepsilon-\delta$ (определение 3) непосредственно следует, что функция, непрерывная в точке $P_0(x_0,y_0)$ по совокупности переменных, тем более непрерывна по каждому из переменных в отдельности. Обратное неверно, как это видно из примера 4.

Пример. $f(x,y)=0$, если $x\cdot y=0$ (то есть на осях $x=0$ и $y=0$), и $f(x,y)=1$, если $xy\neq 0$. И здесь $\exists f'_x(0,0)=0, \exists f'_y(0,0)=0$, однако в точке (0,0) функция терпит разрыв.

2. Полное приращение функции. Дифференциал. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $P(x,y)$. Дадим числам x и y некоторые *приращения* Δx и Δy, так, чтобы точка $P_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$

(рис.1.11) принадлежала взятой окрестности точки $P(x,y)$. При переходе от точки P к точке P_1 функция изменится на величину

$$\Delta z = f(P_1) - f(P) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \qquad (1.5')$$

– она называется *полным приращением* функции в точке (x,y), соответствующим приращениям Δx и Δy аргументов. *Это есть функция приращений Δx и Δy при фиксированных x и y.*

Для непрерывной функции её приращение $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Нельзя ли Δz при малых Δx *и* Δy заменить *приближённо* бесконечно малой более простого вида? Иногда это возможно.

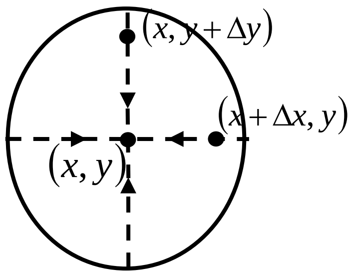


Рис.1.9

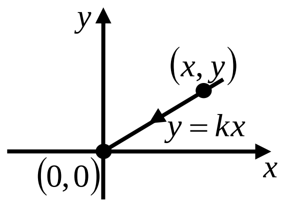


Рис.1.10

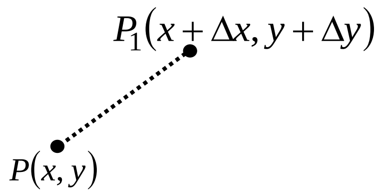


Рис.1.11

Определение 1. Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P(x,y)$, если её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y, \qquad (1.6)$$

где A и B не зависят от Δx *и* Δy, а

$$\alpha(\Delta x,\Delta y),\ \beta(\Delta x,\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta x,\ \Delta y \to 0. \qquad (1.7)$$

При этом выражение $dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ называется дифференциалом или полным дифференциалом функции в точке $P(x,y)$.

Можно убедиться, что сумма двух последних слагаемых в (1.6) может быть записана как $o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = PP_1$, и потому

$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\rho)$. (Напомним, что $\dfrac{o(\rho)}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$.)

Теорема 1.2 (необходимые условия дифференцируемости). *Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $P(x,y)$, то она 1) непрерывна и 2) имеет в этой точке частные производные, причём в (1.6) $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.*

Δ Дано, что функция дифференцируема, т.е. выполняется равенство (1.6). 1) Пусть $P_1 \to P$, то $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогда, в силу (1.6), и $\Delta z \to 0$, значит $f(P_1) - f(P) \to 0$, или $\lim\limits_{P_1 \to P} f(P_1) = f(P)$ – функция непрерывна.

2) В (1.6) положим $\Delta y = 0$. Получим

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\cdot\Delta x.$$

Делим на Δx: $\dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x, 0)$. Поскольку $\alpha(\Delta x, 0)\to 0$ при $\Delta x \to 0$, то существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = A$, то есть существует производная по *x*, причём $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$.

Аналогично, полагая в (1.6) $\Delta x = 0$, обнаружим, что $\exists \dfrac{\partial z}{\partial y} = B$. ▲

Согласно теореме 1.2 полное приращение дифференцируемой в точке $P(x,y)$ функции запишется так:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y, \qquad (1.6')$$

причём выполняется требование (1.7), и дифференциал имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (1.8)$$

В силу (1.6′) получаем: если $f'_x(x,y)\neq 0$ или $f'_y(x,y)\neq 0$, то дифференциал есть главная и линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции.

Определение 2. Дифференциалами независимых переменных называют их приращения: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, и тогда дифференциал функции принимает вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (1.9)$$

Это есть формула для вычисления полного дифференциала функции; иногда его прямо так и определяют (если только функция дифференцируема).

Полагая $dy = 0$ или $dx = 0$, получим *частные дифференциалы*

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx \quad \text{и} \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

Пример. $z = 3xe^{2y}$; $dz = 3e^{2y}dx + 6xe^{2y}dy$.

Правила вычисления дифференциалов

Пусть u и v - дифференцируемые функции от x, y. Тогда

1°. $d(Cu) = C\,du$ ($C = const$).

2°. $d(u+v) = du + dv$.

3°. $d(uv) = vdu + udv$.

4°. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v\neq 0$.

Эти правила доказываются с помощью формулы (1.9). Например,

$$d(Cu) = \frac{\partial(Cu)}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial(Cv)}{\partial y}\cdot dy = C\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = C\cdot du.$$

Замечание. Для функции $\varphi(x)$ одной переменной из условия существования производной $\varphi'(x)$ следует дифференцируемость функции. Для функции двух переменных это неверно. Например, функции из примеров 4) и 5) хотя и имеют частные производные в точке $O(0,0)$, но не дифференцируемы, поскольку не являются непрерывными (см. теорему 1.2). Более того, функция $z=\sqrt{|xy|}$ в точке $O(0,0)$ имеет частные производные и непрерывна, однако тоже не дифференцируема – это можно доказать методом от противного.

Рассмотрим условия, которые обеспечивают дифференцируемость функции в точке.

Теорема 1.3 (достаточные условия дифференцируемости). *Если функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P(x,y)$ и эти производные в самой точке непрерывны, то функция в точке $P(x,y)$ дифференцируема.*

Δ Докажем, что полное приращение (1.5′) можно представить в виде (1.6′). Для этого запишем

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) =$$
$$=[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)].$$

В первой скобке стоит приращение функции $f(t, y+\Delta y)$ одного переменного t на промежутке $[x, x+\Delta x] \ni t$, а во второй – функции $f(x,s)$ на промежутке $[y, y+\Delta y] \ni s$. По формуле Лагранжа: $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(c)\cdot(b-a)$, $c=a+\theta(b-a)$, $0<\theta<1$, поскольку частные производные функции $f(x,y)$ существуют, будем иметь:

$$\Delta z = f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y,\ 0<\theta<1,\ 0<\theta_1<1.$$

По условию непрерывности частных производных

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y),$$

в силу чего $f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y)+\alpha(\Delta x,\Delta y)$.

Аналогично $f'_y(x, y+\theta_1\Delta y) = f'_y(x,y)+\beta(\Delta x,\Delta y)$; $\alpha(\Delta x,\Delta y), \beta(\Delta x,\Delta y)\to 0$ при Δx и $\Delta y\to 0$ по теореме о связи функций, имеющих предел, с бесконечно малыми. Поэтому $\Delta z=(f'_x+\alpha)\Delta x+(f'_y+\beta)\Delta y=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$. ▲

3. Применение дифференциала для приближённых вычислений и оценки погрешности функции.

Пусть известны значения функции $z=f(x,y)$ и её производных в точке $P(x,y)$. Надо найти приближённо её значения в соседней точке $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Из формулы (1.5′)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)+\Delta z,$$

а *при малых* Δx *и* Δy из (1.6′) имеем $\Delta z\approx dz$. Поэтому

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \qquad (1.10)$$

Эту приближённую формулу можно переписать так:

$$z(x,y) \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0), \qquad (1.11)$$

если приращения $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ достаточно малы.

Пример. Найти приближённо число $\alpha = \ln(\sqrt[3]{8{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 2)$.

Решение. Для этого рассмотрим функцию $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 2)$. У нас $x = 8{,}03$, $y = 0{,}98$. Возьмём $x_0 = 8$, $y_0 = 1$. В этой точке $P_0(8,1)$ найдём значения функции и частных производных:

$$z(8,1) = \ln 1 = 0,\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(8,1)} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 2} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right)_{(8,1)} = \frac{1}{24},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(8,1)} = \frac{1}{4}.$$

Приращения аргументов: $\Delta x = x - x_0 = 0{,}03$ и $\Delta y = y - y_0 = -0{,}02$ – малы. Тогда по формуле (1.11)

$$\alpha \equiv z(8{,}03; 0{,}98) \approx 0 + \frac{1}{24} \cdot 0{,}03 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}02 = 0{,}00135 - 0{,}005 = -0{,}00365.$$

Пусть дана функция $z = f(x,y)$, причём, определив каким-то образом значения x и y, мы допускаем ошибки (погрешности) Δx и Δy. Тогда и значение величины z получит погрешность $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$. Её можно оценить, если известны оценки погрешностей Δx и Δy. Пусть $|\Delta x| \le \delta x$, $|\Delta y| \le \delta y$, где δx и δy есть *максимальные абсолютные* погрешности. Полагая, что они *малы*, имеем

$$|\Delta z| \approx |dz| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y| \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot \delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot \delta y.$$

Поэтому за максимальную абсолютную погрешность функции можно принять величину $\delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot \delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot \delta y$.

Пример. Пусть $z = xy$. Здесь абсолютная погрешность $\delta z = |y|\delta x + |x| \cdot \delta y$ и относительная погрешность $\frac{\delta z}{|z|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}$. Получили, что относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

4. Производная сложной функции. Пусть в области D дана функция $z = f(x,y)$, причём переменные x и y сами являются функциями от независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда z называется сложной функцией от t (или: *z задана* как сложная функция от t), её обозначим через $F(t)$ или $z = z(t)$:

$$z = f(x(t), y(t)) \equiv F(t) \equiv z(t). \qquad (1.12)$$

Естественно, предполагается, что значения $\{x = x(t), y = y(t)\}$не выходят из области *D*.

Теорема 1.4 (о производной сложной функции). *Если функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема и существуют производные* $x'(t), y'(t)$, *то сложная функция (1.12) имеет производную, причём*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1.13}$$

Это есть формула для вычисления производной сложной функции, её называют также полной производной.

Δ Дадим переменному t некоторое приращение Δt, тогда функции $x = x(t),\ y = y(t)$ получат приращения $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ и соответственно функция $z(t)$ - приращение $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$. Поскольку функция $f(x, y)$ дифференцируема, то

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y,$$

где $\alpha, \beta \to 0$ при Δx и $\Delta y \to 0$. Разделим обе части равенства на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Пусть здесь $\Delta t \to 0$, тогда в силу непрерывности функций $x(t),\ y(t)$, их приращения $\Delta x, \Delta y \to 0$, а значит и $\alpha, \beta \to 0$, поэтому в пределе получим равенство (1.13). ▲

Величины *x, y* могут быть функциями от нескольких переменных. Пусть они зависят от двух независимых переменных u, v, именно $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$, то z будет сложной функцией от u, v; обозначим её $z = F(u,v)$,то есть

$$z = f(x, y) = f(x(u,v), y(u,v)) \equiv F(u,v). \tag{1.14}$$

Положим $v = const$ или $u = const$. Тогда получим сложную функцию одного переменного u или *v*, и можем использовать формулу (1.13), заменив обыкновенные производные частными по переменным u или *v*. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{1.15}$$

Это *формулы для вычисления частных производных сложной функции* $z = f(x(u,v), y(u,v)) \equiv F(u,v)$, их тоже называют полными производными.

5. <u>Инвариантность формы полного дифференциала (дифференциал сложной функции).</u>

Если *x, y* являются независимыми переменными, то дифференциал функции $z = f(x, y)$ определяется по формуле (1.9). Оказывается, по этой формуле можно вычислять и дифференциал сложной функции (1.14), в частности функции (1.12), но только под dx и dy надо понимать дифференциалы функций

$x = x(u,v),\ y = y(u,v)$. Действительно, имея в виду (1.15), находим

$$dz \equiv dF(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \left(z'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + z'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right)du + \left(z'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + z'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right)dv =$$

$$= z'_x \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \right) + z'_y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \right) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

В последнем равенстве в скобках стоят дифференциалы функций $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$.

Вывод. Формула (1.9) для вычисления дифференциала остаётся неизменной, или, как говорят, инвариантной, как в случае, когда x, y независимые переменные (т.е. $\Delta x = dx, \Delta y = dy$), так и в случае, когда x, y сами являются функциями других переменных, но теперь dx и dy суть дифференциалы промежуточных аргументов (их приращения $\Delta x \neq dx,\ \Delta y \neq dy$).

6. Функции трёх переменных. Все предыдущие понятия, теоремы, факты имеют место и для функций любого числа n переменных. Часто приходится иметь дело, например, с функциями трёх переменных.

Рассмотрим функцию $w = f(x,y,z)$. Её область определения есть некоторое множество $E = \{(x,y,z)\}$ точек трёхмерного пространства $Oxyz$ и её удобно трактовать как функцию $w = f(P)$ точек $P(x,y,z) \in E$. Для такой функции определяются три частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$, например,

$$\frac{\partial w(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \frac{dw(x, y_0, z_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} .$$

Функция трёх переменных *является* дифференцируемой в точке $P(x,y,z)$, когда её приращение Δw в этой точке представимо в виде

$$\Delta w \equiv f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z, \quad (1.16)$$

где α, β, γ бесконечно малые функции от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, именно: $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$. Частные производные берутся в точке $P(x,y,z)$. (Так будет, в частности, когда они непрерывны). При этом выражение

$$dw \equiv df(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \quad (1.17)$$

называется дифференциалом, или полным дифференциалом, функции. Под дифференциалами независимых переменных понимают, как и ранее их приращения: $dx \equiv \Delta x, dy \equiv \Delta y, dz \equiv \Delta z$. Согласно (1.16), дифференциал функции есть линейная, а если хотя бы одна из производных отлична от нуля, то и главная часть её приращения, и $\Delta w \approx dw$ при малых приращениях аргументов.

Пусть x, y, z сами являются функциями переменной t:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad (1.18)$$

то производная сложной функции

$$w = f(x,y,z) = f(x(t),y(t),z(t)) \equiv w(t)$$

найдётся по формуле

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (1.18')$$

Если x, y, z являются функциями двух независимых переменных u, v:

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), \qquad (1.19)$$

то частные производные сложной функции

$$w = f(x,y,z) = f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \equiv w(u,v) \qquad (1.19')$$

выражаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}. \qquad (1.20)$$

Наконец, форма дифференциала (1.17) сохраняется и для случая, когда x, y, z сами являются функциями (например, (1.18) или (1.19)), но смысл символов dx, dy, dz уже другой.

Указанные свойства позволяют упрощать вычисление дифференциалов. Зная дифференциал, можно находить частные производные от сложных функций – как коэффициенты при дифференциалах независимых переменных.

Например, возьмём функцию $w = \sin(x^3 e^{-y}) = \sin u,\ u = x^3 e^{-y}$. Находим

$$dw = \frac{dw}{du}\cdot du = \cos u\cdot(3x^2 e^{-y}dx - x^3 e^{-y}dy).$$

Отсюда $\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 e^{-y}\cos(x^3 e^{-y})$, $\frac{\partial w}{\partial y} = -x^3 e^{-y}\cos(x^3 e^{-y})$.

Некоторые случаи вычисления производных сложных функций.

1) $w = f(x)$, $x = x(u,v)$, так что $w = f(x) = f(x(u,v)) \equiv w(u,v)$ и

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

2) $z = f(x,y)$, x – независимая переменная, а $y = y(x)$, так что

$$z = f(x, y(x)) \equiv z(x) \text{ и } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'(x).$$

3) $w = w(x,y,z)$, x, y – независимые переменные, а $z = z(x,y)$. Имеем $w = w(x,y,z) = w(x,y,z(x,y)) \equiv w_1(x,y)$,

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Итак, $\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

Если в пунктах 1) и 2) сложную функцию могли обозначить той же буквой, что и саму функцию, без опасения их перепутать, то в случае 3) этого сделать нельзя – это разные функции.

7. Однородные функции. Формула Эйлера.

Определение. Функция $w = f(x, y, z)$ называется *однородной функцией степени* μ, если при умножении всех её аргументов на множитель t вся функция умножается на t^{μ}, то есть если имеет место тождество

$$f(tx, ty, tz) = t^{\mu} f(x, y, z). \tag{1.21}$$

При $\mu = 0$ получим функцию нулевой степени: $f(tx, ty, tz) = f(x, y, z)$, такие функции часто называют просто *однородными* (без указания степени $\mu = 0$).

Пусть $\mu = 0$. Положим $t = \frac{1}{x}$, тогда получим $f(x, y, z) = f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Аналогично, для однородной функции нулевой степени двух переменных: $f(tx, ty) = f(x, y)$ - при $t = \frac{1}{x}$ получим $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Итак, однородная функция нулевой степени представима как функция от отношения всех аргументов к одному из них.

Примеры. 1) $f(x, y) = 3x^2 - 5xy$ есть однородная функция 2-ой степени, ибо $3(xt)^2 - 5 \cdot (tx) \cdot (ty) = t^2(3x^2 - 5xy)$. И вообще, всякий многочлен от двух переменных $\sum\limits_{i,j} A_{ij} x^i y^j$, где $i + j = k = const$, есть однородная функция k-ой степени; он называется однородным многочленом степени k.

2) Функция $2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - e^{\frac{3xy}{z^2}}$ – однородная функция 0-ой степени.

3) Функция $x^{\pi} \sin\frac{x}{y} - y^{\pi}(\ln y - \ln x)$ - однородная степени $\mu = \pi$.

Теорема Эйлера об однородных функциях. *Если* $f(x, y, z)$ *дифференцируемая однородная функция* μ*-ой степени, то имеет место формула Эйлера*

$$x \cdot f'_x(x, y, z) + y \cdot f'_y(x, y, z) + z \cdot f'_z(x, y, z) = \mu \cdot f(x, y, z). \tag{1.22}$$

Δ Тождество (1.21) продифференцируем по t, причём левую часть – как сложную функцию:

$$f'_{tx}(tx, ty, tz) \cdot x + f'_{ty}(tx, ty, tz) \cdot y + f'_{tz}(tx, ty, tz) \cdot z = \mu \cdot t^{\mu-1} \cdot f(x, y, z).$$

Полагая здесь $t = 1$, получаем формулу (1.22). ▲

Справедливо и обратное: функция, удовлетворяющая тождеству (1.22), является однородной степени μ – это доказывается в курсе дифференциальных уравнений.

Примечание. При установлении различных фактов для точки или области, мы негласно предполагаем выполнение необходимых для этого условий (непрерывность, дифференцируемость и т.п.).

§ 4. Производная по направлению. Градиент

1. Пусть дана функция, например, трёх переменных $u = u(P) = u(x, y, z)$. Частные производные u'_x, u'_y, u'_z определяют «скорость изменения» функции по направлениям осей Ox, Oy, Oz. Как определить аналогичную величину по любому заданному направлению $\vec{l}$?

Рассмотрим точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Проведём из неё полупрямую (луч), зададим её вектором $\vec{l}$. На ней возьмём точку $P(x, y, z)$ (рис.1.12) и составим отношение $\dfrac{u(P) - u(P_0)}{P_0P}$ – это средняя скорость изменения функции на участке P_0P .

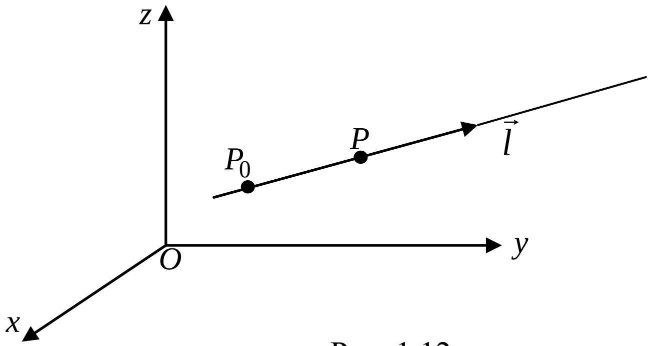


Рис. 1.12

Перейдём к пределу, когда $P \to P_0$ *вдоль луча.* Этот предел, если он существует, называется производной от функции u в точке P_0 по данному направлению и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{P \to P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{P_0P} = \lim_{P \to P_0} \frac{u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0)}{P_0P}. \qquad (1.23)$$

Это и есть *скорость изменения функции в точке* P_0 *по направлению* $\vec{l}$. По самому определению этот предел не зависит от выбора системы координат.

Найдём формулу для вычисления $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Предполагаем, что функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в точке P_0. Обозначим α, β, γ углы, образуемые вектором $\vec{l}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно; и пусть $\vec{l}$ – единичный вектор; тогда координаты его суть направляющие косинусы, т.е. $\vec{l} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$.

Обозначим расстояние $P_0P = t$. Вектор $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{l}$; с другой стороны $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$. Из равенства координат находим:

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \; y = y_0 + t\cos\beta, \; z = z_0 + t\cos\gamma.$$

Если t менять в пределах $0 \le t < \infty$, то это будут параметрические уравнения полупрямой P_0P. В точках этой полупрямой имеем

$$u(P) = u(x, y, z) = u(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma) \equiv F(t).$$

И предел (1.23) запишется так:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(0)$$

– это есть производная функции $F(t)$ по переменному t в точке $t = 0$. Раскрывая её по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{1.24}$$

Здесь производные берутся в исходной точке P_0 (полагали $t = 0$).

Вывод. Если функция $u(P)$ дифференцируема в точке P_0, то она имеет в этой точке производные по всем направлениям, и эти производные вычисляются по формуле (1.24).

Пусть, в частности, $\vec{l}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, так что $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, $P(x, y_0, z_0)$ (изменяется только первая координата) и $P_0P = x - x_0 = \Delta x > 0$. Тогда, как из определения (1.23), так и из формулы (1.24) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial u}{\partial x};\ \text{так же}\ \frac{\partial u}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial u}{\partial y}\ \text{и}\ \frac{\partial u}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Таким образом, частные производные суть частные случаи производной по направлению.

Заметим, что производная по направлению $\vec{l}_1 = -\vec{l}$, обратному $\vec{l}$, отличается знаком: углы вектора $\vec{l}_1$ с осями координат есть $\alpha_1 = \pi + \alpha$, $\beta_1 = \pi + \beta$, $\gamma_1 = \pi + \gamma$, и тогда по формуле (1.24) найдём $\frac{\partial u}{\partial l_1} = -\frac{\partial u}{\partial l}$.

2. Производная по направлению кривой. Пусть в пространстве $Oxyz$ задана спрямляемая кривая C, на ней установлено определённое (положительное) направление и в этом направлении возрастает переменная длина дуги s. Через $P(s)$ обозначаем точку $P(x, y, z) \in C$, которой соответствует длина s. Подобно тому, как на плоскости кривую удобно задавать двумя параметрическими уравнениями $x = x(s), y = y(s)$, так кривую C удобно задавать тремя уравнениями

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s), \tag{1.25}$$

или, что то же, одним векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}.$$

Считаем, что функции (1.25) имеют непрерывные производные и $x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 \neq 0$; тогда кривая называется *гладкой* – она имеет непрерывно меняющуюся касательную.

Пусть α, β, γ - углы, образуемые положительным направлением касательной $\vec{l}$ в точке $P(s)$ с соответствующими осями координат. Вектор

$$\vec{l} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

есть единичный вектор касательной, направленный в сторону возрастания s, так что его координаты равны направляющим косинусам

$$x'(s) = \cos\alpha,\ y'(s) = \cos\beta,\ z'(s) = \cos\gamma. \tag{1.26}$$

Отметим, что $\left|\vec{l}\right| = \left|\vec{r}'(s)\right| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ – так связаны углы α, β, γ.

Пусть задана дифференцируемая функция трёх переменных $u = u(P) = u(x, y, z)$. Через данную точку $P(x, y, z)$ проводим кривую C с указанными свойствами, для этой точки сохраняем обозначение $P(s)$. Перейдём к соседней точке $P_1(s + \Delta s)$, $\Delta s > 0$. Соединим P и P_1 хордой PP_1 (рис. 1.13) и рассмотрим предел

$$\lim_{P_1 \to P} \frac{u(P_1) - u(P)}{PP_1}, \tag{1.27}$$

где $P_1 \to P$ вдоль C. Этот предел, если он существует, называется производной функции $u = u(P)$ в точке P по направлению кривой C и обозначается символами $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ или $\dfrac{du}{ds}$.

В точках кривой C имеем $u(P) = u(x, y, z) = u(x(s), y(s), z(s)) \equiv u(s)$. Поскольку, как и в плоском случае, хорда и дуга эквивалентные бесконечно малые, $PP_1 \sim \Delta s$, то предел (1.27) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{u(s + \Delta s) - u(s)}{\Delta s} \equiv \frac{du}{ds} -$$

это обычная производная сложной функции $u(s)$. Раскрывая её по правилу дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Подставляя сюда значения (1.26), получаем *формулу для вычисления производной по направлению кривой*

$$\frac{\partial u}{\partial s} \equiv \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l}. \tag{1.28}$$

Вывод. Если функция $u = u(P) = u(x, y, z)$ дифференцируема в точке $P(x, y, z)$, то она имеет в этой точке производные по направлению всех гладких кривых, причём производная по направлению кривой C совпадает с производной по направлению касательной к этой кривой.

3. Градиент скалярного поля. Пусть дана функция $u = u(P) = u(x, y, z)$, дифференцируемая в точке $P(x, y, z)$. Здесь точке P ставится в соответствие *число* u, и говорят, что дано скалярное поле – поле величины u (например, это может быть плотность, температура, потенциал,…). Поставим функции u в соответствие вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (1.29)$$

Он называется *градиентом функции* u в данной точке P. Говорят, что скалярная функция $u = u(P)$ порождает поле векторов – поле градиента.

Часто градиент записывают в виде $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u$, где символический вектор $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ называют: оператор пространственного дифференцирования, оператор Гамильтона, гамильтониан, или просто вектор набла.[2]

В точке P зададим направление

$$\vec{l} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}\,.$$

Используя градиент, формулу для вычисления производной по направлению $\vec{l}$ можно записать в виде скалярного произведения

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}\,)\,. \qquad (1.30)$$

Пусть φ - угол между $\vec{l}$ и $\operatorname{grad} u$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}\,) = |\operatorname{grad} u|\cdot|\vec{l}\,|\cos\varphi = |\operatorname{grad} u|\cdot\cos\varphi = \text{пр.}_{\vec{l}}\operatorname{grad} u\,. \qquad (1.31)$$

Итак, *производная* $\frac{\partial u}{\partial l}$ *функции* u *по направлению* $\vec{l}$ *равна проекции градиента на это направление*. (Рис. 1.14).

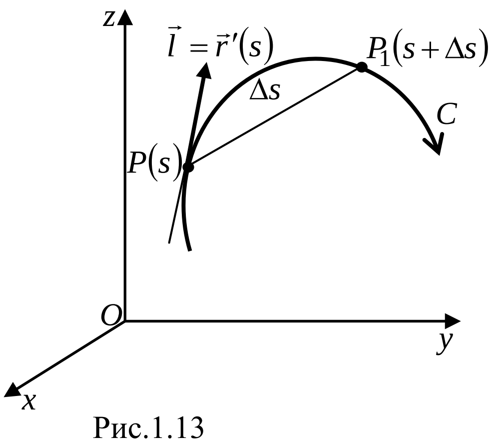


Рис.1.13

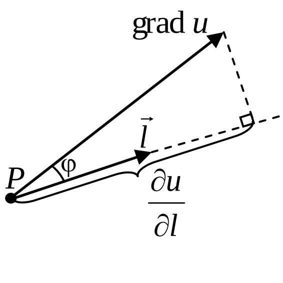


Рис. 1.14

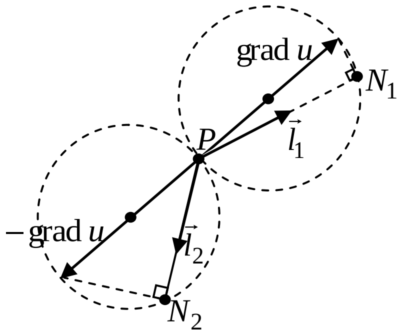


Рис.1.15

Зная градиент, мы можем геометрическим путём найти производную по любому направлению. Например, на векторах $\operatorname{grad} u$ и $-\operatorname{grad} u$, как на диаметре, построим окружности, касающиеся в точке P. Тогда (см. рис. 1.15)

[2] Оператор набла ввёл ирландский математик и физик Уильям Гамильтон (1805-1865). Он обнаружил ошибку в «Небесной механике» Лапласа, и, поняв, что «не боги горшки обжигают», сам стал заниматься математикой.

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} = PN_1 > 0, \ \frac{\partial u}{\partial l_2} = -PN_2 < 0.$$

В силу (1.31), наибольшее значение $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ имеет, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. $\varphi = 0$.

Таким образом, *производная по направлению принимает наибольшее значение в направлении градиента, и оно равно модулю градиента:*

$$\max \frac{\partial u(P)}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial \,\mathrm{grad}\, u} = |\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,. \tag{1.32}$$

Опираясь на (1.31) и (1.32), можно сформулировать *инвариантное определение градиента,* то есть определение, не зависящее от выбора системы координат. Именно:

Градиент скалярной величины *u* есть вектор, который направлен в сторону *быстрейшего возрастания* этой величины, причём, его длина равна *значению производной* (т.е. *скорости возрастания*) величины *u* в указанном направлении.

<u>Пример</u>. $u = -3x^2 y + yz$, $P(0,-1,4)$ и $P_1(1,1,2)$. Найти $\dfrac{\partial u(P)}{\partial PP_1}$. Имеем:

$$\mathrm{grad}\, u = -6xy\vec{i} + (-3x^2 + z)\vec{j} + y\vec{k}\,,\ \mathrm{grad}\, u\,\Big|_P = 4\vec{j} - \vec{k}\,.$$

Этот вектор перпендикулярен оси Ox. $\overrightarrow{PP_1}\,\{1,2,-2\}$, $\left|\overrightarrow{PP_1}\right| = 3$, $\vec{l} = \overrightarrow{PP_1}^{\circ} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$. Тогда $\dfrac{\partial u(P)}{\partial l} = (\mathrm{grad}\, u \cdot \vec{l}\,) = 4\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} < |\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{17}$.

4. <u>Поверхности уровня. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</u>

Множество точек пространства, в которых функция $u = u(P) = u(x, y, z)$ принимает постоянное значение *C*, образует так называемую *поверхность уровня* функции *u* (причём, «*уровня C*»), *именно, уравнение этой поверхности* есть

$$u(x, y, z) = C\ ,\ C = const\,. \tag{1.33}$$

Придавая *C* разные числовые значения, получаем однопараметрическое семейство поверхностей уровня с параметром *C*. Чтобы найти поверхность уровня, проходящую через данную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$, надо подставить координаты этой точки в уравнение (1.33) и найти *C*: $u(x_0, y_0, z_0) = C$; получим поверхность $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$.

<u>Пример</u>. Рассмотрим потенциал φ центрального поля сил тяготения, с центром $O(0,0,0)$. Принято считать $\varphi = 0$ при $r = \infty$; $r-$ расстояние точки $P(x, y, z)$ от центра *O*. Имеем

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Поверхности уровня: $\frac{1}{r} = C_1 = const$, то есть $x^2 + y^2 + z^2 = C$, где $C = \frac{1}{C_1^2}$. Это сферы с центром в точке $O(0,0,0)$. Через точку $P_0(1,-2,2)$ проходит сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ радиуса 3.

На поверхности (1.33) возьмём фиксированную точку P, проведём через неё на поверхности какую-либо кривую Γ и на ней возьмём ещё точку P_1. Имеем

$$\frac{u(P_1) - u(P)}{PP_1} = \frac{C - C}{PP_1} = 0.$$

Пусть $\vec{l}$ - единичный вектор касательной к кривой Γ в точке P (рис.1.16). Переходя к пределу при $P_1 \to P$, получим $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ (см. (1.27)), значит $(\mathrm{grad}\, u, \vec{l}) = 0 \Rightarrow \mathrm{grad}\, u \perp \vec{l}$. При этом предполагаем, что $\mathrm{grad}\, u \neq 0$.

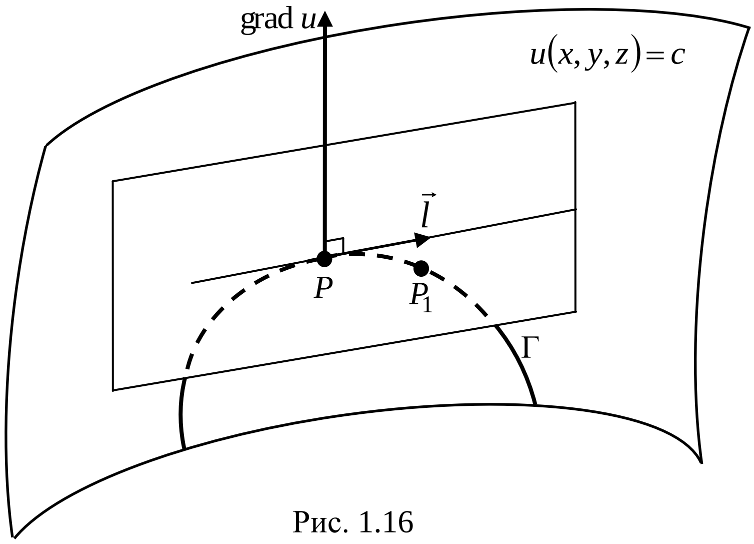


Рис. 1.16

<u>Вывод</u>. Какую бы кривую через точку P на поверхности уровня ни провести, касательная к этой кривой окажется перпендикулярной градиенту.

Отсюда следует, что все эти касательные лежат в одной плоскости, – она называется *касательной плоскостью к поверхности уровня*.

Сам градиент направлен по *нормали* к этой плоскости, говорят: градиент направлен по нормали к поверхности, и значит, *направление нормали к поверхности уровня есть направление наибольшего изменения функции*: возрастания – в сторону увеличения *C*, убывания – в сторону уменьшения *C*.

Поскольку всякую поверхность

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1.34)$$

можно рассматривать как поверхность уровня, уровня $C = 0$, функции $u = F(x, y, z)$, то правомерно следующее определение.

Определение. Касательной плоскостью к поверхности (1.34) в её точке P называется геометрическое место касательных прямых, проведённых ко всем кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку P.

5. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

Пусть дана поверхность (1.34) и на ней точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$: $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Надо найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности (рис. 1.17). Предполагаем, что функция $u = F(x, y, z)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\operatorname{grad} F \neq 0$. Через $\frac{\partial F}{\partial x_0}, \ldots$ будем обозначать $\frac{\partial F}{\partial x}, \ldots$ в точке P_0, так что

$$\operatorname{grad} F\big|_{P_0} = \frac{\partial F}{\partial x_0}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y_0}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z_0}\vec{k} \neq 0. \tag{1.35}$$

Касательная плоскость к поверхности в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярна этому вектору, поэтому если $M(x, y, z)$ есть какая-либо точка этой плоскости, то вектор $\overrightarrow{P_0M}\ \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \perp \operatorname{grad} F(P_0)$ и потому скалярное произведение $\left(\overrightarrow{P_0M}, \operatorname{grad} F(P_0)\right) = 0$ – таково векторное уравнение касательной плоскости, и в скалярном виде:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z_0}(z - z_0) = 0. \tag{1.36}$$

Это есть *уравнение касательной плоскости к поверхности (1.34) в её точке* $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение (1.36) обращается в тождество, и становится беспредметным, в исключительном случае, когда в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ одновременно выполняются равенства

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0 \text{ и } F(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{1.37}$$

Такие точки называются *особыми точками* поверхности. В них касательная плоскость может не существовать. Обычно это точки заострения. Это редкие, исключительные точки: три числа x_0, y_0, z_0 должны удовлетворять четырём уравнениям (1.37) (система *переопределённая*). Другие точки поверхности называются *обыкновенными*.

Пример. Эллиптический конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – поверхность второго порядка, имеет одну особую точку $O(0,0,0)$ – вершину конуса. В остальных точках уравнение касательной плоскости есть

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{-2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0 \text{ или } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 0$$

(поскольку $\frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} - \frac{z_0{}^2}{c^2} = 0$, т.к. точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности).

Рассмотрим нормаль к поверхности (1.34) в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Её направляющий вектор есть $\operatorname{grad} F$ - см. (1.35). Тогда, если $N(x,y,z)$ - текущая точка нормали, то $\overrightarrow{P_0N}\ \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\} \parallel \operatorname{grad} F(P_0)$ (рис.1.17), поэтому координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}} = \frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y_0}} = \frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z_0}} \tag{1.38}$$

- это есть уравнение нормали к поверхности (1.34) в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

В особой точке уравнение нормали теряет смысл. (Если, например, $\dfrac{\partial F}{\partial x_0} = 0$, то следует полагать и $x - x_0 = 0, \ldots$).

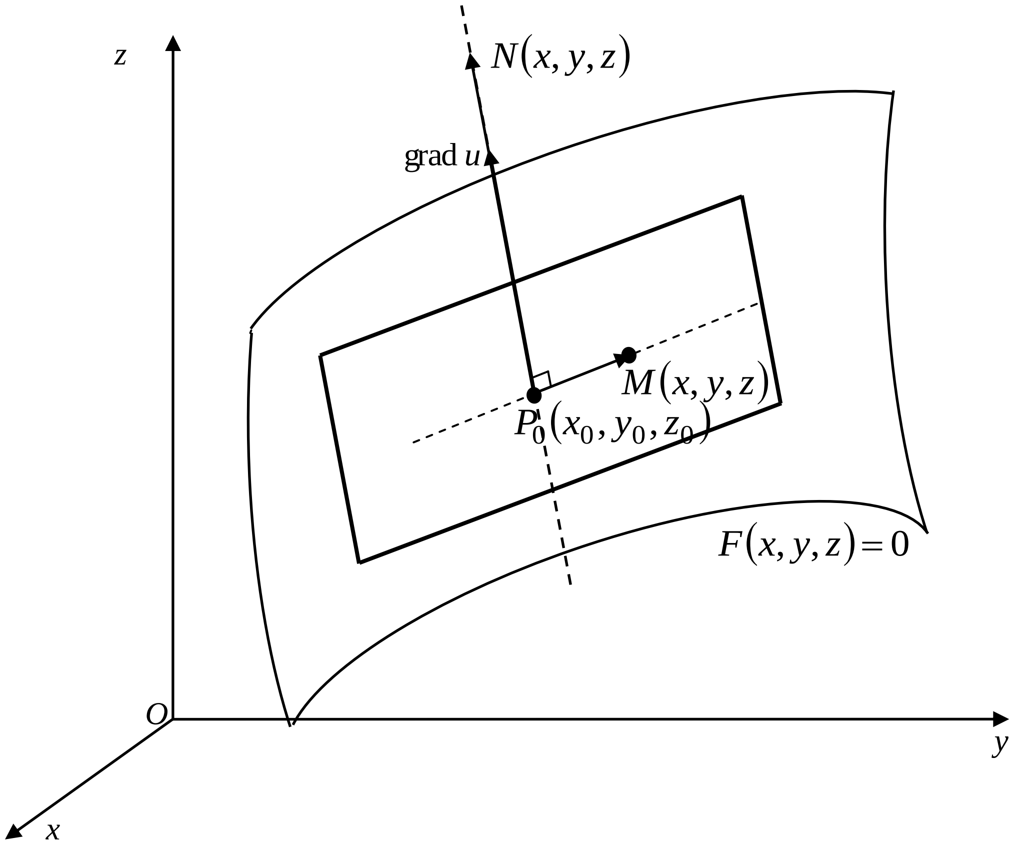


Рис. 1.17

<u>Пример</u>. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Здесь $F = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Находим уравнение касательной плоскости в любой точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ сферы: $2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0) = 0$, $x_0x + y_0y + z_0z = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2$. Но правая часть равна R^2, т.к. P_0 точка сферы. Итак, уравнение касательной плоскости есть $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$. Уравнение нормали $\dfrac{x-x_0}{2x_0} = \dfrac{y-y_0}{2y_0} = \dfrac{z-z_0}{2z_0}$, или $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{z}{z_0}$. Отсюда следует, что нормаль к сфере проходит через центр $O(0,0,0)$ сферы, то есть направлена по радиусу сферы.

Пусть поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$. Запишем его в неявном виде: $f(x, y) - z = 0$. Здесь $F = f(x, y) - z$ и $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$. Поэтому уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, есть $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ или

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0}(y - y_0); \tag{1.39}$$

производные берутся в точке (x_0, y_0) плоскости Oxy.

Приняты обозначения $p = p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. Так что уравнение касательной плоскости запишется в виде

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0), \tag{1.39′}$$

а уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{p_0} = \frac{y - y_0}{q_0} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{1.40}$$

За направляющий вектор нормали берут вектор $\vec{N}\{p_0, q_0, -1\}$ или ему противоположный $\vec{N}_1\{-p_0, -q_0, 1\}$.

<u>Пример</u>. Параболоид вращения $z = x^2 + y^2$. Возьмём точку с координатами $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, тогда $z_0 = 5$ - на поверхности получим точку $P_0(1,2,5)$. Находим $p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$; $p_0 = 2$, $q_0 = 4$. Тогда уравнение касательной плоскости есть $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$, а нормали $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

6. <u>Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.</u>

Зададим поверхность $z = f(x, y)$. Рассмотрим точку $Q_0(x_0, y_0)$, вычислим $z_0 = f(x_0, y_0)$. На поверхности получим точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$. В ней проведём касательную плоскость. Возьмём другую точку $Q(x, y)$ и найдём аппликату $z = f(Q) = f(x, y)$. При переходе от Q_0 к Q функция, а значит аппликата поверхности, получит приращение $\Delta z = z - z_0 = f(Q) - f(Q_0)$. Значение аппликаты Z касательной плоскости для точки $Q(x, y)$ найдём из уравнения (1.39):

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0}(y - y_0) \equiv dz(Q_0) \ -$$

это есть дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке Q_0, соответствующий приращениям $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

<u>Вывод</u>. В то время, как $\Delta z\big|_{Q_0}$ есть приращение аппликаты поверхности

при переходе от точки Q_0 к точке Q, соответствующий дифференциал $dz(Q_0)$ есть приращение аппликаты касательной плоскости.

7. Производная по направлению и градиент функции двух переменных. Линии уровня.

Рассмотрим функцию двух переменных $u = u(P) = u(x, y)$. Для неё остаются в силе определения, свойства и формулы из пунктов 1,2,3 –надо лишь положить $\frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Только теперь точки $P(x, y)$, направление $\vec{l}$, кривая C и градиент лежат в плоскости Oxy. Итак, имеем

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}.$$

Из точки $P(x, y)$ проводим единичный вектор $\vec{l}$. Пусть он образует с осями координат углы α и β, то поскольку $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (рис. 1.18), имеем $\vec{l} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$. Из (1.24) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha = (\operatorname{grad} u, \vec{l}). \qquad (1.41)$$

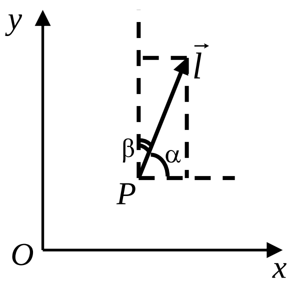


Рис. 1.18

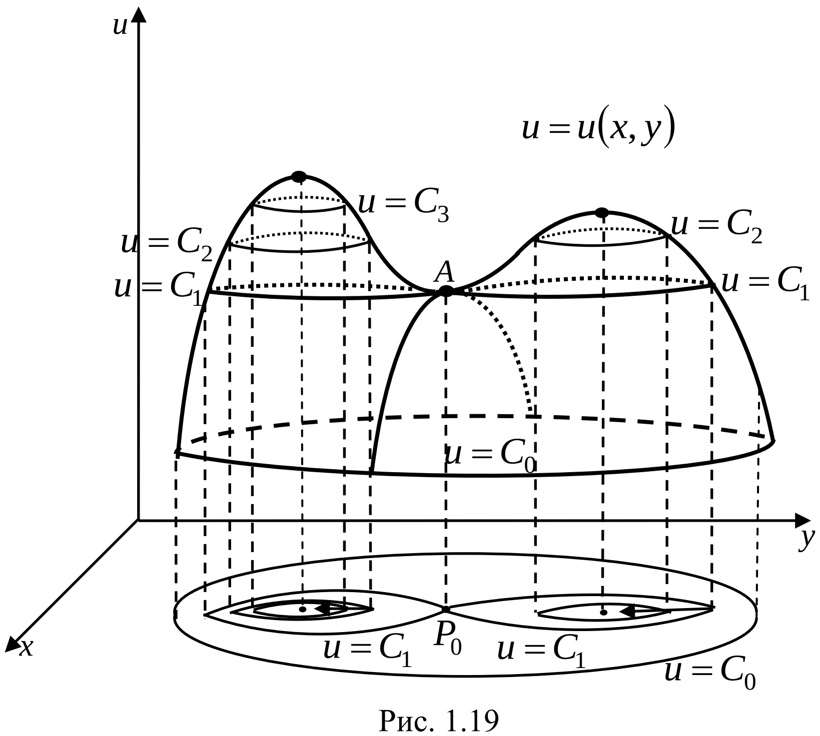


Рис. 1.19

Геометрическое место точек (x, y), в которых $u(x, y) = C$ образует так называемую *линию уровня* (уровня C) функции $u = u(x, y)$; $grad\, u$ направлен по нормали к линии уровня в сторону возрастания u, т.е. в сторону увеличения C. Часто, особенно в географии (поверхность – гора, высота над уровнем моря и т.п.) под линиями уровня понимают кривые, лежащие на поверхности

$u=u(x,y)$ на заданной высоте C. Направление градиента на плоскости Oxy даёт направление наибольшего подъёма поверхности, а противоположное – наибыстрейшего спуска. На рисунке 1.19 стрелки указывают направление градиента. В точке $P_0(x_0,y_0)$, в которой $\frac{\partial u}{\partial x_0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y_0}=0$, т.е. $\operatorname{grad}u(P_0)=0$ – направление градиента не определено; на поверхности соответствующая точка A – седловина, точка перевала.

По той же схеме, что и для функции одного переменного $y=f(x)$, можем установить *геометрический смысл производной по направлению* для функции $u=u(x,y)$ двух переменных. На плоскости Oxy берём точку $P(x,y)$, из неё проводим направление $\vec{l}$. Поверхность $u=u(x,y)$ рассечём плоскостью, проходящей через направление $\vec{l}$ перпендикулярно плоскости Oxy. В сечении получим некоторую кривую. Угол наклона касательной к ней, в соответствующей точке Q(x,y,u) поверхности, с направлением $\vec{l}$ обозначим через φ. Тогда $\frac{\partial u}{\partial l}=tg\varphi$. Это равенство выражает собою геометрический смысл производной по направлению, в том числе и частных производных $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ – когда направление $\vec{l}$ совпадает с направлением соответствующей оси.

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Пусть дана, для простоты, функция двух переменных $z=f(x,y)$, и пусть она имеет *частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$. Их будем называть производными *первого* порядка. Они, в свою очередь, также есть функции двух переменных. И можно рассматривать вопрос об их производных.

Определение. Частные производные от производных первого порядка называются частными производными *второго порядка* и т.д.

Дифференцируя функции $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$, получаем четыре частные производные второго порядка. Приняты обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=f''_{x^2}=z''_{xx},[3]$$

[3] Примечание. Символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ читается: де два икс по де икс квадрат.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f''_{xy}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f''_{yx}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Производные, берущиеся по разным переменным, называются *смешанными*. Таких производных второго порядка для функции двух переменных всего две.

Пример. $z=2x^3y-xy^2+5x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x^2y-y^2+5$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3-2xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6x^2-2y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=6x^2-2y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$. Замечаем, что здесь $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Этот факт не случайный – справедлива теорема:

Теорема 1.5 (о равенстве смешанных производных). *Если функция* $z=f(x,y)$ *имеет в точке* $P(x,y)$ *непрерывные вторые смешанные производные, то они в этой точке равны:* $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

Δ Составим выражение

$$\omega=f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y).$$

Положим $\varphi(x,y)=f(x+h,y)-f(x,y)$. Тогда можем записать $\omega=[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]-[f(x+h,y)-f(x,y)]=\varphi(x,y+k)-\varphi(x,y)$. К последнему выражению дважды применим формулу Лагранжа (формулу конечных приращений: $\varphi(x,y+k)-\varphi(x,y)=k\cdot\varphi'_y(x,y+\theta_1\cdot k)=k[f'_y(x+h,y+\theta_1\cdot k)-$ $-f'_y(x,y+\theta_1\cdot k)]=k\cdot h\, f''_{yx}(x+\theta_2\cdot h,y+\theta_1\cdot k)$, $0<\theta_1,\theta_2<1$. Таким образом, мы получили формулу

$$\omega=k\cdot h\, f''_{yx}(x+\theta_2\cdot h,y+\theta_1\cdot k). \qquad (1.42)$$

Но выражение ω содержит одинаковым образом x и h с одной стороны, а также y и k – с другой, поэтому, аналогично вводя новую функцию $\psi(x,y)=f(x,y+k)-f(x,y)$, получим

$$\omega=k\cdot h\, f''_{xy}(x+\theta_3\cdot h,y+\theta_4\cdot k). \qquad (1.43)$$

Поскольку выражения (1.42) и (1.43) равны, то после сокращения на $k\cdot h$, придём к равенству

$$f''_{yx}(x+\theta_2\cdot h,y+\theta_1\cdot k)=f''_{xy}(x+\theta_3\cdot h,y+\theta_4\cdot k).$$

После перехода к пределу при $h\to 0$ и $k\to 0$, в силу непрерывности смешанных производных получаем $f''_{yx}(x,y)=f''_{xy}(x,y)$. ▲

Требование непрерывности смешанных производных, для их равенства, существенно. Так, можно проверить, что для функции

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ f(0,0)=0,\text{ будет } f''_{xy}(0,0)=-1\neq f''_{yx}(0,0)=1.$$

Пользуясь этой теоремой, можно доказать, что и для смешанных производных более высоких порядков *при условии их непрерывности результат дифференцирования не зависит от порядка, в котором производится дифференцирование*:

$$\frac{\partial^{k+n}z}{\partial x^n \partial y^k} = \frac{\partial^{k+n}z}{\partial y^k \partial x^n} = \frac{\partial^{k+n}z}{\partial x^2 \partial y^{k-1} \partial x^{n-2} \partial y} -$$

производные везде берутся n раз по x и k раз по y (всего $n+k$). Например, в силу теоремы 1.5 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

Понятие частных производных высших порядков для функции трёх и более переменных даётся аналогично. От функции трёх переменных $u = u(x, y, z)$ имеем три частных производных *первого* порядка $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ и от них шесть разных частных производных второго порядка: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ – при условии непрерывности смешанных производных.

2. Дифференциалы высших порядков. Для краткости выкладок снова возьмём функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Её *первый* дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ при постоянных dx и dy есть тоже функция двух переменных x и y. Дифференциал $d(dz)$ называется дифференциалом второго порядка и обозначается $d^2 z$. Вообще, индуктивно, дифференциалом n-ого порядка (или n-ым дифференциалом) $d^n z$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$–ого порядка: $d^n z = d(d^{n-1}z)$.

Выразим его через частные производные функции z. Считая dx и dy постоянными, находим:

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

(как обычно, $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$). Результат по форме напоминает квадрат суммы. Аналогично, $d^3 z$ похож на куб суммы, и $d^n z$ – на разложение бинома Ньютона. Для краткости записи и удобства запоминания вводят символ

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \text{ – оператор взятия дифференциала.}$$

С его помощью, «вынося z за скобки», можно символически записать

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z, d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \ldots, d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z. \quad (1.44)$$

Это равенство надлежит понимать так: сначала «двучлен», стоящий в скобках, формально возводится в степень n по формуле Ньютона, затем в числителях к ∂^k приставляется «множитель» z.

Аналогично для дифференциалов функции трёх переменных $u = u(x, y, z)$ будем иметь символические формулы:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)u\,, \ldots, d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n u\,.$$

Примечание. Предполагалось, что все рассмотренные частные производные непрерывны.

3. Инвариантность формы дифференциалов при линейной замене переменных. Пусть имеем функцию двух переменных $z = f(x, y)$, где x и y сами являются функциями от независимых переменных t и s, причём *линейными* функциями:

$$x = a_1 t + b_1 s + c_1,\ \ y = a_2 t + b_2 s + c_2\,. \tag{1.45}$$

Учитывая, что $dt \equiv \Delta t$ и $ds \equiv \Delta s$ постоянны, имеем

$$\{\, dx = a_1 dt + b_1 ds = const\,,\ dy = a_2 dt + b_2 ds = const\,\}. \tag{1.46}$$

Но поскольку dx и dy постоянны, то все выкладки при выводе формул (1.44) сохраняются, а следовательно сохраняется и их окончательный вид.

Вывод. При линейной замене переменных x и y выражения (1.44) для дифференциалов высших порядков остаются неизменными. Однако dx и dy имеют уже другой смысл, представляются формулами (1.46), а вместо x и y надо подставить их значения (1.45).

§ 6. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до $(n+1)-$ого порядка включительно. Выразим значение этой функции в точке $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ через значения её и её частных производных в точке $P_0(x_0, y_0)$ плюс некоторый добавок.

Положим

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x,\ \ y = y_0 + t \cdot \Delta y\,. \tag{1.47}$$

Здесь t – новая независимая переменная; при $0 \le t \le 1$ точка (x, y) пробегает отрезок P_0P (рис.1.20). Получим

$$f(x, y) = f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y) \equiv F(t)\,. \tag{1.48}$$

В силу условия, сложная функция $F(t)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)-$ого порядка. Тогда для этой функции одного переменного можем записать формулу Тейлора – её возьмём в дифференциальной форме:

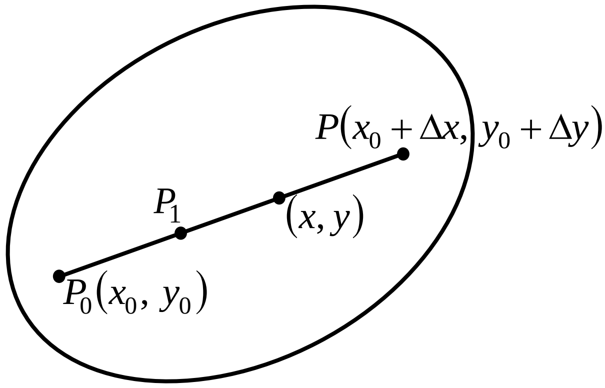


Рис. 1.20

$$F(t+\Delta t)-F(t)=dF(t)+\frac{1}{2!}d^2F(t)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nF(t)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t+\theta\cdot\Delta t). \quad (1.49)$$

Здесь $dt\equiv\Delta t$, $0<\theta<1$, и

$$d^kF(t)=d^kf(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+t\cdot\Delta x\\ y=y_0+t\cdot\Delta y}}, \quad (1.50)$$

где $d^kf(x,y)$ вычисляется по формуле (1.44), ибо замена (1.47) линейная, причём

$$dx=\Delta x\cdot dt,\ dy=\Delta y\cdot dt. \quad (1.51)$$

В формуле (1.49) положим $t=0$, $\Delta t\equiv dt=1$, тогда получим

$$F(1)-F(0)=dF(0)+\frac{1}{2!}d^2F(0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nF(0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta).$$

Подставив в эту формулу вместо функции F и её дифференциалов их значения из (1.48) и (1.50), получим

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\theta\cdot\Delta y),\ 0<\theta<1, \quad (1.52)$$

причём, поскольку положено $\Delta t=1$, то из (1.51) $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ – дифференциалы совпадают со взятыми приращениями.

Это есть формула Тейлора $n-$ого порядка для функции двух переменных. Хотя по форме она имеет такой же вид, как и для функции одного переменного, но в развёрнутом виде значительно сложнее, так как дифференциалы d^kf вычисляются по формуле (1.44) – в ней $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. Точка $P_1(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\theta\cdot\Delta y)$ лежит на отрезке P_0P; она неизвестна, как и число θ.

В левой части формулы (1.52) стоит приращение $\Delta f(x_0,y_0)$ функции z, и при $n=1$ получим $\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2}d^2f(P_1)$. Обозначим $x_0+\Delta x=x$, $y_0+\Delta y=y$, тогда формула Тейлора перепишется так:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\theta\cdot\Delta y) \quad (1.53)$$

(здесь $\Delta x=dx=x-x_0$, $\Delta y=dy=y-y_0$).

Обозначим $\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\theta\cdot\Delta y)=R_n(x,y)$ – это остаточный член формулы Тейлора; $f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)=T_n(x,y)$ – многочлен степени n по степеням $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$ (он называется: многочлен Тейлора). С учётом этих обозначений имеем $f(x,y)=T_n(x,y)+R_n(x,y)$.

Формула Тейлора имеет большие применения: 1) в приближённых вычислениях – при малых Δx и Δy имеем $\Delta f(x_0,y_0)\approx df(x_0,y_0)$ и вообще $f(x,y)\approx T_n(x,y)$ с ошибкой $R_n(x,y)$; 2) при исследовании на экстремум; и т.д.

Для функции трёх и более переменных формула Тейлора имеет такой же вид, как и (1.52), (1.53).

§ 7. Экстремумы функций двух переменных

1. Говорят, что функция $z=f(P)=f(x,y)$, непрерывная в точке $P_0(x_0,y_0)$, имеет в этой точке максимум, равный $f(P_0)$, если существует окрестность точки P_0 такая, что для всех точек P этой окрестности выполняется неравенство $f(P)\le f(P_0)$, и имеет минимум, равный $f(P_0)$, если $f(P)\ge f(P_0)$. Если при $P\ne P_0$ имеют место строгие неравенства, то в точке P_0 имеется строгий (собственный) максимум или минимум. Максимум и минимум объединяет общий термин – экстремум (см. рис. 1.21, 1.22.) Понятие экстремума носит локальный характер, ибо берутся лишь точки P, достаточно близкие к точке P_0.

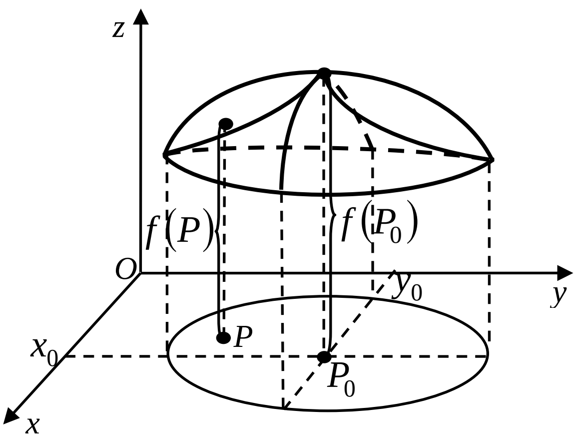


Рис. 1.21

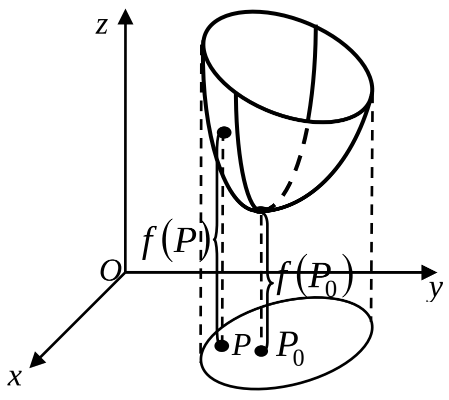


Рис. 1.22

Теорема 1.6. (Необходимые условия экстремума). *Пусть* $P_0(x_0, y_0)$ – *точка экстремума функции* $z = f(x, y)$. *Тогда в этой точке каждая из частных производных* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *в отдельности либо обращается в нуль, либо не существует.*

Δ Пусть для определённости в точке $P_0(x_0, y_0)$ максимум, так что для всех точек $P(x, y)$ из некоторой окрестности точки P_0 выполняется неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$. Зафиксируем y, положив $y = y_0$. Тогда получим функцию одного переменного x: $f(x, y_0) \equiv \varphi(x)$, которая имеет в точке $x = x_0$ максимум, ибо $\varphi(x_0) = f(x_0, y_0) \ge f(x, y_0) = \varphi(x)$. Но тогда производная $\varphi'(x_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}$ или равна нулю или не существует. Аналогично для другой производной (по y).▲
Геометрический смысл теоремы отражен на рис. 1.21.

Точки $P_0(x_0, y_0)$, в которых каждая из производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ равна нулю или не существует, называются критическими или точками подозрительными на экстремум. Экстремум может быть только в таких точках – по теореме 1.6. В частности, точки, в которых обе производные равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, называются также стационарными. В этом случае, согласно геометрическому смыслу частных производных, касательные к кривым, полученным в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$, горизонтальны (параллельны плоскости Oxy, именно, осям Ox и Oy). Кроме того, замечаем, что дифференциал функции $f(x, y)$ в стационарной точке $P_0(x_0, y_0)$ тождественно (при любых dx, dy) равен нулю: $dz\big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} \cdot dy \equiv 0$.

Примечание. В отличие от функции одного переменного, здесь термин «критическая точка» употребляем в общепринятом смысле.

Согласно теореме 1.6, как и в соответствующей ситуации, для функции одного переменного, экстремум *может быть* только в критических точках. Однако не в каждой критической точке экстремум существует. Например, для функции $z = xy$ точка $O(0,0)$ критическая (именно, стационарная) и $z(0,0) = 0$, но она не является точкой экстремума, так как в любой окрестности (какой бы малой она ни была) всегда есть точки, в которых $z > 0$ и в которых $z < 0$.

2. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема 1.7. *Пусть функция* $f(x, y)$ *в некоторой окрестности стационарной точки* $P_0(x_0, y_0)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим их (обозначения Монжа):* $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$,

$r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Пусть, соответственно, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 – значения частных производных в точке P_0. Тогда:

1) Если определитель $\begin{vmatrix} r_0 & s_0 \\ s_0 & t_0 \end{vmatrix} = r_0t_0 - s_0^2 > 0$, то в точке P_0 имеется экстремум, именно: максимум, если $r_0 < 0$, и минимум, если $r_0 > 0$;

2) если $r_0t_0 - s_0^2 < 0$, то экстремума нет;

3) случай $r_0t_0 - s_0^2 = 0$ является сомнительным.

(В пункте 1 числа r_0 и t_0 обязательно отличны от нуля и имеют одинаковые знаки, поэтому в формулировке вместо r_0 можно взять t_0.)

Δ Сравним значения функции $f(P)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ и в близких к ней точках $P(x, y)$, то есть, исследуем знак разности $\Delta \equiv f(x, y) - f(x_0, y_0)$. По условию $p_0 = 0$ и $q_0 = 0$, поэтому $df(P_0) = 0$. Тогда по формуле Тейлора (1.53) при $n = 1$ получим

$$\Delta \equiv f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2}\Delta y^2\right),$$

где $P_1(x_0 + \theta\cdot\Delta x, y_0 + \theta\cdot\Delta y)$, $0 < \theta < 1$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Если Δ сохраняет знак в некоторой окрестности точки P_0, то в этой точке есть экстремум: при $\Delta > 0$ минимум, при $\Delta < 0$ максимум; если же Δ знак меняет, то экстремума нет. Положим

$$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} = r_0 + \varepsilon_1, \quad \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x\partial y} = s_0 + \varepsilon_2, \quad \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2} = t_0 + \varepsilon_3.$$

Тогда *в силу непрерывности* вторых производных, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$, т.е. когда $\rho = P_0P = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Имеем

$$\Delta = \frac{1}{2}(r_0\Delta x^2 + 2s_0\Delta x\Delta y + t_0\Delta y^2 + \varepsilon_1\Delta x^2 + 2\varepsilon_2\Delta x\Delta y + \varepsilon_3\Delta y^2).$$

Введём угол φ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ между вектором $\overrightarrow{P_0P}$ и осью Ox. Тогда $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, и разность Δ примет вид

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\{[r_0\cos^2\varphi + 2s_0\cos\varphi\sin\varphi + t_0\sin^2\varphi] + (\varepsilon_1\cos^2\varphi + 2\varepsilon_2\cos\varphi\sin\varphi + \varepsilon_3\sin^2\varphi)\}.$$

Обозначим $r_0\cos^2\varphi + 2s_0\cos\varphi\sin\varphi + t_0\sin^2\varphi = a(\varphi)$ (от ρ не зависит) и $\varepsilon_1\cos^2\varphi + 2\varepsilon_2\cos\varphi\sin\varphi + \varepsilon_3\sin^2\varphi = \alpha(\varphi, \rho)$, тогда

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\{a(\varphi) + \alpha(\varphi, \rho)\}. \quad (1.54)$$

1) Пусть $r_0t_0 - s_0^2 > 0$, то $r_0 \ne 0$; умножим и разделим $a(\varphi)$ на r_0 и запишем:

$$a(\varphi)=\frac{1}{r_0}[(r_0\cos\varphi+s_0\sin\varphi)^2+(r_0t_0-s_0{}^2)\sin^2\varphi]. \qquad (1.55)$$

Легко видеть, что выражение в квадратных скобках $[\ldots]>0$: для $\sin\varphi\neq 0$ это очевидно, если же $\sin\varphi=0$, то $\cos\varphi=\pm 1$ и $[\ldots]=r_0^2>0$. Функция $|a(\varphi)|$ непрерывна на замкнутом промежутке $[0,2\pi]$, значит, имеет на нём наименьшее значение $m>0$, т.е. $|a(\varphi)|\geq m>0$. Но $|\alpha(\varphi,\rho)|\leq|\varepsilon_1|+2|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|\to 0$ при $\rho\to 0$ и независимо от φ, и поэтому найдётся окрестность $P_0P<\rho_0$, в которой $|\alpha(\varphi,\rho)|<m$. Таким образом, в указанной окрестности знак разности Δ определяется знаком $a(\varphi)$, но поскольку $[\ldots]>0$, то – знаком r_0. Итак, имеем: если $r_0>0$, то и $\Delta>0$, тогда P_0 – точка минимума, а если $r_0<0$, то $\Delta<0$, и в точке P_0 – максимум.

2) Пусть $r_0t_0-s_0^2<0$.

а) Допустим $r_0\neq 0$, тогда $a(\varphi)$ можно представить в виде (1.55). Если $\varphi=\varphi_1=0,\pi$, то $[\ldots]=r_0^2>0$, если же определить $\varphi=\varphi_2$ из условия $r_0\cos\varphi_2+s_0\sin\varphi_2=0$, т.е. $ctg\varphi_2=-{}^{s_0}\!/_{r_0}$, $\varphi_2\neq 0,\pi$, то $[\ldots]=(r_0t_0-s_0{}^2)\sin^2\varphi_2<0$. Таким образом, $a(\varphi)$ меняет знак, поэтому вблизи точки $P_0(x_0,y_0)$ на лучах $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ разность Δ имеет разные знаки, следовательно, экстремума в точке P_0 не существует.

б) Если $r_0=0$, то $s_0\neq 0$ и

$$a(\varphi)=2s_0\cos\varphi\sin\varphi+t_0\sin^2\varphi=\sin\varphi(2s_0\cos\varphi+t_0\sin\varphi).$$

Очевидно, что для малых значений $\varphi=\varphi_1\approx 0$, но $\varphi_1\neq 0$, при изменении знака φ_1 функция $a(\varphi)$, а значит и Δ меняет знак, т. е. экстремума тоже нет.

3) Убедимся, что случай $r_0t_0-s_0^2=0$ – сомнительный. Для этого рассмотрим три функции: $z=x^4+y^4$, $z=-x^4-y^4$, $z=x^4-y^4$. Для всех трёх функций точка O(0,0) - стационарная, $z(0,0)=0$, и $r_0t_0-s_0^2=0$. Однако для первой функции O(0,0) – точка минимума, для второй – максимума, а третья в окрестности точки O(0,0) имеет разные знаки, т.е. экстремума нет.

Замечание. Пусть $P_0(x_0,y_0,z_0)$ стационарная точка функции трёх переменных $f(x,y,z)$, так что $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z_0}=0$: $df(P_0)\equiv 0$. Тогда по формуле Тейлора:

$$\Delta\equiv f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\Delta z\right)^2 f(P_1)\equiv\frac{1}{2}d^2f(P_1),$$

$P_1(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\theta\cdot\Delta y,z_0+\theta\cdot\Delta z), 0<\theta<1$. Знак разности Δ зависит от знака квадратичной относительно $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ формы, стоящей справа – если $d^2f(P_1)$

не меняет своего знака в некоторой окрестности точки P_0, то в точке P_0 есть экстремум: при $d^2 f(P_1) > 0$ минимум, при $d^2 f(P_1) < 0$ максимум. Для определения знака используется так называемый *критерий Сильвестра*. То же – в случае функций любого числа переменных.

Примеры. 1) $z = (x-1)^2 + y^2 + 5$ – параболоид вращения. Исследуем на экстремум. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Точка подозрительная на экстремум одна – это стационарная точка $P_0(1,0)$. Находим $r = 2,\ s = 0,\ t = 2$, $r_0 t_0 - s_0^2 = 4 > 0$, т.е. экстремум есть и P_0 точка минимума, т.к. $r_0 > 0$; $z_{\min} = z(1,0) = 5$. Это можно утверждать, исходя из вида самой функции.

2) $z = x^2 - y^2$ - гиперболический параболоид (седло). Здесь $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0$ в точке O(0,0), $r = 2, s = 0, t = -2$ и $r_0 t_0 - s_0^2 = -4 < 0$. Экстремума нет.

На практике наиболее важен другой вопрос: о наибольшем и наименьшем значениях.

3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции в ограниченной замкнутой области.

Пусть функция $z = f(x,y)$ *непрерывна в ограниченной замкнутой* области $\overline{D}$. По второй теореме Вейерштрасса она имеет в этой области наибольшее *M* и наименьшее m значения; они могут достигаться или внутри области, или на границе. Если *M* достигается внутри области, в точке P_0, то в точке P_0 максимум, так что тем более P_0 - критическая точка. Если же *M* достигается на границе $\overline{\partial D}$, то это будет наибольшее из всех граничных значений функции. Аналогично для m. Таким образом, установлено

Правило. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x,y)$, непрерывной в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, надо: 1) найти значения функции во всех критических точках, лежащих внутри $\overline{D}$ (при этом исследовать эти точки на наличие экстремума необязательно); 2) из всех значений, принимаемых функцией в точках границы области $\overline{D}$, найти самое большое и самое малое. Наибольшее и наименьшее из всех значений, полученных в пунктах 1) и 2), и будут наибольшим и наименьшим значением во всей замкнутой области $\overline{D}$.

Чтобы найти значения функции в граничных точках, надо знать, какой вид имеют точки границы: знать уравнение границы. Пусть граница задана параметрическими уравнениями $\{x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$, $t_1 \le t \le T$. Тогда в точках границы функция имеет значения $z = f(\varphi(t), \psi(t)) \equiv F(t)$ - это функция одного переменного *t*. Чтобы исследовать её на наибольшее и наименьшее значения, надо сравнить её значения в точках $t_0 \in (t_1, T)$, подозрительных на экстремум, со значениями в концах: $F(t_1)$ и $F(T)$; и из них выбрать наибольшее и наименьшее.

Если граница ∂D состоит из нескольких частей, заданных разными уравнениями, обычно вида $y = y(x)$ или $x = x(y)$, то на каждой из них функцию надо рассматривать отдельно, а именно: исследовать функцию одного переменного $z = f(x, y(x)), x \in [a,b]$, или $z = f(x(y), y), y \in [c,d]$. Если граница задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$, то можно использовать относительный (условный) экстремум – об этом см. далее, в §1.9.

Пример. 3) Найти такую точку треугольника, образованного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, сумма квадратов расстояний которой до вершин треугольника была бы наименьшей. (Рис. 1.23)

Δ Берём в треугольнике любую точку $P(x, y)$. Сумма квадратов расстояний её до вершин будет $z = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$. Искомая точка F должна быть такой, чтобы значение $z(F)$ было наименьшим.

1) Критические точки здесь только стационарные:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x + 2(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y + 2(y-1) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow F: \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ y_1 = \dfrac{1}{3} \end{array}, \; z\big|_F = \dfrac{4}{3}.$$

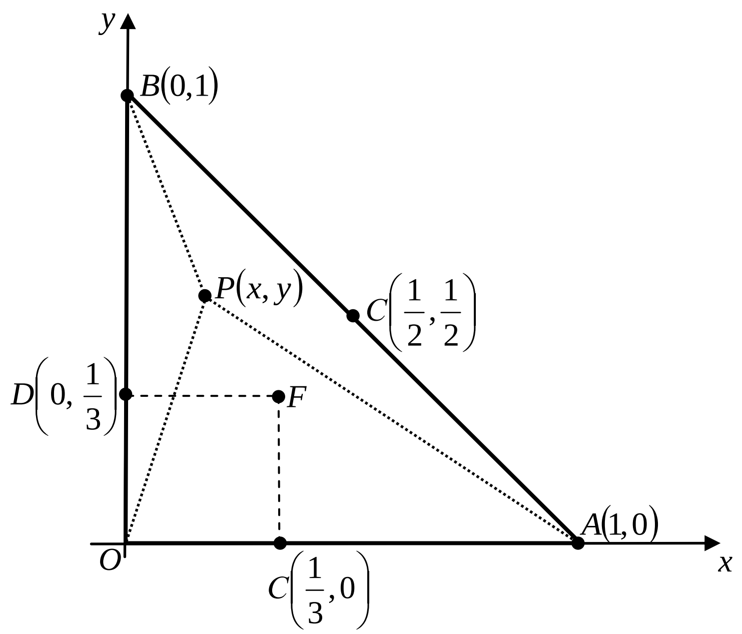


Рис. 1.23

2) Ищем наименьшее среди граничных значений. Граница состоит из трёх частей, имеющих разные уравнения. Надо рассмотреть значения функции на всех трёх сторонах.

а) На стороне *OA*, с уравнением $y = 0$, функция принимает значения $z = 2x^2 + (x-1)^2 + 1$, $0 \le x \le 1$. $\dfrac{dz}{dx} = 4x + 2(x-1) = 0$, $x = \dfrac{1}{3}$ – подозрительная на экстремум точка, ей соответствует точка границы $C\left(\frac{1}{3},0\right)$, $z\big|_C=\frac{5}{3}$. Концам $x=0$ и $x=1$ соответствуют точки $O(0,0)$ и $A(1,0)$, и значения функции $z\big|_O=2$, $z\big|_A=3$.

б) На *OB*: $x=0$, тогда $z=2y^2+1+(y-1)^2$, $0\le y\le 1$. Экстремум при $y=\frac{1}{3}$, соответствующая точка на границе $D\left(0,\frac{1}{3}\right)$, и $z\big|_D=\frac{5}{3}$. При $y=0$ получится уже учтённая точка $O(0,0)$, а при $y=1$ - точка $B(0,1)$, и $z\big|_B=3$.

в) На *AB*: $y=1-x$, значит $z=3x^2+3(x-1)^2$, $0\le x\le 1$. $\frac{dz}{dx}=6x+6(x-1)=0$ при $x=\frac{1}{2}$, тогда $y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. На границе получаем точку $E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, в ней $z\big|_E=\frac{3}{2}$. Значениям $x=0$ и $x=1$ соответствуют уже рассмотренные точки *B* и *A*.

Замечаем, что наименьшее значение есть $\frac{4}{3}$, его функция *z* принимает во внутренней точке $F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ – это центр масс треугольника и в то же время точка пересечения медиан. Наибольшее значение функции *z* равно 3, оно достигается в двух граничных точках *A* и *B*.

Можно было бы сразу найти значения функции $z=z(x,y)$ в *угловых точках O, A, B*, и потом значения в критических точках трёх указанных функций *z* одного переменного (определяющих граничные значения). ▲

<u>Пример</u> 4) Найти наибольшее значение функции $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=2\pi$.

Δ 1) Находим критические точки:

$\left\{\begin{aligned} z'_x&=\cos x-\cos(x+y)=0\\ z'_y&=\cos y-\cos(x+y)=0\end{aligned}\right| \Rightarrow$ внутри области находится единственная точка $A\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$, $z\big|_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2) На границе области (на прямых $x=0$, $y=0$, $x+y=2\pi$) имеем $z=0$. Отсюда видно, что найденная единственная внутри области критическая точка *A* доставляет функции наибольшее значение. ▲

В примерах 3 и 4 внутри области была только одна критическая точка (*F* или *A*), причём точка экстремума, и в ней функция принимала наименьшее или наибольшее значение. Однако здесь мы должны сделать два важных замечания, отличающих функции одного и двух переменных в отношении экстремумов.

Замечание 1. В отличие от функции одного переменного, для функции двух переменных из существования внутри области *единственного* экстремума ещё не следует, что этот экстремум доставляет наименьшее или наибольшее значение. Например, внутри прямоугольника $\overline{D}=\{-5\le x\le 5,-1\le y\le 1\}$ функция $u=x^3-4x^2+2xy-y^2+3$ имеет единственную критическую точку $O(0{,}0)$, и в ней максимум. Действительно $u'_x=3x^2-8x+2y=0$ и $u'_y=2x-2y=0$ внутри D только при $x=0,\ y=0$ (проверьте!); $r_0=-8$, $t_0=-2$, $s_0=2$, $r_0t_0-s_0^2>0$, $r_0<0$, и $\max u=u(0{,}0)=3$. Однако это не есть наибольшее значение в $\overline{D}$, т.к. например $u(5{,}0)=28>3$.

В силу этого при отыскании наибольшего и наименьшего значений в случае функции двух и более переменных *исследование критических точек на максимум и минимум* оказывается практически ненужным.

Замечание 2. В отличие от функции одного переменного, функция двух переменных может иметь два или более максимума – и ни одного минимума. И наоборот. Для таких поверхностей $u=u(x,y)$ характерно наличие *точек перевала*. Именно, точки поверхности, для которых $u'_x=0,\ u'_y=0,$ но экстремума нет, называются седловыми точками поверхности, или точками перевала, или точками минимакса. (См. рис. 1.19.)

Отметим, что везде имелись в виду *гладкие* поверхности: когда первые частные производные непрерывны.

§ 8. Неявные функции

1. Пусть значения переменных x и y связаны уравнением

$$F(x,y)=0. \qquad (1.56)$$

Таким уравнением обычно задаётся кривая в аналитической геометрии.

Если для каких-то значений x, $x\in X$, это уравнение имеет одно или несколько решений y, то тем самым определится однозначная или многозначная функция y от x. Её обозначим $y=f(x)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *неявной*, если она задана посредством неразрешённого *относительно* y уравнения (1.56), т.е. задана как решение уравнения относительно y.

Эта функция станет *явной*, если рассматривать непосредственную зависимость y от x, т.е. если фактически разрешить (1.56) относительно y.

Термины *явная* и *неявная* относятся лишь к способу задания функции, но не к её свойствам.

Если $F(x,y)$ есть многочлен относительно x и y, то определяемая уравнением (1.56) неявная функция называется *алгебраической*.[4]

Иногда уравнение (1.56) никакой функции не определяет, например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не имеет (действительных) решений, неявная функция не существует. Или, если мы не знаем логарифмов, то найти y из уравнения $x - 2^y = 0$ не можем, хотя такое решение существует, при $x > 0$. Поэтому, хотя бывает, что мы и не можем непосредственно решить (1.56) относительно y, имеют значение вопросы *фундаментальной важности*: когда *существует* неявная функция и когда эта функция будет *однозначной*. К неявным функциям относятся, в частности, обратные функции.

Чаще всего уравнение (1.56) определяет y как многозначную функцию от x. В таких случаях её разбивают на несколько однозначных *непрерывных* функций, называемых *ветвями* (или *однозначными ветвями, непрерывными ветвями*) многозначной функции. Например, многозначная функция, изображённая на рис. 1.24, распадается на четыре непрерывные функции; разрывных же функций сколько угодно.

Пример 1) $y^2 - x = 0$ или $y^2 = x$ (рис. 1.25). Это уравнение определяет двузначную функцию $y = \pm\sqrt{x}$, которая распадается на две непрерывные ветви $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$. Они обе определены при $x \ge 0$. Если рассматривать окрестность точки $x_0 > 0$ на оси Ox, то в этой окрестности имеем два указанных непрерывных решения. Однако, если ограничить и область изменения y, то есть взять некую окрестность точки (x_0, y_0) кривой, а не точки x_0, то в этой окрестности данное уравнение определит однозначную функцию y от x. Такова картина в точках A и B (рис. 1.25), но этого нет в точке $O(0,0)$.

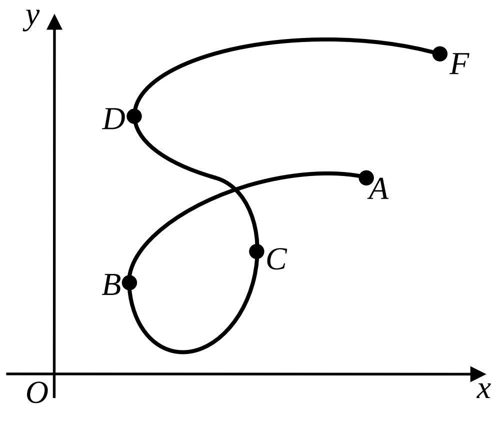


Рис. 1.24

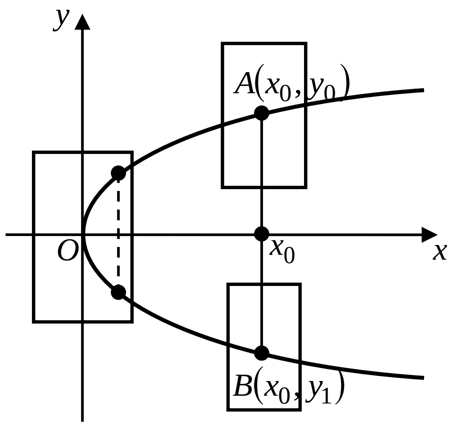


Рис. 1.25

2. **Теорема 1.8** (теорема существования неявной функции). *Пусть дано уравнение (1.56) и функция $F(x, y)$ как функция двух независимых переменных удовлетворяет условиям:*

---

[4] В Нижегородском (Горьковском) университете такими функциями занимались профессора Д.А. Гудков и Г.А. Уткин, доцент Г.М. Полотовский.

1°) $F(x,y)$ и её частные производные F'_x и F'_y непрерывны в некоторой окрестности D точки $P_0(x_0,y_0)$;
2°) функция F в этой точке обращается в нуль: $F(x_0,y_0)=0$;
3°) напротив: $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.
Тогда:
1) в некоторой окрестности $D_0=\{x_0-\delta<x<x_0+\delta, y_0-\delta_1<y<y_0+\delta_1\}\subset D$ точки $P_0(x_0,y_0)$ уравнение (1.56) имеет единственное решение $y=f(x)$, и оно обладает свойствами: 2) $f(x_0)=y_0$, 3) функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ и 4) имеет в нём непрерывную производную $f'(x)$.

Теорему принимаем без доказательства. Отметим лишь, что при доказательстве используются теоремы: о сохранении знака непрерывной функции, об определении с помощью производной поведения функции одного переменного (возрастания, убывания) и об обращении функции в нуль (1-ая теорема Больцано-Коши). Необходимо отметить также, что при указанных условиях 1°-3° уравнения $F(x,y)=0$ и $y=f(x)$ совершенно равносильны в прямоугольнике D_0.

В дальнейшем предполагаем, что условия теоремы 1.8 выполнены.

Замечания.

1. На основании теоремы, по свойствам функции $F(x,y)$ можно судить о свойствах функции $f(x)$, непосредственного задания которой мы не знаем. Такие теоремы очень важны в математике.

2. Геометрически теорема означает, что поверхность $z=F(x,y)$ пересекает плоскость Oxy, именно: по кривой $F(x,y)=0$. В приведённом ранее примере поверхность $z=x^2+y^2+1$ плоскость Oxy не пересекает, т.к. уравнение $x^2+y^2+1=0$ решения не имеет.

3. Конечно, в уравнении (1.56) роль переменных x и y можно поменять: если $F'_x(x_0,y_0)\neq 0$, то уравнение в некоторой окрестности D_0 имеет решение (определяет неявную функцию) $x=g(y)$. И только в особой точке, т.е. где $F'_x(x_0,y_0)=0$ и $F'_y(x_0,y_0)=0$, совместно с $F(x_0,y_0)=0$, теорема неприложима.

4. Недостаток теоремы в том, что она имеет локальный характер – гарантирует существование решения лишь в некоторой, неизвестной окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$.

Пример 2) $y^2-x=0$. Здесь $F(x,y)=y^2-x$.

Возьмём точку $P_0(1,-1)$. Проверим выполнение условий теоремы: 1°) выполнено, 2°) $F(1,-1)=0$, 3°) $F'_y(1,-1)=2y\big|_{P_0}=-2\neq 0$. Следовательно, существует единственное непрерывное решение $y=f(x)$, такое, что $f(1)=-1$. Это есть $y=-\sqrt{x}$.

В окрестности точки $P_1(1{,}1)$ имеется другое решение $y=\sqrt{x}$. Оба решения определены $\forall x \ge 0$.

В отличие от точек $P_0(1,-1)$ и $P_1(1{,}1)$, в точке $O(0{,}0)$, хотя первые два условия выполнены, но $F'_y(0{,}0)=0$ – третье условие не выполняется, теорему применить нельзя, и однозначного решения $y=f(x)$ в окрестности этой точки фактически не существует. Но здесь $F'_x(0{,}0)=-1\ne 0$, поэтому заданное уравнение в окрестности точки $O(0{,}0)$ определяет *x* как непрерывную функцию от *y* – это есть функция $x=y^2$, она существует $\forall y$.

3. Отыскание производной неявной функции одного переменного. Пусть уравнение (1.56) в некоторой области плоскости имеет решение $y=y(x)$ в виде дифференцируемой функции, так что выполняется тождество

$$F(x,y(x))\equiv 0. \tag{1.57}$$

Но тогда и производная от функции в (1.57) равна нулю. Дифференцируем это тождество, по переменному *x*. Применяя формулу производной сложной функции, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\equiv 0. \tag{1.58}$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{1.59}$$

Чтобы написать эту формулу, необходимо выполнение требования $F'_y(x,y)\ne 0$ – это есть условие $3°)$ теоремы 1.8.

Можно поступать иначе: пользуясь свойством инвариантности формы первого дифференциала, из (1.57) получим равенство $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, а из него (1.59).

Для отыскания y'' тождество (1.58) снова дифференцируем по *x* и т.д.

Аналогично, если уравнение (1.56) определяет дифференцируемую неявную функцию $x=x(y)$, то дифференцируя тождество $F(x(y),y))\equiv 0$, найдём

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}. \tag{1.60}$$

Необходимо подчеркнуть, что значения *x* и *y* в правой части (1.59) и (1.60) связаны равенством (1.56), и эти формулы одинаково верны для любой ветви неявной функции.

Как известно, уравнение касательной к кривой $y=y(x)$ в её точке (x_0,y_0) имеет вид $y-y_0=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$. С учётом этого и на основании (1.59), уравнение касательной к кривой (1.56) в её точке (x_0,y_0), где $F'_y\ne 0$, будет

$$F'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) = 0. \qquad (1.61)$$

То же при условии $F'_x \neq 0$ получим, используя (1.60). И только в особой точке это уравнение становится беспредметным, оно оказывается тождеством $\forall(x, y)$.

Аналогично находится уравнение нормали:

$$F'_y(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) = 0.$$

Пример 3) $x^2 + y^2 - 5 = 0$. Это уравнение задаёт окружность радиуса $\sqrt{5}$. Считаем, что в уравнение подставили его решение $y = y(x)$, т.е. неявную функцию. Получим тождество по *x*. Дифференцируем его: $2x + 2y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$. Здесь значения *x* и *y* не любые, а связаны данным равенством. Результат верен для обеих ветвей $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$. Проверим для ветви со знаком плюс: $y = \sqrt{5 - x^2}$ (это верхняя полуокружность): $y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2x}{\sqrt{5 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$. Чтобы найти y'', дифференцируем полученное тождество $x + y\cdot y' = 0$: $1 + y'\cdot y' + y\cdot y'' = 0$; подставляя сюда $y' = -\dfrac{x}{y}$, найдём $y'' = -\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^3}$. Например, для точки (2,1) кривой находим $y'(2) = -\dfrac{2}{1} = -2$, $y''(2) = -\dfrac{1}{1} - \dfrac{4}{1} = -5$. А для точки (2,–1) нижней полуокружности $y_1 = -\sqrt{5 - x^2}$ имеем: $y_1'(2) = -\dfrac{2}{-1} = 2$, $y_1''(2) = -\dfrac{1}{-1} - \dfrac{4}{-1} = 5$.

4. Неявная функция двух переменных.

Пусть значения переменных *x*, *y*, *z* связаны равенством

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (1.62)$$

Решение этого уравнения относительно *z*, если оно существует, называется неявной функцией двух переменных, определённой уравнением (1.62); обозначим его $z = f(x, y)$.

Теорема 1.9. *Предположим, функция* $F(x, y, z)$ *удовлетворяет условиям:*

1°) она непрерывна вместе с первыми частными производными в некоторой окрестности G точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$*;*

2°) $F(P_0) = 0$*;*

3°) $F'_z(P_0) \neq 0$.

Тогда 1) в некоторой окрестности

$$E = \{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \delta_1 < y < y_0 + \delta_1, z_0 - \delta_2 < z < z_0 + \delta_2\} \subset G$$

точки P_0 *уравнение (1.62) определяет z как однозначную функцию* $z = f(x, y)$ *от x и y; причём 2)* $f(x_0, y_0) = z_0$*, 3)* $f(x, y)$ *непрерывна и имеет непрерывные частные производные* $f'_x(x, y)$ *и* $f'_y(x, y)$. (Без доказательства.)

Аналогично, если $F'_x(P_0) \neq 0$ или $F'_y(P_0) \neq 0$, то уравнение (1.62) однозначно разрешимо в окрестности точки P_0 относительно x или относительно y. И только в особых точках – когда все три частные производные обращаются в нуль, совместно с $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, т.е. в особых точках поверхности (1.62), теорема неприложима.

Найдём производные неявной функции $z = f(x, y)$. Поскольку это есть решение уравнения (1.62), то после подстановки в это же уравнение будем иметь тождество по переменным x и y:

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0. \tag{1.63}$$

Дифференцируя его по x и y, причём, левую часть как сложную функцию, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

откуда, учитывая, что $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial x}{\partial y}=0$, т.к. x и y не зависящие друг от друга переменные, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{1.64}$$

Чтобы написать эти формулы, необходимо требование $F'_z \neq 0$ - это есть условие 3^0) теоремы существования 1.9. Справа в формулах (1.64) имеем: $z = z(x, y)$, именно, значения x, y, z не любые, а связаны равенством (1.62).

Другой способ. Имеем тождество по x и y: $dF(x, y, z(x, y)) \equiv 0$. Раскрываем дифференциал, пользуясь свойством инвариантности формы, и находим производные (1.64) как коэффициенты при dx и dy:

$$F'_x\cdot dx+F'_y\cdot dy+F'_z\cdot dz\equiv 0 \Rightarrow dz=-\frac{F'_x}{F'_z}\cdot dx-\frac{F'_y}{F'_z}\cdot dy.$$

Пример 4) $u^4 - x\cos u + xy^2 - 1 = 0$. Обозначим левую часть равенства через $F(x, y, u)$. Положим $x = x_0 = 0, y = y_0 = 0$, тогда из полученного уравнения $u^4 - 1 = 0$ возьмём $u = 1 = u_0$. В окрестности точки $P_0(0,0,1)$ условия теоремы 1.9 выполнены, в частности $F'_u(P_0) = 4 \neq 0$, поэтому, существует единственное дифференцируемое решение $u = u(x, y)$. Подставляя его в уравнение, получим в левой части функцию $\psi(x, y)$ такую, что $\psi(x, y) \equiv 0$. Тогда и дифференциал этой функции будет равен нулю. По свойству инвариантности:

$$d\psi(x,y)\equiv dF(x,y,u(x,y))=(4u^3+x\sin u)\,du+(-\cos u+y^2)dx+2xy\,dy=0.$$

Отсюда $du=-\frac{y^2-\cos u}{4u^3+x\sin u}dx-\frac{2xy}{4u^3+x\sin u}dy$. Коэффициенты при dx и dy определят производные u'_x и u'_y. Это легко проверить по формулам (1.64).

Замечание. Рассмотрим уравнение (1.62). При выполнении условий теоремы 1.9 в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ пространства существует единственное непрерывное решение $z = f_0(x, y)$. А если взять точку плоскости $Q_0(x_0, y_0)$ (тут на область изменения *z* ограничений не налагаем), то сколько непрерывных решений существует в окрестности этой точки? Рассмотрим уравнение $F(x_0, y_0, z) = 0$ с одной неизвестной *z*. Допустим, оно имеет *m* различных корней $z = z_k\ (k = 0,1,\ldots,m-1)$: $F(x_0, y_0, z_k) = 0$. Предположим, что для каждой точки $P_k(x_0, y_0, z_k)$ выполнены условия теоремы 1.9, в частности $F'_z(P_k) \neq 0$. Тогда в окрестности каждой из точек P_k уравнение (1.62) имеет единственное непрерывное решение $z = f_k(x, y)$, причём, $f_k(x_0, y_0) = z_k$. А в окрестности точки $Q_0(x_0, y_0)$, таким образом, получаем *m* различных непрерывных решений.

5. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Пусть дана система из двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\{F(x, y, z) = 0, \Phi(x, y, z) = 0\}. \tag{1.65}$$

Вообще говоря, в некоторой области пространства эта система определяет две неявные функции $y = y(x), z = z(x)$ одного переменного *x*. Это есть решения системы относительно *y* и *z*. Чтобы найти их производные, подставляем эти решения в уравнения (1.65) и получим тождества по *x*:

$$F(x, y(x), z(x)) = 0, \Phi(x, y(x), z(x)) = 0. \tag{1.66}$$

Дифференцируем по *x*, используя формулы производной сложной функции, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot y' + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot z' = -\dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot y' + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\cdot z' = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}. \end{cases}$$

Это линейная система из двух уравнений относительно y' и z'. Она имеет единственное решение, если её определитель (детерминант) не равен нулю:

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(y, z)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.67}$$

Это есть третье условие теоремы существования решения системы (1.65) (формулировку её опускаем). Определитель системы обозначен $\dfrac{D(F, \Phi)}{D(y, z)}$. Он называется функциональным определителем, или якобианом[5], функций *F* и Ф по переменным *y* и *z*.

[5] Карл Густав Якоби (1804-1851), немецкий математик.

Пример. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. Пусть $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ - решения. Подставляя их в уравнения, получим тождества по x. Дифференцируем: $\begin{cases} 2x+2y\cdot y'+2z\cdot z'=0 \\ 1+y'+z'=0 \end{cases}$.

Отсюда $y'=-\dfrac{x-z}{y-z}$, $z'=-\dfrac{x-y}{z-y}$.

Пусть имеется система из m уравнений с $n+m$ переменными:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)=0 \\ -------------- \\ F_m(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)=0. \end{cases}$$

Решения этой системы есть m функций $y_1,\dots,y_m$ от n независимых переменных $x_1,\dots,x_n$. Подставляя эти решения $y_1,\dots,y_m$ в уравнения системы, получим m тождеств по переменным $x_1,\dots,x_n$. Дифференцируя их последовательно по x_1, по $x_2,\dots$, по x_n, определим частные производные неявных функций $y_1,\dots,y_m$ соответственно по $x_1,\dots,x_n$. При этом следует потребовать выполнения условия, аналогичного (1.67), именно, чтобы функциональный определитель или якобиан функций $F_1,\dots,F_m$ по переменным $y_1,\dots,y_m$ был отличен от нуля:

$$\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \dots \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ ---------- \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} \dots \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 9. Относительный (или условный, неабсолютный) экстремум

1. Ранее мы рассматривали экстремумы функции $z=f(x,y)$ считая, что x и y никакими условиями не связаны, т.е. являются независимыми переменными; сравнивали экстремальные значения $f(P_0)$ со *всеми* значениями $f(P)$ в точках P из некоторой *полной* окрестности точки P_0. В таких случаях экстремум называется *абсолютным* или *безусловным*.

Пусть теперь требуется найти экстремумы функции при условии, что переменные x и y связаны некоторым равенством $\varphi(x,y)=0$ – оно называется *уравнением связи*. Такие экстремумы *называются относительными* или *условными*. Геометрически это означает, что сравниваются между собой значения функции $f(x,y)$ лишь в точках линии $\varphi(x,y)=0$. На рис. 1.26 точка P_1 - точка абсолютного, а точка P_0 - условного максимума.

Итак, говорят, что функция $f(P)$ от n переменных имеет в точке P_0 условный максимум (минимум) при условии $\varphi(P)=0$, если для всех точек P, удовлетворяющих, вместе с P_0, уравнению связи $\varphi(P)=0$ и *достаточно близких* к P_0, будет выполняться неравенство $f(P)\le f(P_0)$ (неравенство $f(P)\ge f(P_0)$). Как и ранее, при выполнении строгого неравенства, при $P\ne P_0$, получаем строгий условный максимум (минимум). (Если $n\ge 3$, то уравнений связи может быть несколько).

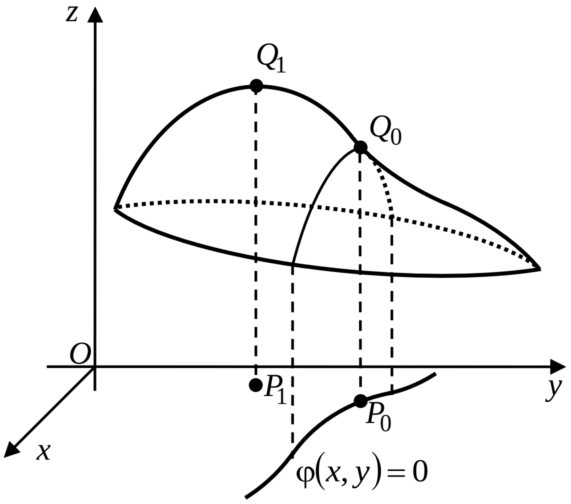


Рис. 1.25

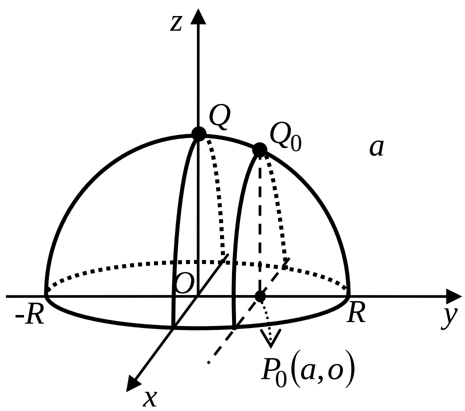


Рис. 1.26

Например, безусловный максимум функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ достигается в точке $O(0{,}0)$ и его значение $z\big|_{(0,0)}=R$; ему соответствует точка Q (см. рис. 1.27). Если же дано условие $y=a,\ |a|<R$, то $z=\sqrt{R^2-x^2-a^2}$ и относительный экстремум будет при $x=0$, т.е. в точке $P_0(0,a)$, и равен $z\big|_{P_0}=\sqrt{R^2-a^2}<R$; на поверхности ему соответствует точка Q_0.

Как найти точки условного экстремума функции $z=f(x,y)$? Есть два способа.

Допустим, что уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ можно разрешить в виде $y=y(x)$. Тогда в точках $P(x,y)$, удовлетворяющих уравнению связи, функция z принимает значения $z=f(x,y(x))\equiv F(x)$. В таком случае задача отыскания условного экстремума сводится к отысканию абсолютного экстремума сложной функции $F(x)$ одного переменного x. С такой задачей мы встречались при отыскании наибольшего и наименьшего значений функции на границе области (§1.7, примеры 3 и 4). Однако, на практике этот метод не всегда удобен, ибо он требует фактического решения уравнения $\varphi(x,y)=0$ относительно какой-либо из переменных x или y, а это не всегда возможно, к тому же решение может быть многозначным. Лагранж предложил другой метод – он даёт необходимые условия относительного экстремума.

2. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Пусть дана функция

$$z = f(x, y) \tag{1.68}$$

и дано уравнение связи

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{1.69}$$

и пусть функция $f(x, y)$ имеет условный экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$,

$$\varphi(x_0, y_0) = 0. \tag{1.70}$$

Найдём уравнения, которым удовлетворяют координаты точки P_0.

Будем предполагать, что *функции* $f(x, y)$ *и* $\varphi(x, y)$ *в окрестности точки* P_0 *имеют непрерывные частные производные и точка* P_0 *не является особой для кривой* (1.69), т.е. $\operatorname{grad}\varphi(P_0) \neq 0$, например, пусть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{P_0} \neq 0. \tag{1.71}$$

Тогда в некоторой окрестности точки P_0 уравнение (1.69) определяет однозначную дифференцируемую функцию $y = y(x)$. Будем считать, что её подставили в (1.68) и (1.69). При этом уравнение (1.69) становится тождеством (по x), а z – сложной функций от x, которая по условию имеет абсолютный экстремум в точке x_0. Тогда дифференциал этой функции в точке P_0 тождественно равен нулю $\forall dx$ и значит, в силу инвариантности формы дифференциала, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y_0}\cdot dy \equiv 0. \tag{1.72}$$

И также из тождества (1.69) находим в частности

$$d\varphi(x, y(x)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\cdot dy \equiv 0. \tag{1.73}$$

Умножим равенство (1.73) на некоторое число λ и сложим с (1.72):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)dy \equiv 0. \tag{1.74}$$

Выберем λ так, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = 0; \tag{1.75}$$

такое число λ существует в силу условия (1.71). Но тогда, поскольку dx произвольное (т.к. x – независимое переменное) при таком λ получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = 0. \tag{1.76}$$

Эти же равенства получим, предполагая $\varphi'_x(P_0) \neq 0$.

Равенства (1.70), (1.75) и (1.76) означают, что точка (x_0, y_0, λ) является обязательно стационарной точкой функции трёх переменных

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) - \tag{1.77}$$

она называется *функцией Лагранжа*.

Итак, получили

Правило 1. Чтобы найти точки $P_0(x_0, y_0)$, в которых только и возможен условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, надо

1) Составить функцию Лагранжа (1.77).

2) Найти её стационарные точки (x_0, y_0, λ), т.е. решить систему

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x, y) = 0.$$

3) Полученные точки (x_0, y_0) будут точками подозрительными на относительный экстремум.

Множитель λ отбрасывается – он играет вспомогательную роль.

Относительный экстремум возможен ещё и в точках, в которых заявленные выше условия не выполняются, например, в особых точках кривой (1.69), в её *угловых* точках.

Замечание. Достаточные условия сложны, их не рассматриваем – на практике о существовании условного экстремума в найденных стационарных точках часто догадываются из условий задачи геометрического, физического и т.п. характера. Однако можно воспользоваться следующими соображениями (без пространных рассуждений).

Представим приращение функции Лагранжа в окрестности полученной стационарной точки (x_0, y_0, λ_0) (λ_0 – фиксированное значение параметра λ, соответствующее точке $P_0(x_0, y_0)$) по формуле Тейлора первого порядка в дифференциальной форме, с остаточным членом R_1 в форме Лагранжа:

$$\Delta F(x_0, y_0, \lambda_0) = dF(x_0, y_0, \lambda_0) + \frac{1}{2} d^2 F(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, \lambda_0).$$

Будем считать, что все частные производные второго порядка функции F непрерывны в стационарной точке и хотя бы одна из них не равна в нулю, тогда d^2F в этой точке сохраняет знак в её окрестности. А это означает, что приращения ΔF совпадает со знаком $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0)$ именно в стационарной точке (поскольку $dF(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$), и не меняет его в некоторой окрестности. Поэтому вычисляя $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0)$ мы определим наличие условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при заданном условии связи $\varphi(x, y) = 0$ (когда дифференциалы dx и dy связаны соотношением (1.73)) и его характер в полученной стационарной точке. Итак, если знак $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0)$ не зависит от того, какой знак имеют приращения dx и dy, то стационарная точка является точкой условного максимума, если $d^2F < 0$, – и условного минимума, если $d^2F > 0$. [см. 7, стр. 69.]

Пример. Найти условный экстремум функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$. Конечно, эта задача может быть решена и без использования метода

Лагранжа. Для этого выражаем одну из переменных, например, y, из уравнения связи, подставляем в функцию $z = xy$. Полученную функцию одной переменной $z = x(1-x)$ исследуем на абсолютный экстремум: $z'_x = 1-2x = 0$, $z'' = -2 < 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ - точка максимума, а для исходной функции таковой является точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, при этом $z_{\max} = \frac{1}{4}$. Теперь проиллюстрируем на этом простом примере метод Лагранжа, воспользовавшись сделанным замечанием о достаточном условии относительного экстремума.

Составим функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Система для определения координат стационарной точки имеет вид $\begin{cases} F'_x = y + \lambda = 0 \\ F'_y = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases}$, откуда $x = y = \frac{1}{2}$ - это координаты стационарной точки (при этом $\lambda = -\frac{1}{2}$).

Находим $d^2F = 2dxdy$. Из уравнения связи: $dy = -dx$, откуда следует, что второй дифференциал $d^2F = -2dx^2 < 0$, значит и $\Delta F < 0$, т.е. полученная точка есть точка относительного максимума функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$, и $z_{\max} = \frac{1}{4}$. Как уже было сказано, наличие условных максимумов и минимумов иногда можно определить исходя из условий задачи. В данном случае это видно из геометрической интерпретации. А именно: в сечении поверхности $z = xy$ плоскостью $x + y = 1$ получаем параболу $z = x(1-x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, ветви которой направлены вниз; координаты вершины $x = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$ и при этом $y = \frac{1}{2}$.

3. Случай функции трёх и более переменных.

Часто приходится рассматривать относительный экстремум функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$ при условии

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{1.78}$$

т.е. рассматриваются лишь точки $P(x, y, z)$, лежащие на поверхности (1.78). Можно задавать и два уравнения связи (см.(1.65)), тогда берутся только точки кривой.

В обоих случаях задачу «можно» свести к отысканию абсолютного экстремума сложной функции: от двух независимых переменных в случае (1.78), или от одной – в случае (1.65). Однако обычно пользуются методом Лагранжа.

Отметим без доказательства общий результат.

<u>Правило 2</u>. Для нахождения возможных точек условного экстремума функции $u = u(P) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях, если точки $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ связаны уравнениями связи

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ ----------- \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \ m < n,$$

надо:

1) Составить функцию Лагранжа $F = f + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_m\varphi_m$ (это функция от $n + m$ переменных).

2) Найти её стационарные точки ($x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$), т.е. решить систему уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, \ \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0; \ \ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \equiv \varphi_1 = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} \equiv \varphi_m = 0 \qquad (1.79)$$

(это система из $n + m$ уравнений с $n + m$ неизвестными).

3) Только в найденных точках $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *возможен* условный экстремум; множители $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ отбрасываются.

Уравнения (1.79) и дают необходимые условия относительного экстремума.

Предполагается, что на функции наложены все необходимые условия. Например, для случая (1.65) роль требования (1.71) (для точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ условного экстремума), может играть условие (1.67).

<u>Пример</u>. Для функции $u = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ найти наибольшее значение при условии $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a = const$ (предполагаем $x_1 > 0, \ x_2 > 0, \dots, x_n > 0$, тогда и $a > 0$). Очевидно, $\inf u = 0$, и наибольшее значение существует, причём $u_{\text{наиб.}} < a$, поскольку все $x_k < a$, $k = \overline{1, n}$.

1) Составим функцию Лагранжа: $F = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a)$.

2) Запишем систему (1.79) для нахождения координат стационарных точек. Здесь $\dfrac{\partial F}{\partial x_k} = \dfrac{1}{n}(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (x_1 \cdots x_{k-1} \cdot x_{k+1} \cdots x_n) + \lambda = \dfrac{1}{n x_k}\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \lambda$, $x_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$. Поэтому эта система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{1}{n x_1}\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \lambda = 0 \\ ----------------- \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = \dfrac{1}{n x_n}\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \lambda = 0. \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a = 0 \end{cases} \qquad (1.80)$$

3) Из первых n уравнений следует очевидно, что все x_k равны одному и тому же выражению, так что равны между собой, и тогда из последнего уравнения (1.80) находим $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$. Получилась единственная «подозрительная» точка. Из единственности её и существа самой задачи заключаем, что это есть точка условного экстремума, и этот экстремум доставляет наибольшее значение:

$$u_{\text{наиб.}} = u_{\max} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n} = \frac{a}{n}, \text{ т.е. } \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{a}{n}, \text{ где } a = x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

Итак, попутно получили известный факт: среднее геометрическое n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не превосходит их среднего арифметического, причём равенство возможно лишь когда все числа равны между собой:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} . \tag{1.81}$$

Этот результат справедлив, конечно, и при нестрогих неравенствах $x_k \ge 0$; в этом случае $\exists u_{\text{наим.}} = \inf u = 0$.

Для двух чисел неравенство $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ $(a \ge 0, b \ge 0)$, как известно, доказывается непосредственно.

§ 10. Огибающая семейства плоских кривых

Пусть имеем уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.82}$$

где C – произвольная постоянная. Геометрически для конкретных значений C это уравнение определяет кривую – её будем называть «кривая C». Для разных C будем получать разные кривые. Говорят, что уравнение (1.82) определяет однопараметрическое семейство кривых и C называется параметром этого семейства. Иногда можно выделить линии, касающиеся всех кривых семейства.

Определение 1. Если все линии семейства (1.82) касаются одной и той же линии K и эта линия в каждой своей точке касается какой-либо кривой семейства, то K называется *огибающей* данного семейства.

<u>Найдём необходимые условия огибающей</u>. Предположим, что семейство (1.82) имеет огибающую и (x, y) её текущая точка. Согласно определению, эта точка лежит на некоторой кривой C, и в то же время каждому C соответствует точка $(x, y) \in K$ (рис. 1.28). Таким образом, x и y определятся как функции от C, обозначим их

$$x = x(C), y = y(C) . \tag{1.83}$$

Это параметрические уравнения огибающей, причём параметром $t \equiv C$ этой линии является параметр семейства (1.82).

Итак, нам надо найти две функции $x(C), y(C)$. Для этого имеем два условия: 1) точка (x, y) лежит и на кривой, и на огибающей и 2) в этой точке огибающая и соответствующая кривая семейства имеют общую касательную.

Запишем эти условия аналитически, предполагая, что все функции $\Phi, x(C), y(C)$ непрерывно дифференцируемы.

1)

$$\Phi(x(C), y(C), C) \equiv 0. \tag{1.84}$$

Это есть тождество по *C*. Но тогда и производная этой сложной функции от *C* будет равна нулю;

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dC} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dC} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\cdot 1 = 0. \tag{1.85}$$

2) Угловые коэффициенты касательной к огибающей $k_1 = \frac{y'(C)}{x'(C)}$ (производная функции, заданной параметрически) и к кривой семейства $k_2 = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$ (производная неявной функции) совпадают: $k_1 = k_2$. Отсюда получа*ем условие касания двух кривых*:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dC} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dC} = 0. \tag{1.86}$$

Подставляя в (1.85), найдём $\frac{\partial\Phi}{\partial C} = 0$. Полученная система двух уравнений

$$\{\Phi(x, y, C) = 0, \Phi'_C(x, y, C) = 0\} \tag{1.87}$$

определит нам две функции (1.83). Отсюда, исключив *C*, получим уравнение огибающей в форме $f(x, y) = 0$.

Вывод. Если семейство кривых (1.82) имеет огибающую, то *уравнение огибающей можно получить, исключая C из двух уравнений* (1.87).

Замечания. 1. Предполагали, что $\Phi'_y \neq 0$; но то же самое получим при $\Phi'_x \neq 0$. Если же $\Phi'_x = \Phi'_y = 0$, то из (1.85) снова придём к условию $\frac{\partial\Phi}{\partial C} = 0$. Так что система (1.87) может определять и геометрическое место особых точек кривых (1.82) (рис. 1.29).

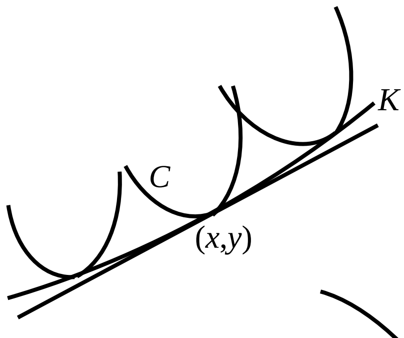


Рис. 1.28

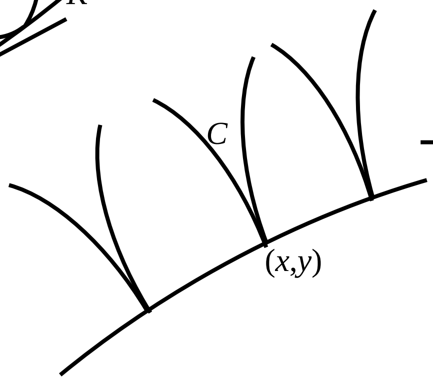


Рис. 1.29

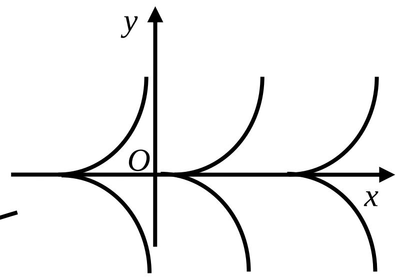


Рис. 1.30

2. Кроме того, система (1.87) может определять отдельные кривые семейства: для семейства прямых $(C-1)\cdot x - C^2 y = 0$ исключение C из уравнений (1.87) даёт две прямые $x=0$ и $y=\frac{1}{4}x$, принадлежащие семейству при $C=0$ и $C=2$.

Определение 2. Линии, получающиеся из системы (1.87) исключением *C*, называются *дискриминантными* кривыми семейства (1.82).

Примеры. 1) Для семейства окружностей $\Phi=(x-C)^2+y^2-R^2=0$ имеем $\frac{\partial\Phi}{\partial C}=2(x-C)=0$; исключив *C*, получим $y^2-R^2=0$ - две прямые $y=\pm R$. Это уравнения огибающей.

2) Семейство параллельных прямых $y-x-C=0$ не имеет огибающей, и здесь $\frac{\partial\Phi}{\partial C}=-1\neq 0$.

3) Огибающая семейства кубических парабол $y=(x-C)^3$ есть $y=0$.

4) Для семейства полукубических парабол $y^2-(x-C)^3=0$ линия $y=0$ является дискриминантной кривой – это и огибающая, и геометрическое место особых точек кривых семейства. (Рис. 1.30)

5) Эволюта какой-либо линии есть огибающая семейства нормалей этой линии.

6) Всякая (гладкая) линия есть огибающая всех своих касательных.

7) Снаряд выпускается из пушки со скоростью v_0 под разными углами α к оси *Ox*. Используя закон Ньютона $m\cdot\vec{a}=\sum\vec{F}$ в проекциях на оси *Ox* и *Oy*, получим два дифференциальных уравнения второго порядка, решениями которых, как можно доказать, являются функции.

$$x = v_0 t\cos\alpha,\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Они определяют параметрические уравнения траектории полёта, параметром является время t. Исключим отсюда t и введём обозначения $tg\alpha = k$ и $\frac{g}{2v_0^2} = a$.

Тогда получим:

$$\Phi \equiv y - kx + a(1+k^2)x^2 = 0 - \tag{1.88}$$

это есть семейство парабол, k – его параметр. Потребуем, чтобы $\frac{\partial\Phi}{\partial k} \equiv -x + 2akx^2 = 0$. Исключая k из двух последних уравнений, приходим к уравнению огибающей семейства (1.88): $y = \frac{1}{4a} - ax^2$. Эта кривая называется *параболой безопасности.* Поверхность, полученная от её вращения вокруг оси Oy, называется параболоидом безопасности. За его пределы снаряд не вылетит, под каким бы углом α ни стреляли. (Рис. 1.31, 1.32)

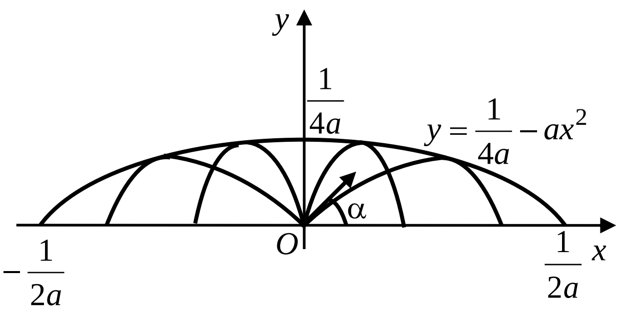


Рис. 1.31

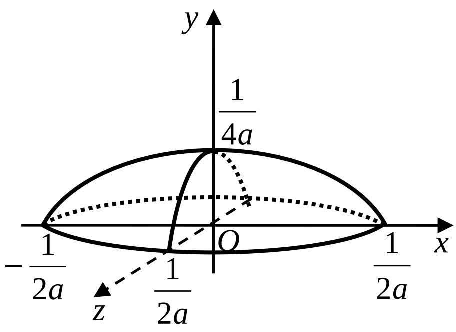


Рис. 1.32

§ 11. Замена переменных в дифференциальных выражениях

Часто требуется формулы, содержащие функции и их производные (так называемые *дифференциальные выражения*) преобразовать в эквивалентные им выражения посредством замены независимых переменных или функций, или и тех, и других. Это надо для упрощения формул или требуется самой постановкой вопроса (преобразование координат, переход к полярным координатам и прочее).

При замене переменных используются производные сложной функции (или инвариантность формы первого дифференциала), обратной функции, дифференцирование неявных функций и т.п. Будем предполагать, что для рассматриваемых функций существуют, какие только потребуется, непрерывные производные.

1. Случай функции одной переменной. Пусть дано дифференциальное выражение

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right). \tag{1.89}$$

(Если его приравнять нулю, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n с неизвестной (искомой) функцией $y = y(x)$.)

а) Предположим, требуется поменять ролями переменные x и y: от функции $y = y(x)$ перейти к обратной функции $x = x(y)$, т.е. считать независимой переменной уже y. Для этого надо в (1.89) пересчитать производные функции $y = y(x)$ через производные функции $x = x(y)$.

По формуле для производной обратной функции имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Так как $\frac{dx}{dy}$ есть функция от y, а y сам есть функция от x, то по формуле производной сложной функции найдём $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$. Аналогично найдём $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т.д., после чего, найденные выражения подставляем в (1.89).

б) <u>Замена старой независимой переменной новой независимой переменной</u>. Пусть требуется сделать замену $x = \varphi(t)$ - это заданная, известная функция. Тогда y станет сложной функцией от t: $y = y(x) = y(\varphi(t))$, её обозначают также через $y(t)$. Различают исходную функцию $y(x)$ и новую $y(t)$ по обозначению аргумента и производных.

Выразим производные y по x через производные y по t. Имеем

$$\frac{dy}{dx} \equiv y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}, \ldots .$$

<u>Пример.</u> 1) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{n^2 y}{1-x^2} = 0$, $n = const$. Положим $x = \cos t$. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{-\sin t}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y'_t}{\sin t}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{\sin t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_{tt} \cdot \sin t - y'_t \cdot \cos t}{\sin^3 t}$, и данное уравнение перейдёт в уравнение $\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0$. (Его общее решение есть $y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$, и тогда общее решение исходного уравнения будет $y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x)$, $\forall C_1, C_2 = const$).

в) <u>Замена зависимого переменного</u>. Пусть вместо y вводится новая функция u от x по формуле $y = \psi(u)$ – это заданная функция. Здесь y можем рассматривать как сложную функцию от x с промежуточным аргументом $u = u(x)$. Находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{du}\right) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d\psi}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d\psi}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$$

г) Возможен случай, когда старые переменные заменяются новыми, то есть $x,\ y(x)$ – переменными $t,\ z(t)$, с помощью формул $x = \varphi(t,z),\ y = \psi(t,z)$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t + \psi'_z z'_t}{\varphi'_t + \varphi'_z z'_t} \equiv \Phi(t,z,z'_t), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\Phi(t,z,z'_t)) = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{1}{x'_t}, \ldots$$

Например, чтобы преобразовать выражение к полярным координатам, надо воспользоваться формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, и от функции $y = y(x)$ перейти к функции $\rho = \rho(\varphi)$.

2. Случай функции нескольких переменных. Пусть дано выражение

$$F(x,y,z,z'_x,z'_y,z''_{xx},\ldots), \tag{1.90}$$

где $z = z(x,y)$– произвольная функция независимых переменных x,y. (Если (1.90) приравнять нулю, получим дифференциальное уравнение в частных производных.)

а) Пусть вводятся новые независимые переменные u и v по формулам

$$u = u(x,y),\ v = v(x,y), \tag{1.91}$$

т.е. x,y заданы как неявные функции от переменных u и v.

Будем рассматривать z как функцию от $u,\ v$, обозначив её также через $z = z(u,v)$, и как сложную функцию от x,y, используя формулы (1.91), именно: $z = z(u(x,y),v(x,y))$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \Phi_1(u,v,\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}),\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \equiv \Phi_2(u,v,\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}). \tag{1.92}$$

б) Предположим, вместо (1.91) старые и новые независимые переменные связаны формулами:

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v). \tag{1.93}$$

Здесь можно перейти к случаю (1.91), если разрешить систему (1.93) относительно $u,\ v$, но это не всегда просто выполнить. Используем другой подход: будем рассматривать z как сложную функцию от $u,\ v$ (с промежуточными аргументами x,y), тогда получим систему для определения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}.$$

Это линейная неоднородная система, её определителем является якобиан системы (1.93). Предполагаем, что он отличен от нуля, тогда существует единственное решение в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \Phi_1(x(u,v), y(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \Phi_2(x(u,v), y(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}).$$

Указание. Если в обоих приведённых случаях требуется найти вторые частные производные, то можно использовать полученные формулы для первых частных производных, но вместо z подставить $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial z}{\partial y}$. Особенно это удобно для первого случая, например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi_1(u, v, \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial v})$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \Phi_1(u, v, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v})$ и т.д.

Пример 2) Рассмотрим уравнение колебания струны $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $a = const > 0$. Преобразуем уравнение к новым независимым переменным u, v по формулам: $u = y + ax,\ v = y - ax$ (случай (1.91). Цель: получить уравнение, содержащее u, v, z и производные функции z по u, v.

Рассматривая z как сложную функцию от x, y с промежуточными аргументами u, v, найдём:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot a + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-a) \equiv \Phi_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1 \equiv \Phi_2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \cdot a + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \cdot (-a) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) a^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) a^2 =$$

$$= a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

Аналогично, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. Подставляя в заданное уравнение, получим $-4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

Упражнения. 1) *Оператор Лапласа* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ преобразовать к полярным координатам r, φ, т.е. положить $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, где r, φ - новые независимые переменные.

Ответ: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

2) Доказать, что уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ с помощью замены $u=x+y,\quad v=x-y,\ w=xy-z$, где $w=w(u,v)$ - новая искомая функция с новыми независимыми переменными, преобразуется в уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. Здесь полезно использовать свойство инвариантности формы первого дифференциала.

§ 12. Функциональные определители. Независимые функции

1. Пусть даны n функций от n переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,x_2,\dots,x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(x_1,x_2,\dots,x_n). \end{aligned} \tag{1.94}$$

Функциональным определителем по переменным $x_1,x_2,\dots,x_n$ (или *якобианом*) этой системы функций называется определитель $\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots\frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ - & - & - \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$.

Функциональные определители для системы функций играют такую же роль, как обычная производная $\frac{dy}{dx}$ для функции одного переменного $y=y(x)$.[6]

2. Умножение функциональных определителей. Для упрощения записей ограничимся определителями 3-его порядка. Пусть дана система функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2,x_3) \\ y_2 = f_2(x_1,x_2,x_3) \\ y_3 = f_3(x_1,x_2,x_3), \end{cases} \tag{1.95}$$

и пусть, в свою очередь, x_1,x_2,x_3 суть промежуточные аргументы – сами являются функциями:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1,t_2,t_3) \\ x_2 = \varphi_2(t_1,t_2,t_3) \\ x_3 = \varphi_3(t_1,t_2,t_3). \end{cases} \tag{1.96}$$

[6] Функциональные определители впервые были введены в 1833-34 гг. К. Якоби и М.В. Остроградским в связи с заменой переменных в кратных интегралах (двойных и тройных). Якоби изучил их свойства и дал приложение к теории неявных функций. Обозначение их ввёл английский математик Донкин.

Таким образом, y_1, y_2, y_3 можно рассматривать как сложные функции от t_1, t_2, t_3. Умножим якобиан системы (1.95) на якобиан системы (1.96):

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся известной из высшей алгебры теоремой умножения определителей – умножаем i-тую строку первого определителя на k-ый столбец второго: $\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_k}$ $(i, k = 1,2,3)$. Полученная сумма даёт производную сложной функции, именно $\frac{\partial y_i}{\partial t_k}$. Поэтому $A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \frac{\partial y_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial t_1} & \frac{\partial y_3}{\partial t_2} & \frac{\partial y_3}{\partial t_n} \end{vmatrix}$ – это есть функциональный определитель функций y_1, y_2, y_3 по переменным t_1, t_2, t_3. В символических обозначениях получили:

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}. \tag{1.97}$$

Эта формула является обобщением формулы производной сложной функции одного переменного: если $y = y(x)$ и $x = x(t)$, то $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Допустим, что возможно обращение системы (1.95), и функции (1.96), где $t_k \equiv y_k$ $(k = 1,2,3)$ составляют это обращение. Эти решения (1.96) подставляем в уравнения (1.95). В результате получим три тождества по переменным y_1, y_2, y_3. Справа будем иметь сложные функции, а якобиан из левых частей есть $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, – и равенство (1.97) примет вид $1 = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}$, откуда $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}}$. Полученная формула является обобщением формулы производной обратной функции одной переменной: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

3. Понятие независимости функций. Рассмотрим систему из m функций от n переменных

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ------------ \\ y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \tag{1.98}$$

Предположим, что одну из них, например, y_j можно выразить как дифференцируемую функцию от остальных:

$$y_j = \Phi(y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_m). \tag{1.99}$$

Подразумевается, что равенство (1.99) выполняется тождественно относительно $x_1, x_2, ..., x_n$ в некоторой области D n-мерного пространства, если вместо функций y_k $(k = \overline{1, n})$ подставить их выражения (1.98). В таком случае говорят, что y_j в области D зависит от остальных функций системы (1.98). В частности, так будет, если y_j есть постоянная, ибо тогда можно положить $\Phi \equiv const$. Вообще, функции $y_1, y_2, ..., y_m$ называются зависимыми в области D, если хотя бы одна из них зависит от остальных, иначе говоря, если существует тождество по $x_1, x_2, ..., x_n$ вида

$$\mathrm{F}(y_1, y_2, ..., y_m) = C, \tag{1.100}$$

причём, равенство (1.100) разрешимо хотя бы относительно одной из величин $y_1, y_2, ..., y_m$ (можно считать $C = 0$).

Если же тождество (1.99) или (1.100) места не имеют ни в области D, ни в какой-либо её части $D_0 \subset D$, то функции $y_1, y_2, ..., y_m$ называются *независимыми* в области D.

Примеры.1) Две функции $\{y = y(x),\ z = z(x)\}$ одного переменного x всегда зависимы: исключив отсюда x, получим соотношение вида $\mathrm{F}(y, z) = 0$.

2) Функции $u = \sqrt[3]{\sin(x^2 \cdot e^z + \ln y)} - 5$ и $v = \ln[\cos(x^2 \cdot e^z + \ln y)]$ зависимы, т.к. $(u+5)^6 + (e^v)^2 \equiv 1$ – тождественно относительно переменных x, y, z. Отсюда, зная значение одной из переменных u или v в какой-либо точке (x, y, z), можем найти значение другой переменной в той же точке.

3) $\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + y - z \end{cases}$. Эти функции независимы, так как невозможно найти соотношение между u и v, такое, чтобы оно не содержало какое-либо из x, y, z,

например, $u-v=2z$, или $u+v=2(x+y)$ и т.д. (нельзя исключить три переменных из этих двух уравнений).

Вопрос о независимости функций решается с помощью *функциональной матрицы*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ - & - & - & - \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{1.101}$$

Будем считать $n \ge m$, в противном случае функции обычно зависимы.

Теорема 1.10 (условие независимости функций). Если хотя бы один минор m-ого порядка матрицы (1.101) отличен от нуля в области D, то в этой области функции (1.98) независимы.

Δ Пусть отличен от нуля якобиан функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\frac{D(y_1,\ldots,y_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ - & - & - & - \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \ne 0. \tag{1.102}$$

(Если бы был не равным нулю какой-то другой минор, то могли бы так изменить нумерацию независимых переменных, чтобы прийти к случаю (1.102).)

Теорему доказываем от противного. Предположим, одна из функций, например, y_m выражается через остальные, так что

$$y_m = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}). \tag{1.103}$$

Дифференцируем это тождество по каждой из переменных x_i $(i=\overline{1,m})$:

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}\cdot\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i} \quad (i=\overline{1,m}).$$

Умножив в определителе (1.102) строчки с первой по (m-1)-ую соответственно на $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}$, обнаружим, что элементы последней строки этого определителя есть линейные комбинации первых (m-1)-ой строк, поэтому определитель равен нулю. Это противоречит условию теоремы, что и доказывает независимость функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$. ▲

Упражнение. С помощью теоремы 1.10 доказать независимость функций в Примере 3.

Примечание. Рассмотренные факты применяются, в частности, в курсе «Дифференциальные уравнения»

4. Применение к уравнениям. Два уравнения $f(x,y)=0$ и $\varphi(x,y)=0$ называются *независимыми*, если независимы функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$; значит, если якобиан $\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$, то уравнения независимы. И наоборот, уравнения зависимы, если зависимы эти функции. То есть, если одну из них можно выразить через другую, тогда одно из уравнений есть следствие другого.

Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 20-е, стереотипное. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985. – 384 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Часть 2. М., ГИТТЛ, 1959. – 358 с.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука. ГРФМЛ, 1965. – 608 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М ., ГИФМЛ, 1963, 1100 с.
5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М., Наука, 1965. – 616 с.
6. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М., Физматлит, 2002. – 464 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М, Наука, ГРФМЛ, 1970. – 420 с.
8. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. Том 2. Издание 3-е, перераб. – М.-Л., ГИТТЛ, 1957. – 498 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т.1, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 432 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 560 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. Изд-е 23-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 479 с.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. Изд-е 21-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 656 с.
13. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного. Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2013. – 310 с.
14. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.2. Издание 2-е, стереотипное. – М., Наука. ГРФМЛ, 1974. – 472 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. СПб., Лань, 2005. – 464 с.
16. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.-Л., ГИТТЛ, 1949. – 420 с.