МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

Н.А. Мамаева
Е.А. Таланова

Решение задач на тему "Производная"

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института экономики и предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» (бакалавриат).

Нижний Новгород
2018

УДК 517
ББК 22.161.1
М 22

М 22 Мамаева Н.А., Таланова Е.А. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ТЕМУ "ПРОИЗВОДНАЯ": Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 30 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор П.Б. Болдыревский

Учебно-методическое пособие, охватывающее тему «Дифференциальное исчисление функции одного переменного» дисциплины «Математический анализ», предназначено для студентов института экономики и предпринимательства ННГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В..

УДК 517
ББК 22.161.1

Содержание

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения, изучающих математику по учебной программе дисциплины «Математический анализ», составленной в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению «Бизнес-информатика». Пособие направлено на формирование компетенции ПК-18 «Способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования».

Учебное пособие посвящено практике вычисления и применения производной функции. В пособие включены типовые задачи и даются методы их решения, содержится справочный материал, состоящий из определений и основных математических понятий курса ««Математический анализ». Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество задач для самостоятельного решения.

1. СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Секущая и касательная к графику функции. Задача об определении тангенса угла наклона касательной к кривой как отношения предела приращения функции и приращения аргумента. Задача об определении мгновенной скорости при движении автомобиля по прямой трассе. Определение производной функции в точке. Обозначения производной. Объяснение термина «Дифференцирование функции».

Правила дифференцирования и производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.

Определение дифференцируемой функции и дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Идея приближенных вычислений с помощью замены приращения функции её дифференциалом при малых приращениях аргумента. Непрерывность дифференцируемой функции.

Эластичность функции как предел отношения относительных изменений зависимой и независимой переменных. Правило Маршалла (геометрический смысл эластичности). Примеры вычисления эластичности в экономическом анализе.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши (все – без доказательства). Геометрические интерпретации. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Монотонность функции и знак производной. Точки экстремума: определение, необходимое условие экстремума, достаточные условия экстремума. Вторая производная и геометрия кривой, точки перегиба. Общая схема исследования функции и построения графика. Задачи на наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке.

2. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ

1. **Производная**: $y' = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Основные **правила дифференцирования**:

1) $(cu)' = cu'$ (c=const); 2) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;

3) $(u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'$; 4) $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$;

5) если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то $y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

3. **Таблица производных**:

1) $(u^{\alpha})'_x = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$;

2) $(a^u)'_x = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$; $\quad (e^u)'_x = e^u \cdot u'_x$;

3) $(\log_a u)'_x = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x$; $\quad (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x$;

4) $(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$; $\quad (\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$;

$(tg u)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$; $\quad (ctg u)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$;

5) $(\arcsin u)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$; $(\arccos u)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$;

$(arctg u)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$; $(arcctg u)'_x = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$.

4. **Теорема Лагранжа (**о конечном приращении): Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $]a;b[$, то найдется хотя бы одно значение $c \in\ ]a;b[$, при котором $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

5. **Правило Лопиталя** для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$:

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, если предел, стоящий справа, существует.

6. Функция $f(x)$ **возрастает** на $[a;b]$, если $f'(x)>0$ на $[a;b]$, и **убывает**, если $f'(x)<0$.

7. Значение $f(x_0)$ называется **максимумом (минимумом)** функции $f(x_0)$, если при любом достаточно малом $\delta>0$ выполняются условия: $f(x_0 - \delta) < f(x_0)$ и $f(x_0 + \delta) < f(x_0)$ ($f(x_0 - \delta) > f(x_0)$ и $f(x_0 + \delta) > f(x_0)$).

8. **Необходимое условие** экстремума функции $f(x)$ в точке x_0: $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Достаточное условие экстремума функции $f(x)$ в точке x_0:

(1) $f'(x)$ меняет знак в окрестности точки x_0; (2) $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)\neq 0$.

9. График функции $y=f(x)$ **вогнут** (вверх) на $[a;b]$, если $f''(x_0)>0$, и **выпукл** (вверх), если $f''(x_0)<0$.

Необходимое условие существования **точки перегиба** графика функции $y=f(x)$ при $x=x_0$: $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие существования точки перегиба при $x=x_0$: смена знака $f''(x)$ в окрестности точки x_0.

10. **Дифференциал функции** $y=f(x)$: $dy=y'\Delta x$.

Дифференциал независимой переменной x: $dx=\Delta x$.

Связь dy и Δy: $\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x$, *где* α- бесконечно малая при $\Delta x\to 0$.

11**. Свойства дифференциала:**

1) $d(cu)=cdu$ (c=const), 2) $d(u\pm \upsilon)=du\pm d\upsilon$,

3) $d(u\upsilon)=\upsilon du+ud\upsilon$, 4) $d\left(\frac{u}{\upsilon}\right)=\frac{\upsilon du-ud\upsilon}{\upsilon^2}$.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

ЗАНЯТИЕ 1

Тема занятия: ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Цель занятия: повторить определение производной, таблицу производных; научиться находить производную сложной функции, а также функций, заданных неявно, параметрически.

Для решения задач на занятии надо знать: определение производной функции, ее геометрический и механический смысл; таблицу производных; правила вычисления производной суммы, произведения, частного и сложной функции; правила дифференцирования функций, заданных неявно и параметрически.

Задача 1. Вычислить производную функции $y=3x^2-2x$ непосредственно (по определению).

Решение. По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)-\left(3x_0^2-2x_0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x_0-3\Delta x-2\right)=6x_0-2.$$

Следовательно, для любого x имеем $\left(3x^2-2x\right)'=6x-2.$

Задача 2. Записать уравнение касательной к графику функции $y=3x^2-2x$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 (x_0, y_0) имеет вид: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Для заданной функции: $y_0=f(2)=8;\ f'(x_0)=f'(2)=6\cdot 2-2=10.$

Следовательно, уравнение касательной в точке $M_0\ (2, 8)$ к графику данной функции имеет вид: $y-8=10\,(x-2)$ или $y=10x-12$.

Задача3. Тело движется по закону $S(t)=4t^4-10t^3-t^2+11$ (t - в секундах, S - в метрах). Найти скорость движения тела через 2 секунды после начала движения.

Решение. Скорость движения вычисляется по формуле $V(t)=S'(t)$.

Получаем, $S'(t)=16t^3-30t^2-2t$; $V(2)=S'(2)=4$ (м/с),

$S''(t)=48t^2-60t-2$; $a(2)=S''(2)=70$ (м/с^2)

Задача 4. Вычислить производные функций:

а) $y=x^5-4x^3+2x-3;$ б) $y=\dfrac{1}{x^2}-2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3;$

в) $y=x^7\cdot e^x;$ г) $y=\dfrac{x^3}{\sin x}$.

Решение. Вычисления выполним, применяя правила дифференцирования и таблицу производных.

а) $\left(x^5-4x^3+2x-3\right)'=\left(x^5\right)'-\left(4x^3\right)'+(2x)'-(3)'=5x^4-12x^2+2.$

б) $y=\dfrac{1}{x^2}-2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3;\ y'=-2x^{-3}-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^{-1/2}-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-3/2}=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

в) $y'=\left(x^7\cdot e^x\right)'=\left(x^7\right)'\cdot e^x+x^7\cdot\left(e^x\right)'=7x^6\cdot e^x+x^7\cdot e^x=e^x x^6(x+7).$

г) $y'=\dfrac{\left(x^3\right)'\sin x-x^3(\sin x)'}{\sin^2 x}=\dfrac{3x^2\sin x-x^3\cos x}{\sin^2 x}.$

Задача 5. Вычислить производную функций:

а) $y=\left(3+2x^2\right)^4;$ б) $y=\ln\cos x^2;$ в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x};$

г) $y=tg\dfrac{x}{1+x};$ д) $y=\sin\left(x^2+2\right).$ е) $y=4^{\cos x}\cdot arctg\,2x.$

Решение. а) Функцию $y=\left(3+2x^2\right)^4$ можно записать как сложную функцию в виде $y=u^4$, где $u=3+2x^2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y'=y'_u\cdot u'_x=4u^3\cdot u_x{}'=4\left(3+2x^2\right)^3\cdot\left(3+2x^2\right)'=16\left(3+2x^2\right)^3\cdot x.$

б) $y'=\dfrac{1}{\cos x^2}\cdot(\cos x^2)'=\dfrac{1}{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot(x^2)'=-\dfrac{\sin x^2}{\cos x^2}\cdot 2x=-\operatorname{tg} x^2\cdot 2x.$

в) Данную функцию можно представить в виде $y=\arcsin u$, где $u=\sqrt{1-3x}$. Тогда $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x{}'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-3x}}\cdot(-3)=\dfrac{-3}{2\sqrt{3x(1-3x)}}.$

г) $y'=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x+1}}\cdot\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x+1}}\cdot\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2\cos^2\dfrac{x}{x+1}}.$

д) $y'=\cos\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+2\right)'=2x\cos\left(x^2+2\right).$

е) $y'=(4^{\cos x})'\cdot\operatorname{arctg} 2x+4^{\cos x}\cdot(\operatorname{arctg} 2x)'=$

$=4^{\cos x}\ln 4\cdot(\cos x)'\cdot\operatorname{arctg} 2x+4^{\cos x}\cdot\dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'=$

$=-4^{\cos x}\cdot\ln 4\cdot\sin x\cdot\operatorname{arctg} 2x+4^{\cos x}\cdot\dfrac{2}{1+4x^2}.$

Задача 6. Вычислить производные функций:

а) $y=ctg^2x+2\ln(\sin x)$; б) $y=arctg\sqrt{9x^2-1}$;

в) $y=3^{\cos^2x-2\cos x}$; г) $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$.

Решение. а) Применим правила дифференцирования суммы и сложной функции:

$$y'=\left(ctg^2x\right)'+2(\ln(\sin x))'=2ctgx\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)+2\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=2ctgx\left(1-\frac{1}{\sin^2x}\right)=-2ctg^3x.$$

б) $\left(arctg\sqrt{9x^2-1}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(9x^2-1\right)}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{9x^2-1}}\cdot 9\cdot 2x=\dfrac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}.$

в) $y'=3^{\cos^2x-2\cos x}\cdot\ln 3\cdot\left(\cos^2x-2\cos x\right)'=$

$$=3^{\cos^2x-2\cos x}\cdot\ln 3(-2\cos x\cdot\sin x+2\sin x)=3^{\cos^2x-2\cos x}\cdot\ln 3\cdot 2\sin x(1-\cos x).$$

г) $y'=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)'=\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}ctg\dfrac{x}{2}.$

Задача 7. Вычислить производные функций:

а) $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2\sqrt{(x+3)^3}}}$; в) $y=x^{\ln x}$.

Решение. а) Данная функция является степенно-показательной. Найдем сначала логарифм данной функции: $\ln y=\sin x\cdot\ln\left(x^2+1\right)$.

Продифференцируем полученное равенство по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\sin x\frac{2x}{x^2+1},$$

откуда: $$y'=y\cdot(\ln y)'=\left(x^2+1\right)^{\sin x}\left[\cos x\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right].$$

Замечание. Этот же результат можно получить, составив сумму производных данной функции, как производных от степенной и показательной функций отдельно.

б) Так как дифференцирование данной дроби усложнено за счет вида ее знаменателя, то предварительно прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{2}{3}\ln(x+2)-\frac{3}{2}\ln(x+3).$$

Дифференцируя обе части равенства, получаем:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3}\frac{1}{x+2}-\frac{3}{2}\frac{1}{x+1},$$

откуда: $$y'=y(\ln y)'=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2\sqrt{(x+3)^3}}}\left[\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}\right].$$

в) Производную данной функции найдем как сумму двух производных, одна из которых равна производной этой функции, вычисленной как производная степенной функции, а вторая - производной этой функции, вычисленной как производная показательной функции:

$$y'=\ln x\cdot x^{\ln x-1}+x^{\ln x}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}=2x^{\ln x-1}\cdot\ln x.$$

Задача 8. Вычислить производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной неявным способом: $xy = arctg\ (x / y)$.

Решение. Продифференцируем равенство, считая, что x – аргумент ($x' = 1$), а y - функция от x:

$$x'y+xy'=\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{x'y-xy'}{y^2},\ y+xy'=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2},\ y+xy'=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}y'.$$

Откуда, разрешив относительно y', получаем:

$$y' = \frac{y - x^2 y - y^3}{x^3 + xy^2 + x} = \frac{y\left(1 - x^2 - y^2\right)}{x\left(1 + x^2 + y^2\right)}.$$

Задача 9. Написать уравнение касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$ в точке $M_0\ (3;\ 8)$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, (1) где $x_0 = 3$, $y_0 = 8$.

Вычислим $f' = (x_0)$, дифференцируя обе части уравнения эллипса и разрешая полученное равенство относительно y': $\frac{2x}{25} + \frac{2yy'}{100} = 0$, откуда $y' = -\frac{2x}{y}$, $f'(3) = -\frac{2 \cdot 3}{8} = -\frac{3}{4}$.

Уравнение искомой касательной: $y - 8 = -\frac{3}{4}(x - 3)$ или $3x + 4y - 41 = 0$.

Уравнение нормали: $y - 8 = \frac{4}{3}(x - 3)$ или $4x - 3y + 12 = 0$.

Задача10. Вычислить $\frac{dy}{dx}$ для функции, заданной следующими параметрическими уравнениями: $x = t\ \ln t$, $y = t^3 - 4t^2 + t$.

Решение. Воспользуемся формулой: $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Для этого найдем x'_t и y'_t : $x'_t = \ln t + 1$, $y'_t = 3t^2 - 8t + 1$.

Следовательно, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 - 8t + 1}{\ln t + 1}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача11. Вычислить производные функций:

а) $y = \log_2 \sin^2 x$; б) $y = x^{\sin x}$; в) $y = 5e^{-x^2}$.

Ответы: а) $\frac{2}{\ln 2} ctgx$; б) $\sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot \cos x$; в) $-10xe^{-x^2}$.

Задача12. Для данной функции найти значение её производной в указанной точке x_0.

1) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} - x^{-3}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$, $x_0 = \sqrt{\pi}$; 4) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

Ответы содержатся среди чисел $-3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{\pi^2}{72}, \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{6}, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}, 5$.

Задание на самоподготовку: повторить правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$; повторить таблицу производных.

З А Н Я Т И Е 2

Тема занятия: ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Вычисление пределов по правилу Лопиталя

Цель занятия: научиться вычислять пределы, применяя правило Лопиталя.

Для решения задач на занятии нужно знать: теоремы о пределах; правило Лопиталя; таблицу производных.

Задача 1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^n e^{-x}$.

Решение. а) При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби являются бесконечно малыми функциями (неопределенность вида [0/0]), для которых требования теоремы Лопиталя выполнены. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-2x^2-x+2\right)'}{\left(x^3-7x+6\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}=(-2)/(-4)=1/2.$$

б) Правило Лопиталя при вычислении данного предела неприменимо, так как при $x\to 1$ числитель стремится к 1, а знаменатель - к 0. Предел вычисляется непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{x^2}=\left[\frac{1-0}{0}\right]=\infty.$$

в) Здесь неопределенность вида [0/0] . Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Здесь правило Лопиталя применили дважды.

г) Применим правило Лопиталя три раза:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{6x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{6}=\infty.$$

д) Применим правило Лопиталя n раз:

$$\lim_{x\to +\infty}x^n e^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=$$

$$=\ldots=\lim_{x\to +\infty}\frac{n\cdot(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{e^x}=0.$$

Задача 2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+3x+1\right)\cdot e^{-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;   г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$..

Решение. а) Здесь неопределенность вида $[\infty\cdot 0]$.

Преобразовав функцию $(x^2+3x+1)\cdot e^{-2x}$ в частное, приходим к неопределенности вида $[\infty/\infty]$, к которой применяем правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+1)\cdot e^{-2x}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{e^{2x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{2e^{2x}}=\left[\dfrac{4}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{4e^{2x}}=0.$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-1/x}{\ln x+(x-1)/x}=\dfrac{1}{0}=\infty.$

Здесь предварительно функцию преобразовали в частное, сложив дроби; неопределенность вида $[\infty-\infty]$ свели к виду $[0/0]$, к которому применили правило Лопиталя.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1/x}=\left[\dfrac{1}{1}\right]=1.$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2\cos 2x}=\left[\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{1}{2}.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$ (Ответ: 0);   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$ (Ответ: 1/3).

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$ (Ответ: 2/3);   г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ (Ответ: 2).

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ (Ответ:3/2);   е) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\,ctgx$ (Ответ:1).

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)$ (Ответ: 1);   з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$ (Ответ: 0).

Задание на самоподготовку: повторить правила исследования функции на экстремум, на выпуклость (вогнутость).

З А Н Я Т И Е 3

Тема занятия: ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Цель *занятия:* изучить приложения производной к решению практических задач, к исследованию функций на возрастание и убывание, на экстремум, на изучение характера выпуклости графика функций.

Для решения задач на занятии нужно знать: признаки возрастания и убывания функции; необходимые и достаточные условия экстремума; алгоритм вычисления экстремума; признаки выпуклости (вогнутости) графика функции, точек перегиба.

Задача 1. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; б) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

в) $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$; г) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; д) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение. Найдем экстремумы каждой функции по следующему алгоритму:

а) Функция определена на всей числовой оси. Найдем y' и критические точки данной функции:

$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$; $y' = 0$ при $x = 1$.

Так как $y' = 3(x-1)^2 \geq 0$ при любом x, то при переходе через критическую точку $x = 1$ производная y' не меняет знак. Достаточные условия экстремума для этой функции не выполняются; функция не имеет экстремума.

б) Функция определена на всей числовой оси, $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Производная данной функции не обращается в нуль, однако при $x = 1$ производная y' не существует. Следовательно, $x = 1$ является критической точкой. Легко убедиться, что y' меняет знак при переходе через точку $x = 1$ с минуса на плюс: $y_{\min} = y(1) = 0$.

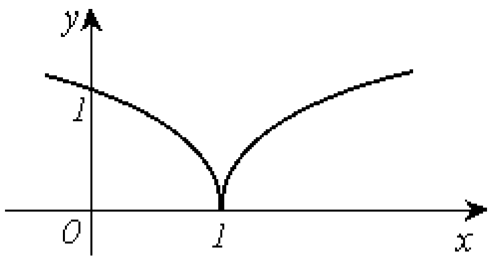

Рис. 1.

График данной функции представлен на рис. 1, из которого видно, что в точке $x = 1$ функция достигает минимума. Экстремум такого рода называют ***острым*** экстремумом.

в) Функция определена при любом x; $y' = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$, критические точки $x = 0$, $x = 3$.

x	$(-\infty;0)$	$x_1 = 0$	$(0;3)$	$x_2 = 3$	$(3;+\infty)$
y'	-	0	-	0	+
y	$\searrow$	2	$\searrow$	11	$\nearrow$

Из таблицы видно, что достаточные условия экстремума выполняются только в одной критической точке: $y_{\min} = y(3) = 11$.

г) Функция определена при $x \neq 0$; $y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$, $y' = 0$ при $x_{1,2} = \pm 2$.

x	$(-\infty;0)$	$x_1 = -2$	*(-2; 0)*	*x = 0*	(0; 2)	$x_2 = 2$	$(3;+\infty)$
y'	+	0	-	не сущ.	-	0	+
y	↗	-2	↘	не сущ.	↘	2	↗

Имеем: $y_{max} = y(-2) = -2$; $y_{min} = y(2) = 2$.

д) Функция определена при любом *x*; $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $y' = 0$ при *x = 0.*

Легко убедиться, что при переходе через критическую точку *x = 0* производная y' меняет знак с плюса на минус: $y_{max} = y(0) = 1$.

Задача 2. Исследовать на выпуклость (вогнутость) кривые:

а) $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса); б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Решение. Будем проводить исследование по следующему алгоритму:

а) Найдем область определения функции: функция $y = e^{-x^2}$ определена на всей числовой оси.

Найдем нули второй производной: $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$; $y'' = 0$ при $2x^2 - 1 = 0$, то есть при $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Разобьем область определения функции точками $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутки. Исследуем на знак $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$; на каждом промежутке, оформив таблицу:

x	$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$
y''	+	0	-	0	+
y	◡	$e^{-1/2}$	◠	$e^{-1/2}$	◡

Из таблицы видно, что на промежутке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ кривая $y = e^{-x^2}$ выпукла (или выпукла вверх), а на остальных двух промежутках кривая вогнута.

При этом в окрестностях точек $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ вторая производная y'' меняет знак, то есть точки $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ являются точками перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

б) Функция определена при любом *x*;

$y'=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$; $y''=\frac{-2x(1+x^2)^2-2\cdot 2x(1-x^4)}{(1+x)^4}=4\frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$; $y''=0$ при $x_1=0;\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$.

Легко убедиться, что в окрестности каждой из этих точек y'' меняет свой знак. Точки перегиба кривой: *0(0;0),* $A_1\left(-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$**.**

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ (Ответ: $y_{\max}=y(0)=-2;\ y_{\min}=y(2)=0$);

б) $y=x-\ln(1+x)$ (Ответ: $y_{\min}=y(0)=0$).

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[-1;3]$**.** (Ответ: $m=f(1)=-2;\ M=f(3)=21$).

Задача 5. Найти точки перегиба кривых:

а) $y=x^3-6x^2+12x+4$ (Ответ: *(2; 12)*); б) $y=arctgx-x$ (Ответ: *0(0; 0)*).

Задача 6. Найти экстремумы функции $y=(x+1)^2(x-2)$ и точки перегиба ее графика. (Ответ: $y_{\max}=y(-1)=0;\ y_{\min}=(1)=-4;$ точка перегиба *A (0; -2)*).

Задача 7. Найти промежутки возрастания функции:

1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1;$ 2) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 3) $y = x^2 e^{-x/2};$

4) $y=e^{-x^2}$; 5) $y = x^2 + x + 1;$ 6) $y = \cos x - x.$

Ответы содержатся среди следующих: 1) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 4) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 5) *(-1; 1);* 6) *(0; 4);* 7) $(e^{-1};+\infty)$; 8) $(0;+\infty)$; 9) $(-\infty;0)$; 10) нет промежутков возрастания.

Задача 8. Найти промежутки убывания функций задачи 7.

Ответы содержатся среди следующих: 1) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 3) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$; 5) $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$; 6) $(0;e^{-1})$; 7) $(-\infty;0)$, 8) $(0;+\infty)$; 9) $(-\infty;+\infty)$; 10) нет промежутков убывания.

Задача 9. Найти экстремумы следующих функций:

1) $y = x^2 + x + 1;$ 2) $y = 2x^3 - 3x^2;$ 3) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7;$

4) $y = 4x - x^4;$ 5) $y=-x^2\sqrt{x^2+2};$ 6) $y=e^{3-6x-x^2}$.

Ответы содержатся среди следующих: 1) $y_{\max} = y(0) = 0$; 2) $y_{\max} = y(-3) = e^{12}$; 3) $y_{\max} = y(1) = 3$; 4) $y_{\min} = y(3) = -47$, $y_{\max} = y(-1) = 17$; 5) $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$;

6) $y_{\min} = y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{\log_7 e}{e}$; 7) $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$; 8) $y_{\min} = y(1) = 0$, $y_{\max} = y(e^2) = 4e^{-2}$;

9) $y_{\min} = y(1) = -1$, $y_{\max} = y(0) = 0$; 10) нет экстремумов.

Задача 10. Найти точки перегиба графиков функции:

1) $y = 3x^3 - x$; 2) $y = \ln(1 + x^2)$; 3) $y = 3x^2 + 2$;

4) $y = e^{-x^2}$; 5) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 6) $y = x^3 + 1$; 8) $y = e^{-\frac{1}{2}\cdot(x^2-1)}$.

Ответы содержатся среди следующих: 1) $(0;1)$; 2) $(0;0)$; 3) при $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) при $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$; 5) $(\pm 1; \ln 2)$; 6) $(b; a)$;; 7) при $x = \pm\frac{1}{2}$; 8) $(-1;1)$; 9) $(1;2)$; 10) нет точек перегиба.

Задание на самоподготовку: повторить схему полного исследования функции.

З А Н Я Т И Е 4

Тема занятия: ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Цель *занятия:* выработать навыки полного исследования функции с построением ее графика.

Для решения задач на занятии нужно знать схему полного исследования функции.

Задача 1. Найти асимптоты графика функции:

а) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$; б) $y = e^{1/x}$; в) $y = e^{-x^2}$; г) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

Решение. Нахождение асимптот кривой (если они имеются) является одним из шагов схемы полного исследования функции.

Если функция имеет точки бесконечного разрыва, то график функции имеет вертикальные асимптоты.

Наклонные асимптоты (невертикальные) имеют вид: $y = kx+b$,

где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$, если последние пределы существуют.

Пределы надо вычислить отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.
Наклонных асимптот может быть не более двух (правая, левая).

а) Вычислим пределы данной функции при $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty;\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty.$$

Так как односторонние пределы при $x\to 1$ бесконечны, то x = 1 - точка бесконечного разрыва; x = 1 – вертикальная асимптота кривой $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$.

Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1,\ k=1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=2,\ b=2;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1,\ \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=2.$$

У кривой $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ правая и левая асимптоты совпадают;

наклонная асимптота задается уравнением $y = x + 2$.

б) Вертикальная асимптота кривой $y=e^{1/x}$ может быть только в точке $x = 0$.

Вычислим пределы: $\lim\limits_{x\to-0}e^{1/x}=\left[e^{-\infty}\right]=0$, $\lim\limits_{x\to+0}e^{1/x}=\left[e^{+\infty}\right]=\infty$.

В точке $x = 0$ функция $y=e^{1/x}$ имеет бесконечный разрыв. Поэтому $x = 0$ - уравнение вертикальной асимптоты графика данной функции.

Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}}{x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0,\ b=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}=e^0=1;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1/x}}{x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0,\ b=\lim_{x\to-\infty}e^{1/x}=e^0=1.$$

Следовательно, данная кривая имеет одну асимптоту y = 1.

Эту асимптоту называют ***горизонтальной.***

в) Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, вертикальных асимптот график функции не имеет.

Найдем предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-x^2}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0;$ $y=0$ - горизонтальная асимптота.

г)Данную функцию можно записать в виде $y=\frac{1}{1-1/x^2}$, откуда видно, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1$, то есть $y = 1$ - горизонтальная асимптота графика функции.

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to\pm1\\|x|>1}} \dfrac{1}{1-1/x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pm1\\|x|<1}} \dfrac{1}{1-1/x^2} = -\infty$ - то график данной функции имеет две вертикальные асимптоты (см. рис. 2).

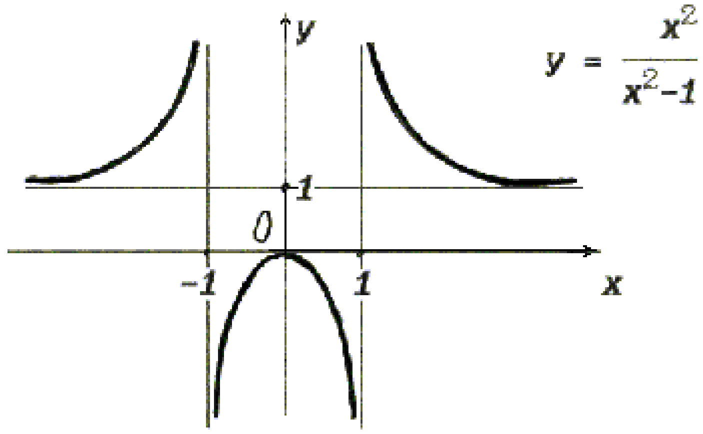

Рис. 2

Задача 2. Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$; б) $y = e^{1/x}$.

Решение. Выполним исследование функций по схеме исследования.

а) Данная функция не определена при $x = 1$. В предыдущей задаче для этой функции установлено, что $x = 1$ - вертикальная асимптота, а $y = x + 2$ - наклонная асимптота графика функции.

Очевидно, что данная функция не является ни четной, ни нечетной , ни периодической.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

если $x = 0$, то $y = 0 \to 0(0, 0)$ лежит на графике; если $y = 0$, то $x = 0$, то есть $0(0,0)$ единственная точка пересечения графика функции с осями координат.

Найдем промежутки монотонности функции:

$y' = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$; критические точки первого рода $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

x	$(-\infty;0)$	$x_1 = 0$	$(0; 1)$	$x_2 = 1$	$(1; 3)$	$x_3 = 3$	$(3;+\infty)$
y'	+	0	+	не сущ.	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	не сущ.	$\searrow$	27/4 min	$\nearrow$

Найдем промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба:

$$y''=\left(\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}\right)'=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-3(x-1)^2(x^3-3x^2)}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4};$$

$x_1=0$, $x_2=1$- критические точки второго рода.

x	$(-\infty;0)$	$x_1=0$	*(0;1)*	$x_2=1$	$(0;+\infty)$
y''	+	*0*	+	не сущ.	+
y		*0*		не сущ.	

Из таблиц видно, что функция имеет минимум при *x = 0* $\left(y_{\min}=y(0)=\dfrac{27}{4}\right)$, график функции имеет одну точку перегиба *0(0; 0)*.

В задаче 1 а) были найдены асимптоты кривой $y=\dfrac{x^3}{x-1}$

(x = 1 и *y = x + 2)*.

Выявленные свойства функции позволяют построить ее график (рис. 3).

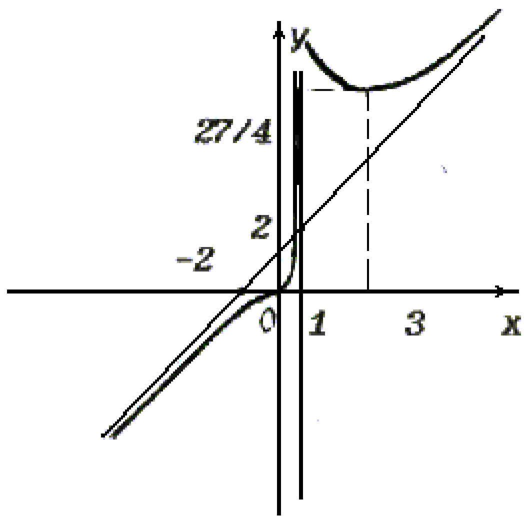

Рис. 3

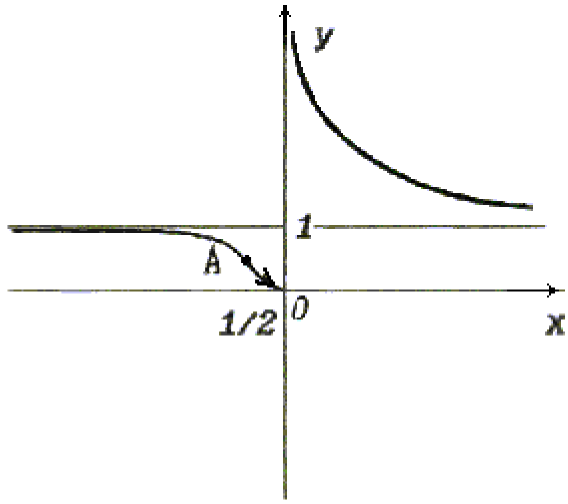

Рис. 4

б) Данная функция определена при $x\neq 0$.

Вычислим пределы функции при стремлении *x* к границам области определения:

$\lim\limits_{x\to 0-0} e^{1/x}=\left[e^{-\infty}\right]=0$; $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{1/x}=\left[e^{+\infty}\right]=\infty$; *x = 0* - вертикальная асимптота;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=\left[e^{0}\right]=1\to y=1$ - горизонтальная асимптота графика функции.

Исследуем функцию на возрастание (убывание), экстремум:

$y'=e^{1/x}\left(-1/x^2\right)<0$ функция убывает во всей области определения.

Так как $y''=e^{1/x}\cdot\frac{1+2x}{x^4}=0$ при $x = -1/2$, и y'' меняет знак с минуса на плюс в окрестности точки $x = -1/2$, то точка $A\left(-1/2;e^{-2}\right)$ является точкой перегиба графика функции. При $x > 0$ $y'' > 0$, поэтому на промежутке $(0;+\infty)$ график функции имеет вогнутость. Примерный график функции приведен на рис.4.

Задача3. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график. Исследование функции и построение графика рекомендуется провести по следующей схеме:

1) найти область определения функции $D(y)$;

2) найти точки пересечения графика функции с осями координат.

3) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в точках разрыва;

4) найти асимптоты графика функции;

5) найти точки экстремума функции и определить интервалы её монотонности;

6) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика;

7) построить график, используя результаты предыдущих исследований;

8) найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке$[\alpha;\beta]$.

$$y=\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2},\ \alpha=-5,\ \beta=-2.$$

Решение.

1. Область определения: $D(y)=\{x\in(-\infty;-1)\bigcup(-1;+\infty)\}$.

2.Точки пересечения графика функции с осями координат.

Для нахождения точек пресечения с осью Оx возьмем у=0 и решим уравнение $\frac{x^3}{2(x+1)^2}$=0. Получим x=0, то есть точкой пересечения графика функции с осью 0х является точка O(0;0). Эта же точка является точкой пересечения с осью 0y, так как $y(0)=0$.

3. Исследование на непрерывность и классификация точек разрыва. Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x=-1$. Вычислим её односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty;\ \lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty;$$

Таким образом, точка $x=-1$ является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x=-1$– вертикальной асимптотой графика.

4. Исследование графика на наличие наклонных асимптот:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3(1+\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}-\frac{x}{2})=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2\cdot(x+1)^2}=-1.$$

Таким образом, прямая $y=\frac{1}{2}x-1$ – наклонная асимптота графика.

5. Исследование на экстремум и промежутки монотонности.

$$y'=\frac{3x^2\cdot 2(x+1)^2-x^3\cdot 2\cdot 2(x+1)}{4\cdot(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2\cdot(x+1)^3};$$

$$\frac{x^2(x+3)}{2\cdot(x+1)^3}=0; \quad x^2(x+3)=0; \quad x_{1,2}=0,\ x_3=-3.$$

x	(–∞;–3)	–3	(–3; –1)	–1	(–1;0)	0	(0;+∞)
$f'(x)$	+	0	–	Не.сущ	+	0	+
$f(x)$	↗	max	↘		↗	0	↗

$$y_{\max}=y(-3)=-\frac{27}{8}-3\frac{3}{8}\approx-3{,}5.$$

6. Исследование графика на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

$$y''=\frac{(3x^2+6x)\cdot 2(x+1)^3-x^2(x+3)\cdot 2\cdot 3(x+1)^2}{4(x+1)^6}=$$

$$=\frac{2\cdot 3x(x+1)^2((x+2)\cdot(x+1)-x(x+3))}{4(x+1)^6}=\frac{3x}{(x+1)^4};\quad \frac{3x}{(x+1)^4}=0;\ x=0.$$

x	(–∞;–1)	–1	(–1;0)	0	(0;+∞)
$f''(x)$	—	Не сущ.	—	0	+
$f(x)$	∩		∩	0	∪

O(0;0) – точка перегиба графика функции.

7. Построение графика.

График имеет вид, представленный на рис 5.

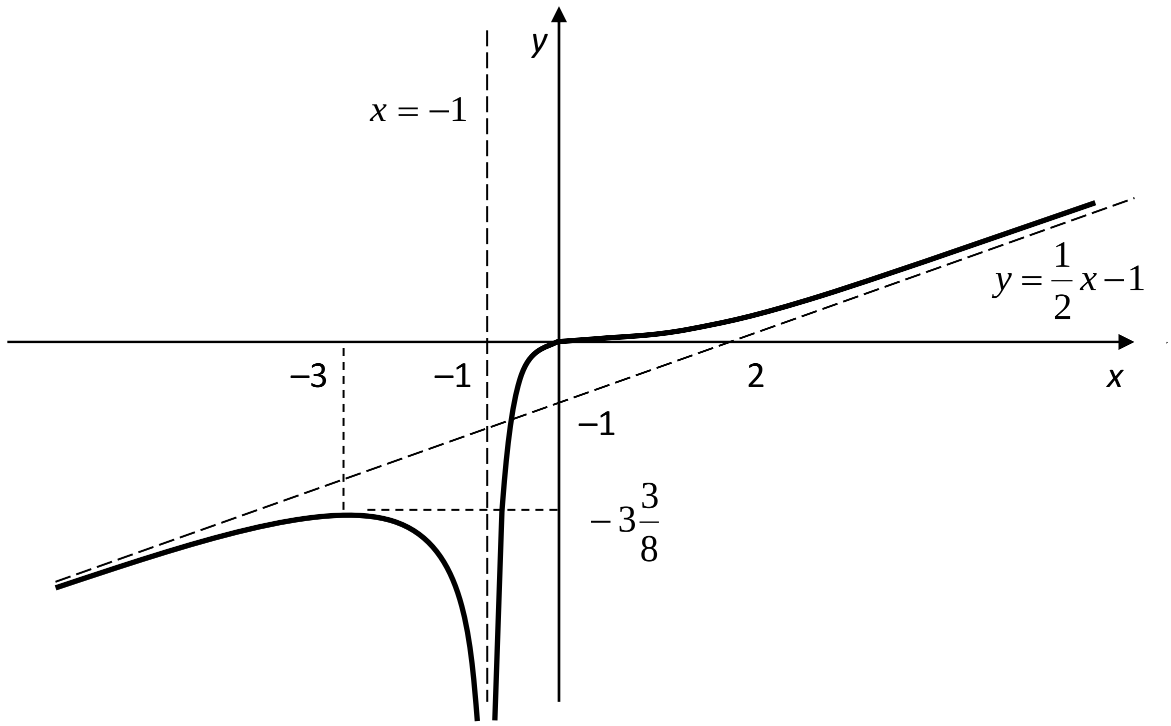

Рис.5

8. Найдем наибольшее и наименьшее значения заданной функции на отрезке [–5; –2]. Для этого подсчитаем значения функции на концах этого отрезка, в стационарных точках, попавших на отрезок, и сравним результаты:

$$y(-5)=-\frac{125}{32}=-3\frac{29}{32};\ y(-3)=-3\frac{3}{8};\ y(-2)=-4.$$

Итак, $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)=-4$; $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)=-3\frac{3}{8}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Найти асимптоты кривых:

а) $y=\frac{x+1}{x}$ (ответ: *x = 0* и *y = 1*);

б) $y=\frac{x^2}{x+1}$ (ответ: *x = -1* и *y = x - 1*);

в) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ (ответ: *y = 1*).

Задача 6. Найти асимптоты графиков функции:

1) $y=\frac{x}{x^2-4x+3}$; 2) $y=\frac{x^2}{x^2-4}$; 3) $y=\frac{x^3}{9+x^2}$; 4) $y=\frac{1}{(x-2)^2}$; 5) $y=\sqrt{x^2-1}$;

6) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$; 7) $y=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$; 8) $y=x-2+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$; 9) $y=\frac{1}{1-e^x}$.

Ответы содержатся среди следующих: 1) *y = 2*; 2) *y = x*; 3) $x=\pm 2$, *y =1*; 4) *y = -1*; *y = 1*; 5) *x = 2, y = 0*; 6) *y = -2, y = 2x – 2*; 7) *x = 0, y = 0, y = 1*; 8) *y = x*, *y = -x*; 9) *y = x, y = -x*, $x=\pm 1$; 10) *x = 1, x=3, y = 0.*

Задача 8. Построить график функции:

а) $y=x^3+\frac{x^4}{4}$; б) $y=x^3+6x^2+9x$;

в) $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$; г) $y=\frac{x^2}{x-2}$.

Задание на самоподготовку: изучить правила вычисления дифференциала суммы, произведения, частного;

подготовиться к контрольной работе, повторив решения задач по этой теме.

ЗАНЯТИЕ 5

Тема занятия: ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Цель занятия: повторить определение дифференциала функции; научиться применять дифференциал функции к приближенным вычислениям значений функции.

Для решения задач на занятии надо знать: определение дифференциала функции, правила вычисления дифференциала суммы, произведения, частного.

Задача 1. Вычислить приращение и дифференциал функции $y = 5x + x^2$ при $x = 2,\ \Delta x = 0{,}001.$ Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции дифференциалом.

Решение. Вычислим приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 5(x+\Delta x) + (x+\Delta x)^2 - (5x + x^2) = 5\Delta x + 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Вычислим дифференциал функции: $dy = y'\Delta x = (5+2x)\Delta x.$

При $x = 2,\ \Delta x = 0{,}001$ получаем:

$$\Delta y = 5\cdot 0{,}001 + 2\cdot 2\cdot 0{,}001^2 + 0{,}001 = 0{,}009001,\ dy = (5 + 2\cdot 2)\cdot 0{,}001 = 0{,}009.$$

Подсчитаем погрешности приближенной формулы $\Delta y \approx dy$: абсолютная погрешность $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}000001;$ относительная погрешность $\sigma = \dfrac{\Delta}{\Delta y}\cdot 100\% = 0{,}01\%.$

Задача 2. Вычислить дифференциалы функций:

а) $y = \dfrac{x}{1-x};$ б) $y = \arcsin\dfrac{x}{a};$ в) $y = e^{-x^2};$ г) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

Решение. Воспользуемся инвариантной формой дифференциала $dy = f'(x)dx.$

а) $dy = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' dx = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}dx = \dfrac{1}{(1-x)^2}dx.$ б) $dy = \left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)' dx = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx.$

в) $dy = \left(e^{-x^2}\right)' dx = -2xe^{-x^2}dx.$ г) $dy = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)' dx = -\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}dx.$

З а м е ч а н и е. Если x - независимая переменная величина, то $\Delta x = dx.$

Задача 3. Вычислить приближенно:

а) $y = e^{1-x^2}$ при $x = 1,05;$ б) $\sqrt[3]{8{,}03};$ в) $\sin 31^0.$

Решение. Воспользуемся формулой:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

а) Имеем $f(x+\Delta x) \approx e^{1-x^2} - 2xe^{1-x^2}\Delta x,$ откуда при $x = 1,\ \Delta x = 0{,}05$ получаем $f(1{,}05) \approx e^0 - 2\cdot 1\cdot e^0\cdot 0{,}05 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$

б) $\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x,$ откуда при $x = 8,\ \Delta x = 0{,}03,$ получаем $\sqrt[3]{8{,}03} \approx \sqrt[3]{8} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}0{,}03 = 2 + \dfrac{0{,}03}{12} = 2{,}0025.$

в) $\sin(x+\Delta x)\approx \sin x+\cos\Delta x,$ откуда при $x=30^0=\frac{\pi}{6},\ \Delta x=1^0=\frac{\pi}{180}\approx 0,017$ получаем $\sin 31^0\approx \sin 30^0+\cos 30^0\cdot 0,017\approx 0,5+0,866\cdot 0,017=5,15.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. Найти производную и дифференциал функции

1) $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x};$

2) $y=\frac{x\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}};$

3) $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2};$

4) $y=\frac{9}{5(x+2)^5}-\frac{3}{(x+2)^4}+\frac{2}{(x+2)^3}-\frac{1}{2(x+2)^2};$

5) $y=\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right);$

6) $y=\ln arctgx.$

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение производной функции. Каков ее механический и геометрический смысл?
2. Какой класс функций шире: непрерывных в точке или дифференцируемых в этой же точке? Приведите пример.
3. Для каких из нижеприведенных функций при нахождении производных целесообразно применить логарифмическое дифференцирование:

$$y=(2x)^x;\ \ y=2^x;\ \ y=\sqrt[x]{x-1};\ \ y=\frac{2}{(x-1)^2}+\sqrt{x-1};\ \ y=x^{\sin x};\ \ y=\sin x^2\ ?$$

4. Для каких точек графика функций dy больше Δy ?
5. Для каких точек графика функций dy меньше Δy ?
6. Для каких функций дифференциал тождественно равен приращению?
7. Запишите формулу вычисления производной функции, заданной параметрически.
8. Сформулируете теорему Лагранжа. Каков геометрический смысл этой теоремы?
9. Найдите точку C, фигурирующую в теореме Лагранжа для функции $y = ax^2 + bx + c$.
10. Перечислите различные типы неопределенностей, для раскрытия которых может быть использовано правило Лопиталя. Приведите примеры.

11. Покажите, что функции $y=e^x$ и $y=x+\cos x$ возрастают на любом промежутке.

12. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции, дифференцируемой на отрезке $[a,b]$?

13. Сформулируйте два правила нахождения экстремума функции.

14. Приведите пример, из которого следует, что из выполнения условия $y'=0$ в точке x_0 не следует существование экстремума в этой точке.

15. Дайте определение дифференциала функции.

16. Приведите инвариантную форму записи дифференциала. В чем состоит свойство инвариантности дифференциала.

17. В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?

18. Как находятся промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой? Приведите пример.

19. Как находятся вертикальные и невертикальные асимптоты кривой, заданной уравнением $y = f(x)$?

20. Изложите общую схему исследования функции.

5. ЗАДАНИЕ

Задача 1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

1. а) $y=(5x^2+4\sqrt[4]{x^3}+6)^5$, б) $y=\dfrac{4x+5\cos x}{\sqrt[6]{1+x^6}}$,

   в) $y=2^{tg\,x}\cdot\sin 3x$, г) $y=\ln ctg\dfrac{x}{3}$.

2. а) $y=(2x^4-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}+2)^3$, б) $y=\dfrac{2-5x^3}{arctg\,2x}$,

   в) $y=3^{\sin 2x}\cdot\arccos x$, г) $y=\ln tg\,4x$.

3. а) $y=(\dfrac{1}{6}x^8+8\sqrt[8]{x^3}-1)^3$, б) $y=\dfrac{2x-tgx}{\sqrt{x^3+3x-2}}$,

   в) $y=2^{arctg\,x}\cdot\sin 3x$, г) $y=ctg\ln\dfrac{x}{3}$.

4. а) $y=(\dfrac{1}{5}x^5-3\sqrt[3]{x^4}-4)^5$, б) $y=\dfrac{\arccos 5x}{3+7x^3}$,

в) $y=3^{\cos 3x}\cdot \sin 3x$, г) $y=tg\, ln\, 4x$.

5. а) $y=(3x^7+5\sqrt[5]{x^2}-3)^3$, б) $y=\dfrac{cos\,3x+3x}{\sqrt{x^2+3}}$,

в) $y=2^{\arcsin x}\cdot tg\, x$, г) $y=ln\sqrt{2x^2-2}$.

6. а) $y=(5x^4-\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}+3)^2$, б) $y=\dfrac{\sqrt{1-5x^2}}{5^x+sin\,x}$,

в) $y=5^{tg 2x}\cdot arccos\, x$, г) $y=ln\,\sqrt{3-5x^3}$.

Задача 2. Найти скорость и ускорение движения тела в момент времени t_0, если закон движения задан формулой $S=S(t)$.

1. $S(t)=3t^4-4t^3+2t^2-3$, $t_0=3$.
2. $S(t)=3t^4-2t^2-t+3$, $t_0=2$.
3. $S(t)=2t^4+3t^3-6t^2-2$, $t_0=1$.
4. $S(t)=4t^4-10t^3+80t-3$, $t_0=2$.
5. $S(t)=t^4+3t^3-20t^2+4$, $t_0=3$.
6. $S(t)=t^4-2t^3+3t^2-1$, $t_0=2$.

Задача 3. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[\alpha;\beta]$.

1. $y=\dfrac{4+x}{x^2}$, $\alpha=-10$, $\beta=-4$.
2. $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$, $\alpha=0$, $\beta=2$.
3. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, $\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\beta=\dfrac{1}{2}$.
4. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{5}{3}$.
5. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$, $\alpha=3$, $\beta=7$.
6. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x}$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 22-е, переработанное.- СПб.: Изд-во «Профессия», 2001. – 432с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. Издание 4-е, испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 304 с.
3. Демидович В.П. Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов). - М., 1972.
4. Кондауров М.Т. Практические занятия по высшей математике, ч.1. Учебное пособие для вузов. – Н.Новгород: ВГИПА, 2004. - 130 с.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. - М., 1987.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. - М., 1986.
7. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. – 309 с.
8. Тарасова Н.А. Высшая математика для агроинженерных специальностей в примерах и задачах: учебное пособие. – Нижегородская гос.с.-х. академия. – Н.Новгород, 2007. – 197 с.

Надежда Анатольевна **Мамаева**
Елена Анатольевна **Таланова**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ТЕМУ "ПРОИЗВОДНАЯ"

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.