МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ (часть 2)

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02. 03. 02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
01. 03. 02 «Прикладная математика и информатика»
09. 03. 03 «Прикладная информатика»
09. 03. 04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород
2015

УДК 512.14+512.622(077)
ББК В142(Я73)
З-15

З-15 ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ (ЧАСТЬ 2) Авторы: Чирков А.Ю., Киселева Л.Г., Веселов С.И., Золотых Н.Ю., Шевчук Е.А., Сидоров С.В. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015.- 80 с.

Рецензент: к. т. н., доцент Васин Д. Ю.

В данном учебно-методическом пособии собраны задачи по темам: решение систем линейных уравнений, алгебра матриц, определитель матрицы, обратная матрица. Приводятся основные определения и теоремы. К типовым задачам, номера которых помечены *, приведены подробные решения. Имеется список типовых контрольных работ.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса факультета ВМК, и может быть использовано школьниками старших классов, занимающихся научной работой в рамках НОУ.

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии факультета ВМК ННГУ,
к.т.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 512.14+512.622(077)
ББК В142(Я73)

1. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1,\ldots,x_n$ (a_{ij} — коэффициенты при неизвестных, а b_i — свободные члены) над полем P

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Набор элементов $(p_1,\ldots,p_n)$ из поля P называется ***частным решением системы линейных уравнений***, если при его подстановке вместо неизвестных ($x_1 = p_1$, $x_2 = p_2,\ldots x_n = p_n$), все уравнения системы обращаются в тождества. Две системы уравнений называются ***эквивалентными***, если у них совпадают множества решений. Преобразование системы линейных уравнений, переводящее ее в эквивалентную систему, называется ***равносильным***.

Элементарными преобразованиями системы уравнений называются следующие операции:

- *умножение уравнения на ненулевую константу;*
- *перестановка уравнений;*
- *прибавление к уравнению другого уравнения, умноженного на константу.*

Справедливо предложение: *Элементарные преобразования системы уравнений являются равносильными.*

Метод Гаусса (***метод исключения неизвестных***) состоит в последовательном выражении неизвестных с последующим исключением их из остальных уравнений с помощью элементарных преобразований. Пусть из первого уравнения можно выразить неизвестную x_i (для этого, коэффициент a_{1i} должен быть отличным от нуля). Исключение неизвестной x_i в уравнении s ($s > 1$) сводится к вычитанию из него первого уравнения, умноженного на коэффициент a_{si}/a_{1i}. Уравнение s примет вид: $(a_{s1} - a_{11}a_{si}/a_{1i})x_1 + \cdots + (a_{sn} - a_{1n}a_{si}/a_{1i})x_n = b_s - b_1 a_{si}/a_{1i}$. Коэффициент при неизвестной x_i в полученном уравнении равен $a_{si} - a_{1i}a_{si}/a_{1i} = 0$, и, значит, неизвестная x_i из уравнения s исключена. Исключив неизвестную x_i из всех (кроме первого) уравнений системы, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1i-1}x_{i-1} + a_{1i}x_i + a_{1i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{21}x_1 + \cdots + a'_{2i-1}x_{i-1} + 0x_i + a'_{2i+1}x_{i+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m1}x_1 + \cdots + a'_{mi-1}x_{i-1} + 0x_i + a'_{mi+1}x_{i+1} + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$ здесь $a'_{sj} = a_{sj} - a_{1j}a_{s1}/a_{1i}$ и $b'_s = b_s - b_1 a_{s1}/a_{1i}$. Далее, исходная задача сводится к решению системы $$\begin{cases} a'_{21}x_1 + \cdots + a'_{2i-1}x_{i-1} + a'_{2i+1}x_{i+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m1}x_1 + \cdots + a'_{mi-1}x_{i-1} + a'_{mi+1}x_{i+1} + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$ в которой $m-1$ уравнений и $n-1$ неизвестных. По решению второй системы $(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n)$ находится решение первой системы, а, именно, $x_i = \dfrac{b_1 - a_{11}p_1 - \cdots - a_{1i-1}p_{i-1} - a_{1i+1}p_{i+1} - \cdots - a_{1n}p_n}{a_{11}}$. В процессе исключения неизвестных может встретиться уравнение вида $0 = \beta$ (из которого нельзя выразить неизвестную). Если $\beta \neq 0$, то множество решений системы – пустое. В таком случае систему называют ***несовместной***. Если $\beta = 0$, то уравнение можно вычеркнуть, как не накладывающее никаких ограничений на неизвестные.

Процесс исключения неизвестных, ***называемый прямым ходом метода Гаусса***, остановится, либо когда система несовместна, либо когда из каждого уравнения выражается неизвестное. Во втором случае легко указать решение системы. Для этого, неизвестным, которые не выражаются из уравнений, придадим произвольные значения. Неизвестные, которые выражаются из уравнений, последовательно вычислим (в порядке обратном тому, в котором выражали). Вычисление значений неизвестных ***называется обратным ходом метода Гаусса.***

Матричная форма метода Гаусса. Матрицей называется таблица, составленная из элементов поля (кольца). С системой линейных уравнений связаны матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица из коэффициентов при неизвестных, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $(A \mid b)$ — расширенная матрица системы линейных уравнений. Система линейных уравнений в матричной форме записывается в виде $Ax = b$. Следующие преобразования расширенной матрицы соответствуют элементарным преобразованиям системы линейных уравнений:

- *умножение одной из строк расширенной матрицы на не нулевую константу;*
- *перестановка строк расширенной матрицы;*
- *прибавление к одной из строк расширенной матрицы другой строки, умноженной константу.*

При исключении неизвестных в порядке возрастания их номеров (прямой ход метода Гаусса), либо будет показана несовместность системы линейных уравнений, либо расширенная матрица системы линейных уравнений будет приведена к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a'_{1j_1} & \cdots & a'_{1j_2-1} & a'_{1j_2} & \cdots & a'_{1j_k} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{2j_2} & \cdots & a'_{2j_k} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a'_{kj_k} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \end{array}\right),$$

здесь $k \le m$, т.к. уравнения вида $0 = 0$ - вычеркиваются. неизвестные с номерами $j_1, \ldots, j_k$ выражаются из уравнений, а неизвестным с остальными номерами можно присвоить любые значения. Неизвестные, которые выражают из уравнений, называются ***базисными***, а остальные неизвестные - ***свободными***. Для получения ***частного решения*** свободным неизвестным придают произвольные значения, а вычисление значений базисных неизвестных проводится последовательно, начиная с последнего уравнения и заканчивая первым по формулам: $x_{j_s} = \dfrac{b'_{j_s} - a'_{s\,j_s+1}x_{j_s+1} - \cdots - a'_{sn}x_n}{a'_{s\,j_s}}$.

Метод Гаусса — Жордана (метод полного исключения) позволяет получить общее описание множества решений системы линейных уравнений. В отличие от метода Гаусса исключение неизвестной проводится из всех уравнений (в том числе и из уравнений из которых уже выражены неизвестные), и коэффициент при неизвестной, выражаемой из уравнения, путем умножения уравнения на элемент поля, делают равным 1. Соответственно, расширенная матрица системы линейных уравнений будет приведена к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & a'_{1j_2-1} & 0 & a'_{1j_2+1} & \cdots & 0 & a'_{1j_k+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{2j_2+1} & \cdots & 0 & a'_{2j_k+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{kj_k+1} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \end{array}\right).$$

Общее решение получится, если базисные неизвестные выразить через свободные неизвестные. Для приведенной выше ступенчатой матрицы базисные неизвестные имеют номера $j_1, \ldots, j_k$, и, значит, общее решение можно записать в следующем виде:

$$x=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b_1'\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ b_k'\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+x_{j_1-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+x_{j_1+1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ -a'_{1\,j_1+1}\\ 1\\ \vdots\\ 0\\ -a'_{k\,j_k+1}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ -a'_{1n}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ -a'_{kn}\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

где свободные неизвестные (т.е. неизвестные, номера которых не принадлежат множеству $\{j_1,\ldots,j_k\}$) принимают любые значения из поля P.

Приведем пример построения общего решения методом Гаусса — Жордана системы линейных уравнений $\begin{cases}x_2+x_3+2x_4=1\\ x_1+2x_2+x_4=5\\ 2x_1+x_3+x_4=1\end{cases}$. Составим расширенную матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&2&1\\ 1&2&0&1&5\\ 2&0&1&1&1\end{array}\right)$. Приведем матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду. Для наглядности, проводимые элементарные преобразования над строками будем записывать справа от матрицы.

<table>
<tr><td>1) $\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&2&1\\ 1&2&0&1&5\\ 2&0&1&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}(\mathbf{2})\to(1)\\ (\mathbf{3})\to(2)\\ (\mathbf{1})\to(3)\end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&5\\ 2&0&1&1&1\\ 0&1&1&2&1\end{array}\right)$</td><td>Переставим строки: вторую поставим на место первой, третью - на место второй.</td></tr>
<tr><td>2) $\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&5\\ 2&0&1&1&1\\ 0&1&1&2&1\end{array}\right)(\mathbf{2})-2(\mathbf{1})\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&5\\ 0&-4&1&-1&-9\\ 0&1&1&2&1\end{array}\right)$</td><td>Вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 2.</td></tr>
<tr><td>3) $\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&5\\ 0&-4&1&-1&-9\\ 0&1&1&2&1\end{array}\right)-\frac{1}{4}(\mathbf{2})\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&5\\ 0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{9}{4}\\ 0&1&1&2&1\end{array}\right)$</td><td>Вторую строку умножим на -0,25.</td></tr>
</table>

4) $\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l}(\mathbf{1})-2(\mathbf{2}) \\ \\ (\mathbf{3})-(\mathbf{2})\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right)$	Вычтем из первой и третьей строки вторую строку с соответствующими коэффициентами.
5) $\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right)\frac{4}{5}(\mathbf{3}) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right)$	Третью строку умножим на 0,8.
6) $\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l}(\mathbf{1})-\frac{1}{2}(\mathbf{3}) \\ (\mathbf{2})+\frac{1}{4}(\mathbf{3})\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right)$	Третью строку вычтем из первой и второй с соответствующими коэффициентами.

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, имеет вид: $\begin{cases} x_1 - 1/5\,x_4 = 1 \\ x_2 + 2/5\,x_4 = 2 \\ x_3 + 7/5\,x_4 = -1 \end{cases}$. Положим свободную неизвестную x_4 равной t.

Базисные неизвестные x_1, x_2, x_3 выразим через t: $x_1 = 1 + 1/5t$, $x_2 = 2 - 2/5t$, $x_3 = -1 - 7/5t$, и запишем общее решение $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1/5t \\ 2-2/5t \\ -1-7/5t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \\ -7/5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задачи

1.1. Какие из следующих преобразований системы линейных уравнений являются равносильными:

1) из каждого уравнения вычтем следующее (последнее уравнение не меняется);
2) изменим нумерацию неизвестных;
3) из первого уравнения вычтем второе уравнение, а из второго – первое;
4) к каждому уравнению прибавим предыдущее (к первому прибавим последнее);

5) к каждому уравнению прибавим предыдущее (первое уравнение не меняется);
6) к системе уравнений добавим уравнение, равное сумме всех уравнений;
7) к системе уравнений добавим уравнение $x_1 = 0$.

1.2. Записать систему линейных уравнений в виде матричного уравнения $A \cdot x = b$. Найти общее решение или показать несовместность. Если система совместна, то сделать поверку:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - 10x_2 = 11 \end{cases}$;
2) $\begin{cases} x_2 = 1 \\ 2x_2 = 2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}$;
4) $\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$;
6) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} (1-i)x_1 - (3-2i)x_2 + (2-i)x_3 = 0 \\ (4-6i)x_1 - (4-3i)x_2 + 3ix_3 = 0 \\ (9-i)x_1 - (5-i)x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$;
8) $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 + (2+i)x_3 = 0 \\ (1-i)x_1 - 2ix_2 + (3-i)x_3 = 0 \\ 2ix_1 + (2+2i)x_2 - (2-4i)x_3 = 0 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$;
10) $3x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$;

11) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$;
12) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 9 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$;
14) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$;

15) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$;
16) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -4 \end{cases}$.

1.3. Найти решение системы линейных уравнений $Ax = b$ и доказать его единственность, сделать поверку:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;
2) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 1+2i & 1+i \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 1+i & 1-i \\ 1-i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 6 \\ 10 & 2 & 15 & 3 \\ 9 & 6 & 12 & 8 \\ 15 & 3 & 20 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.4. Найти общее решение, или показать несовместность системы линейных уравнений $Ax=b$ над полем вычетов Z_n:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n=3$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n=5$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b=1$, $n=2$;

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n=5$;

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n=3$;

6) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n=7$.

1.5. Показать, что при известном наибольшем общем делителе многочленов ($h(x)=НОД(f(x),g(x))$) задача построения коэффициентов Безу ($h(x)=a(x)f(x)+b(x)g(x)$) сводится (методом неопределенных коэффициентов) к решению системы линейных уравнений. Выпишите расширенную матрицу полученной системы линейных уравнений. Применить указанный подход для построения коэффициентов Безу взаимно простых многочленов, если:

1) $f(x)=(x+1)^3$, $g(x)=x^3+3x^2$;

2) $f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=x^3$.

1.6. Показать, что задача интерполяции (методом неопределенных коэффициентов) сводится к решению системы линейных уравнений. Выпишите расширенную матрицу полученной системы линейных уравнений. Применить указанный подход для построения интерполяционных многочленов, узлы и значения которых приведены в следующих таблицах:

1) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & 10 \end{array}$; 2) $\begin{array}{c|cccc} x & i & -1 & -i & 1 \\ \hline f(x) & 1-i & 0 & 1+i & 2 \end{array}$.

1.7. Показать, что задача построения интерполяционного многочлена Эрмита (методом неопределенных коэффициентов) сводится к решению системы линейных уравнений. Выпишите расширенную матрицу полученной системы линейных уравнений. Применить указанный подход для построения интерполяционного многочлена Эрмита, заданного условиями:

1) $\begin{array}{l} f(1)=2,\ f'(1)=3, \\ f''(1)=6,\ f'''(1)=6 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} f(1)=2,\ f'(1)=2, \\ f(0)=1,\ f'(0)=0 \end{array}$.

1.8*. Доказать, что:

1) В несовместной системе из m линейных уравнений с n неизвестными найдется несовместная подсистема, состоящая не более чем из $n+1$ уравнений;

2) В совместной системе из m линейных уравнений с n неизвестными найдется подсистема, состоящая не более чем из n уравнений, множество решений которой совпадает с множеством решений исходной системы.

1.9. Известно, что система уравнений $Ax=0$ имеет единственное решение. Найти его.

1.10*. Доказать, что если система уравнений $Ax=0$, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, имеет единственное решение, то при любом b система $Ax=b$ имеет единственное решение.

1.11. Исследовать систему линейных уравнений $Ax=b$ и найти её общее решение в зависимости от значения параметра α:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ \alpha \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ (\alpha+1)^2 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.12*. Сколько операций сложения и умножения над числами потребуется для решения системы линейных уравнений $Ax=b$ ($A\in Q^{m\times n}$, $b\in Q^m$) методом Гаусса — Жордана?

2. Алгебра матриц

Прямоугольная таблица, составленная из элементов кольца K, называется ***матрицей*** над кольцом K. Множество матриц над кольцом K, у которых m строк и n столбцов, обозначим $K^{m\times n}$. Для обозначения матриц, как правило, используют прописные латинские буквы. Для обозначения элемента матрицы, расположенного на пересечении i-й строки и j-го столбца используется имя матрицы, записанное строчечными буквами, с нижними индексами, в которых указывается номер строки и столбца. Например, a_{ij}- элемент матрицы A, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца. Строки и столбцы матрицы обозначаются также как и ее элемент, только на месте одного из ненужных индексов стоит символ *. Например, a_{i*} — i-я строка, а a_{*j} — j-й столбец матрицы A. В некоторых случаях, когда для матрицы не введено буквенное обозначение, или стандартное написание элементов матрицы по каким либо причинам не целесообразно, для обозначения элементов матрицы используется имя матрицы, взятое в скобках, например, $a_{ij}=(A)_{ij}$.

Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют ***нулевой*** матрицей и обозначают 0 или $0^{m\times n}$ (если требуется указать размеры нулевой матрицы).

Если число строк и столбцов матрицы совпадают, то матрица называется ***квадратной***, а ее размер – ***порядком*** матрицы. Если все элементы квадратной матрицы, стоящие выше или ниже главной диагонали, равны нулю, то матрица называется ***треугольной***. В зависимости от того, где расположены ненулевые элементы треугольной матрицы, выше или ниже главной диагонали различают, соответственно, ***верхне-треугольную*** и ***нижне-треугольную*** матрицы. Матрица называется ***диагональной***, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Пусть $A,B\in K^{m\times n}$. ***Суммой матриц*** $A+B$ называется матрица $C\in K^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формулам $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. *Множество матриц* $K^{m\times n}$ *относительно операции сложения образует абелевую группу.*

Произведением матрицы $A\in K^{m\times n}$ ***на элемент кольца*** $k\in K$ называется матрица $D\in K^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формулам $d_{ij}=ka_{ij}$.

Транспонированной к матрице A называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы A. Более точно: если $B=A^T$, то $b_{ij}=a_{ji}$, $b_{i*}=a_{*i}^T$, $b_{*j}=a_{j*}^T$. Справедливо равенство $A=\left(A^T\right)^T$.

Произведением матриц $A \in K^{m\times n}$ и $B \in K^{n\times s}$ называется матрица $C \in K^{m\times s}$, элементы которой вычисляются по формулам $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$, т.е. $c_{ij} = a_{i*} b_{*j}$ и умножение матриц сводится к последовательному умножению строк матрицы A на столбцы матрицы B.

Операция умножения матриц обладает свойствами:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (*ассоциативность*);
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (*дистрибутивность*);
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (только над коммутативным кольцом).

Операция умножения матриц не коммутативна, то есть в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того, размеры матриц AB и BA, вообще говоря, не совпадают. Например, если $A \in K^{m\times n}$, а $B \in K^{n\times m}$, то $AB \in K^{m\times m}$ и $BA \in K^{n\times n}$.

Множество квадратных матриц $K^{n\times n}$*, с операциями сложения и умножения матриц, образует кольцо*, которое называется ***кольцом матриц***. Если кольцо K содержит единицу, то *единичная матрица* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ является нейтральным элементом по умножению в кольце матриц $K^{n\times n}$. При определении кольца матриц $K^{n\times n}$, в качестве кольца K можно брать произвольное кольцо, в том числе и кольцо матриц. В результате, получим матрицы, элементами которых являются матрицы. Обобщением этой конструкции является понятие ***блочной матрицы***.

Блочная матрица получается из обычной матрицы разделением горизонтальными и вертикальными линиями на блоки (клетки). *Операции с блочными матрицами выполняются по тем же правилам, что и с обычными матрицами* (естественно, размеры блоков должны быть согласованы). Выполняя операции над блочными матрицами, всегда можно их рассматривать как обычные, и проводить указанные операции по обычным правилам. При этом результат операций будет один и тот же. Частным случаем блочных матриц является ***кронекерово произведение*** матриц.

Кронекеровым произведением матриц $A \in K^{m\times n}$ и $B \in K^{r\times s}$ называется матрица из $K^{mr\times ns}$, составленная из блоков $a_{ij}B$: $A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{array}\right)$.

Операция кронекерова произведения матриц обладает свойствами:

- $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$
- $C\otimes(A+B) = C\otimes A + C\otimes B$
- $(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T$
- $(A\cdot B)\otimes(C\cdot D) = (A\otimes C)\cdot(B\otimes D)$

Последнее свойство кронекерова произведения матриц справедливо, если кольцо K — коммутативно.

Задачи

2.1. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. Выписать:

1) a_{21}; 2) a_{33}; 3) a_{*1}; 4) a_{3*};
5) $2a_{1*}$; 6) $a_{1*}+2a_{2*}$; 7) $a_{*2}-a_{*1}$; 8) $a_{2*}\cdot a_{*1}$.

2.2. Перемножить матрицы:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix}1 & 4 & \cdots & n^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$;

13) $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&4\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$; 14) $(y_1 \quad y_2)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

2.3. Умножить матрицы над кольцом K:

1) $(1 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $K = Z_4$; 2) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot(3 \quad 5 \quad 2)$, $K = Z_6$;

3) $\begin{pmatrix}x&1+x\\0&x+x^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}$, $K = Z_2(x)$; 4) $\begin{pmatrix}2x&1+x\\2+x&x\end{pmatrix}^2$, $K = Z_3(x)$;

5) $\left(\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$, $K = Z^{2\times 2}$.

2.4. Вычислить:

1) $\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}^3$; 2) $\begin{pmatrix}4&-1\\5&-2\end{pmatrix}^5$; 3) $\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}^n$;

4) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$; 5) $\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^n$; 6) $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

2.5. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Вычислить:

1) $A^3 - 2A$; 2) $\left(bb^T\right)^3 + A^2 + E$; 3) $b^T\left(A^2 - A + E\right)$;

4) $\left(A^2 - 2A + E\right)\cdot b$; 5) $a_{2*}\cdot a_{*1} + b^{\mathrm{T}}b$; 6) $a_{*3}\cdot a_{1*} + A$.

2.6. Пусть $A \in Z^{2\times 3}$, $B \in Z^{3\times 2}$, $C = AB$, $D = BA$. Выразить через элементы матриц A и B:

1) c_{11}; 2) c_{21}; 3) c_{2*}; 4) c_{*1};

5) d_{11}; 6) d_{32}; 7) d_{*3}; 8) d_{1*};

2.7. Доказать свойства операций (размеры матриц согласованы):

1) $\left(A^T\right)^T = A$; 2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$; 4) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;

5) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$; 6) $\alpha(\beta\cdot A) = (\alpha\beta)\cdot A$;

7) $\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B$; 8) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;

9) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$; 10) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

2.8. Доказать свойства операций (размеры матриц согласованы), если матрицы заданы над коммутативным кольцом:

1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$; 2) $\alpha(A \cdot B) = A \cdot (\alpha B)$; 3) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$.

2.9. Пусть $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j x^j$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ попарно различные числа. Обозначим через A квадратную матрицу порядка n, элементы которой равны $a_{ij} = \alpha_i^{\,j-1}$, а через h - матрицу, составленную из одного столбца, элементы которого суть коэффициенты многочлена $f(x)$ ($h = \begin{pmatrix} f_0 & \cdots & f_{n-1} \end{pmatrix}^T$). Доказать равенство $A \cdot h = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & \cdots & f(\alpha_n) \end{pmatrix}^T$.

2.10 Матрицей дискретного преобразования Фурье $F_n(\eta)$, где $\eta = \cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$ (первообразный корень степени n из 1), называется матрица, элементы которой вычисляются по формуле $(F_n(\eta))_{ij} = \eta^{(i-1)(j-1)}$. Вычислить $F_n(\eta) \cdot F_n(\overline{\eta})$, $F_n(\eta)^2$ и $F_n(\eta)^4$.

2.11. Для подстановки $\tau \in S_n$ определим матрицу перестановок P_τ порядка n, элементы которой вычисляются по формулам: $(P_\tau)_{ij} = \begin{cases} 0\ \text{если}\ \tau_i \neq j \\ 1\ \text{если}\ \tau_i = j \end{cases}$. Вычислить $P_\tau \cdot P_\tau^{\mathrm{T}}$ и $P_\tau^{\mathrm{T}} \cdot P_\tau$.

2.12. Перемножить блочные матрицы над кольцом K, сделать проверку:

1) $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 4 & -7 & -10 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$, $K = Z$;

2) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $K = Z$;

3) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)^2$, $K = Z_3$.

2.13*. Сколько операций сложения и умножения необходимо выполнить для перемножения матриц $A \in K^{m \times n}$ и $B \in K^{n \times s}$? Пользуясь полученным результатом, расставить скобки в произведении матриц $C \cdot D \cdot F \cdot G \cdot H$ ($C \in K^{2\times3}$, $D \in K^{3\times5}$, $F \in K^{5\times3}$, $G \in K^{3\times3}$, $H \in K^{3\times6}$) таким образом, чтобы количество операций сложения и умножения, необходимых для вычисления этого произведения было минимальным.

2.14. Пусть $A=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$, где $A_j, B_j \in K^{n\times n}$ $(j=\overline{1,4})$. Проверить, что для вычислений матрицы $C=A\cdot B$ при обычном алгоритме умножения требуется 8 умножений матриц порядка n. При вычислении по указанной ниже схеме требуется 7 умножений матриц:
$C=\left(\begin{array}{c|c} F_1+F_4-F_5+F_7 & F_3+F_5 \\ \hline F_2+F_4 & F_1+F_3-F_2+F_6 \end{array}\right)$, где $F_1=(A_1+A_4)\cdot(B_1+B_4)$,
$F_2=(A_3+A_4)\cdot B_1$, $F_3=A_1\cdot(B_2-B_4)$, $F_4=A_4\cdot(B_3-B_4)$, $F_5=(A_1+A_2)\cdot B_2$,
$F_6=(A_3-A_1)\cdot(B_1+B_2)$, $F_7=(A_2-A_4)\cdot(B_3+B_4)$. Сколько операций сложения и умножения потребуется для вычисления матрицы C по этим формулам? При каких n, предложенная схема умножения матриц экономнее обычной?

2.15. Доказать свойства (размеры матриц согласованы):

1) $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$;

2) $C\otimes(A+B)=C\otimes A+C\otimes B$;

3) $(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$;

4) $(A\cdot B)\otimes(C\cdot D)=(A\otimes C)\cdot(B\otimes D)$ (над коммутативным кольцом).

2.16*. Пусть $A\in K^{m\times n}$, $B\in K^{r\times s}$, $X\in K^{s\times n}$, $Y\in K^{r\times m}$ и $Y=B\cdot X\cdot A^T$. Обозначим через x и y матрицы, состоящие из одного столбца, составленного из столбцов матриц X и Y, соответственно.

1) Доказать равенство $y=(A\otimes B)\cdot x$:

2) Сколько операций сложения и умножения необходимо выполнить для вычисления y, если использовать формулу $Y=B\cdot X\cdot A^T$?

2.17. Пусть $A\in K^{m\times n}$, $B\in K^{n\times s}$, $C\in K^{r\times t}$, $D\in K^{t\times h}$, где K - коммутативное кольцо. Сравните количество операций сложения и умножения элементов кольца, которые потребуются для вычисления матрицы по формулам $(A\cdot B)\otimes(C\cdot D)$ и $(A\otimes C)\cdot(B\otimes D)$.

2.18. Пусть $C=A\cdot B$. Показать, что:

1) i-я строка матрицы C является суммой строк матрицы B с коэффициентами, взятыми из i-й строки матрицы A, т.е. $c_{i*}=\sum_j a_{ij}b_{j*}$;

2) j-й столбец матрицы C является суммой столбцов матрицы A с коэффициентами, взятыми из j-го столбца матрицы B, т.е. $c_{*j}=\sum_i a_{*i}b_{ji}$.

2.19. Пользуясь предыдущей задачей, выяснить, как изменится квадратная матрица A порядка n, при умножении слева (справа) на матрицу P, если:

1) P — единичная матрица E;

1) P отличается от E только одним элементом, $p_{kk}=\alpha$;

2) P отличается от E только одним элементом, $p_{ij}=\alpha$ $(i\neq j)$;

3) P получена из E перестановкой i-й и j-й строк ($i\neq j$).

2.20. На какую матрицу и с какой стороны следует умножить матрицу, чтобы выполнить следующее элементарное преобразование:

1) умножить k-ю строку на α;
2) умножить j-й столбец на β;
3) переставить k-ю и j-ю строки;
4) переставить строки в обратном порядке;
5) переставить строки согласно подстановки $\tau \in S_n$;
6) переставить k-й и j-й столбцы;
7) переставить столбцы в обратном порядке;
8) переставить столбцы согласно подстановки $\tau \in S_n$;
9) прибавить к каждой строке предыдущую;
10) прибавить к каждому столбцу предыдущий, умноженный на 2;
11) прибавить k-ю строку, умноженную на α к j-й строке;
12) прибавить k-й столбец, умноженный на α к j-му столбцу.

2.21. Как изменится произведение матриц A и B, если:

1) переставить k-ю и j-ю строки матрицы A;
2) к k-й строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на β;
3) переставить k-й и j-й столбцы матрицы B;
4) к k-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на β.

2.22. Пусть $A \in K^{m \times m}$, $B \in K^{m \times s}$, где K — кольцо с единицей. Показать, что если элементарными преобразованиями строк:

1) от матрицы $(A\,B)$ перейти к матрице $(E\,C)$, то $A \cdot C = B$;
2) от матрицы $(A\,E)$ перейти к матрице $(B\,C)$, то $C \cdot A = B$.

2.23. Пусть $A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{s \times n}$, где K - кольцо с единицей. Показать, что если элементарными преобразованиями столбцов:

1) от матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ перейти матрицы к матрице $\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}$, то $CA = B$;
2) от матрицы $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ перейти к матрице $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, то $AC = B$.

3. Подстановки

Подстановкой порядка n называется взаимно однозначное отображение (биекция) множества натуральных чисел от 1 до n на себя. Подстановка τ порядка n задается таблицей, в которой под каждым числом стоит его образ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{pmatrix}$, где $\tau_j = \tau(j)$. Числа в первой строке могут располагаться в произвольном порядке. Например, подстановка τ может быть задана таблицей $\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ \tau_n & \tau_{n-1} & \dots & \tau_1 \end{pmatrix}$. Подстановка $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется ***обратной*** к τ. Множество всех подстановок порядка n обозначается через S_n, число подстановок $|S_n| = n!$.

Говорят, что в подстановке τ элементы $j_1, j_2, \dots, j_m$ образуют ***цикл*** длины m, если $\tau(j_1) = j_2, \tau(j_2) = j_3 \dots, \tau(j_m) = j_1$. Каждую подстановку можно разложить в произведение циклов. Циклы длины 1 в этом разложении обычно не записывают. Элемент j в подстановке τ называется ***неподвижным***, если $\tau_j = j$. Подстановка, у которой все элементы неподвижны, называется ***тождественной*** и обозначается e**.** Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)(2) = (1,3)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1,3,2)(4,5)$.

Произведением подстановок τ и ω называется подстановка $\omega \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau_{\omega_1} & \tau_{\omega_2} & \dots & \tau_{\omega_n} \end{pmatrix}$. ***Множество подстановок порядка*** n ***относительно операции умножения образуют*** *симметрическую* ***группу*** S_n**.**

Рассмотрим многочлен $D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$. При перестановке переменных $D(x_1, \dots, x_n)$ может изменить знак. Если $D(x_1, \dots, x_n) = D(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$, то подстановка τ называется ***четной***, а, если $D(x_1, \dots, x_n) = -D(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$, то τ - ***нечетна***.

Произведение подстановок одинаковой четности четно, а произведение подстановок разной четности – нечетно.

Числа i, j образуют ***инверсию*** в подстановке τ, если $\tau_i > \tau_j$. Количество инверсий в подстановке τ обозначим через $\nu(\tau)$. *Четность подстановки* τ *совпадает с четностью* $\nu(\tau)$ (т.е. $D(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n}) = (-1)^{\nu(\tau)} D(x_1, \dots, x_n)$).

Подстановка, переставляющая только два числа, называется ***транспозицией***. Транспозиция является циклом длины 2 и записывается в виде $(i,\ j)$. *Транспозиция является нечетной подстановкой*.

Четность цикла длины m *равна четности числа* $m-1$. Сумма длин независимых циклов минус количество циклов называется ***декрементом подстановки***. Через $d(\tau)$ обозначим декремент подстановки τ. *Четность подстановки равна четности ее декремента* (т.е. $D\left(x_{\tau_1},\ldots,x_{\tau_n}\right)=(-1)^{d(\tau)}D(x_1,\ldots,x_n)$).

Задачи

3.1. Проверить, является ли указанное отображение τ подстановкой порядка n, и если да, то записать подстановку в табличном виде:

1) $\tau(j)$ - остаток от деления $3j$ на 5 ($n=4$);
2) $\tau(j)$ - остаток от деления 3^j на 7 ($n=6$);
3) $\tau(j)$ - остаток от деления j^5-j^3+3j на 7 ($n=6$);
4) $\tau(j)=n-j+1$ ($n=10$);
5) $\tau(j)=j-(-1)^j$ ($n=12$);
6) $\tau(j)=n-j+1+(-1)^{n-j}$;
7) $\tau(j)$ - остаток от деления $2j$ на $n+1$;
8) $\tau(j)$ - остаток от деления $3j$ на $n+1$.

3.2. Разложить подстановку τ в произведение циклов:

1) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$;

2) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$;

3) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$;

4) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&3&2\end{pmatrix}$;

5) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&2&3&1\end{pmatrix}$;

6) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix}$;

7) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&2&4&5&3&7&6&1\end{pmatrix}$;

8) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&4&2&3&1&6&7\end{pmatrix}$;

9) $\tau(j)=n-j+1$;

10) $\tau(j)=j-(-1)^j$ (n - четно).

3.3. Записать подстановку в табличном виде:

1) $\tau=(1,2)$, где $n=2$;
2) $\tau=(1,3)$, где $n=3$;
3) $\tau=(1,2,3)$, где $n=3$;
4) $\tau=(2,4,3)$, где $n=4$;
5) $\tau=(1,\ 3)(2,\ 4)$, где $n=4$;
6) $\tau=(1,\ 3)(2,\ 4,5)$, где $n=6$;
7) $\tau=(1,\ 2)(3,\ 4)\ldots(2n-1,2n)$;
8) $\tau=(1,\ 2n)(2,\ 2n-1)\ldots(n,n+1)$.

3.4. Перемножить подстановки:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&4&1\end{pmatrix}^2$;

5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&3&4\end{pmatrix}^3$;

6) $(1,2)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}\cdot(1,5)(2,4,3)$;

8) $(1,4,3)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}\cdot(1,5)$;

9) $(1,2)\cdot(1,3)$;

10) $(1,2,3)\cdot(1,3)$;

11) $(1,2)(3,5)\cdot(1,3,4)(2,5)$;

12) $((1,2,3)(4,5))^4$.

3.5*. Найти подстановку $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\10&8&9&5&3&4&1&2&6&7\end{pmatrix}^{100}$.

3.6. Найти обратную подстановку:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&4&1\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&6&5&1&4\end{pmatrix}$;

6) $(1,3,2)$;

7) $(1,2)(3,4)$;

8) $(1,3)(2,5,4)$.

3.7. Найти подстановку τ, удовлетворяющую уравнению:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$;

2) $\tau\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$;

3) $(1,3)(2,5)\cdot\tau=(1,4,3)$;

4) $\tau(1,4,5)\cdot\tau=(1,5)(2,4,3)$;

5) $(1,4)\tau(2,5,3)=(1,2)(3,4)$;

6) $(1,3,4)\tau(2,3)=(1,5)(2,3,4)$;

7) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}\cdot\tau\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&5&3&2\end{pmatrix}$;

8) $(1,4)(2,5)\cdot\tau\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&5&2&4\end{pmatrix}$;

9) $\tau^2=(1,2,3)$ рассмотреть случаи $\tau\in S_3$ и $\tau\in S_5$;

10) $\tau^2=(1,2)(3,4)$ рассмотреть случаи $\tau\in S_4$ и $\tau\in S_6$.

3.8*. Доказать, что любая подстановка порядка n раскладывается в произведение не более чем $n-1$ транспозиций.

3.9*. Доказать, что любая подстановка порядка n раскладывается в произведение транспозиций вида:

1) $(1,\ j)$, где $2 \le j \le n$;

2) $(j,\ j+1)$, где $1 \le j \le n-1$.

3.10. Разложить подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ в произведение транспозиций вида $(1,\ j)$, где $2 \le j \le n$:

3.11. Разложить подстановку $(1,5,7)(2,3,6,4)(8,10)$ в произведение транспозиций вида $(j,\ j+1)$, где $1 \le j \le n-1$:

3.12. Найти число инверсий:

1) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

9) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

11) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

12) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ n+1 & \cdots & 2n & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$;

13) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ n & \cdots & 1 & 2n & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$;

14) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & n+1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$;

15) $\tau(j) = \begin{cases} n-2j+2, \textit{при } j \le m \\ 2j-n-1, \textit{при } m < j \end{cases}$, где $n = 2m$;

16) $\tau(j) = \begin{cases} 2j, \textit{при } j \le m \\ 2j-n-1, \textit{при } m < j \end{cases}$, где $n = 2m$;

17) $\tau(j) = \begin{cases} 2j-1, \textit{при } j \le m \\ 2j-n, \textit{при } m < j \end{cases}$, где $n = 2m$;

18) $\tau(j) = \begin{cases} n-2j+1, \textit{при } j \le m \\ n-2j+2, \textit{при } m < j \end{cases}$, где $n = 2m$;

19) $\tau(j) = \begin{cases} 3j, \textit{при } j \le m \\ 3j-n-1, \textit{при } m < j \le 2m \\ 3j-2n-2, \textit{при } 2m < j \end{cases}$, где $n = 3m$;

20) $\tau(j)=\begin{cases} 3j, \text{при } j\le m \\ 3j-n-2, \text{при } m<j\le 2m \\ 3j-2n-1, \text{при } 2m<j \end{cases}$, где $n=3m$.

3.13. Множество натуральных чисел от 1 до n разбито на два непересекающихся подмножества $\{i_1,\dots,i_s\}$ и $\{j_1,\dots,j_{n-s}\}$, причем элементы в каждом упорядочены в порядке возрастания. Найти число инверсий и определить четность подстановки:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s & s+1 & s+2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_s & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-s} \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s & s+1 & s+2 & \cdots & n \\ i_s & i_{s-1} & \cdots & i_1 & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-s} \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s & s+1 & s+2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_s & j_{n-s} & j_{n-s-1} & \cdots & j_1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s & s+1 & s+2 & \cdots & n \\ i_s & i_{s-1} & \cdots & i_1 & j_{n-s} & j_{n-s-1} & \cdots & j_1 \end{pmatrix}$.

3.14. Пусть $\tau\in S_k$. Определить четность подстановки $\mu\in S_n$ ($n\ge k$), если известна четность τ:

2) $\mu(j)=\begin{cases} \tau(j), \text{при } j\le k \\ j, \text{при } k<j \end{cases}$;

2) $\mu(j)=\begin{cases} \tau(k+1-j), \text{при } j\le k \\ j, \text{при } k<j \end{cases}$;

3) $\mu(j)=\begin{cases} j, \text{при } j\le n-k \\ \tau(j-n+k)+n-k, \text{при } n-k<j \end{cases}$.

3.15. Найти декремент и определить четность подстановки:

1) $(1,2,3)$;

2) $(1,2)(3,4)$;

3) $(1,2,3)(4,5)$;

4) $(1,4)(2,5,3)$;

5) $(1,2)(3,4)\dots(2n-1,2n)$;

6) $(1,2,\cdots,n)$;

7) $(1,2n)(2,2n-1)\dots(n,n+1)$;

8) $(1,2,3)(4,5,6)\dots(3n-2,3n-1,3n)$.

3.16. Доказать, что следующее подмножество подстановок относительно операции умножения образует группу:

1) все множество подстановок порядка n ;

2) множество A_n четных подстановок порядка n.

3.17. Найти количество:

1) четных подстановок порядка n;

2) нечетных подстановок порядка n;

3) транспозиций среди подстановок порядка n;

4) циклов длины 3 среди подстановок порядка n;

5) подстановок перемещающих ровно s элементов (разобрать случаи $s=4$ и $s=5$), среди подстановок порядка n;
6) подстановок порядка n, квадрат которых суть тождественная подстановка.
3.18. Доказать, что любая четная подстановка раскладывается в произведение циклов длины 3 вида $(1,2,j)$, где $j=3,\ldots,n$.
3.19. Вычислить сумму:
1) $\sum_{\alpha\in S_n}\nu(\alpha)$, где $\nu(\alpha)$ - количество инверсий в подстановке α. Рассмотреть случаи $n=2$, $n=3$ и $n=4$;
2) $\sum_{\alpha\in A_n}\nu(\alpha)$, где A_n - множество четных подстановок порядка n. Рассмотреть случаи $n=3$ и $n=4$;
3) $\sum_{\alpha\in S_n}d(\alpha)$, где $d(\tau)$ - декремент подстановки τ. Рассмотреть случаи $n=2$, $n=3$ и $n=4$;
3.20. Все подстановки из S_n можно расположить в таком порядке, что каждая следующая подстановка получается из предыдущей:
1) умножением на транспозицию;
2) умножением на транспозицию вида $(j,\ j+1)$, где $1\le j\le n-1$.
3.21. Пусть для каждого индекса k, принадлежащего циклу длины s подстановки τ, построена цепочка k, $\tau(k)$, $\tau^{-1}(k)$, $\tau^{2}(k)$, $\tau^{-2}(k),\ldots,$ $\tau^{t}(k)$, заканчивающаяся первым встретившимся индексом, не превосходящим k. Показать, что суммарное число индексов во всех этих цепочках для одного цикла не превосходит $2s\log_2 s$.

4. Определитель (детерминант) матрицы

Пусть $A \in K^{n\times n}$, где K — коммутативное кольцо. Обозначим через $\overline{A}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ матрицу, получаемую из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Рекуррентное определение определителя. Определитель квадратной матрицы $A \in K^{n\times n}$ порядка n, который будем обозначать $|A|$ или $\det A$, — это элемент кольца K, вычисляемый по следующим правилам:

- если $n=1$, то $|A| = a_{11}$ (определитель матрицы первого порядка равен ее элементу);
- определитель матрицы порядка n $(n \geq 2)$ вычисляется по n определителям матриц порядка $n-1$ по формуле $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j}\left|\overline{A}\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}\right|$.

Определение определителя через элементы матрицы. При выражении определителя матрицы порядка n через элементы матрицы получается формула: $\det A = \sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n}$, где S_n - симметрическая группа, $\nu(\tau)$ — количество инверсий в подстановке τ. В данной сумме $n!$ слагаемых (по числу подстановок), каждое из которых полностью определяется подстановкой $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{pmatrix} \in S_n$. Знак слагаемого определяется четностью подстановки: плюс – если подстановка четная, и минус – если подстановка нечетная.

Множество подстановок второго порядка S_2 состоит из четной подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и нечетной подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. В определителе второго порядка матрицы A этим подстановкам сопоставляются произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$, входящие со знаком плюс и минус, соответственно. Таким образом, определитель матрицы второго порядка равен $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, т.е. произведению элементов матрицы, расположенных на главной диагонали, минус произведение элементов матрицы на побочной диагонали (см. рис. 1).

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Рис. 1. Определитель 2-го порядка

Множество подстановок третьего порядка состоит из трех четных подстановок $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ и трех нечетных подстановок $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. В определителе третьего порядка матрицы A этим подстановкам соответствуют слагаемые, входящие со знаком плюс для четных подстановок : $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, и со знаком минус для нечетных подстановок: $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$.

Таким образом, определитель матрицы третьего порядка вычисляется по формуле $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$ $- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$. Для запоминания формулы существует ***правило треугольника***. Со знаком плюс в определитель входит произведение элементов матрицы на главной диагонали и произведения элементов матрицы, расположенных в вершинах треугольника, сторона которого параллельна главной диагонали (см. рис. 2). Со знаком минус в определитель входит произведение элементов матрицы на побочной диагонали и произведения элементов матрицы, расположенных в вершинах треугольника, сторона которого параллельна побочной диагонали (см. рис. 2).

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}}_{+} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}}_{-}$$

Рис. 2. Правило треугольника

Определитель обладает свойствами:

- *не меняется при транспонировании матрицы;*
- *при перестановке двух строк (столбцов) меняет знак;*
- *равен нулю, если матрица имеет две одинаковые строки (столбца);*
- *не меняется, если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец) умноженную на константу.*

Основной метод вычисления определителя состоит в приведении матрицы к треугольному виду элементарными преобразованиями над строками и столбцами. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. К сожалению, такой подход реализуем тогда, когда элементы матрицы принадлежат полю P. В этом случае достаточно преобразований только над строками или только над столбцами матрицы. При вычислении определителя матрицы с элементами из произвольного коммутативного кольца могут возникнуть трудности с приведением матрицы к треугольному виду.

Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in P$. ***Матрицей Вандермонда***, которую обозначим через $W(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, называется матрица, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца расположен элемент, равный α_j^{i-1}. Определитель матрицы Вандермонда вычисляется по формуле $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)$.

Задачи

4.1. Вычислить определитель матрицы 2-го порядка:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1-2i & 1+i \\ 5 & 3+i \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3+i & 2+i \\ 6+i & 4+i \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{pmatrix}$.

4.2. Вычислить определитель матрицы 3-го порядка:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -1 & -i \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} i & 1+i & 2+i \\ 2+i & i & 1+i \\ 1+i & 2+i & i \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$, где $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

4.3. Вычислить определитель матрицы, используя рекуррентное определение:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4*. Из разложения определителя по первой строке $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left|\overline{A}\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}\right|$ вывести выражения определителя $|A| = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\nu(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n}$ через элементы матрицы.

4.5. Выяснить, какие из произведений входят в определитель, и с каким знаком:

1) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$;
2) $a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{56}a_{61}$;
3) $a_{41}a_{65}a_{12}a_{36}a_{24}a_{53}$;
4) $a_{31}a_{23}a_{34}a_{46}a_{65}a_{51}$;
5) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$;
6) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;
7) $a_{1n}a_{21}\cdots a_{n\,n-1}$;
8) $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}$;
9) $a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$;
10) $a_{12}a_{21}\cdots a_{2n-1\,2n}a_{2n\,2n-1}$.

4.6. Выяснить, при каких условиях произведение входит в определитель со знаком минус:

1) $a_{12}a_{i3}a_{34}a_{j5}a_{51}$;
2) $a_{41}a_{6i}a_{12}a_{36}a_{2j}a_{53}$;
3) $a_{41}a_{i5}a_{12}a_{j6}a_{k4}a_{53}$;
4) $a_{4i}a_{6j}a_{12}a_{3k}a_{24}a_{53}$;
5) $a_{41}a_{ij}a_{k2}a_{31}a_{24}a_{56}$;
6) $a_{1i}a_{ij}a_{jk}a_{k3}a_{21}a_{66}$.

4.7. Выписать слагаемые из определителя матрицы A порядка 5 со знаком плюс, содержащие произведение:

1) $a_{12}a_{34}$;
2) $a_{12}a_{21}$;
3) $a_{12}a_{23}a_{34}$;
4) $a_{11}a_{33}a_{55}$.

4.8. Показать, что определитель матрицы, содержащей нулевую строку или нулевой столбец, равен нулю.

4.9. Доказать, что если в матрице порядка n на пересечении некоторых k строк и s столбцов стоят элементы равные нулю, причем $k + s > n$, то определитель этой матрицы равен нулю.

4.10. Пользуясь только определением, найти коэффициенты при x^4 и x^3 в определителе матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & x^2+x-1 & 2 \\ x & 4 & x^2+1 \\ 2 & 3x^2 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 2 & 4-x+x^2 & 1 \\ 3 & 2 & 5-x \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4-x & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 6-x \end{pmatrix}$.

4.11. Пользуясь только определением, вычислить определитель матрицы:

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;.

3) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1n} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$.

4.12. Как изменится определитель матрицы из $C^{n\times n}$, если
1) каждый его элемент заменить на сопряженное число;
2) каждый его элемент заменить на противоположное число;
3) каждый его элемент умножить на число α.

4.13. Выразить определитель матрицы B через определитель матрицы A, если:

1) $b_{ij} = a_{ji}$; 2) $b_{ij} = a_{n-i+1\,j}$;

3) $b_{ij} = a_{i\,n-j+1}$; 4) $b_{ij} = a_{n-i+1\,n-j+1}$;

5) $b_{ij} = 2a_{ij}$; 6) $b_{ij} = -a_{ij}$;

7) $b_{ij} = \frac{i}{j} \cdot a_{ij}$;

8) $b_{ij} = 3^{i-j} \cdot a_{ij}$;

9) $b_{ij} = a_{i\tau_j}$, где $\tau \in S_n$;

10) $b_{ij} = a_{\tau_i \tau_j}$, где $\tau \in S_n$.

4.14*. Пользуясь формулой $|A| = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\nu(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n}$ как определением определителя , доказать свойства:

1) Определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;
2) При перестановке двух строк определитель матрицы изменит знак;
3) Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю;
4) Определитель не изменится, если к строке прибавить другую строку, умноженную на число;
5) Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

4.15*. Пользуясь рекуррентным определением определителя доказать следующие свойства:

1) Определитель нижне-треугольной матрицы равен произведению элементов матрицы, расположенных на главной диагонали;
2) $|A| = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{1+2+i+j} (a_{1i} a_{2j} - a_{1j} a_{2i}) \left| \overline{A} \begin{pmatrix} 1\,2 \\ i\;j \end{pmatrix} \right|$ (разложение по первым двум строкам), где $\overline{A} \begin{pmatrix} 1\,2 \\ i\;j \end{pmatrix}$ - подматрица матрицы A, полученная вычеркиванием первых двух строк и столбцов с номерами i и j;
3) Перестановка первых двух строк матрицы меняет знак определителя;
4) Перестановка первой и i-ой строки матрицы меняет знак определителя;
5) Перестановка любых двух строк матрицы меняет знак определителя;
6) Определитель матрицы не изменится, если к одной из строк прибавить другую строку, умноженную на $\alpha \in K$;
7) Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю;
8) $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \left| \overline{A} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right|$ (разложение определителя по первому столбцу);
9) Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

4.16*. Пусть $A \in K^{n \times n}$. Пользуясь формулой $|A| = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\nu(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n}$ как определением определителя, показать равенства:

1) $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left| \overline{A} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \right|$ (разложение определителя по первой строке);
2) $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \left| \overline{A} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right|$ (разложение определителя по первому столбцу);

3) $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}\right|$ (разложение определителя по i строке);

4) $|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}\right|$ (разложение определителя по j столбцу).

4.17. Разложить определитель матрицы по строке (столбцу), содержащей параметры a, b, c, d:

1) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ a & b & c & d\\ 3 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}5 & a & 2 & -1\\ 4 & b & 4 & -3\\ 2 & c & 3 & -2\\ 4 & d & 5 & -4\end{pmatrix}$.

4.18. Как изменится определитель матрицы A, если:
1) строку матрицы умножить на число α;
2) столбец матрицы умножить на число α;
3) столбцы матрицы переставить в обратном порядке;
4) строки матрицы переставить согласно подстановке $\tau\in S_n$;
5) из первой строки вычесть сумму всех остальных строк;
6) из всех столбцов, кроме первого, вычесть первый столбец;
7) из первой строки вычесть вторую, а из второй строки вычесть первую.

4.19. Вычислить определитель матрицы порядка n приведением к треугольному виду:

1) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $n=4$; 2) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $n=4$;

3) $\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $n=4$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $n=4$;

5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $n=5$; 6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5\\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5\end{pmatrix}$, $n=5$;

7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $n=5$;

8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $n=5$;

9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

13) $a_{ij} = \begin{cases} 2, & при \;\; i \neq j \\ 3, & при \;\; i = j \end{cases}$;

14) $a_{ij} = \begin{cases} j, & при \;\; i \neq j \\ 2i-1, & при \;\; i = j \end{cases}$;

15) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & при \;\; i \neq j \\ 0, & при \;\; i = j \end{cases}$;

16) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & при \;\; i \neq n-j+1 \\ n, & при \;\; i = n-j+1 \end{cases}$;

17) $a_{ij} = \max\{i-j+1, 0\}$;

18) $a_{ij} = \max\{i, j\}$;

19) $a_{ij} = \min\{i, j\}$;

20) $a_{ij} = \min\{i+j-1, n\}$;

21) $a_{ij} = |i-j|$;

22) $a_{ij} = i^2 + j^2$;

23) $a_{ij} = \begin{cases} -j, & при \;\; i > j \\ j, & при \;\; i < j \\ 0, & при \;\; i = j \end{cases}$;

24) $a_{ij} = \begin{cases} 3, & при \;\; i = n-j+1 \\ 2, & при \;\; i = n-j \\ 2, & если \;\; i = j = n \\ 0, & иначе \end{cases}$;

25) $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$.

4.20. Вычислить определитель матрицы с элементами из кольца K:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $K = Z_3$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $K = Z_6$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $K = Z_7$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 12 & 7 \\ 9 & 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $K = Z_{13}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 15 \\ 2 & 7 & 6 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 17 \\ 4 & 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$, $K = Z_{18}$;

6) $\begin{pmatrix} 3x & x^2 & 4 & 0 \\ x^2 & 2x & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3x & x^2 \\ 0 & 3 & x^2 & 4x \end{pmatrix}$, $K = Z_6(x)$.

4.21. Как изменится определитель блочной матрицы $A \otimes B$, где $A \in R^{m\times n}$ и $B \in R^{n\times m}$, при следующих преобразованиях:

1) переставить первые две блочных строки;

2) к блочной строке прибавить другую блочную строку, умноженную слева на матрицу соответствующего размера;

3) умножить блочную строку на число $\alpha \neq 0$;

4) переставить два первых блочных столбца;

5) к блочному столбцу прибавить другой блочный столбец, умноженный справа на матрицу соответствующего размера;

6) умножить блочный столбец на число $\alpha \neq 0$;

4.22*. Вычислить определитель Вандермонда, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ попарно различные числа $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^{\;2} & \cdots & \alpha_1^{\;n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^{\;2} & \cdots & \alpha_2^{\;n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^{\;2} & \cdots & \alpha_3^{\;n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^{\;2} & \ddots & \alpha_n^{\;n-1} \end{vmatrix}$.

4.23. Вычислить определитель порядка n:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$, $n = 4$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$, $n = 4$;

3) $a_{ij} = i^{\,j-1}$;

4) $a_{ij} = (j-5)^{i-1}$;

5) $a_{ij} = x_j^{i-1} + x_j^{i}$;

6) $a_{ij} = \sum_{s=0}^{i-1} x_j^s$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) & f_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) & f_n(x_n) \end{pmatrix}$, где $f_j(x) = x^j + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{ij} x^i$;

9) $a_{ij} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n} \right)^{(i-1)(j-1)}$; 10) $a_{ij} = \sin j\alpha_i$;

11) $a_{ij} = \cos(j-1)\alpha_i$;

12) $\begin{pmatrix} 1 & C_{x_1}^1 & C_{x_1}^2 & \cdots & C_{x_1}^{n-1} \\ 1 & C_{x_2}^1 & C_{x_2}^2 & \cdots & C_{x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{x_n}^1 & C_{x_n}^2 & \cdots & C_{x_n}^n \end{pmatrix}$, где $C_x^j = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!}$.

4.24*. Найти матрицу третьего порядка с максимальным значением определителя, если элементы матрицы - вещественные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы.

4.25. Сколько операций сложения и умножения потребуется для вычисления определителя матрицы порядка n над полем P, если:

1) вычисление проводить согласно рекуррентному определению;

2)вычисление проводить по формуле $\det A = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\nu(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n}$

3)вычислять методом приведения к треугольному виду.

5. Теорема Лапласа

Пусть $I=(i_1,\ldots,i_k)$ — набор, состоящий из k номеров строк, а $J=(j_1,\ldots,j_s)$ — набор из s номеров столбцов матрицы A. Подматрицу матрицы A, расположенную на пересечении строк с номерами из I и столбцов с номерами из J, обозначим через $A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$:

$$A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_s} \end{pmatrix}.$$

Определитель квадратной подматрицы $A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$ называется ***минором матрицы*** A. Подматрицу, получаемую из A, вычеркиванием строк с номерами из I и столбцов с номерами из J, обозначим через $\overline{A}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$. Определитель квадратной подматрицы $\overline{A}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$ называется ***дополнительным минором матрицы*** A. При задании дополнительного минора порядок номеров в наборах I и J не важен.

Для набора номеров I положим $(-1)^I=(-1)^{i_1+\cdots+i_k}$. Произведение $(-1)^{I+J}\left|\overline{A}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|$ называется ***алгебраическим дополнением*** к минору $\left|A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|$.

Теорема Лапласа (формула разложения определителя по строкам). *Пусть в матрице* $A\in K^{n\times n}$ *выбрано* k *строк* $(1\le k<n)$ *с номерами* $i_1<i_2<\ldots<i_k$. *Определитель матрицы* A *равен сумме всех произведений миноров* k*-го порядка матрицы* A, *расположенных в строках с номерами из* $i_1,i_2,\ldots,i_k$, *на их алгебраические дополнения.*

Обозначим через $\mathbf{C}_n^k$ множество всех k элементных упорядоченных наборов чисел от 1 до n. По теореме Лапласа (разложение по строкам) справедлива формула $|A|=\sum_{J\in\mathbf{C}_n^k}(-1)^{I+J}\left|A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\overline{A}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|$. В развернутом виде это равенство записывается следующим образом:

$$|A|=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\left|A\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_k \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\overline{A}\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_k \end{pmatrix}\right|.$$

При $k=1$ получаем ***формулу разложения определителя по*** i***-й строке***: $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\left|\overline{A}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right|$.

Теорема Лапласа (формула разложения определителя по столбцам). *Пусть в матрице* $A\in K^{n\times n}$ *выбрано* s *столбцов* $(1\le s<n)$ *с номерами* $j_1<j_2<\ldots<j_s$. *Определитель матрицы* A *равен сумме всех произведений миноров* s*-го порядка матрицы* A*, расположенных в столбцах с номерами* $j_1, j_2, \ldots, j_s$*, на их алгебраические дополнения.*

По теореме Лапласа (разложение по столбцам) справедлива формула $|A|=\sum_{I\in \mathbf{C}_n^s}(-1)^{I+J}\left|A\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\overline{A}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|$, или, в развернутом виде:
$|A|=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n}(-1)^{i_1+\cdots+i_s+j_1+\cdots+j_s}\left|A\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_s \\ j_1,\ldots,j_s \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\overline{A}\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_s \\ j_1,\ldots,j_s \end{pmatrix}\right|$.

При $s=1$ получаем ***формулу разложения определителя по*** j***-му столбцу***: $|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\left|\overline{A}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right|$.

Формула Бине—Коши (определитель произведения матриц). Пусть $A\in K^{m\times n}$ и $B\in K^{n\times m}$. Если $m>n$, то определитель произведения матриц $|A\cdot B|$ равен нулю. Если $m\le n$, то справедлива формула:

$$|A\cdot B|=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n}\left|A\begin{pmatrix} 1,\ldots,m \\ i_1,\cdots,i_m \end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_m \\ 1,\ldots,m \end{pmatrix}\right|.$$

Если $m=n$, то *определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц* $|AB|=|A|\cdot|B|$.

Задачи

5.1. Выписать следующие подматрицы матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$:

1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; 3) $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

4) $A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}$; 5) $A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 3,4 \end{pmatrix}$; 6) $A\begin{pmatrix} 2,4 \\ 1,3 \end{pmatrix}$;

7) $A\begin{pmatrix}2,1\\2,1\end{pmatrix}$; 8) $A\begin{pmatrix}1,2,4\\1,3,4\end{pmatrix}$; 9) $A\begin{pmatrix}2,3,1\\1,4,2\end{pmatrix}$;

10) $\overline{A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; 11) $\overline{A}\begin{pmatrix}1,2\\4,3\end{pmatrix}$; 12) $\overline{A}\begin{pmatrix}1,2,4\\1,2,3\end{pmatrix}$.

5.2. Для матрицы A задачи 5.1 вычислить минор $\left|A\begin{pmatrix}I\\J\end{pmatrix}\right|$, дополнительный минор $\left|\overline{A}\begin{pmatrix}I\\J\end{pmatrix}\right|$ и алгебраическое дополнение к минору:

1) $I=\{1\},\ J=\{2\}$; 2) $I=\{1,2\},\ J=\{2,4\}$; 3) $I=\{1,3,4\},\ J=\{2,3,4\}$.

5.3. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

1) $\begin{pmatrix}5&1&2&7\\1&3&4&5\\2&0&0&3\\3&0&0&2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&1&3&4\\2&0&0&6\\3&0&0&2\\4&4&7&5\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}0&5&2&0\\8&3&5&4\\7&2&4&1\\0&4&1&0\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}3&0&1&0\\2&1&2&1\\2&0&1&0\\1&1&1&2\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}5&2&1&3&2\\4&0&7&0&0\\2&3&5&7&3\\2&3&6&4&5\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}2&1&4&3&5\\3&4&0&5&0\\3&4&5&2&1\\1&5&2&4&3\\4&6&0&7&0\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}7&2&1&3&4\\1&0&2&0&3\\5&0&4&0&7\\6&3&2&4&5\\5&1&2&2&3\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&4&1\\2&4&1&3&5\\1&3&5&2&4\\0&5&0&3&2\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

11) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & \cdots & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \cdots & 3 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 7 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 7 & 7 & 2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 7 & \cdots & 7 & 7 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{array}\right)$;

12) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 5 & 5 & \cdots & 5 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 5 & \cdots & 5 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 5 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{array}\right)$;

13) $\begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 3 \\ 0 & 2 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & \cdots & 2 & 0 \\ 3 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (n - четно);

15) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \hline 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \\ 3 & 3 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 4 & \cdots & 4 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \end{array}\right)$;

16) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \hline 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \\ 3 & 3 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 4 & \cdots & 4 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \end{array}\right)$.

5.4. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители, предварительно преобразовав их:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.5. Вычислить определитель произведения матриц по формуле Бине-Коши:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5.6. Найти определитель блочной матрицы C, если $|A| = 2$, $|B| = 3$ и $A, B \in Q^{n\times n}$:

1) $C = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 2B \end{array}\right)$; 2) $C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline A^2 & B \end{array}\right)$; 3) $C = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2A & 3B \end{array}\right)$;

4) $C = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & 0 \end{array}\right)$; 5) $C = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline BA & 2B^2 \end{array}\right)$; 6) $C = \left(\begin{array}{c|c|c} A & B & E \\ \hline A^2 & 2AB & A \\ \hline 0 & B^2 & B \end{array}\right)$.

5.7. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times m}$. Показать, что определитель матрицы $C = \left(\begin{array}{c|c} E & B \\ \hline -A & 0 \end{array}\right)$ равен определителю произведения матриц $A \cdot B$. Вывести формулу Бине—Коши из теоремы Лапласа, разложив матрицу C по последним m столбцам.

5.8. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, E_s — единичная матрица порядка s, $A \in K^{n\times n}$. Из равенства $A = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0^{k\times n} \\ \hline 0^{(n-k)\times k} & A\begin{pmatrix} k+1,\dots,n \\ 1,\dots,n \end{pmatrix} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} A\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,n \end{pmatrix} \\ \hline E_n \end{array}\right)$ и формулы Бине—Коши вывести теорему Лапласа (разложение по первым k строкам).

5.9. Доказать, что если A квадратная матрица, то

1) $|E_m \otimes A| = |A|^m$; 2) $|A \otimes E_m| = |A|^m$.

5.10. Доказать, что если A и B квадратные матрицы, соответственно, порядка n и m, то $|A\otimes B|=|A|^m|B|^n$. Для доказательства воспользоваться равенством $(A\cdot E_n)\otimes(E_m\cdot B)=(A\otimes E_m)\cdot(E_n\otimes B)$.

5.11. Вычислить определитель матрицы:

1) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

5) $\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\otimes\cdots\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}_{n}$;

6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 4 & 8\\ 9 & 12 & 12 & 16\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 6 & 3 & 6 & 9\\ 6 & 2 & 4 & 9 & 3 & 6\\ 4 & 6 & 2 & 6 & 9 & 3\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3\\ 3 & 2 & 6 & 4 & 9 & 6\\ 4 & 2 & 6 & 3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 9 & 6 & 3 & 2\\ 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2\\ 9 & 6 & 3 & 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

5.12*. Пусть $A,B,C,D\in P^{n\times n}$, где P - поле и матрицы A и B перестановочны (т.е. $AB=BA$). Доказать, что:

1) $\left|\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline C & D\end{array}\right)\right|=|DA-CB|$;

2) $\left|\left(\begin{array}{c|c}A & C\\ \hline B & D\end{array}\right)\right|=|AD-BC|$.

5.13. Найти определитель блочной матрицы C, если $|A|=2$, $|B|=3$, $A,B\in Q^{n\times n}$ и матрицы A и B перестановочны:

1) $C=\left(\begin{array}{c|c}A+E & A\\ \hline A & A-E\end{array}\right)$;

2) $C=\left(\begin{array}{c|c}A^2+E & A\\ \hline A^3 & A^2-E\end{array}\right)$;

3) $C=\left(\begin{array}{c|c}A+B & A-B\\ \hline A-B & A+B\end{array}\right)$;

4) $C=\left(\begin{array}{c|c}A+B & A^2\\ \hline A & A^2-AB+B^2\end{array}\right)$.

5.14. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Перенумеруем все k элементные подмножества натуральных чисел от 1 до n. Обозначим через $\mu(j)$ k элементное подмножество натуральных чисел от 1 до n, имеющее номер j, при данной нумерации ($j=\overline{1,C_n^k}$). Квадратную матрицу порядка C_n^k, на пересечении i-ой строки и j-го столбца которой расположен минор $\left|A\begin{pmatrix}\mu(i)\\ \mu(j)\end{pmatrix}\right|$, назовем k-й ассоциированной с A матрицей, и обозначим A_k. Доказать, что $(AB)_k = A_k B_k$.

5.15. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, $A \in K^{n\times n}$. Матрицей, присоединенной к матрице A, называется матрица B, элементы которой вычисляются по формуле $b_{ij} = (-1)^{i+j}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}j\\ i\end{pmatrix}\right|$. Доказать, что $A\cdot B = |A|\cdot E$ и $B\cdot A = |A|\cdot E$.

5.16. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, $A \in K^{n\times n}$. Показать, что определитель блочной матрицы $\left(\begin{array}{c|c} E & \lambda E \\ \hline -E & A\end{array}\right)$ равен определителю $|A+\lambda E|$, представляющий собой многочлен $|A+\lambda E| = f_0 + f_1\lambda + \cdots + f_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$. Используя разложение блочной матрицы по первым n строкам, вывести формулу для коэффициентов многочлена $f_j = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-j}\le n}\left|A\begin{pmatrix}i_1,\ldots,i_{n-j}\\ i_1,\ldots,i_{n-j}\end{pmatrix}\right|$.

6. Обратная матрица

Матрица $A \in K^{n\times n}$ называется ***обратимой*** (или ***унимодулярной***) над кольцом K, если она является обратимым элементом кольца матриц, т.е. в $K^{n\times n}$ существует обратная к A относительно умножения. Матрицу, обратную к матрице A, обозначают A^{-1}. В коммутативном кольце с единицей K справедлив **критерий обратимости матрицы.** *Матрица $A \in K^{n\times n}$ обратима тогда и только тогда, когда ее определитель – обратимый элемент кольца K.* Поскольку все элементы поля P, кроме нуля, обратимы, то справедлив следующий **критерий обратимости матрицы над полем.** *Матрица $A \in P^{n\times n}$ обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.* Матрицы, определитель которых отличен от нуля, называются ***невырожденными***.

Пусть матрица A– обратима над коммутативным кольцом K. Элемент обратной матрицы, расположенный на пересечении i-й строки j-го столбца, вычисляется по формуле $(-1)^{i+j}\left|\overline{A}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}\right| \cdot |A|^{-1}$. Матрица A^+, элементы которой суть алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы $\left(A^+\right)_{ij} = (-1)^{i+j}\left|\overline{A}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}\right|$, называется ***присоединенной или союзной***. Присоединенная и обратная матрицы связаны равенством $A^+ = |A| \cdot A^{-1}$.

Элементарные операции со строками матрицы (сложение строк, перестановка строк, умножение строки на элемент кольца) равносильны умножению матрицы слева на некоторую матрицу. Следовательно, если матрицу $(A \mid E)$ элементарными преобразованиями со строками привести к матрице вида $(E \mid B)$, то матрица B является обратной к матрице A ($B = A^{-1}$). Если матрица A с элементами из некоторого поля, то в качестве алгоритма приведения матрицы $(A \mid E)$ к указанному виду можно использовать алгоритм Гаусса—Жордана.

Элементарные преобразования со столбцами матрицы равносильны умножению матрицы справа на некоторую матрицу. Поэтому, приведя элементарными преобразованиями со столбцами матрицу $\left(\frac{A}{E}\right)$ к виду $\left(\frac{E}{B}\right)$, найдем обратную к матрице A ($B = A^{-1}$).

Система линейных уравнений $Ax = b$ (с коэффициентами из поля P) называется ***крамеровской***, если матрица A — квадратная и невырожденная. *Крамеровская система линейных уравнений имеет единственное решение,* *компоненты которого вычисляются по формулам Крамера* $x_i = \Delta_i / |A|$, *где* Δ_i — *определитель матрицы, полученный из матрицы* A *заменой* i *-го столбца на столбец свободных членов* b. Понятие «крамеровская система линейных уравнений» легко обобщается на случай коммутативного кольца с единицей. В этом случае матрица A — квадратная и её определитель суть обратимый элемент кольца.

Задачи

6.1. Проверить, что матрица над кольцом K является обратимой и найти к ней обратную матрицу (по формуле):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = Z_3$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $K = Z_5$;

3) $\begin{pmatrix} x^2 + x + 2 & 2x \\ 2x + 2 & 1 \end{pmatrix}$, $K = Z_3(x)$;

4) $\begin{pmatrix} 2x & x^2 + 1 \\ 4 & 2x \end{pmatrix}$, $K = Z_9(x)$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $K = Z_{11}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $K = Z$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 - x & x^2 - 1 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $K = Z_4(x)$;

8) $\begin{pmatrix} x^2 + 1 & x & x^2 + 1 \\ x & 1 & x \\ x + 1 & 0 & x \end{pmatrix}$, $K = Z(x)$.

6.2. Найти присоединенную и обратную матрицы к матрице A, заданной над числовым полем:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 + i & 1 + i \\ 2 + i & 1 + i \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

6.3. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу, к матрице заданной над полем P:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P = Z_5$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P = Z_7$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = Z_5$; 4) $\begin{pmatrix} 2+i & 1 & 2 \\ 1 & i & 1 \\ 2+2i & 1 & i+2 \end{pmatrix}$, $P = C$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P = Q$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, $P = Q$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P = Q$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $P = Q$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $P = Q$; 10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $P = Q$;

6.4. Доказать свойства обратной матрицы:

1) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$; 2) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;

3) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; 4) $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$;

5) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 6) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

6.5. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A:

1) переставить i-ю и j-ю строки;

2) переставить i-й и j-й столбцы;

3) умножить на $\alpha \in K$ i-ю строку;

4) к i-й строке прибавить j-ю строку, умноженную на $\alpha \in K$;

5) к i-му столбцу прибавить j-й столбец, умноженный на $\alpha \in K$.

6.6. Пусть $U \in K^{k\times m}$. Найти обратную матрицу для матрицы A:

1) $A=\left(\begin{array}{c|c} E_k & U \\ \hline 0^{m\times k} & E_m \end{array}\right)$; 2) $A=\left(\begin{array}{c|c} E_m & 0^{m\times k} \\ \hline U & E_k \end{array}\right)$;

3) $A=\left(\begin{array}{c|c} 0^{m\times k} & E_m \\ \hline E_k & U \end{array}\right)$; 4) $A=\left(\begin{array}{c|c} U & E_k \\ \hline E_m & 0^{m\times k} \end{array}\right)$.

6.7. Доказать формулу Фробениуса:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} A^{-1}+A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ \hline -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{array}\right)^{T}, \text{ где } H=D-CA^{-1}B.$$

6.8. Показать, что:

1) обратная к треугольной матрице — треугольная матрица;

2) обратная к симметричной матрице — симметричная матрица.

6.9. Пусть матрица $A\in K^{n\times n}$ - обратима, $x\in K^{n\times 1}$, $y\in K^{1\times n}$, и элемент $\alpha=1+yA^{-1}x$ кольца K - обратим. Доказать, что

$(A+xy)^{-1}=A^{-1}-\alpha^{-1}A^{-1}xyA^{-1}$.

6.10. Пусть $A\in K^{n\times n}$ — обратимая матрица, I и J - множества номеров, соответственно, строк и столбцов одинаковой мощности. Доказать равенство

$$\left|A^{-1}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|=(-1)^{\sum_{i\in I} i+\sum_{j\in J} j}\left|\overline{A}\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}\right|\cdot|A|^{-1}.$$

6.11. Решить систему линейных уравнений над числовым полем по правилу Крамера, предварительно убедившись, что система крамеровская:

1) $\begin{cases} 5x+3y=13 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} (1-i)x+(1+i)y=3+i \\ (1-4i)x+(1-2i)y=3-8i \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=1 \\ y+z=-1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+4z=5 \\ x+3y+9z=10 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+2z=2 \\ x+2y+4z=5 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+4z=0 \\ x+3y+9z=-4 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4=2 \end{cases}$.

6.12. Решить систему линейных уравнений над кольцом K (используя обобщение правила Крамера):

1) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$, $K=Z_3$;

2) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$, $K=Z_6$;

3) $\begin{cases} (t-1)x+ty=2 \\ tx+(t+1)z=t \end{cases}$, $K=Z[t]$;

4) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+4z=1 \\ x+3y+4z=3 \end{cases}$, $K=Z_5$.

6.13. Решить матричное уравнение:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Эквивалентные матрицы

Матрицы $A, B \in K^{m \times n}$ называются ***эквивалентными***, если найдутся обратимые матрицы $H \in K^{m \times m}$ и $T \in K^{n \times n}$, такие, что $A = H \cdot B \cdot T$, при этом матрицы H и T называются *трансформирующими*. Факт эквивалентности матриц A и B обозначим $A \sim B$. Приведем свойства отношения эквивалентности матриц:

- отношение рефлексивно ($A \sim A$);
- отношение симметрично ($A \sim B \to B \sim A$);
- отношение транзитивно ($A \sim B \,\&\, B \sim C \to A \sim C$).

Сложность вопроса, эквивалентны ли матрицы, зависит от свойств кольца, над которым рассматриваются матрицы. В случае поля полезно понятие ранга матрицы. Максимальный размер не нулевого минора матрицы A называют ***(минорным) рангом*** и обозначают через $rg(A)$. Пусть $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times s}$. Справедливы *неравенства Сильвестра:*

- $rg(A \cdot B) \le rg(A)$, $rg(A \cdot B) \le rg(B)$;
- $rg(A) + rg(B) - n \le rg(A \cdot B)$.

Умножение на обратимую матрицу не меняет ранг матрицы. Следовательно, *эквивалентные матрицы имеют равные ранги*. Условие равенства рангов матриц является *необходимым* условием эквивалентности матриц над коммутативным кольцом и *является необходимым и достаточным условием эквивалентности матриц над полем* P.

Выполнение элементарных преобразований со строками и столбцами матрицы $A \in P^{m \times n}$ можно трактовать как умножение матрицы, соответственно, слева и справа на матрицы элементарных преобразований. Поскольку матрицы элементарных преобразований обратимы, то получившаяся матрица эквивалентна исходной. Элементарными преобразованиями строк и столбцов матрицу ранга k можно привести к матрице вида $\left(\begin{array}{c|c} E_k & 0^{k \times (n-k)} \\ \hline 0^{(m-k) \times k} & 0^{(m-k) \times (n-k)} \end{array}\right)$.

Если перед началом преобразований приписать к исходной матрице единичные матрицы слева и справа, то по завершении вычислений на месте единичных матриц появятся трансформирующие матрицы.

Задачи

7.1. Доказать, что:
1) $rg(A \cdot B) \le rg(A)$;
2) $rg(A \cdot B) \le rg(B)$;

3) ранг блочной матрицы $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ не больше $rg(A)+rg(B)$;

4) ранг блочной матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ не превосходит $rg(A)+rg(B)$;

5) ранг блочной матрицы $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ равен $rg(A)+n$;

6) ранг блочной матрицы $\begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ не меньше чем $rg(A)+n$;

7.2. Пусть $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times s}$, где K — коммутативное кольцо с единицей. Показать равенство рангов матриц $\begin{pmatrix} E_n & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$. Вывести неравенство $rg(A)+rg(B)-n \le rg(A\cdot B)$.

7.3. Доказать, что для матриц над полем справедливо $rg(A\otimes B)=rg(A)\cdot rg(B)$.

7.4. Доказать, что для матрицы $A \in R^{m\times n}$ справедливо равенство $rg(A)=rg\left(A^T A\right)=rg\left(A\cdot A^T\right)$.

7.5. Пусть в матрице A над полем P имеется не нулевой минор порядка r, а все миноры порядка $r+1$, окаймляющие его, равны нулю. Показать, что $r=rg(A)$.

7.6. Убедится, что в матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, с элементами из кольца Z_6, все миноры окаймляющие $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2$ равны нулю. Тем не менее, $rg(A)=2$.

7.7. Вычислить ранг матрицы A (матрица задана над числовым полем):

1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 1+i \\ 1 & 1+i & i \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix}$.

7.8. Найти простейший вид матрицы над полем P, эквивалентной A и трансформирующие матрицы (если поле не указано, то подразумевается числовое поле):

1) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & 1{,}5 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 1+i \\ 1 & 1+i & i \\ 1+i & -2i & 1 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P=Z_2$; 6) $A=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \\ 10 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $P=Z_7$; 8) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

7.9. Вычислить ранг матрицы A над кольцом K:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $K=Z_4$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $K=Z_8$;

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $K=Z_4$; 4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $K=Z_6$.

7.10. Показать эквивалентность матриц A и B над полем P. Найти трансформирующие матрицы (если поле не указано, то подразумевается числовое поле):

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P=Z_5$; 4) $A=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $P=Z_3$.

7.11. Как изменится ранг матрицы, если:
1) К матрице добавить строку;
2) К матрице добавить столбец;
3) К матрице добавить строку и столбец;
4) К матрице приписать справа единичную матрицу.

7.12. Указать возможные значения ранга матрицы A, если ее не нулевые элементы расположены только в последней строке и последнем столбце.

7.13. Исследовать ранг матрицы, заданной над числовым полем, в зависимости от параметра:

1) $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$;　2) $\begin{pmatrix}1+\lambda & 2\\ 1 & 2+\lambda\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1+\lambda & 2 & 3\\ 1 & 2+\lambda & 3\\ 1 & 2 & 3+\lambda\end{pmatrix}$;　4) $\begin{pmatrix}5+\lambda & -3 & 2\\ 6 & -4+\lambda & 4\\ 4 & -4 & 5+\lambda\end{pmatrix}$.

7.14. Доказать, что система линейных уравнений $Ax=b$ над полем P имеет решение тогда и только тогда, когда $rg(A)=rg(A\quad b)$.

7.15. Показать, что для совместной над полем P системы линейных уравнений $Ax=b$ ($A\in P^{m\times n}$, $b\in P^{m\times 1}$) количество свободных переменных равно $n-rg\ A$, а число базисных переменных совпадает с рангом матрицы.

8. Контрольные работы.

8.1. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса—Жордана, сделать проверку:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 11 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 11 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 11 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 13 & 6 & 11 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 5 \\ 9 & 3 & 15 & 10 & 13 \\ 6 & 4 & 10 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 10 & 6 & 15 & 11 & 13 \\ 7 & 7 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 7 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 13 & 18 & 12 & 14 & 7 \\ 9 & 11 & 9 & 10 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 12 & 10 & 7 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 8 & 5 & 5 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 7 & 5 \\ 12 & 9 & 9 & 14 & 5 \\ 8 & 6 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 7 & 5 \\ 10 & 7 & 7 & 12 & 5 \\ 8 & 6 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;

18) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 8 & 5 & 5 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;

19) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

20) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

21) $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 7 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 8 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

22) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

23) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

24) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

25) $A=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

26) $A=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

27) $A=\begin{pmatrix} 9 & 10 & 8 & 10 & 11 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 9 & 11 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

28) $A=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

29) $A=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 & 6 & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

30) $A=\begin{pmatrix} 9 & 10 & 8 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 7 & 7 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.2. Вычислить выражения A^2-3A+E, $a_{*1}\cdot a_{2*}+a_{1*}a_{*3}E$, $b^{\mathrm{T}}Ab$ (матрицы над числовым полем):

1) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&2\\3&2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&2\\3&2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&3&2\\3&2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\1&3&1\\3&2&0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\1&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&3&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&2&-2\\-2&1&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$;

18) $A=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&1&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$;

19) $A=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&0&-2\\-2&-1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$;

20) $A=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&0&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$;

21) $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$; 22) $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$;

23) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$; 24) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 1 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$;

25) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$; 26) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$;

27) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$; 28) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$;

29) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$; 30) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

8.3. Решить уравнение $A\cdot X\cdot B=C$, где A,B,C известные подстановки из S_7, а X неизвестная подстановка, которую надо найти. Сделать проверку.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$,
$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 6 & 3 & 5 & 7 & 1 & 4\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1\end{pmatrix}$;

2) $A=(1,5,2,7,6,4,3)$,
$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 7 & 4\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$,
$B=(1,2,6,7,4)$,
$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$,
$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4\end{pmatrix}$,
$C=(1,2,3,4)$;

5) $A=(2,5,3,7,6,4)$,
$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 7 & 4\end{pmatrix}$,
$C=(1,2,3)$;

6) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$,
$B=(3,6,7,4)$, $C=(1,2)$;

7) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&7&1&2&3&4&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&6&5&7&4\end{pmatrix}$, $C=e$;

8) $A=(1,5,3,2,7,6,4)$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&6&5&4&7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&7&6\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&7&2&3&1&4&6\end{pmatrix}$, $B=(1,\ 2)(6,4)$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&3&4&5&7&6\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&7&2&3&4&1&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&1&6&5&4&7\end{pmatrix}$, $C=(1,2,3)(6,7)$;

11) $A=(1,5,4,3,2,7)$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&6&1&5&4&7\end{pmatrix}$, $C=(1,2,3,4)(6,7)$;

12) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&7&3&4&6&1\end{pmatrix}$, $B=(1,2,3,\ 6,4,5)$, $C=(1,2,3,4,5)(6,7)$;

13) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&7&3&4&1&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&6&5&4&1&7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&1&7\end{pmatrix}$;

14) $A=(1,5)(3,7,6,4)$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&6&5&4&7&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&7&1&3&4&6\end{pmatrix}$, $B=(1,3,6,7)(4,5)$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&4&5&6&7&1\end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&1&7&3&4&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&6&5&4&1&7\end{pmatrix}$, $C=(1,3,4,5,6)$;

17) $A=(1,5,3,2)(4,7,6)$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&6&5&1&4&7\end{pmatrix}$, $C=(1,3,4,5)$;

18) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&5&2&7&3&4&6\end{pmatrix}$, $B=(1,3,6,4)$, $C=(1,3,4)$;

19) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&5&7&3&4&6\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&1&6&5&4&7\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&1&4&5&6&7\end{pmatrix}$;

20) $A=(3,5,7,6,4)$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&6&5&4&7\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&4&5&6&7\end{pmatrix}$;

21) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&5&3&7&4&6\end{pmatrix}$,

$B=(2,3)\,(4,6)$,

$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&2&4&5&6&7\end{pmatrix}$;

22) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&1&3&7&4&6\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&6&2&5&4&7\end{pmatrix}$,

$C=(\,2,3,4)$;

23) $A=(1,2,5,7,6,4)$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&2&5&4&7\end{pmatrix}$,

$C=(1,3,4,2)$;

24) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&3&7&1&4&6\end{pmatrix}$,

$B=(1,3)\,(\,2,6,4)$, $C=(1,3)(2,4,)$;

25) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&3&7&4&1&6\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&2&1&5&4&7\end{pmatrix}$,

$C=(1,3,2,4)$;

26) $A=(1,2,5,4,7)$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&2&5&1&4&7\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&2&5&1&6&7\end{pmatrix}$;

27) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&3&7&4&6&1\end{pmatrix}$,

$B=(1,3,2,6)(4,5)$,

$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&2&5&6&1&7\end{pmatrix}$;

28) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&3&7&4&1&6\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&2&5&4&7&1\end{pmatrix}$,

$C=(1,3,2,4,5,6,7)$;

29) $A=(1,5)(4,7,6)$,

$B=(1,3,5,4,2,6,7)$,

$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&2&6&7&1\end{pmatrix}$;

30) $A=(1,5,7,6,4)$,

$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&5&2&4&1&7\end{pmatrix}$,

$C=(1,3,5,6)(2,4)$.

8.4. Определить число нарушений порядка в подстановке $\tau\in S_{4n}$ в зависимости от n. Элементы τ_i вычисляется по формулам:

1) $\tau_i=4n-4i+4$, при $1\le i\le n$, $\tau_i=8n-4i+3$, при $n+1\le i\le 2n$, $\tau_i=12n-4i+2$, при $2n+1\le i\le 3n$, $\tau_i=16n-4i+1$, при $3n+1\le i\le 4n$;

2) $\tau_i = 4i-3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-1$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

3) $\tau_i = 4i-3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-1$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

4) $\tau_i = 4i-3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-1$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n-4i+4$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

5) $\tau_i = 4n-4i+1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-1$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

6) $\tau_i = 4i-3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n-4i+3$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

7) $\tau_i = 4i-3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-1$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n-4i+2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

8) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-3$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n-2$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

9) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n-3$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

10) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-3$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

11) $\tau_i = 4n-4i+3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-3$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

12) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n-4i+2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-3$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

13) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n-4i+1$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

14) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-3$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n-4i+4$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

15) $\tau_i = 4n-4i+3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-3$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n-4i+4$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

16) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n-4i+2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i-8n-3$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n-4i+4$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

17) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n-4i+1$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n-4i+4$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

18) $\tau_i = 4n-4i+3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i-4n-2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n-4i+1$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

19) $\tau_i = 4i-1$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n-4i+2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n-4i+1$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i-12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

20) $\tau_i = 4n - 4i + 3$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n - 4i + 2$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n - 4i + 1$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i - 12n$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

21) $\tau_i = 2n - i + 1$, при $1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 6n - i + 1$, при $2n+1 \le i \le 4n$;

22) $\tau_i = 2n + i$, при $1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4n - i + 1$, при $2n+1 \le i \le 4n$;

23) $\tau_i = 4i$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n - 4i + 3$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n - 4i + 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n - 4i + 1$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

24) $\tau_i = 4n - 4i + 4$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i - 4n - 1$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n - 4i + 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n - 4i + 1$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

25) $\tau_i = 4n - 4i + 4$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n - 4i + 3$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i - 8n - 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n - 4i + 1$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

26) $\tau_i = 4n - 4i + 4$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n - 4i + 3$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n - 4i + 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i - 12n - 3$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

27) $\tau_i = 4i$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n - 4i + 3$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n - 4i + 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i - 12n - 3$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

28) $\tau_i = 4n - 4i + 4$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i - 4n - 1$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 12n - 4i + 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i - 12n - 3$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

29) $\tau_i = 4n - 4i + 4$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 8n - 4i + 3$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i - 8n - 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 4i - 12n - 3$, при $3n+1 \le i \le 4n$;

30) $\tau_i = 4n - 4i + 4$, при $1 \le i \le n$, $\tau_i = 4i - 4n - 1$, при $n+1 \le i \le 2n$, $\tau_i = 4i - 8n - 2$, при $2n+1 \le i \le 3n$, $\tau_i = 16n - 4i + 1$, при $3n+1 \le i \le 4n$.

8.5. Вычислить определитель матрицы, заданной над полем Q, по правилу треугольника:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

8.6. Вычислить определитель матрицы, заданной над полем Q, приведением ее к треугольному виду:

1) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 2 & 3 \\ -8 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 2 & 3 \\ -7 & -3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 2 & 2 & 3 \\ -7 & -2 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 2 & 3 \\ 10 & 6 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

$$10)\begin{pmatrix}8&6&2&2&3\\8&5&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 11)\begin{pmatrix}7&6&2&2&3\\8&5&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 12)\begin{pmatrix}7&6&2&2&3\\7&4&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};$$

$$13)\begin{pmatrix}9&7&2&2&3\\8&5&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 14)\begin{pmatrix}6&5&2&2&3\\7&4&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 15)\begin{pmatrix}8&7&2&2&3\\9&5&2&2&3\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};$$

$$16)\begin{pmatrix}8&7&2&2&3\\8&4&2&2&3\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 17)\begin{pmatrix}8&7&2&2&3\\7&3&2&2&3\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 18)\begin{pmatrix}8&7&2&2&3\\8&4&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};$$

$$19)\begin{pmatrix}6&5&2&2&3\\9&6&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 20)\begin{pmatrix}6&5&2&3&3\\6&4&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 21)\begin{pmatrix}8&7&2&2&3\\7&3&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};$$

$$22)\begin{pmatrix}8&7&2&2&3\\6&2&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 23)\begin{pmatrix}8&7&2&2&3\\5&1&4&4&6\\6&5&3&4&7\\5&4&2&3&5\\2&2&2&2&3\end{pmatrix};\quad 24)\begin{pmatrix}6&5&1&1&1\\5&3&1&1&1\\6&5&2&3&5\\5&4&1&2&3\\2&2&1&1&1\end{pmatrix};$$

$$25)\begin{pmatrix}3&5&2&1&2\\4&2&3&2&3\\8&-6&4&5&6\\5&2&3&6&6\\3&2&2&4&4\end{pmatrix};\quad 26)\begin{pmatrix}3&5&2&1&2\\4&2&3&2&3\\8&-6&4&5&6\\5&3&3&6&6\\3&4&2&4&4\end{pmatrix};\quad 27)\begin{pmatrix}3&5&2&1&2\\4&3&3&2&3\\8&6&4&5&6\\5&3&3&6&6\\2&4&2&4&4\end{pmatrix};$$

28) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

8.7. Вычислить определитель матрицы, заданной над полем Q:

а) приведением к треугольному виду;

б) с помощью теоремы Лапласа, раскладывая по «выгодным» строчкам или столбцам;

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$13)\begin{pmatrix}2&0&3&2&0\\1&4&4&2&1\\4&3&3&1&4\\1&4&3&0&3\\4&0&0&4&0\end{pmatrix};\quad 14)\begin{pmatrix}0&2&3&1&0\\2&4&4&1&1\\4&2&4&4&1\\0&2&3&0&0\\1&2&0&3&4\end{pmatrix};\quad 15)\begin{pmatrix}3&0&2&0&3\\1&1&1&2&2\\4&1&1&1&4\\1&4&0&3&4\\0&0&4&0&3\end{pmatrix};$$

$$16)\begin{pmatrix}2&4&2&4&1\\1&2&0&0&0\\4&1&2&4&2\\0&2&3&4&1\\2&2&0&0&1\end{pmatrix};\quad 17)\begin{pmatrix}3&3&3&0&0\\4&2&2&1&1\\3&4&1&2&3\\3&1&0&0&0\\4&0&2&2&2\end{pmatrix};\quad 18)\begin{pmatrix}1&3&2&4&4\\2&0&4&1&4\\0&2&4&0&0\\4&1&1&4&4\\1&2&3&0&0\end{pmatrix};$$

$$19)\begin{pmatrix}1&2&0&3&3\\2&1&1&4&1\\0&1&3&0&0\\4&1&2&3&2\\1&1&2&0&0\end{pmatrix};\quad 20)\begin{pmatrix}4&0&2&3&1\\0&3&0&0&2\\2&2&3&3&1\\0&3&1&0&4\\3&3&3&3&2\end{pmatrix};\quad 21)\begin{pmatrix}0&3&0&0&3\\4&0&4&3&3\\2&4&4&4&1\\1&1&1&1&2\\0&4&0&4&2\end{pmatrix};$$

$$22)\begin{pmatrix}1&4&3&2&3\\1&0&0&0&3\\1&4&4&3&3\\4&0&1&0&2\\3&4&3&2&0\end{pmatrix};\quad 23)\begin{pmatrix}1&2&3&2&1\\2&2&0&4&4\\0&1&3&0&4\\4&3&4&3&3\\0&0&3&0&1\end{pmatrix};\quad 24)\begin{pmatrix}4&2&1&0&2\\0&0&2&3&0\\2&1&1&1&3\\0&0&1&3&4\\2&3&4&4&1\end{pmatrix};$$

$$25)\begin{pmatrix}2&4&1&4&3\\0&3&4&2&2\\3&0&3&1&0\\2&1&3&3&1\\3&0&1&0&0\end{pmatrix};\quad 26)\begin{pmatrix}2&2&0&2&0\\2&4&2&2&2\\4&1&2&2&4\\1&3&1&0&3\\2&0&0&4&0\end{pmatrix};\quad 27)\begin{pmatrix}4&3&1&3&2\\0&0&3&2&4\\4&3&1&3&0\\3&1&4&1&4\\0&0&1&0&2\end{pmatrix};$$

$$28)\begin{pmatrix}2&3&1&1&3\\1&4&2&2&0\\0&3&0&0&4\\4&3&3&2&3\\0&1&0&4&2\end{pmatrix};\quad 29)\begin{pmatrix}0&2&4&0&0\\3&1&4&2&3\\3&2&1&4&1\\2&0&2&1&3\\0&1&2&0&2\end{pmatrix};\quad 30)\begin{pmatrix}0&0&2&4&3\\1&3&0&4&4\\3&4&4&4&2\\0&0&2&0&4\\2&3&3&3&2\end{pmatrix}.$$

8.8. Разложить определитель матрицы, заданной над полем Q, по первым двум строкам, и вычислить его:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8.9. Используя формулу, найти обратную матрицу и сделать проверку:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} -7 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

8.10. Найти обратную матрицу и сделать проверку:

1) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 5 \\ 5 & 10 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 5 \\ 5 & 12 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 5 & 8 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 12 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 2 \\ 5 & -6 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8.11. Решить крамеровскую систему линейных уравнений $Ax = b$ по правилу Крамера, проверить найденное решение (система задана расширенной матрицей $(A \mid b)$):

1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right)$; 2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right)$; 3) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$;

4) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$; 5) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$; 6) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$;

7) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$; 8) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$; 9) $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$;

10) $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$; 11) $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$; 12) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$;

13) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$; 14) $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 6 & 1 \end{array}\right)$; 15) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 7 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 7 \end{array}\right)$;

16) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 9 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 9 \end{array}\right)$; 17) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 9 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 12 \end{array}\right)$; 18) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right)$;

19) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$; 20) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$; 21) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$;

22) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$; 23) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 10 \end{array}\right)$; 24) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$;

25) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 9 & 1 \end{array}\right)$; 26) $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$; 27) $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)$;

28) $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$; 29) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 12 & 3 \end{array}\right)$; 30) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 12 & 3 \end{array}\right)$.

8.12. Вычислить ранг матрицы:

1) методом окаймляющих миноров;

2) элементарными преобразованиями строк и столбцов.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 & 9 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 10 & 8 & 10 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & 5 \\ 5 & 12 & 7 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 5 \\ 11 & 9 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 \\ 10 & 8 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 5 \\ 8 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 & 6 \\ 8 & 6 & 11 & 9 \\ 3 & 2 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}$.

8.13. Исследовать ранг матрицы, в зависимости от параметра λ:

1) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2+\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 3+\lambda \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2+\lambda & 2 \\ \lambda-3 & 3 & 3+\lambda \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -1+\lambda & 1 & 1 \\ -3 & 2+\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -2+\lambda & 1 \\ 4 & 1 & -2+\lambda \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 5+\lambda & -9 & -4 \\ 6 & \lambda-11 & -5 \\ -7 & 13 & 6+\lambda \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 4+\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 4+\lambda \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} -2+\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -1+\lambda & 4 \\ 5 & 1 & 2+\lambda \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -4+\lambda & 4 & 2 \\ -1 & 1+\lambda & 1 \\ -5 & 4 & 3+\lambda \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 3+\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 1+\lambda & 1 \\ 3 & -1 & -1+\lambda \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & 6 & 15 \\ 1 & 1+\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6+\lambda \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 9+\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12+\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -6+\lambda \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 4+\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 3+\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -4+\lambda \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} \lambda & -4 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 0 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 12+\lambda & -6 & -2 \\ 18 & \lambda-9 & -3 \\ 18 & -6 & \lambda-3 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 4+\lambda & -5 & 2 \\ 5 & \lambda-7 & 3 \\ 6 & -9 & 4+\lambda \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 3+\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 10+\lambda & -12 \\ 3 & 6 & \lambda-7 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & -3 & 3 \\ -2 & \lambda-6 & 13 \\ -1 & -4 & 8+\lambda \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & -3 & 4 \\ 4 & \lambda-7 & 8 \\ 6 & -7 & 7+\lambda \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} -4+\lambda & 2 & 10 \\ -4 & 3+\lambda & 7 \\ -3 & 1 & 7+\lambda \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} \lambda & 3 & 3 \\ -1 & 8+\lambda & 6 \\ 2 & -14 & \lambda-10 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} -1+\lambda & 1 & 1 \\ -5 & 21+\lambda & 17 \\ 6 & -26 & \lambda-21 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 8+\lambda & 30 & -14 \\ -5 & \lambda-19 & 9 \\ -6 & -23 & \lambda-11 \end{pmatrix}$;

24) $\begin{pmatrix} 4+\lambda & 5 & -2 \\ -2 & -2+\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & -1 \\ -3 & \lambda-3 & 3 \\ -2 & -2 & 2+\lambda \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} -5+\lambda & 9 & 4 \\ -6 & -1+\lambda & 5 \\ 7 & -13 & -6+\lambda \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} -1+\lambda & 3 & -4 \\ -4 & 7+\lambda & -8 \\ -6 & 7 & \lambda-7 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & -1 & 2 \\ 5 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$;

30) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & -1 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & 1 & 2+\lambda \end{pmatrix}$.

8.14. Показать эквивалентность матриц A и B, найти трансформирующие матрицы, произвести проверку:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 4 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 6\\ 8 & 11\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 7 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 7 & 5\\ 12 & 9\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10 & 8\\ 9 & 7\\ 15 & 12\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\\ 9 & 6\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 3\\ 7 & 6\end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 5 & 3\\ 9 & 6\end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\\ 6 & 6\end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\\ 6 & 6\end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\\ 4 & 6\end{pmatrix}$;

18) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\\ 6 & 10\end{pmatrix}$;

19) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ -2 & -6\end{pmatrix}$;

20) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}$;

21) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$;

22) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\\ 0 & -2\end{pmatrix}$;

23) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

24) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$;

25) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 10 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$;

26) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$;

27) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$;

28) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

29) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$;

30) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

9. Решения, указания

1.8. Применим метод Гаусса (без перестановки строк) к системе линейных уравнений, и пометим уравнения вида 0=0. Удалив из исходной системы помеченные уравнения, получим равносильную ей систему уравнений. Количество уравнений системы не превосходит $n+1$, если система не совместна, и n, если система совместна.

1.10. Применим метод Гаусса к системе линейных уравнений $Ax=0$. Свободных переменных в полученной системе нет (иначе более одного решения). Поскольку количество уравнений равно числу переменных, то в процессе применения метода Гаусса, уравнений вида $0=0$ не получаются. Метод Гаусса от b не зависит, следовательно, при любом b получим, что $Ax=b$ имеет единственное решение.

1.12. Для прибавления к строке матрицы другой строки, умноженной на константу, потребуется $2(n+1)$ умножений и сложений. На исключение базисной переменной из $m-1$ уравнения понадобится $2(n+1)\cdot(m-1)$ операций. Ещё $n+1$ операций потребуется на умножение строки, из которой выражается базисная переменная. Поскольку количество базисных переменных не превосходит m, то общее количество операций не превосходит $(n+1)\cdot(2m-1)\cdot m \approx 2nm^2$.

2.13. При следующей расстановке скобок $(((C\cdot D)\cdot F)\cdot G)\cdot H$ количество операций равно 198.

2.16. 1) По правилу умножения матриц $(Y)_{ij}=\sum_{\tau=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{s} b_{i\mu}(X)_{\mu\tau}a_{j\tau}$. В то же время, элемент столбца y, расположенный в строке $(j-1)r+i$, равен $y_{(j-1)r+i}=\sum_{\tau=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{s} a_{j\tau}b_{i\mu}x_{\mu+\tau(s-1)}$. Не трудно убедиться, что $y_{(j-1)r+i}=(Y)_{ij}$.

2) В зависимости от расстановки скобок потребуется либо $2rsn+2rnm-rn-rm$, либо $2msn+2rsm-rm-sm$ операций сложения и умножения.

3.5. Представим подстановку в виде совокупности независимых циклов $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\10&8&9&5&3&4&1&2&6&7\end{pmatrix}=(1{,}10{,}7)(2{,}8)(3{,}9{,}6{,}4{,}5)$. Поскольку $(1{,}10{,}7)^{100}=(1{,}10{,}7)$, $(2{,}8)^{100}=e$ и $(3{,}9{,}6{,}4{,}5)^{100}=e$, то $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\10&8&9&5&3&4&1&2&6&7\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\10&2&3&4&5&6&1&8&9&7\end{pmatrix}$.

3.8. Цикл $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ длины k представляется в виде произведений $k-1$ транспозиций: $(i_1,i_2,\ldots,i_k)=(i_1,i_2)\cdot(i_1,i_3)\cdots(i_1,i_k)$. Разложив подстановку в произведение независимых циклов, и далее, каждый цикл - в произведение транспозиций, получим разложение подстановки в произведение не более чем $n-1$ транспозиции.

3.9. 1) Следует из задачи 3.8. и равенства $(i,\ j)=(1,i)\cdot(1,j)\cdot(1,i)$.
2) Следует из задачи 3.8. и равенства $(i,\ j)=(i,i+1)\cdot(i+1,j)\cdot(i,i+1)$.

4.4. Подматрицу A, полученную вычеркиванием столбцов с номерами $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k$ и первых k строк, обозначим $\overline{A}\begin{pmatrix}1\cdots k\\ \tau_1\cdots\tau_k\end{pmatrix}$. Для числовой последовательности $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k$ определим величину ν_k, равную количеству членов последовательности, меньших чем τ_k. Согласно определению, сумма $\nu_2+\ldots+\nu_k$ равна количеству таких пар, что $i<j$ и $\tau_i<\tau_j$. Значит, для подстановки $\tau\in S_n$ имеем $\sum_{i=1}^n \nu_i=\dfrac{n(n-1)}{2}-\nu(\tau)$, где $\nu(\tau)$ - количество инверсий. Столбец τ_k матрицы A в подматрице $\overline{A}\begin{pmatrix}1\cdots k-1\\ \tau_1\cdots\tau_{k-1}\end{pmatrix}$ имеет номер $\tau_k-\nu_k$, следовательно, разложив по первой строке, получим $\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\cdots k-1\\ \tau_1\cdots\tau_{k-1}\end{pmatrix}\right|=\sum\limits_{\tau_k=1,\ \tau_k\notin\{\tau_1,\ldots,\tau_{k-1}\}}^{n}(-1)^{1+\tau_k-\nu_k}a_{k\tau_k}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\cdots k\\ \tau_1\cdots\tau_k\end{pmatrix}\right|$. Последовательно раскладывая по первой строке, выводим $|A|=\sum\limits_{\tau\in S_n}(-1)^{\sum_{k=1}^n(1+\tau_k-\nu_k)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}$. Поскольку $\sum_{k=1}^n\nu_k=\dfrac{n(n-1)}{2}-\nu(\tau)$ и $\sum_{k=1}^n\tau_k=\sum_{k=1}^n k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, то получаем требуемое.

4.14. 1) По определению $\left|A^{\mathrm{T}}\right|=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{\tau_1 1}\cdots a_{\tau_n n}$. Подстановки τ и $\begin{pmatrix}\tau_1 & \ldots & \tau_n\\ 1 & \ldots & n\end{pmatrix}=\tau^{-1}$ имеет одинаковую четность. Отображение множества S_n в себя, которое ставит в соответствие каждой подстановке обратную к ней, является биекцией. Следовательно, суммы $|A|=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}$ и $\left|A^{\mathrm{T}}\right|=\sum_{\tau^{-1}\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}$ отличаются только перестановкой слагаемых, и, значит равны.

2) Обозначим через B матрицу, полученную из A перестановкой i и j строк. По определению $|B|=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{j\tau_i}\cdots a_{i\tau_j}\cdots a_{n\tau_n}$. Подстановка $\begin{pmatrix}1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n\\ \tau_1 & \ldots & \tau_j & \ldots & \tau_i & \ldots & \tau_n\end{pmatrix}$ представляется в виде

произведения подстановок $(i,j)\cdot\tau$, и, следовательно, ее четность на 1 отличается от четности τ. Отображение множества S_n в себя, которое ставит в соответствие каждой подстановке τ произведение $(i,j)\cdot\tau$, является биекцией. Следовательно, суммы $|A|=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}$ и $|B|=\sum_{(i,j)\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}$ отличаются только перестановкой и противоположным знаком слагаемых, и, значит $|A|=-|B|$.

3) Пусть в матрице A равны i и j строки. Для подстановки τ определим подстановку $\eta=(i,j)\cdot\tau$. Очевидно, $\eta\neq\cdot\tau$, и слагаемые $(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}$ и $(-1)^{\nu(\eta)}a_{1\eta_1}\cdots a_{n\eta_n}$ отличаются только знаком. Группируя соответствующим образом слагаемые в определителе, получим равенство $|A|=0$, что и требовалось доказать.

4) Пусть B - матрица, полученная из A прибавлением j строки, умноженной на γ, к i строке. Так как $|B|=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots\left(a_{i\tau_i}+\gamma a_{j\tau_i}\right)\cdots a_{n\tau_n}$, то раскрыв скобки, получим $|B|=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}+\quad+\gamma\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{j\tau_i}\cdots a_{n\tau_n}$. Вторая сумма представляет собой определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (i и j), и, следовательно, равна 0. Первая сумма суть определитель матрицы A.

5) Пусть матрица A имеет нижне треугольный вид (иначе транспонируем). По определению $|A|=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\nu(\tau)}a_{1\tau_1}\cdots a_{n\tau_n}$. Поскольку $a_{i\tau_i}\neq 0$ только при $\tau_i\leq i$, то единственное не нулевое слагаемое этой суммы получается при $\tau_i=i$, что соответствует тождественной подстановке. То есть $|A|=a_{11}\cdots a_{nn}$, что и требовалось доказать.

4.15. 1) Для нижне-треугольной матрицы из рекуррентного определения определителя выводим $|A|=(-1)^{1+1}a_{11}\left|\bar{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|$. Матрица $\bar{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ — нижне треугольная. Воспользовавшись методом математической индукции по размеру матрицы, получим требуемое утверждение.

2) Из рекуррентного определения определителя выводим равенства: $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left|\bar{A}\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}\right|$ и $\left|\bar{A}\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}\right|=\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{1+i}a_{2i}\left|\bar{A}\begin{pmatrix}1&2\\j&i\end{pmatrix}\right|+\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i}a_{2i}\left|\bar{A}\begin{pmatrix}1&2\\j&i\end{pmatrix}\right|$.

Подставим вместо минора его выражение $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{1+i}a_{2i}\left|\bar{A}\begin{pmatrix}1&2\\j&i\end{pmatrix}\right|+\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i}a_{2i}\left|\bar{A}\begin{pmatrix}1&2\\j&i\end{pmatrix}\right|\right)$ и раскроем скобки $|A| = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{j+i} a_{1j} a_{2i} \left|\overline{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ j & i\end{pmatrix}\right| + \sum_{1\le j<i\le n} (-1)^{1+j+i} a_{1j} a_{2i} \left|\overline{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ j & i\end{pmatrix}\right|$.

Поскольку $\overline{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ j & i\end{pmatrix} = \overline{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ i & j\end{pmatrix}$, то группируя соответствующие слагаемые, выводим $|A| = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{1+j+i} \left(a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}\right) \left|\overline{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ j & i\end{pmatrix}\right|$, что и требовалось.

3) При перестановке первых двух строк меняет знак множитель $a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$, а множитель $(-1)^{1+j+i}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ j & i\end{pmatrix}\right|$ не меняется. Следовательно, при перестановке первых двух строк, в сумме $|A| = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{1+j+i} \left(a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}\right) \cdot \left|\overline{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ j & i\end{pmatrix}\right|$ каждое слагаемое меняет знак, а значит и определитель матрицы меняет знак.

4) Доказательство проведем методом математической индукции по i. Основание индукции $i = 2$ суть свойство 3. Считая, утверждение справедливым при $i-1$, докажем его для i. Перестановка первой и i-й строки сводится к последовательным перестановкам: первой и второй строк, далее, – второй и i-й строк, а затем – первой и второй строк ($(1,i) = (1,2)\cdot(2,i)\cdot(1,2)$). Для доказательства утверждения достаточно показать, что перестановка i и второй строки матрицы меняет знак её определителя. Этот факт вытекает из рекуррентного определения $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\right|$ и предположения индукции, примененного к матрицам $\overline{A}\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}$.

5) Поскольку транспозиция (i,j) раскладывается в произведение $(1,i)\cdot(1,j)\cdot(1,i)$, то утверждение следует из четвертого свойства.

6) Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда к первой строке прибавляется вторая, умноженная на $\alpha \in K$ (иначе переставим строки), и воспользоваться формулой свойства 2.

7) Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда равны первые две строки (иначе переставим), и воспользоваться формулой свойства 2.

8) Доказательство проведем методом математической индукции по порядку матрицы. Основание индукции $n = 2$ — очевидно. Пусть оно справедливо для всех матриц порядка $n-1$. Тогда, при $i, j \ne 1$, справедливы

равенства $\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\right| = \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i} a_{2i}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1 & i\\ j & 1\end{pmatrix}\right|$ (разложение по первому столбцу) и $\left|\overline{A}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right| = \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j} a_{1j}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & j\end{pmatrix}\right|$ (разложение по первой строке). Далее, из разложения по первой строке $|A| = a_{11}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right| + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i} a_{2i}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1 & i\\ j & 1\end{pmatrix}\right|$, и поменяв суммы местами, получим $|A| = a_{11}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right| + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i} a_{2i}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right|$, что и требовалось доказать.

9) Доказательство проведем методом математической индукции по порядку матрицы. Основание индукции $n = 2$ — очевидно. Пусть оно справедливо для всех матриц порядка $n-1$. Тогда из разложения по первому столбцу $\left|A^{\mathrm{T}}\right| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i} a_{i1}\left|\overline{A^{\mathrm{T}}}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right|$ и предположения индукции $\left|\overline{A^{\mathrm{T}}}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right| = \left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right|$ выводим $\left|A^{\mathrm{T}}\right| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i} a_{i1}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right| = |A|$ (разложение по первой строке), что и требовалось доказать.

4.16. Множество таких подстановок $\eta \in S_n$, что $\eta(i) = j$, обозначим S_{ij}, а множество натуральных чисел от 1 до n без i — через n_i. Пусть $\{i_1, \ldots, i_{n-1}\}$ и $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$ упорядоченные по возрастанию элементы множеств n_i и n_j, соответственно. Произвольную подстановку $\tau \in S_{ij}$ представим следующим образом: $\tau = \begin{pmatrix} i & i_1 & \cdots & i_{n-1}\\ j & j_{\beta_1} & \cdots & j_{\beta_{n-1}}\end{pmatrix}$, где $\beta \in S_{n-1}$. Количество инверсий равно $\nu(\beta) + j - 1$, поэтому, при $\tau \in S_{ij}$, произведение $(-1)^{\nu(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n}$ равно $(-1)^{j-1} a_{ij} (-1)^{\nu(\beta)} a_{i_1 j_{\beta_1}} \cdots a_{i_{n-1} j_{\beta_{n-1}}}$. Следовательно, $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} a_{ij} \sum_{\beta \in S_{n-1}}(-1)^{\nu(\beta)} a_{i_1 j_{\beta_1}} \cdots a_{i_{n-1} j_{\beta_{n-1}}}$, а так как $\sum_{\beta \in S_{n-1}}(-1)^{\nu(\beta)} a_{i_1 j_{\beta_1}} \cdots a_{i_{n-1} j_{\beta_{n-1}}} = \left|\overline{A}\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}\right|$, то получаем разложение по i строке $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}\left|\overline{A}\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}\right|$. Третье и первое (при $i = 1$) равенства доказаны. Второе и четвертое равенства вытекают из доказанных равенств и того факта, что определитель не меняется при транспонировании матрицы (4.13. 1)

4.22. Рассмотрим определитель $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ как функцию от переменной α_n.

Эта функция является многочленом степени $n-1$, с коэффициентом при старшей степени равным $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$, и корнями в точках $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ (определитель матрицы с двумя равными строками равен 0). Следовательно, справедливо равенство $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=W(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)$, из которого выводим $W(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)$.

4.24. Элементы искомой матрицы принимают значения ± 1. Можно считать, что в первой строке и первом столбце расположены 1. С точностью до перестановки строк имеется 2 варианта: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4$ и $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4$.

5.12. 1) Из равенства $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} E & -B \\ \hline 0 & A \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & DA-CB \end{array}\right)$, по формуле Бине—Коши, учитывая, что $\left|\left(\begin{array}{c|c} E & -B \\ \hline 0 & A \end{array}\right)\right|=|A|$ и $\left|\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & DA-CB \end{array}\right)\right|=|A|\cdot|DA-CB|$, выводим $\left|\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\right|\cdot|A|=|A|\cdot|DA-CB|$. Если $|A|\ne 0$, то утверждение доказано. Если $|A|=0$, то в проведенных построениях заменим матрицу A на $A+tE$. Обе части равенства $\left|\left(\begin{array}{c|c} A+tE & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\right|\cdot|A+tE|=|A+tE|\cdot|DA+tD-CB|$ поделим на многочлен $|A+tE|$ и подставим $t=0$, получим $\left|\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\right|=|DA-CB|$.

2) Утверждение сводится к предыдущему, транспонированием матрицы.

Литература

1. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2000г. — 3384 с.

2. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука. 1975г. — 162 с.

3. Сборник задач по линейной алгебре: Методическая разработка / Составители: Л. Г. Киселева, М. М. Шульц. - Н.Новгород: Нижегородский государственный университет, 2007. – 60с.

Содержание

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ (часть 2)

Авторы:
Александр Юрьевич ***Чирков***
Лариса Георгиевна ***Киселева***
Сергей Иванович ***Веселов*** и др.

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37