МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение
высшего образования**
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.В. Круглов
Ю.А. Кузнецов
Е.А. Таланова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института
экономики и предпринимательства для студентов
ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
38.03.05 «Бизнес-информатика» (бакалавриат)

Нижний Новгород
2020

УДК 517.9
ББК В16
К 84

К 84 Круглов Е.В., Кузнецов Ю.А., Таланова Е.А. Дифференциальные и разностные уравнения: методы решения. Экономические приложения: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 35 с.

Рецензент: к.ф.-м.н. Капитанов Д. В.

Учебное пособие представляет собой руководство по курсу «Дифференциальные и разностные уравнения» для студентов института экономики и предпринимательства ННГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
института экономики и предпринимательства ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В.

УДК 517.9
ББК В16

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2020
© Круглов Евгений Валентинович,
Кузнецов Юрий Алексеевич,
Таланова Елена Анатольевна, 2020

Содержание

Введение

В предлагаемом учебно-методическом пособии наряду с излагаемыми методами решения дифференциальных и разностных уравнений и систем рассматриваются некоторые наиболее распространенные модели экономической динамики – модель Харрода-Домара, линейные модели бизнес-циклов, модель Дея динамики капитала с учетом загрязнения окружающей среды и модель перекрывающихся поколений с двумя поколениями. Таким образом, пособие частично ликвидирует недостаток литературы, предметно ориентирующей обучающихся направления подготовки «Бизнес-информатика» при изучении дифференциальных и разностных уравнений. Данное пособие соответствует учебной программе дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения», составленной в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению подготовки «Бизнес-информатика». Пособие направлено на формирование компетенции ПК-18 «Способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования»..

1. Дифференциальные и разностные уравнения и системы. Введение в проблематику

1.1. Дифференциальные уравнения и системы

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое связывает независимые переменные, функцию и производные от этих функций. В зависимости от количества переменных различают обыкновенные дифференциальные уравнения (содержат функцию одного переменного и, соответственно, *обыкновенные* производные) и уравнения в частных производных (содержат функцию нескольких переменных и *частные* производные от неё). В нашу задачу входит лишь рассмотрение лишь *обыкновенных дифференциальных уравнений*.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения, связывающие независимое переменное, неизвестную функцию этой независимой переменной и её производную. Первоначально рассматривались только простейшие дифференциальные уравнения типа $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ либо $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, таким образом получалось, что задачей решения дифференциального уравнения является поиск неизвестной функции по известной производной.

Дифференциальные уравнения появились, по-видимому, в 17 веке; одним из первых математиков, решавших дифференциальные уравнения был учитель И. Ньютона Исаак Барроу. Легенда гласит, что Ньютон был настолько впечатлён эффективностью этого математического аппарата, что даже зашифровал основной вывод в анаграмме. Вывод в переводе звучит следующим образом: «Полезно решать дифференциальные уравнения». Если принять, что независимое переменное есть время t, то функция $y(t)$ задает некий процесс, а производная $y'(t)$ есть скорость протекания данного процесса. Таким образом, решая дифференциальное уравнение, мы по известной скорости находим функцию, полностью характеризующую процесс. Если процесс более чем одномерный, то аналогичная задача может решаться для каждой переменной, иначе говоря, по скорости изменения каждой переменной мы находим уравнение ей изменения либо закон изменения обеих переменных, выраженный в неявной форме. Иначе говоря, мы имеем систему нескольких дифференциальных уравнений, которая для размерности 2 выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, t), \\ \dot{y} = Q(x, y, t), \end{cases}$$

где координаты x и y – функции времени, а $\dot{x}$, $\dot{y}$ – обозначения производных по времени, используемые со времён Ньютона. Если обе части первого уравнения продифференцировать по времени: $\ddot{x} = P'_x \cdot \dot{x} + P'_y \cdot \dot{y} + P'_t$, функцию y, выраженную из первого уравнения, подставить во второе (в силу теоремы о неявной функции это локально почти всегда возможно), то в качестве второго уравнения мы будем иметь $\dot{y} = Q(x, \theta(x, \dot{x}, t), t)$, где $\theta(x, \dot{x}, t) = y$ получено из первого уравнения. Подставив последнее выражение для $\dot{y}$ в уравнение $\ddot{x} = P'_x \cdot \dot{x} + P'_y \cdot \dot{y} + P'_t$, получим уравнение

$$\ddot{x} - P'_x(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) \cdot \dot{x} + P'_y(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) \cdot Q(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) - P'_t(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) = 0.$$

Это уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$. Оно называется уравнением второго порядка, так как в левую часть данного уравнения входит не только производная первого порядка $\dot{x}(t)$, но и производная второго порядка $\ddot{x}(t)$ (такие уравнения уже можно обозначить как уравнения высших порядков). Левая часть уравнения является функцией Φ аргументов $t,\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x}$: $\Phi(t,\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x}) = 0$. Таким образом, оказалось, что системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции и наоборот.

Среди часто встречающихся уравнений, методы решения которых полезно знать, имеют место, во-первых, уравнения первого порядка, выраженные относительно производной, относящиеся к так называемым уравнениям с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ и сводящиеся к ним (однородные, линейные, уравнения Бернулли), а также уравнения в полных дифференциалах; во-вторых, линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ произвольные действительные числа. Решение систем отличных от линейных с постоянными коэффициентами почти всегда невозможно, но представлять себе, как решаются линейные однородные системы с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

где $a_{ij} \in \mathbf{R}$, особенно для двумерных систем, очень желательно.

1.2. Разностные уравнения и системы

В п. 1.1 рассматривались дифференциальные уравнения, то есть уравнения, содержащие производную. Производную можно ввести, если неизвестная функция непрерывная и дифференцируемая. Однако в экономике большую роль играют процессы с дискретным временем, поскольку статистические отчеты отражают показатели за некоторых временной промежуток. В случае, когда функция дискретна и имеет значения лишь в изолированных друг от друга точках, вместо производных рассматривают конечные разности. (Таким образом, разностные уравнения и системы в некотором смысле более важны для экономико-математического моделирования. Проблема в том, что решение и исследование таких уравнений гораздо более проблематично, чем решение и исследование дифференциальных систем и уравнений.)

Пусть функция $y = f(x)$ задана при натуральных x, т.е. $x = 1,2,3,\ldots$. Выражение $\Delta f = f(x+1) - f(x)$ назовем конечной разностью первого порядка. Очевидно, что оно равно тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки $(x,\ f(x))$ и $(x+1,\ f(x+1))$, то есть является неким дискретным аналогом производной. Конечные разности первого порядка могут служить для образования конечных разностей второго порядка

$$\Delta^{(2)} f = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

и так далее. Таким образом, вместо дифференциальных уравнений для дискретного случая можно рассматривать уравнения в конечных разностях, где вместо производных будут стоять разности соответствующих порядков. Если рассматривать гипотетическое решение такого уравнения, то оно может быть получено не через интегрирование, а через суммирование. В силу различных обстоятельств обычно рассматривают не уравнения в конечных разностях, а разностные уравнения, в которых все конечные разности представлены в виде алгебраических сумм значений функции. Таким образом, разностные уравнения первого порядка связывают значения функции в соседних двух точках, второго – в соседних трех точках и т.д.

Для дальнейшего полезно представлять себе, как исследуются так называемые одномерные отображения, которые можно записать разностным уравнением первого порядка $f(x+1) = g(f(x))$, где $g(\cdot)$ - некоторая функция, например, дифференцируемая. Как и в непрерывном случае, полезно также представлять себе процесс решения линейных разностных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

$$a_n y(n) + a_{n-1} y(n-1) + \ldots + a_1 y(1) + a_0 y(0) = \varphi(x),$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ произвольные действительные числа, и линейные однородные разностные системы

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t+1) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

где $a_{ij} \in \mathbf{R}$.

2. Решение дифференциальных уравнений и систем

Модели экономической динамики с непрерывным временем, речь о которых пойдёт ниже, иногда записывают в виде одного уравнения высшего порядка, иногда – в виде системы нескольких уравнений первого порядка. В случае нелинейной динамики особенно популярны так называемые автономные системы дифференциальных уравнений, то есть системы, правые части которых явно не зависят от *t*: $\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$ (для случая двух переменных). В случае линейных моделей используют как однородные, так и неоднородные уравнения.

Рассмотрим подробно некоторые типы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.1. Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

Мир устроен так, что большинство таких уравнений решению не поддаются. Однако многие простые модели одномерной динамики с непрерывным временем сводятся к простым уравнениям первого порядка. Уравнения первого порядка полезно уметь решать ещё и потому, что фазовая плоскость траекторий системы

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

совпадает с пространством интегральных кривых (решений) уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

которое получается, если поделить почленно второе уравнение системы на первое.

Основные понятия теории дифференциальных уравнений изучим на простом примере. Рассмотрим уравнение $xdy - ydx = 0$ (в этом случае говорят, что уравнение задано *в дифференциальной форме*) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Это уравнение относится к самому простому классу уравнений с разделяющимися переменными, главным принципом решения которых является разделить переменные по разным частям уравнения: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln \tilde{C} \Rightarrow$ $\ln|y| = \ln\left(|x| \cdot \tilde{C}\right) \Rightarrow y = Cx$. Здесь $\tilde{C}$ – положительная произвольная постоянная (в этом случае $\ln \tilde{C}$ может быть любым действительным числом), C – произвольная постоянная – действительное число: $C = \tilde{C}$, если x и y одного знака; $C = -\tilde{C}$, если x и y разных знаков; при $C = 0$ получаем решение $y = 0$; при $\frac{1}{C} = 0$ получаем решение $x = 0$ (проверяется непосредственной подстановкой в исходное уравнение). Функция $y = Cx$, зависящая от произвольной постоянной, называется *общим решением* уравнения $xdy - ydx = 0$ (впрочем, как и уравнений $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, и $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$). Графическим изображением будут прямые, проходящие в плоскости xOy через начало координат (рис. 2.1). Каждая прямая есть *частное решение* (*интегральная кривая*); точка (0,0), в которой числитель и знаменатель уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ одновременно обращается в нуль, для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ называется *особой точкой*.

Помимо поиска общего решения дифференциального уравнения может быть поставлена так называемая *задача Коши* – задача *поиска частного решения, удовлетворяющего данному начальному условию*. Например, решением задачи Коши $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ с начальным условием $y(1) = 2$ на рис. 2.1 выделено жирным.

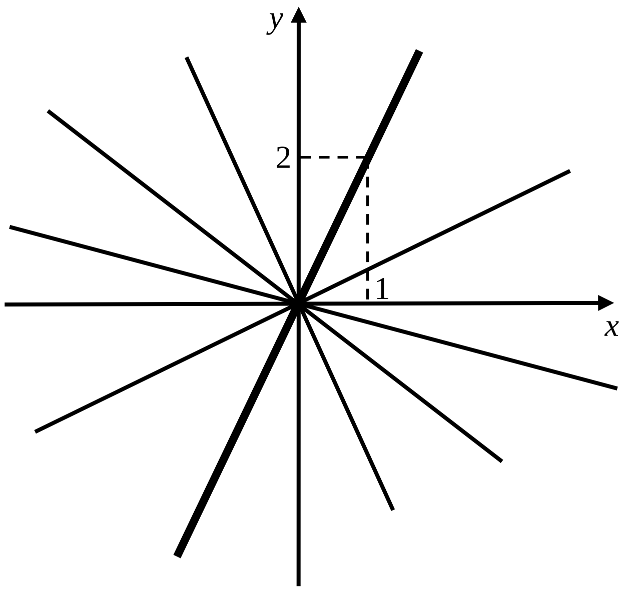

Рис. 2.1.Общее решение уравнения $xdy - ydx = 0$.

Рассматривая теперь систему $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y, \end{cases}$ имеем: $\frac{dx}{dt} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dt \quad \Rightarrow$ $\ln|x| = t + \ln \hat{C} \Rightarrow t = \ln\left|\frac{x}{C_1}\right|$; аналогично

$$\ln|y| = t + \ln\overline{C} \Rightarrow y = e^t \cdot C_2 = e^{\ln\left|\frac{x}{c_1}\right|} \cdot C_2 = |x| \cdot \frac{C_2}{|C_1|} = x \cdot C.$$

Здесь $\hat{C}, C_1, \overline{C}, C_2, C$ произвольные постоянные; читателю предлагается самому разобраться, какие на них наложены ограничения, и как они друг с другом связаны. Таким образом, мы получили ту же формулу $y = Cx$, но теперь она описывает *траектории автономной системы* $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$ на *фазовой плоскости xOy*. Если обратиться к рисунку 2.1, то каждая полупрямая с началом в точке *O* будет такой *траекторией*; точка *O*(0;0), в которой $\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$ называется *состоянием равновесия* системы.

В общем случае уравнение с разделяющимися переменными может быть записано, например, так: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$. Путем очевидных манипуляций переменные «растаскиваются» по разным частям уравнения, от обеих частей берутся интегралы, и получаем общее решение. Если поставлена задача поиска частного решения, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, то координаты точки подставляются в общее решение, находится значение произвольной постоянной, и это значение уже записывают вместо «буквы *C*» в общее решение. Отметим, что в случае, когда правая часть уравнения в окрестности некоторой точки задана, непрерывна и дифференцируема, то через каждую точку множества, на котором заданы интегральные кривые, проходит в точности одна интегральная кривая. Областью определения уравнения $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ считают объединение областей определения уравнений $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x) \cdot h(y)}$. Точки, в которых одновременно $g(x) \cdot h(y) = 0$ и $\frac{1}{g(x) \cdot h(y)} = 0$, называются особыми точками уравнения $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ (и уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x) \cdot h(y)}$, и уравнения $\frac{dy}{h(y)} - g(x) \cdot dx = 0$).

Типы уравнений, сводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными путем замен или поиска решения в специальном виде (однородные, линейные, Бернулли и различные сводящиеся к ним), хорошо известны и представлены в любом учебнике по дифференциальным уравнениям или высшей математике (см., например, [1, 2]).

2.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

Для простоты будем рассматривать линейные уравнения второго порядка. Из общих соображений очевидно, что общее решение такого уравнения будет содержать две произвольных постоянных, поскольку предполагается по второй производной искать функцию, то есть требуется два раза интегрировать. В общем виде его можно записать

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{2.2.1}$$

В общем виде решать такое уравнение довольно проблематично; впрочем, структура общего решения такого уравнения хорошо известна. А именно, общее решение такого уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{2.2.2}$$

и какого-нибудь частного решения уравнения (2.2.1). Что касается уравнения (2.2.2), то его общее решение есть линейная комбинация двух линейно независимых частных решений уравнения (2.2.2). Процесс поиска этих частных решений хорошо известен для случая, когда коэффициенты в левой части уравнения (2.2.1) (и (2.2.2)) являются постоянными, а функция $f(x)$ имеет специальный вид, о котором речь пойдёт ниже.

Итак, пусть коэффициенты уравнения (2.2.2) суть постоянные величины и без ограничения общности коэффициент при y'' равен 1. Тогда (2.2.2) можно записать, например, так:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.2.3}$$

где $p = \dfrac{a_1}{a_2}$, $q = \dfrac{a_0}{a_2}$. Будем искать решение уравнения (2.2.3) в виде $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Имея в виду, что $\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}$, $\left(e^{\lambda x}\right)'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, после подстановки в (2.2.3) получим: $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0$; сокращая на заведомо положительную величину $e^{\lambda x}$, получим квадратное уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, называемое *характеристическим* для уравнения (2.2.3).

Имеет место три возможности: дискриминант уравнения положителен, и оно имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2; дискриминант уравнения равен нулю, и оно имеет кратные действительные корни $\lambda_1 = \lambda_2$; дискриминант отрицателен, и оно имеет комплексносопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i \quad (i^2 = -1).$$

1) Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}$, имеем: $y = e^{\lambda_1 x}$ и $y = e^{\lambda_2 x}$ два линейно независимых частных решения уравнения (2.2.3), и общее решение запишется в виде: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где $C_1,\ C_2$ произвольные постоянные.

2) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R}$, то, кроме частного решения $y = e^{\lambda x}$, существует второе линейно независимое с ним: $y = xe^{\lambda x}$ (это можно показать непосредственной подстановкой функции $y = xe^{\lambda x}$ в уравнение (2.2.3)), и общее решение запишется в виде: $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$, где $C_1,\ C_2$ произвольные постоянные.

3) Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbf{C}$, то для того, чтобы выделить действительные линейно независимые решения уравнения (2.2.3), рассмотреть функцию $y = e^{(\alpha + i\beta)x}$, перейдя от показательной формы комплексной величины к тригонометрической:

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Так как уравнение (2.2.3) с действительными коэффициентами, то решениями его будут вещественная и мнимая части комплекснозначного решения, то есть функции $y = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые являются линейно независимыми (что, вообще говоря, нужно проверять дополнительно). Таким образом, общее решение в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения выглядит так:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Для решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(t) \tag{2.2.4}$$

имеет место общий метод – метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа. Однако в случае, когда в правой части стоит показательная или тригонометрическая функция, умноженная на многочлен, то часто гораздо эффективнее так называемый метод неопределённых коэффициентов. И то, и другое хорошо описаны в весьма распространенной литературе, например, в книгах [1, 2].

2.3. Решение однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Это важный раздел, связанный с необходимостью понимания того, как ведут себя траектории в окрестности состояния равновесия.

Как и в случае с линейными уравнениями высших порядков, общим решением линейной системы дифференциальных уравнений n-ого является максимальная линейная комбинация её линейно независимых частных решений (то есть линейная комбинация n линейно независимых частных решений). Подробно теоретические аспекты теории линейных систем дифференциальных уравнений можно изучить по источникам [1] и [2]. Покажем процесс решения таких систем на двух примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде $x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}, z = Ce^{\lambda t}$. Данные функции подставим в систему:

$$\begin{cases} A\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t} + Ce^{\lambda t}, \\ B\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t} - Ce^{\lambda t}, \\ C\lambda e^{\lambda t} = 2Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\lambda = A - B + C, \\ B\lambda = A + B - C, \\ C\lambda = 2A - B, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)A - B + C = 0, \\ A + (1-\lambda)B - C = 0, \\ 2A - B - \lambda C = 0. \end{cases}$$

В результате получим однородную алгебраическую систему, которая имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда её определитель равен нулю. Из этого условия получаем уравнение, называемое характеристическим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 + 2 - 1 - 2(1-\lambda) - \lambda - (1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1,\ \lambda = -1,\ \lambda = 2).$$

(Корни кубического уравнения в данном случае ищем среди целых делителей свободного члена.)

Итак, только при $\lambda = 1,\ \lambda = -1,\ \lambda = 2$ найдутся ненулевые значения A, B, C такие, что функции $x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}, z = Ce^{\lambda t}$ будут решениями исходной системы дифференциальных уравнений. Поскольку функции вида $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ линейно независимы (доказательство см. в [2]), то и три частных решения, которые мы получим, тоже будут линейно независимыми, и их линейная комбинация будет общим решением системы.

Итак, пусть $\lambda = 1$; подставим функции $x = Ae^t, y = Be^t, z = Ce^t$ в исходную систему. После сокращения на e^t получим: $\begin{cases} -B + C = 0, \\ A - C = 0, \\ 2A - B - C = 0. \end{cases}$ Определитель этой системы, как известно, равен нулю, поэтому она имеет бесконечно много решений, из которых нам необходимо одно, например, $A = B = C = 1$. Итак, первое частное решение системы найдено: $x = e^t, y = e^t, z = e^t$.

Положим $\lambda = -1$; подставим функции $x = Ae^{-t}, y = Be^{-t}, z = Ce^{-t}$ в решаемую систему. После сокращения на e^{-t} получим: $\begin{cases} 2A - B + C = 0, \\ A + 2B - C = 0, \\ 2A - B + C = 0. \end{cases}$ Определитель этой системы, как известно, равен нулю, поэтому она имеет бесконечно много решений, из которых нам необходимо одно. Положим, например, $C = -1$; получим: $\begin{cases} 2A - B = 1, \\ A + 2B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A - 2B = 2, \\ A + 2B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = 1, \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = {}^{1}\!/_{5}, \\ B = -{}^{3}\!/_{5}. \end{cases}$ Полученное решение отличается от других решений этой системы произвольным множителем, поэтому выберем более удобную тройку $(A, B, C) = (1, -3, -5)$. Итак, второе частное решение, линейно независимое с первым, выглядит следующим образом: $x = e^{-t}, y = -3e^{-t}, z = -5e^{-t}$.

Положим $\lambda = 2$; подставим функции $x = Ae^{2t}, y = Be^{2t}, z = Ce^{2t}$ в решаемую систему. После сокращения на e^{2t} получим: $\begin{cases} -A - B + C = 0, \\ A - B - C = 0, \\ 2A - B - 2C = 0. \end{cases}$ Определитель этой системы, как известно, равен нулю, поэтому она имеет бесконечно много решений, из которых нам необходимо одно. Положим, например, $C = 1$; получим: $\begin{cases} -A - B = -1, \\ A - B = +1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = 1. \end{cases}$ Таким образом, найдено третье частное решение: $x = e^{2t}, y = 0, z = e^{2t}$.

Общее решение, записанное в векторной форме, выглядит следующим образом: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -3e^{-t} \\ -5e^{-t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$. Оно же в координатной форме:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t},\ \ y = C_1 e^t + -3C_2 e^{-t},\ z = C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

В случае наличия комплексносопряженных корней характеристического уравнения решение ищут в виде $x = Ae^{(\alpha + i\beta)t}, y = Be^{(\alpha + i\beta)t}, z = Ce^{(\alpha + i\beta)t}$, находят *A*, *B* и *C* непосредственной подстановкой в систему, и переходом к тригонометрической форме функции комплексного переменного находят вещественную и мнимую части решения – именно они и будут парой линейно независимых частных решений (по аналогии с линейными однородными уравнениями высших порядков с постоянными коэффициентами). Подробности в [2],[1],[3].

В случае наличия кратных корней характеристического уравнения частные решения ищут следующим образом. Пусть корень $\lambda = \lambda_1$ кратности 2. Соответствующее ему решение ищем в виде функций, являющихся произведением многочлена первого порядка относительно t с неопределёнными коэффициентами на $e^{\lambda_1 t}$, а именно: $x = (At + B)e^{\lambda_1 t}$, $y = (Ct + D)e^{\lambda_1 t}$.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

Решение. Пропуская этап подстановки функций $x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}$ в систему, перейдём сразу к характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1.$$

Решение ищем в виде $x = (At + B)e^{-t}$, $y = (Ct + D)e^{-t}$. Эти функции подставим в систему и получим следующие тождества:

$$\begin{cases} (A - At - B)e^{-t} = -3(At + B)e^{-t} + 2(Ct + D)e^{-t}, \\ (C - Ct - D)e^{-t} = -2(At + B)e^{-t} + (Ct + D)e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -At + (A - B) = (-3A + 2C)t + (-3B + 2D), \\ -Ct + (C - D) = (-2A + C)t + (-2B + D). \end{cases}$$

Записанные тождества будут иметь место, если соответствующие коэффициенты линейных функций совпадут, а именно: $-A = -3A + 2C,\ A - B = -3B + 2D,$ $-C = -2A + C,\quad C - D = -2B + D$ или $A = C,\ A + 2B - 2D = 0$, или $B = \frac{1}{2}(-A + 2D)$.

Переобозначим $A = C = C_1,\ D = C_2$, тогда $B = \frac{1}{2}(-C_1 + 2C_2)$. По смыслу C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функции e^{-t} и te^{-t} – линейно независимые частные решения (доказательство см. [2]).

Итак, общее решение системы: $x = C_1 te^{-t} + \frac{1}{2}(-C_1 + 2C_2)e^{-t}$, $y = C_1 te^{-t} + C_2 e^{-t}$. В векторном виде это решение запишется следующим образом: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. Соответственно, частные решения, линейная комбинация которых здесь записана: $x_1 = te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t}$, $y_1 = te^{-t}$; $x_2 = e^{-t}$, $y_2 = e^{-t}$.

3. Решение разностных уравнений и систем

3.1. Линейные разностные уравнения. Разностные уравнения первого порядка, аналогичные дифференциальным уравнениям первого порядка, не настолько популярны, хотя бы по той причине, что при их решении вместо интегрирования требуется умение находить суммы конечного произвольного числа слагаемых и произведение конечного произвольного числа сомножителей. Поэтому обратимся к линейным разностным уравнениям вида

$$a_n y(x+n)+a_{n-1}y(x+n-1)+\ldots+a_1 y(x+1)+a_0 y(x)=f(x),\ x\in\mathbf{N}. \quad (3.3.1)$$

Введём обозначение $y(x+n-j)=y_{x+n-j}$, тогда уравнение (4.3.1) можно записать в более компактном виде:

$$a_n y_{x+n}+a_{n-1}y_{x+n-1}+\ldots+a_1 y_{x+1}+a_0 y_x=f(x). \quad (3.3.2)$$

Здесь коэффициенты a_i, $i==0,1,2,\ldots$ могут быть как функциями от x, так и постоянными величинами. Порядок уравнения – величина, на единицу меньшая количества входящих в уравнение значений функции y.

Введём понятия общего решения и частного решения произвольного разностного уравнения n-ого порядка

$$\Phi(x,\ y_x,\ y_{x+1},\ldots,y_{x+n-1},\ y_{x+n})=0. \quad (3.3.3)$$

В силу теоремы о неявной функции в большинстве случаев по крайней мере локально можно выразить y_{x+n} как функцию остальных переменных, входящих в данное уравнение:

$$y_{x+n}=P(x,\ y_x,\ y_{x+1},\ldots,y_{x+n-1}). \quad (3.3.4)$$

Значения функции $y_x,\ y_{x+1},\ldots,y_{x+n-1}$ можно интерпретировать как начальные, а саму функцию (3.3.4) – как рекуррентное соотношение, ставящее в соответствие этим значениям $(n+1)$-ое значение y_{x+n}. Значения можно брать различные, то есть они есть *произвольные постоянные* $C_1, C_2,\ldots,C_n$. Таким образом, в общем виде решение произвольного уравнения (3.3.3) может быть записано в виде $\Psi(x,\ y_x, C_1,\ C_2,\ldots,C_n)$, которые определяются в случае, если заданы начальные условия $y_x,\ y_{x+1},\ldots,y_{x+n-1}$. Подстановка конкретных значений $y_x,\ y_{x+1},\ldots,y_{x+n-1}$ в общее решение вместо произвольных постоянных дает частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.

Возвращаясь к линейному уравнению (3.3.1)-(3.3.2), отметим, что существует глубокая аналогия между решением линейных дифференциальных уравнений и линейных разностных уравнений. Рассмотрим этот аспект более подробно.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.3.2)

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \ldots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0 \qquad (3.3.5)$$

Факт 1. Общее решение уравнения (3.3.2) есть сумма общего решения уравнения (3.3.5) и какого-нибудь частного решения уравнения (3.3.2)

Факт 2. Общее решение уравнения (3.3.5) есть максимальная линейная комбинация его линейно независимых частных решений (максимальное количество линейно независимых частных решений равно порядку уравнения).

Как и в случае линейных дифференциальных уравнений, хорошо известен алгоритм решения уравнений вида (3.3.2) и (3.3.5) в ситуации, когда коэффициенты в левой части постоянны.

Рассмотрим пример. Решить уравнение $y_{x+2} - y_{x+1} - 2y_x = 0$.

Решение будем искать в виде $y = \lambda^x$. Подставим эту функцию в уравнение: $\lambda^{x+2} - \lambda^{x+1} - 2\lambda^x = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda^2 - \lambda - 2)\lambda^x = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -1$, $\lambda = 2$. (x – натуральный аргумент, поэтому отрицательное основание у степени λ^x возможно.) Общее решение: $y = C_1 \cdot (-1)^x + C_2 \cdot 2^x$.

Подробнее о решениях линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами см. в [4], [5], [6].

3.2. Линейные разностные системы

Мы будем рассматривать линейные однородные разностные системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t+1) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

где $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{N}$. Как и в случае с линейными разностными уравнениями, значения функций можно записывать в виде обозначения функции с индексом: $x_1(t) = x_{1_t}$. Вместо переменной *t* часто используют любую другую.

Замечание. В отличие от однородных у неоднородных систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами хотя бы в одном уравнении присутствует слагаемое – некоторая функция, зависящая от независимого переменного.

Общие подходы к решению линейных разностных систем похожи на подходы к решению линейных дифференциальных систем. Общим решением разностной системы также будет максимальная линейная комбинация его линейно независимых частных решений.

Пример. Решить линейную разностную систему второго порядка

$$\begin{cases} x_{k+1} = -2x_k - 4y_k, \\ y_{x=1} = 2x_k + 2y_k. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде $x_k = A\lambda^k$, $y_k = B\lambda^k$. Имеем: $\begin{cases} A\lambda^{k+1} = -2A\lambda^k - 4B\lambda^k, \\ B\lambda^{k+1} = 2A\lambda^k + 2B\lambda^k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2-\lambda)A - 4B = 0, \\ 2A + (2-\lambda)B = 0. \end{cases}$ Нетривиальные решения однородная система имеет только в случае, когда её определитель равен нулю: $\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$. Функции $x_k = A(2i)^k$, $y_k = B(2i)^k$ подставим в исходную систему, при этом получим: $\begin{cases} (-2-2i)A - 4B = 0, \\ 2A + (2-2i)B = 0 \end{cases}$ (первое уравнение получается из второго путем умножения обеих частей на $-1-i$). Пусть $B = 1$, тогда $A = \dfrac{-2-2i}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$. Имеем:

$$x_k = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2i)^k = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)2^k\left(\cos\frac{\pi}{2}k + i\sin\frac{\pi}{2}k\right) =$$

$$= 2^{k-1}\left(\left(-\cos\frac{\pi}{2}k + \sin\frac{\pi}{2}k\right) + i\left(-\cos\frac{\pi}{2}k - \sin\frac{\pi}{2}k\right)\right),\ y_k = (2i)^k = 2^k\left(\cos\frac{\pi}{2}k + i\sin\frac{\pi}{2}k\right).$$

Таким образом, независимые действительные частные решения: $x_k^{(1)} = 2^{k-1}\left(-\cos\frac{\pi}{2}k + \sin\frac{\pi}{2}k\right)$, $y_k^{(1)} = 2^k\cos\frac{\pi}{2}k$; $x_k^{(2)} = 2^{k-1}\left(-\cos\frac{\pi}{2}k - \sin\frac{\pi}{2}k\right)$, $y_k^{(2)} = 2^k\sin\frac{\pi}{2}k$. Соответственно, общее решение:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1 \cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{2}k + \sin\frac{\pi}{2}k \\ 2\cos\frac{\pi}{2}k \end{pmatrix} + C_2 \cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{2}k - \sin\frac{\pi}{2}k \\ 2\sin\frac{\pi}{2}k \end{pmatrix}.$$

Подробнее о решении линейных систем см. [4],[6].

4. Моделирование экономических процессов

4.1. Модель макроэкономической динамики Харрода-Домара

При изложении данного раздела будет следовать подходу учебника [7]. Данная модель использует дифференциальные уравнения первого порядка. Обозначим доход через $Y(t)$, потребление и инвестиции как $C(t)$ и $I(t)$ соответственно, рассматривается закрытая экономика без экспорта и импорта и пусть $Y(t)=C(t)+I(t)$, то есть государственные расходы в модели не выделяются. Предполагается, что скорость роста дохода пропорциональна инвестициям и выполняется равенство $\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1}{B}I(t)$ или $I(t)=B\frac{dY(t)}{dt}$. Коэффициент $\frac{1}{\beta}$ называется приростной капиталоотдачей, обратная ему величина B называется приростной капиталоёмкостью. С экономической точки зрения из этого предположения вытекают следующие условия модели: **1)** Инвестиционный лаг равен нулю, то есть инвестиции мгновенно переходят в прирост капитала K. В непрерывном времени это можно записать в виде соотношения $\frac{dK}{dt}=I$, откуда, в частности, следует, что $\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1}{B}\frac{dK(t)}{dt}$. Очевидно, что после интегрирования последнего выражения получим $Y(t)=\frac{1}{B}K(t)+\mathrm{Const}$, где Const – произвольная постоянная. Очевидно, что тогда **2)** производственная функция $Y(t)$ линейна и зависит в точности от двух факторов производства – труда L и капитала; тогда $Y(t)=aL(t)+bK(t)+c$, где $b=\frac{1}{B}$, и либо $a=0$ (тогда выпуск не зависит от затрат труда, например, поскольку труд не является дефицитным ресурсом), либо затраты труда $L(t)\equiv L=const$ постоянны (то есть модель не учитывает технического прогресса).

Заметим, что в данной модели динамика объёма потребления задается экзогенно, поэтому можно рассматривать разные возможности.

1. Потребления нет, $C(t)\equiv 0$.

Итак $Y(t)=C(t)+I(t)=0+B\frac{dY(t)}{dt}$, то есть получаем простейшее дифференциальное уравнение первого порядка $B\frac{dY}{dt}=Y$, которое является с одной стороны уравнением с разделяющимися переменными; с другой стороны, линейным однородным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Решаем его, учитывая, что выпуск $Y>0$: $\frac{dY}{Y}=\frac{1}{B}dt$; $\int\frac{dY}{Y}=\int\frac{1}{B}dt$;

$\ln Y = \frac{1}{B}t + \ln A$ (A – произвольная постоянная); $\ln Y = \ln e^{\frac{1}{B}t} + \ln A$; $\ln Y = \ln\left(e^{\frac{1}{B}t} \cdot A\right)$; $Y = Ae^{\frac{1}{B}t}$. Пусть $t = 0$, тогда $Y(0) = A$, то есть решение можно записать в виде $Y = Y(0) \cdot e^{\frac{1}{B}t}$. То есть рост выпуска продукции при нулевом потреблении будет экспоненциальным.

2. Потребление постоянно, $C(t) \equiv C$. Тогда $Y(t) = C(t) + I(t) = C + B\frac{dY(t)}{dt}$, получаем линейным неоднородным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами: $B\frac{dY(t)}{dt} - Y(t) = C$. Решением этого уравнения будет сумма общего решения соответствующего линейного однородного уравнения, которое уже найдено: $Y = Ae^{\frac{1}{B}t}$, и какого-нибудь его частного решения. Непосредственной подстановкой в уравнение $B\frac{dY(t)}{dt} - Y(t) = C$ можно получить, что таким решением $Y = C$ будет, и общим решением уравнения $B\frac{dY(t)}{dt} - Y(t) = C$ является решение $Y = Ae^{\frac{1}{B}t} + C$. Подставив в решение $t = 0$, получим $A = Y(0) - C$, то есть $Y = (Y(0) - C)e^{\frac{1}{B}t} + C$.

Можно дальше изменять гипотезы о характере потребления в модели, и получая другие решения, делать выводы о макроэкономических показателях.

4.2. Линейные модели циклов деловой активности

В данном разделе рассматриваются классические примеры линейных моделей циклов деловой активности.

4.2.1. Модель Самуэльсона-Хикса ([8],[9])

Использование динамических систем для моделирования циклов деловой активности началось в 30-х годах двадцатого столетия. Одним из толчков к созданию таких моделей послужила деятельность Кейнса, который в книге [10] дал первое полное описание модели экономики в терминах макроэкономических переменных, таких как доход, потребление, сбережения и инвестиции, подготовив тем самым почву для модели делового цикла Самуэльсона (1939 год). Модель Самуэльсона учитывает только выполнение условий мультипликатора в сочетании с принципом акселерации, определяющим инвестиции.

Рассмотрим, как реализуется идея инвестиционного мультипликатора в кейнсианской экономике. Предположим, что мы имеем начальное увеличение в инвестициях ΔI_0. Это вызовет изменение в начальном доходе $\Delta Y_0 = \Delta I_0$, который порождает дополнительное потребление: сначала $c \cdot \Delta I_0$, далее $c^2 \cdot \Delta I_0$ и т.д. (c – склонность к потреблению). Таким образом, полное увеличение дохода для бесконечного времени составит $\sum_{i=0}^{\infty} c^i \cdot \Delta I_0$. Этот геометрический ряд, который сходится к конечной сумме – некоему полному приросту дохода ΔY. Таким образом, $\Delta Y = \sum_{i=0}^{\infty} c^i \cdot \Delta I_0 = \frac{\Delta I}{1-c} = \frac{\Delta I}{s}$, где s – склонность к накоплению, а $\frac{1}{1-c} = \frac{1}{s} = \alpha$ есть инвестиционный мультипликатор.

Принцип акселерации, высказанный в начале двадцатого века (см. библиографию в [11]), формализует тот экономический феномен, когда в ответ на незначительное увеличение потребления (или спроса, или выпуска продукции) величина инвестиций в следующем периоде растет гораздо более значительно. По-видимому, впервые в формальном виде принцип акселерации записал Джон Морис Кларк в 1917 году, а именно, Кларк предположил, что $I_t = \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ (индекс у переменных – временной период), где β – коэффициент «акселерации», или акселератор. Самуэльсон [8] предположил, что величина инвестиций пропорциональна изменению потребления, т.е. $I = \beta\Delta C$, где β – коэффициент «акселерации», или акселератор. Время в модели Самуэльсона дискретно, доход (Y) делится на потребление (C), накопление, совпадающее с инвестициями (I) и правительственные расходы (g): $Y_t = g_t + I_t + C_t$. Здесь $C_t = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)Y_{t-1} = cY_{t-1}$, где $\frac{1}{\alpha}$ – склонность к сбережению, а α – мультипликатор; $I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) = c\beta Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$, правительственные расходы принимаются за постоянную величину, т.е. $g_t = \iota$ (индекс у переменных – временной период). Таким образом, национальный доход переписывается в виде: $Y_t = \iota + c(\beta+1)Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$. Математически последнее уравнение есть линейное разностное уравнение второго порядка. Его решением могут быть или сумма двух показательных функций (экспонент), соответствующих либо «взрывному» росту дохода, либо быстрому его спаду; или сумма функций, соответствующих затухающим либо «разрастающимся» колебаниям.

Развивая идею Самуэльсона, Хикс в 1950 году показал [9], что акселерацию не обязательно привязывать только к изменению потребления, например, её можно связать с общественными издержками и др. Рассмотрев условие $I_t = \beta \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2})$, Хикс получил линейное разностное уравнение второго порядка, очень похожее на уравнение Самуэльсона (подробный анализ уравнения Хикса можно найти, например, в книге [12]).

4.2.2. Модель Филлипса [13], [14]

Аналог линейной модели Самуэльсона-Хикса для непрерывного времени представил Филлипс, анализ которой можно найти, например, в книгах [14] и [12]. Пусть функция потребления имеет вид: $C(t)=cY(t)$. В модели Филлипса предполагается, что сохраняется неизменным отношение между желательным запасом капитала $K^d(t)$ и чистым доходом Y: $K^d(t)=\nu Y(t)$, $\nu>0$. Предполагается, что фирма изменяет запас капитала, как только он начинает отличаться от желаемого: $I(t)=\xi\left(K^d(t)-K(t)\right)=\xi(\nu Y(t)-K(t))$, $\xi>0$. Коэффициент ξ – коррекционный параметр, выражающий скорость реакции инвестирования в ответ на разницу между актуальными и желаемыми запасами капитала. Для дальнейшего нам понадобится производная от инвестиций: $\frac{dI(t)}{dt}=\dot{I}(t)=\xi\left(\nu\dot{Y}(t)-I(t)\right)$.

Пусть $A(t)$ есть экзогенно определённый автономный спрос. Тогда полный спрос есть сумма $C(t)+I(t)+A(t)$, а общее предложение есть $Y(t)$, и избыточный спрос в каждый период времени будет задан выражением $C(t)+I(t)+A(t)-Y(t)$. Предположим, что общее предложение меняется линейно относительно избыточного спроса: $\frac{dY(t)}{dt}=\dot{Y}(t)=\zeta(C(t)+I(t)+A(t)-Y(t))$, $\zeta>0$, где ζ – коррекционный параметр. Дифференцируя последнее соотношение, с учетом вида функции потребления получим: $\ddot{Y}(t)=\zeta\left(-(1-c)\dot{Y}(t)+\dot{I}(t)+\dot{A}(t)\right)$, или, с учетом выражения для $\dot{I}(t)$,

$$\ddot{Y}(t)=\zeta\left(-(1-c)\dot{Y}(t)+\xi\left(\nu\dot{Y}(t)-\left(\frac{\dot{Y}(t)}{\zeta}+(1-c)Y(t)-A(t)\right)\right)+\dot{A}(t)\right),$$

или

$$\ddot{Y}(t)+(\zeta(1-c)+\xi-\zeta\xi\nu)\dot{Y}(t)+\zeta\xi(1-c)Y(t)=\zeta\xi A(t)+\zeta\dot{A}(t).$$

Полагая для простоты $\dot{A}(t)=0$, $A(t)\equiv A$, получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка: $\ddot{Y}(t)+(\zeta(1-c)+\xi-\zeta\xi\nu)\dot{Y}(t)+\zeta\xi(1-c)Y(t)=\zeta\xi A$. Как и в дискретном случае, решением этого уравнения будет непрерывная функция, представляющая собой в общем случае либо сумму двух экспоненциальных функций, означающую либо рост, либо спад; либо сумму двух периодических функций, умноженную на экспоненциальную функцию, означающую либо затухающие, либо «разрастающиеся» колебания. Периодические движения возможны только в случае, когда коэффициент при $\dot{Y}(t)$ равен нулю, что является структурно неустойчивым случаем и в реальности никогда не достигается.

Известны другие линейные модели циклов деловой активности: модель Калецкого [15], модель Вогта [16] и др., более подробную библиографию см. в [12], [11]. Более полную информацию об экономических циклах и их моделировании в историческом и современном аспектах можно найти в обзорных статьях [17]-[18].

Простые уравнения и системы, рассмотренные в предыдущих пунктах, к сожалению, недостаточны для описания всего многообразия динамики, присутствующей в реальных, в том числе экономических, процессах. Эти уравнения и системы:

не подходят для моделирования циклических процессов;

не подходят для моделирования «сложной» (например, хаотической) динамики.

Чтобы описать процессы, отличные от асимптотического стремления к равновесию при прямом или обратном времени, необходимо привлекать нелинейные уравнения и системы, для которых возможно только качественное или численное исследование. При этом для описания сложной динамики в дискретном времени достаточно рассматривать уже одномерные отображения, в то время как в непрерывном времени периодические движения возможны, начиная с измерения 2, а хаотическая динамика – начиная с измерения 3, курса «Дифференциальные и разностные уравнения» не позволяет включить всю информацию по этой тематике. Поэтому рассмотрение нелинейных процессов с соответствующими примерами моделирования экономических систем ограничим одномерной динамикой в дискретном времени.

4.3. Одномерные отображения и моделирование экономической динамики

4.3.1. Основные понятия

Если говорить очень упрощенно, то под динамической системой понимается любая система, которая наблюдается во времени. В зависимости от того, как задается время, различают динамические системы с непрерывным временем (потоки) и динамические системы с дискретным временем (каскады). Первые часто моделируются с помощью дифференциальных уравнений, вторые – с помощью разностных уравнений.

В данном разделе мы будем рассматривать простейший вариант каскадов – одномерные каскады. Пусть имеются интервалы $I \subset \mathbf{R}$, $J \subset \mathbf{R}$ (в частности, возможно, что $I = \mathbf{R}$, $J = \mathbf{R}$). Рассмотрим отображение $f : I \to J$, где f – однозначная и непрерывная функция, дифференцируемая столько раз, сколько это необходимо. Если предположить, что каждое последующее воздействие функцией f происходит через единицу времени, то получим динамическую систему с дискретным временем (каскад), заданную на действительной прямой. Иногда воздействие функцией f на точку x называют итерацией, а саму динамическую систему записывают в виде

$$x_n = f(x_{n-1}) \text{ или } \bar{x} = f(x) \tag{4.3.1}$$

и кратко называют отображением f. Отметим, что $\underbrace{f\left(f\left(...f\left(x\right)\right)\right)}_{n \textbf{ раз}} = f^{n}\left(x\right)$.

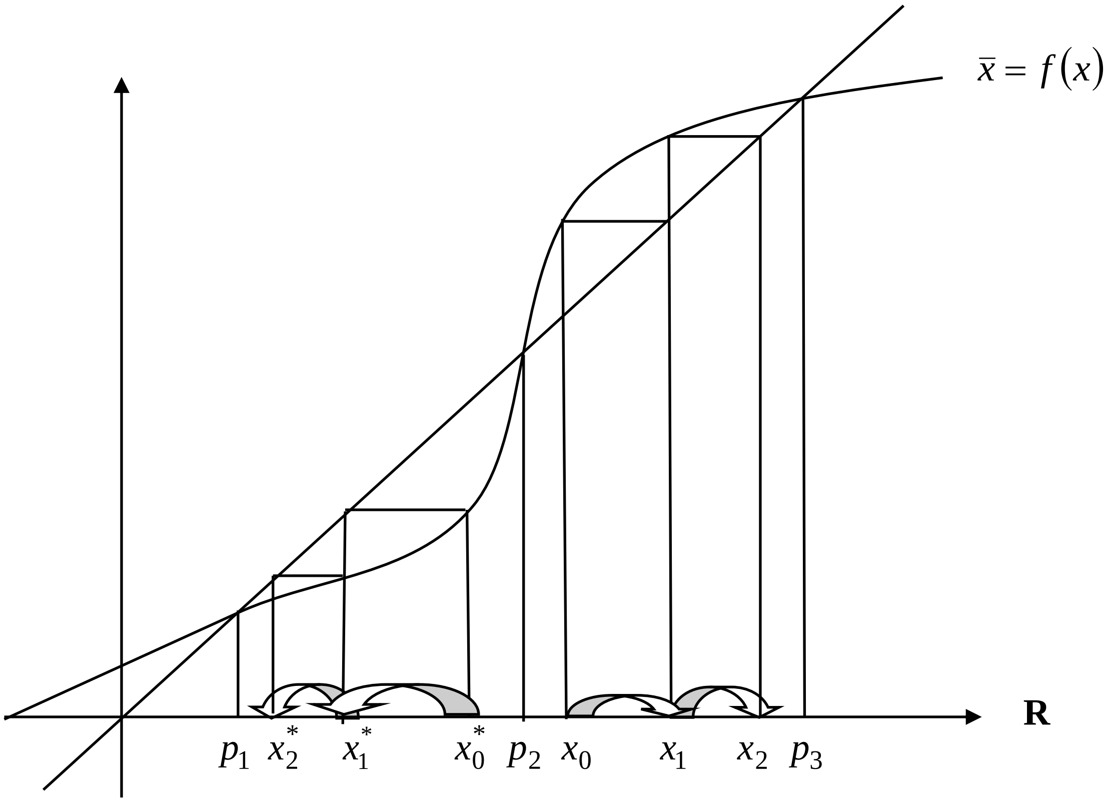

Рис. 4.3.1. Диаграмма Кенигса-Ламерея

Графически динамику отображения (4.3.1) удобно изображать на диаграмме Кёнигса-Ламерея, которая представляет собой двумерную декартову систему координат, дополненную биссектрисой первого квадранта (см. рис. 4.3.1). В системе координат строится график функции f. С помощью такой диаграммы удобно точно находить образы точек при отображении (4.3.1) на горизонтальной прямой $\mathbf{R}$; наглядно проявляется связь между свойствами функции f и динамикой отображения (4.3.1). Так, изучая динамику отображения f на рис. 4.3.1, можно заметить следующие особенности.

1°. На прямой $\mathbf{R}$ имеются три точки p_1, p_2, p_3, каждая из которых при отображении f переходит в себя.

$2°$. При последующих итерациях точка x_0 «перемещается» из окрестности точки p_2 в окрестность точки p_3; точка x_0^* «перемещается» из окрестности точки p_2 в окрестность точки p_1.

Определение 4.3.1. Точка $p \in \mathbf{R}$ такая, что $p = f(p)$, называется *неподвижной точкой* (*точкой покоя, состоянием равновесия*) отображения f (динамической системы $\bar{x} = f(x)$).

Определение 4.3.2. Неподвижная точка p называется (*неподвижным*) *стоком* (*притягивающей точкой*) динамической системы (4.3.1), если $\forall x \neq p$, $x \in V(p)$, где $V(p)$ – некоторая окрестность точки p, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbf{N}$: $\forall n > n_0$ $f^n(x) \in U_\varepsilon(p) \subset V(p)$, где $U_\varepsilon(p)$ – ε-окрестность точки p.

Иначе говоря, при прямом течении времени точка, находящаяся в некоторой окрестности стока, неограниченно стремится к стоку.

Таким образом, точки p_1 и p_3 являются стоками динамической системы, изображённой на рис. 4.3.1.

Определение 4.3.3. Пусть функция f, задающая отображение (4.3.1), обратима, т.е. существует обратная к ней однозначная функция f^{-1}, и пусть f^{-1} – непрерывная функция. Неподвижная точка p отображения f называется *источником* (*отталкивающей точкой*) обратимого отображения (4.3.1), если она является стоком динамической системы

$$x_{n-1} = f^{-1}(x_n). \tag{4.3.2}$$

Иначе говоря, при прямом течении времени точка, находящаяся в некоторой сколь угодно малой окрестности источника, удаляется от него.

Замечание. Если функция f необратима, понятие источника также вводится. Определение в этом случае выглядит несколько сложнее, см., например, [19].

$3°$. Вновь вернёмся к рисунку 4.3.1. Нетрудно заметить, что касательная к графику функции $f(x)$ в точках, абсциссы которых совпадают с неподвижными точками, образует с положительным направлением горизонтальной оси угол меньше, чем $\frac{\pi}{4}$, а в источнике – угол больше, чем $\frac{\pi}{4}$. Это наблюдение позволяет выдвинуть предположение о том, что верным будет следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.3.1. Пусть $p \in \mathbf{R}$ – неподвижная точка динамической системы (1.1). Тогда, если $|f'(p)|<1$, то неподвижная точка p - сток; если $|f'(p)|>1$, то неподвижная точка p - источник.

Неподвижным точкам в реальности соответствуют состояния, когда система находится в равновесии и движение отсутствует.

В случае наличия цикличности тех или иных процессов состояниям реальных систем соответствуют периодические орбиты каскадов.

О п р е д е л е н и е 4.3.4. Точка p динамической системы (1.1) называется *периодической периода* n, если $f^n(p)=p$, но $\forall m=1,2,\ldots,n-1 \quad f^m(p)\neq p$. Число n в этом случае называется *периодом* (*наименьшим периодом*) точки p.

О п р е д е л е н и е 4.3.5. Периодическая точка p периода n динамической системы (1.1) называется *периодическим стоком*, если точка p является неподвижным стоком для отображения $\bar{x}=f^n(x)$. Периодическая точка p периода n динамической системы (1.1) называется *периодическим источником*, если точка p является неподвижным источником для отображения $\bar{x}=f^{-n}(x)$ (в случае, если функция $y=f(x)$ имеет обратную).

Орбитой периодической точки p периода n является совокупность точек $\{p,\ f(p),\ f^2(p),\ \ldots,\ f^{n-1}(p)\}$. *Орбита неподвижной точки* состоит в точности из этой точки.

Периодическим точкам в реальности соответствуют периодические процессы. В качестве экономического примера можно рассмотреть циклы деловой активности.

Важными понятиями теории динамических систем являются устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.

О п р е д е л е н и е 4.3.6. Точка $a \in \mathbf{R}$ называется *устойчивой по Ляпунову* (L-*устойчивой*) при отображении $f(x)$, если $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0$: $|x-a|<\delta \Rightarrow \left|f^j(x)-f^j(a)\right|<\varepsilon \quad \forall j\geq 0$. Точка $a \in \mathbf{R}$ называется *асимптотически устойчивой* при отображении $f(x)$, если, помимо перечисленного, $\left|f^j(x)-f^j(a)\right|\to 0$ при $j\to+\infty$. Точка $a\in\mathbf{R}$ называется неустойчивой при отображении $f(x)$, если $\exists\varepsilon>0 \ \ \forall\delta>0 \ \ \exists j\in\mathbf{N}$: $|x-a|<\delta \Rightarrow \left|f^j(x)-f^j(a)\right|>\varepsilon$.

З а м е ч а н и е. Если p – сток (периодический или неподвижный), то p асимптотически устойчива. Если p – источник (периодический или неподвижный), то p неустойчива. Очевидно также, что асимптотически устойчивая периодическая или неподвижная точка является стоком, а неустойчивая периодическая или неподвижная точка – источником.

В качестве упражнения предлагается переформулировать определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости для случая, когда точка a является неподвижной точкой.

Пусть задана системы (4.3.1). Назовём прообразом точки y множество $f^{-1}(y)=\{x:\ f(x)=y\}$.

Определение 4.3.7. Назовём *положительной полуорбитой* (*положительной полутраекторией*) точки a множество $O^{+}(a)=\left\{f^{k}(a):\ k=0,1,2,\ldots\right\}$. Назовём *отрицательной полуорбитой* (*отрицательной полутраекторией*) точки a множество $O^{-}(a)=\left\{f^{-k}(a):\ k\in 0,1,2,\ldots\right\}$. *Орбитой* (*траекторией*) точки a назовём множество $O(a)=\left\{f^{k}(a):\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Отметим важное **свойство** отображения (4.3.1). Если функция f возрастает на некотором промежутке $[a,b]$, то для всех $x\in[a,b]$ отображение может иметь только неподвижные стоки и источники. Более сложная динамика, начиная с периодических точек, возможна только на тех участках оси Ox, где функция $y=f(x)$ убывает.

Рассмотрим введённые понятия на примере *логистического отображения*, как иногда называют квадратичное отображение

$$\bar{x}=F_{\mu}(x)=\mu\cdot x(1-x), \tag{4.3.3}$$

где $\mu>0$ – параметр. Отображение (4.3.3) интересно тем, что при кажущейся простоте оно предъявляет чрезвычайно сложное поведение [19]. Кроме того, (4.3.3) часто используется в качестве модели различных явлений экономической динамики.

1°. Чтобы найти неподвижные точки отображения (4.3.3), достаточно решить уравнение $x=\mu\cdot x(1-x)$. Это будут точки $p_0=0$ и $p_{\mu}=\dfrac{\mu-1}{\mu}$.

2°. С помощью теоремы 1 легко проверяется характер неподвижных точек. А именно, $f'=\mu-2\mu x$; $f'(0)=\mu$; $f'\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)=2-\mu$. Таким образом, точка $p_0=0$ будет стоком при $\mu<1$, источником при $\mu>1$; точка $p_{\mu}=\dfrac{\mu-1}{\mu}$ будет стоком при $\mu\in(1,\ 3)$; источником при $\mu<1$ или при $\mu>3$.

3°. Изучим вопрос о наличии у отображения (4.3.3) периодических точек периода 2. Для этого решим уравнение $F_\mu^2(x) = x$, т.е. уравнение $x = \mu(\mu x(1-x))(1-(\mu x(1-x)))$. Помимо значений $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\mu-1}{\mu}$, решением этого уравнения будут $x_{3,4} = \dfrac{\mu+1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}$. Именно последние две точки являются периодическими точками периода 2 для отображения (4.3.3); очевидно, что они появляются только при $\mu > 3$ (так как подкоренное выражение дляя положительных μ положительно при $\mu > 3$).

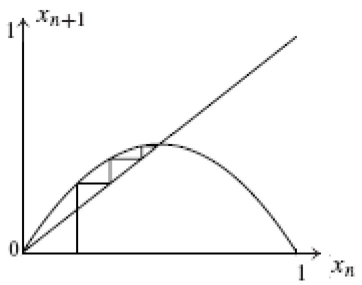

Рис.4.5.2 (μ=2)

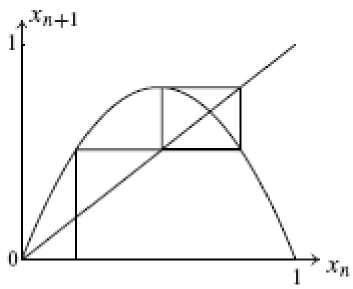

Рис. 4.5.3 (μ=3,2)

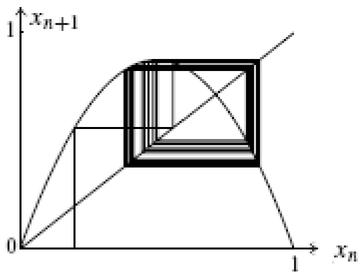

Рис. 4.5.4 (μ=3,5)

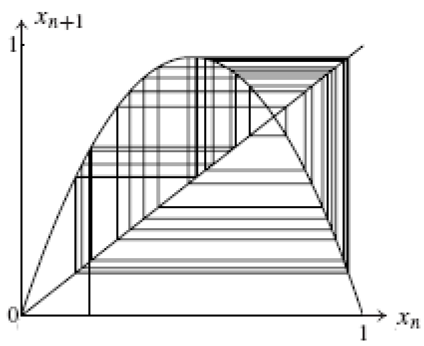

Рис. 4.5.5 (μ=3,8)

Диаграммы Кёнигса-Ламерея логистического отображения

Пусть μ растет от значения 3 до значения 4. При $\mu = 3$ у отображения (4.5.6) появляется орбита периода 2, при этом неподвижная точка p_μ превращается из устойчивой в неустойчивую. Можно показать, что при дальнейшем возрастании μ при переходе через точку $\mu = 1 + \sqrt{6}$ орбита периода 2 теряет устойчивость, и появляется («рождается») устойчивая орбита периода 4. При дальнейшем увеличении параметра μ процесс нарастает лавинообразно (этот процесс иногда называют «каскад бифуркаций удвоения периода»); при переходе через значение $\mu_\infty \approx 3{,}5699456$ логистическое отображение на интервале $x \in [0, 1]$ имеет уже неустойчивые орбиты периодов, равных любой натуральной степени числа 2, то есть бесконечное число периодических орбит и демонстрирует чрезвычайно сложное поведение. В силу определенных закономерностей последней периодической орбитой при увеличении значения μ является орбита периода 3, которая обнаруживается в окрестности значения $\mu = 3{,}83$. При б*о*льших μ на отрезке $x \in [0, 1]$ наблюдаются неустойчивые орбиты всех натуральных периодов. Трудно себе представить, сколь сложна динамика точки, не совпадающей ни с одной периодической.

Таким образом, логистическое отображение при всей своей простоте демонстрирует чрезвычайно сложную динамику. Впоследствии выяснилось, что аналогичную динамику демонстрирует любое «одногорбое» отображение. Неудивительно, что исследователи занимающиеся моделированием экономической динамики не могли не ухватиться за такой роскошный подарок, сделанный математиками. Начиная со второй половины 70-х годов XX века, мировые экономические журналы все больше заполняются публикациями моделей экономической динамики с дискретным временем с различными ограничениями, приводящими к логистическому уравнение. Одна из них рассмотрена ниже.

4.3.2. Модель динамики капитала с учётом загрязнения окружающей среды[1]

Пусть y_t – выпуск продукции на душу населения в период t и k_t – капиталовооруженность в период t. Их связь описывается при помощи неоклассической производственной функции f:

$$y_t = f(k_t). \tag{4.3.1}$$

Пусть c_t – потребление, а разница между выпуском продукции и потреблением – инвестиции i_t:

$$i_t = y_t - c_t.$$

Предполагается, что объём инвестиций пропорционален произведённой продукции, то есть:

$$i_t = y_t \cdot \theta, \quad \theta > 0. \tag{4.3.2}$$

Пусть d_t - амортизационные потери основных фондов в момент времени t. Тогда в силу (4.3.1) и (4.3.2) динамика основных фондов будет описываться уравнением

$$k_t = k_{t-1} + \theta \cdot f(k_{t-1}) - d_t. \tag{4.3.3}$$

---

[1] R. Day, 1982, см. [20] и [21].

Для упрощения анализа предполагается, что амортизационные потери в точности равны основным фондам предыдущего периода.

$$k_{t-1} = d_t \,. \tag{4.3.4}$$

Подставляя (4.3.4) в (4.3.3) получим уравнение динамики капитала:

$$k_t = \theta \cdot f(k_{t-1}) \,. \tag{4.3.5}$$

Пусть в идеальном случае (загрязнение окружающей среды отсутствует) функция $f(k)$ является производственной функцией Кобба-Дугласа

$$f(k) = A \cdot k^{\alpha},$$

где $A > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Р. Дей предположил, что при росте производства загрязнение окружающей среды становится столь велико, что доходы полностью тратятся на устранение причиненного вреда. Пусть эта ситуация возникает при определённом значении капиталовооружённости $k = k^* > 0$. Описанным условиям удовлетворяет, например, функция $f(k)$ вида

$$f(k) = Ak^{\alpha}(k^* - k)^{\gamma}, \tag{4.3.6}$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$.

Подставляя (4.3.6) в (4.3.5), получаем уравнение:

$$k_t = \theta \cdot Ak_{t-1}^{\alpha}(k^* - k_{t-1})^{\gamma} \,. \tag{4.3.7}$$

Предполагается, что параметры $\theta, A, \alpha, \gamma, k^*$ таковы, что функция (4.3.6) отображает интервал $(0; k^*)$ на подмножество интервала $(0; k^*)$.

Это «одногорбое» отображение на промежутке $(0; k^*)$, динамика которого аналогична динамике логистического отображения. Заметим, что упомянутое логистическое отображение $k_t = \mu \cdot k_{t-1}(1 - k_{t-1})$ получается из (4.3.7) при $\alpha = 1$; $k^* = 1; \gamma = 1;$ $\theta \cdot A = \mu$ (μ>0).

4.3.3. Модель перекрывающихся поколений с двумя поколениями.

Результаты теории одномерных отображений используются не только в экзотических моделях, но и в фундаментальных исследованиях теории экономического роста. Рассмотрим один из таких подходов – модель перекрывающихся поколений [22]. В данной простейшей версии предполагается, что время дискретно и неограниченно, и в каждый временной промежуток в наличии имеются два поколения. Младшее поколение работает в фирмах, принадлежащих старшему поколению, производя некий однородный физический товар, сберегая часть зарплаты в собственных инвестирующих фирмах и зарабатывая таким образом средства на второй жизненный период. Старшее поколение, соответственно, не работает, а только потребляет доход от своих предприятий. В конце периода декорации меняются, бывшее старшее поколение вместе с фирмами, производившими физический товар, бесследно исчезает, потратив все свои средства без остатка, бывшее младшее поколение становится старшим, а их инвестирующие фирмы – производственными, возникает следующее младшее поколение, и все повторяется сначала. В модели вводятся функция полезности, производственная функция, описываются их свойства и свойства экономических величин, выводятся условия равновесия в данный период времени. Затем вводится понятие межвременного равновесия – это есть не что иное, как цепочки равновесий в конкретный период времени, то есть траектории одномерной динамической системы с дискретным временем, и рассматриваются различные условия на динамику процесса, чтобы выделить конкретную орбиту. В результате учета этих условий возникает уравнение, связывающее значение капитала в расчете на единицу труда в данный и в последующий периоды времени: $k_{t+1} = g(k_t)$, где функция g обладает определёнными свойствами, вытекающими из условий, наложенных на межвременное равновесие. Выделяют межвременное равновесие с совершенным предвидением – когда репрезентативный экономический агент в первый период времени обладает полной информацией о своих доходах во второй период, – межвременное равновесие с адаптивным предвидением – в этом случае репрезентативный экономический агент считает, что его доходы в будущем будут точно такие же, что доходы у старшего поколения в данный период времени. В первом предположении при некоторых ограничениях на параметры системы можно показать, что функция g может только возрастать, то есть изучаемая система может иметь только точки покоя. Во втором предположении при некоторых значениях параметров функция g может принимать колоколообразную форму, и у системы в этом случае возможна сложная динамика. Задача исследователя, изучающего данную экономику, подобрать такие рекомендации для руководства, чтобы экономика «не скатилась в хаос».

Простейшую модель перекрывающихся поколений можно усложнять, рассматривая иные деления популяции в данном временном промежутке, или вводя второй товар с другими свойствами, или рассматривая финансовые потоки между поколениями (например, случай наследства). Соответствующая дискретная система будет усложняться, например, будет увеличиваться её размерность [22].

Литература

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., ГИФМЛ, 1958.- 468 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1965.- 424 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Наука, ГРФМЛ, 1992.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М., Наука, ГРФМЛ, 1967.
5. Романко В.К. Разностные уравнения: Учебное пособие. – БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.- 112 с.
6. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Книжный дом «Либроком», 2014. – 175 с.
7. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: Дело и Сервис, 2001.- 368 с.
8. Samuelson P.A. Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration // The Review of Economics and Statistics. 1939. Vol. 21. No. 2, p. 75-78.
9. Hicks J.R. A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. – Oxford University Press, 1950.
10. Keynes J.M. The General Theory of Employment Interest, and Money. – London: Macmillan, 1936.
11. Business Cycle Dynamics: Models and Tools./ Puu T., Sushko I. (Editors) – Springer-Verlag, 2006.
12. Gabisch G., Lorenz H.-W. Business Cycle Theory: A Survey of Methods and Concepts. – Springer-Verlag, 1989.
13. Phillips A.W. Stabilization Policy in a Closed Economy // Economic Journal. 1954. Vol. 64. No.254, p. 290-323.
14. Allen R.G.D. Mathematical Economics. – London: Macmillan, 1956.
15. Kalecki M. A Theory of the Business Cycle // Review of Economic Studies. 1937. Vol.38. No. 1, pp. 77-97.
16. Vogt W. Fluktuationen in einer wachsender Wirtschaft unter klassischen Bedingunger // Wachstum, Einkommensverteilung und wirtschaftliches Gleichgewicht. – Berlin: Duncker und Humblot, 1969, pp. 61-72.
17. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. 17(224). – с. 50-61.
18. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. 18(224). – с. 42-57.
19. Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. - 2nd ed. - CRC Press LLC, 1999. - 506 p.
20. Day, R.H. Irregular Growth Cycles. //The American Economic Review – 1982

- Vol. 72 - No3 - pp. 406-414.
21. Simonovits A. Mathematical methods in dynamical economics. - Basingstoke etc: Macmillan Press LTD, 2000 - 317 p.
22. De la Croix D., Michel P. A Theory of Economic Growth. Dynamics and Policy in Overlapping Generations. - Cambridge University Press, 2004.

Евгений Валентинович **Круглов**

Юрий Алексеевич **Кузнецов**

Елена Анатольевна **Таланова**

ДИФФРЕРНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603095, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.