

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского»

С. С. Бельмесова

Практикум по дискретной математике

Учебно - методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института экономики и
предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлению
подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Нижний Новгород

2018

УДК 519.1
ББК 22.176
Б-50

Б-50 Бельмесова С. С. ПРАКТИКУМ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ: Учебно - методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 34 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики Института информационных технологий, математики и механики **Чекмарев Д. Т.**

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические понятия и типовые задачи по следующим разделам курса ”Дискретная математика”: теория множеств, комбинаторный анализ, алгебра логики и теория графов.

Цель методического пособия – помочь студентам лучше освоить теоретический материал и привить навыки в его использовании при решении стандартных задач.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С. В.

УДК 519.1
ББК 22.176

©Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2018

Содержание

Введение	4
1. Теория множеств	5
2. Комбинаторика	9
3. Алгебра логики	18
4. Теория графов	26
Литература	33

Введение

Пособие содержит краткий теоретический материал и стандартные задачи по следующим разделам курса ”Дискретная математика”: теория множеств, комбинаторика, алгебра логики и теория графов.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса дневного и вечернего отделений Института экономики и предпринимательства, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 ”Бизнес-информатика” и изучающих курс ”Дискретная математика”.

1. Теория множеств

Основные понятия и обозначения

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество A , состоящее из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n .

$A = \{x : P(x)\}$ – множество A , состоящее из элементов a , которые обладают свойством $P(a)$.

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A .

$a \notin A$ – элемент a не принадлежит множеству A .

\emptyset – пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента).

U – универсальное множество (универс).

$A \subseteq B$ – множество A является подмножеством множества B .

$A \subset B$ – множество A является собственным подмножеством множества B ($A \subseteq B$ и $A \neq B$).

$P(A) = 2^A = \{X : X \subseteq A\}$ – множество всех подмножеств (булеан).

$\bar{A} = U \setminus A$ – дополнение множества A .

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$ – пересечение множеств A и B .

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$ – объединение множеств A и B .

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$ – разность множеств A и B .

$A \otimes B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симметрическая разность множеств A и B .

Основные законы теории множеств

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
(законы коммутативности);

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
(законы ассоциативности);

3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(законы дистрибутивности);
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(законы де Моргана);
5. $\overline{\overline{A}} = A$
(закон двойного дополнения);
6. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
(законы идемпотентности);
7. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
(законы пустого множества и универса);
8. $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$
(законы поглощения);
9. $\overline{A} \cup A = U$, $\overline{A} \cap A = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = U$, $\overline{U} = \emptyset$
(законы для дополнения).

Упражнения

1.1. Сколько элементов содержат множества:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $\{\emptyset\}$; | 2) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; |
| 3) $\{\{a\}, b\}$; | 4) $\{\{a, b\}, a, b\}$; |
| 5) $\{1, 2, 3, \{4, 5, 6\}\}$; | 6) $\{1, \{1\}, 2, \{1, 2\}, \{2\}\}$. |

1.2. Какие из следующих утверждений верны:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; | 2) $\emptyset \in \emptyset$; |
| 3) $b \in \{\{b\}\}$; | 4) $\{b\} \in b$; |
| 5) $b \in \{b\}$; | 6) $\{1\} \in Z$; |

9) $\overline{A \cap B} \setminus \overline{A \cup C}$;

10) $(A \otimes B) \otimes \overline{C}$;

11) $A \otimes (B \otimes \overline{C})$;

12) $(\overline{A} \otimes C) \setminus (\overline{C} \otimes A)$.

1.7. Выяснить какие из следующих равенств справедливы для любых множеств X, Y, Z :

(a) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;

(b) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;

(c) $X \otimes (Y \cap Z) = (X \otimes Y) \cap (X \otimes Z)$;

(d) $X \otimes (Y \cup Z) = (X \otimes Y) \cup (X \otimes Z)$;

(e) $(X \setminus Y) \otimes (X \setminus Z) = X \setminus (Y \otimes Z)$;

(f) $X \otimes (Y \setminus Z) = (X \otimes Y) \setminus (X \otimes Z)$.

1.8. Упростить теоретико-множественные выражения путем алгебраических преобразований:

(a) $A \otimes (A \otimes B)$;

(b) $A \cap (\overline{A} \cup B)$;

(c) $(A \otimes B) \cup (A \cap B)$;

(d) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$;

(e) $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)}$;

(f) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$;

(g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

2. Комбинаторика

Основные понятия и обозначения

Пусть A и B – произвольные множества, а $f : A \rightarrow B$ – отображение элементов множества A во множество B .

Отображение $f : A \rightarrow B$ – называется *инъекцией*, если два различных элемента множества A под действием f отображаются в различные элементы множества B .

Отображение $f : A \rightarrow B$ – называется *сюръекцией*, если для любого элемента $b \in B$ существует элемент $a \in A$ такой, что $f(a) = b$.

Отображение $f : A \rightarrow B$ – называется *биекцией* (*взаимно-однозначным*), если оно одновременно сюръективно и инъективно, то есть каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества; при этом определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством.

Количество элементов множества A называется его *мощностью* и обозначается $|A|$.

Два множества A и B являются *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Правило суммы: Пусть A и B – конечные непересекающиеся множества такие, что $|A| = k$, $|B| = m$. Тогда $|A \cup B| = |A| + |B| = k + m$.

Правило произведения: Пусть A и B – конечные множества ($|A| = k$, $|B| = m$). Тогда $|A \times B| = |A| \cdot |B| = k \cdot m$.

Формула включений-исключений: Пусть A_1, A_2, \dots, A_n – конечные множества. Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_i A_i \right|.$$

Пусть $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – конечное множество, $|E| = n$.

Упорядоченный набор из n элементов множества E называется *перестановкой без повторений*. Число всех перестановок без повторений $P_n = n!$.

Пусть множество E состоит из n элементов m различных типов, k_i – количество элементов i – го типа, $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. Перестановки из всех этих элементов с точностью до порядка следования однотипных элементов называются *перестановками с повторением*. Число всех перестановок с повторениями $P_{k_1, k_2, \dots, k_m}^n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$.

Упорядоченный набор из k элементов n элементного множества E называется *размещением (без повторений)*. Число всех размещений (без повторений) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Размещение элементов в предположении, что каждый элемент может участвовать в размещении несколько раз называется *размещением с повторениями*. Число размещений с повторениями $\hat{A}_n^k = n^k$.

Неупорядоченное подмножество, состоящее из k элементов n элементного множества называется *сочетанием из n по k* . Число сочетаний из n элементов по k $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Неупорядоченные наборы из k элементов n элементного множества, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз, называются *сочетаниями с повторениями*. Число сочетаний из n элементов по k $C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Упражнения

2.1. Сколько существует целых чисел от 0 до 1000 (включительно), содержащих ровно одну цифру 3? Хотя бы одну цифру 6?

2.2. Сколько существует нечетных трехзначных чисел?

- 2.3.** Сколько положительных целых чисел, меньших 700 делятся на 3? На 5? На 3 и на 5? На 2 и 3 или 5?
- 2.4.** Сколькими способами можно расположить цифры от 0 до 9 так, чтобы первая цифра была больше 1, последняя цифра была меньше 7?
- 2.5.** В группе 100 студентов, из которых 50 изучают химию, 53 – математику, 42 – физику, 15 – химию и физику, 20 – физику и математику, 25 – математику и химию, 5 – все три предмета. Сколько студентов:
- (a) изучают хотя бы один из трех предметов;
 - (b) изучают только математику;
 - (c) не изучают ни одного из трех предметов;
 - (d) изучают физику или химию, но не изучают математику;
 - (e) не изучают ни математику, ни химию?
- 2.6.** Сколькими способами можно расположить на полке 15 различных книг по математике, 12 различных книг по экономике, 16 различных книг по информатике, если:
- (a) нет ограничений;
 - (b) книги по одному предмету стоят рядом;
 - (c) книги по одному предмету стоят рядом, но книги по математике и информатике не должны стоять рядом?
- 2.7.** Сколькими способами можно расположить на полке 15 книг по математике, 12 книг по экономике и 16 книг по информатике, если книги по одному предмету одинаковы?
- 2.8.** Сколько существует способов разложить в 2 кармана 9 монет различного достоинства?

- 2.9.** Сколько существует способов разложить в 2 кармана 9 монет одинакового достоинства?
- 2.10.** Сколько неотрицательных чисел меньших 1001 делятся на 5 или на 3?
- 2.11.** Сколькими способами можно вытянуть 10 карт из колоды в 52 карты так, чтобы среди вынутых карт
- (a) оказался хотя бы один туз;
 - (b) оказался ровно один туз;
 - (c) оказалось не менее двух тузов;
 - (d) оказалось ровно два туза?
- 2.12.** Два кубика подбрасывают одновременно. сколько существует возможных исходов? Сколько существует исходов, в которых сумма цифр меньше 4?
- 2.13.** В урне имеется 15 шаров, из которых 8 красных, 5 белых и 2 черных. Вынимают 5 шаров. Сколькими способами можно это сделать, чтобы среди них оказалось:
- (a) 2 красных, 2 белых и 1 черный шар;
 - (b) 3 красных и 1 белый шар?
- 2.14.** Из колоды в 52 карты вынимают 6 карт. Сколькими способами можно это сделать, чтобы среди них оказались карты каждой масти?
- 2.15.** Из колоды в 52 карты вынимают 5 карт. Сколькими способами можно это сделать, чтобы среди них оказались:
- (a) 4 карты одинаковой масти;
 - (b) 4 карты одинакового достоинства;

(с) 2 пары карт одинаковой масти?

- 2.16.** Сколько различных трехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 5, 9, если все цифры в числе различны?
- 2.17.** Сколькими способами можно расставить в ряд 5 мальчиков и 6 девочек, если мальчики и девочки не могут стоять рядом?
- 2.18.** В первенстве РФ по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные, бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?
- 2.19.** Научное общество состоит из 25 человек. Нужно выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами можно это сделать, если каждый член общества может занимать только один пост?
- 2.20.** Сколько существует способов расположить на шахматной доске 8 ладей?
- 2.21.** Сколько существует способов расположить на шахматной доске черную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга?
- 2.22.** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не атаковали друг друга?
- 2.23.** Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров: при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?
- 2.24.** При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

- 2.25.** Сколько существует пятизначных чисел, у которых:
- (a) все цифры различны;
 - (b) есть одинаковые цифры;
 - (c) все цифры различны, причем последняя цифра не 0;
 - (d) все цифры различны, причем первая – не 1, а последняя – не 0;
 - (e) две первых цифры различны, а две последних одинаковы;
 - (f) сумма цифр четна?
- 2.26.** Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове "математика"?
- 2.27.** Каким числом способов можно разместить 8 студентов в трех комнатах общежития, если:
- (a) в первой комнате имеется два, во второй – три, в третьей – четыре свободных места?
 - (b) в первой комнате имеется одно, во второй – два, в третьей – пять свободных мест?
- 2.28.** Среди студентов группы семнадцать человек знают английский язык, десять человек – немецкий язык, семь человек – французский язык. Три человека знают английский и французский языки, два – немецкий и французский языки, четыре человека – английский и немецкий языки.
- (a) Сколько человек учится в группе, если каждый студент знает хотя бы один язык и двое студентов знают все три языка?

(b) Сколько студентов группы не знают ни одного языка, если в группе учится 30 человек и никто из них не знает всех трех языков?

2.29. Из 100 опрошенных студентов 50 решают задачи по теме "Теория множеств", 53 – по теме "Комбинаторика", 42 – по теме "Алгебра логики", 15 студентов могут решать задачи по темам "Теория множеств" и "Алгебра логики", 20 студентов – по темам "Алгебра логики" и "Комбинаторика", 25 – по темам "Теория множеств" и "Комбинаторика", 5 студентов решают задачи по всем трем темам.

(a) Сколько студентов не решают задачи ни по одной из перечисленных тем?

(b) Сколько студентов решают задачи хотя бы по одной из перечисленных тем?

(c) Сколько студентов решают задачи только по теме "Теория множеств"?

(d) Сколько студентов не решают задачи по темам "Комбинаторика" и "Алгебра логики"?

2.30. Сколькими способами можно переставить буквы слова "комбинаторика", чтобы:

(a) буква "а" шла сразу после "к";

(b) согласные шли в алфавитном порядке;

(c) не менялся порядок гласных букв;

(d) буквы "к" не шли подряд?

2.31. Для подведения итогов олимпиады по компьютерному моделированию избрали жюри в составе председателя, заместителя председателя и трех членов жюри. Сколькими спосо-

бами можно выбрать жюри из 15 преподавателей кафедры информатики?

- 2.32.** Сколькими способами можно устроить на работу 50 выпускников факультета программирования на различные должности в 15 компьютерных фирм?
- 2.33.** Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров?
- 2.34.** Группу из 16 студентов должны разбить на подгруппы для работы в разных компьютерных классах. Сколько существует возможных вариантов формирования подгрупп, если в трех компьютерных классах соответственно 5, 4 и 7 работающих компьютеров?
- 2.35.** Из 50 красных и 70 белых роз формируют букеты. Сколькими способами можно составить букеты из 11 красных и 13 белых роз?
- 2.36.** Из цифр 3, 4, 5, 6 составлены четырехзначные числа. Сколько вариантов таких чисел можно найти, если среди найденных четверок нет чисел, заканчивающихся на 36?
- 2.37.** Сколько существует перестановок букв в слове "грамматика"?
- 2.38.** После окончания университета 12 выпускников решили ежегодно в день встречи с выпускниками посещать кафе и обмениваться впечатлениями. В кафе столики рассчитаны на четырех человек, поэтому друзья решили, что при каждой новой встрече за столиками будет сидеть четверка друзей, не повторяющая прошлогодние. За сколько лет каждый из выпускников побеседует с каждым из друзей, сидя за каким-нибудь одним столом?

- 2.39.** Сколько различных трехзначных чисел состоит только из четных цифр?
- 2.40.** Сколько нужно провести матчей в групповом этапе финала Кубка мира по футболу, если участвует 32 команды, разбитые на 8 групп?

3. Алгебра логики

Основные понятия и обозначения

Пусть $E = \{0, 1\}$. Тогда

$$E^n = \underbrace{E \times E \times E \times \dots \times E}_n, |E^n| = \underbrace{|E| \cdot |E| \dots |E|}_n = 2^n.$$

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на множестве E^n и принимающая значения на множестве E называется *булевой функцией* или *функцией алгебры логики*.

Элементарные булевы функции одной переменной.

$f_x(x) = x$ – тождественная функция;

$f_{\bar{x}}(x) = \bar{x}$ – отрицание (инверсия) x ;

$f_0(x) = 0$ – константа 0;

$f_1(x) = 1$ – константа 1.

Элементарные булевы функции двух переменных.

$f_{x \wedge y}(x, y) = x \wedge y$ – конъюнкция;

$f_{x \vee y}(x, y) = x \vee y$ – дизъюнкция;

$f_{x \rightarrow y}(x, y) = x \rightarrow y$ – импликация;

$f_{x \sim y}(x, y) = x \sim y$ – эквиваленция;

$f_{x|y}(x, y) = x | y$ – штрих Шеффера;

$f_{x \uparrow y}(x, y) = x \uparrow y$ – стрелка Пирса;

$f_{x \oplus y}(x, y) = x \oplus y$ – сложение по модулю два.

x	y	f_x	$f_{\bar{x}}$	f_0	f_1	$f_{x \vee y}$	$f_{x \wedge y}$	$f_{x \oplus y}$	$f_{x \rightarrow y}$	$f_{x \sim y}$	$f_{x y}$	$f_{x \uparrow y}$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0

Булевы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются *равными*, если они принимают равные значения на всех наборах переменных.

Функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если справедливо равенство $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}$.

Пусть имеется множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Элементарной конъюнкцией (*элементарной дизъюнкцией*) назовем конъюнкцию (дизъюнкцию) переменных множества X , в которую каждая переменная входит не более одного раза (с отрицанием или без него).

Элементарная конъюнкция (элементарная дизъюнкция) называется *правильной*, если в неё каждая переменная входит не более одного раза (включая её вхождение под знаком отрицания).

Правильная элементарная конъюнкция (правильная элементарная дизъюнкция) называется *полной* относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n , если каждая из этих переменных входит в неё один и только один раз (быть может, под знаком отрицания).

Дизъюнктивной нормальной формой (*ДНФ*) булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назовем дизъюнкцию различных элементарных конъюнкций, задающую функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Конъюнктивной нормальной формой (*КНФ*) булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назовем конъюнкцию различных элементарных дизъюнкций, задающую функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (*СДНФ*) относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции правильны и полны относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (*СКНФ*) относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все элементарные дизъюнкции правильны и полны относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Для любой булевой функции существуют единственная СДНФ и единственная СКНФ.

Суперпозицией функций f_1, f_2, \dots, f_n называется функция g , полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименованием переменных.

Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ называется *полной*, если любая булева функция f_i ($1 \leq i \leq n$) этой системы может быть представлена суперпозицией остальных функций этой системы (то есть отличных от f_i).

Пусть X некоторое подмножество булевых функций.

Замыканием \bar{X} (или $[X]$) множества X называется множество всех булевых функций, являющихся суперпозицией функций из X .

Замкнутые классы булевых функций.

1. T_0 – класс булевых функций, сохраняющих константу ноль, то есть функций, удовлетворяющих равенству $f(0, 0, \dots, 0) = 0$;
2. T_1 – класс булевых функций, сохраняющих константу один, то есть функций, удовлетворяющих равенству $f(1, 1, \dots, 1) = 1$;
3. S – класс всех самодвойственных функций;
Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если она является двойственной к самой себе.
4. M – класс всех монотонных функций.

Пусть есть два набора значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n для булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$; причем $\alpha \neq \beta$ и $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Будем говорить, что на наборах α и β выполняется *отно-*

шение предшествования и писать $\alpha \preceq \beta$, если для любого i ($1 \leq i \leq n$) выполнено $\alpha_i \leq \beta_i$.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов α, β , удовлетворяющих условию $\alpha \preceq \beta$, выполнено $f(\alpha) \preceq f(\beta)$.

5. L – класс всевозможных линейных функций.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *линейной*, если ее можно представить полиномом Жегалкина первой степени. *Полиномом Жегалкина* от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется полином степени n с коэффициентами вида 0 и 1, где в качестве произведения берётся конъюнкция, а в качестве сложения — сложение по модулю два.

Теорема Поста. Для полноты системы функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов T_0, T_1, L, S, M в F нашлась функция ему не принадлежащая.

Основные равносильности алгебры логики.

1. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

2. Свойства 0 и 1

$$\begin{array}{llll} x \rightarrow x = 1, & x \wedge x = x, & x \vee x = x, & x \sim x = 1; \\ x \rightarrow \overline{x} = \overline{x}, & x \wedge \overline{x} = 0, & x \vee \overline{x} = 1, & x \sim \overline{x} = 0; \\ x \rightarrow 0 = \overline{x}, & x \wedge 0 = 0, & x \vee 0 = x, & x \sim 0 = \overline{x}; \\ x \rightarrow 1 = 1, & x \wedge 1 = x, & x \vee 1 = 1, & x \sim 1 = x; \\ & 0 \rightarrow x = 1, & 1 \rightarrow x = x. & \end{array}$$

3. Законы де Моргана

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \quad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}.$$

4. Законы коммутативности

$$x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \sim y = y \sim x, \quad x \uparrow y = y \uparrow x.$$

5. Законы поглощения

$$x \vee xy = x, \quad x \vee \bar{x}y = x \vee y, \quad \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y, \quad \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y \\ x(x \vee y) = x \quad x(\bar{x} \vee y) = xy, \quad \bar{x}(x \vee y) = \bar{x}y.$$

6. Законы импликации

$$x \rightarrow y = \bar{y} \rightarrow \bar{x} = \bar{x} \vee y = \overline{x \vee \bar{y}}; \\ x \rightarrow \bar{y} = y \rightarrow \bar{x}.$$

7. Законы ассоциативности

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \\ (x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z).$$

8. Законы дистрибутивности

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

Упражнения

3.1. Доказать, что $(x \vee y)(z \vee t) = xz \vee yz \vee xt \vee yt$.

3.2. Доказать, что $xy \vee zt = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t)$.

3.3. Преобразовать в равносильную формулу:

(a) $\overline{xy \vee \bar{z}}$;

(b) $x(xy \vee \bar{y}\bar{z} \vee \overline{(y \vee \bar{t}z)})$.

3.4. Какие из указанных элементарных конъюнкций являются правильными:

(a) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;

- (b) $x_1\bar{x}_3\bar{x}_1$;
- (c) $x_2\bar{x}_2x_2x_1$;
- (d) $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$?

3.5. Преобразовать в ДНФ следующие формулы:

- (a) $x \vee y$;
- (b) $\overline{(x \vee z)}(x \rightarrow y)$;
- (c) $(x \sim y)\overline{z \rightarrow t}$.

3.6. Преобразовать ДНФ, полученные в упражнении 3.5 в СДНФ.

3.7. Найти СДНФ для следующих булевых функций:

- (a) $x \vee yz$;
- (b) $xy\bar{x}z \vee xt$;
- (c) $\bar{x}y \vee yzt \vee \bar{x}yzt$.

3.8. Упростить формулы:

- (a) $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$;
- (b) $x \vee xy \vee yz \vee \bar{x}\bar{z}$;
- (c) $(x \vee y)(\bar{x}\bar{y} \vee z) \vee \bar{z} \vee (x \vee y)(u \vee v)$.

3.9. Построить функции, двойственные следующим функциям:

- (a) $f_{x \vee y}, f_{x \wedge y}, f_{x \sim y}, f_{x \rightarrow y}, f_{x \oplus y}, f_{x|y}, f_{x \uparrow y}, f_0, f_1$;
- (b) функции от пяти переменных, равной 1, если четное число переменных равно 1.

3.10. Какие из функций, перечисленных в упражнении 3.9 являются самодвойственными?

3.11. Показать, что функция $xy \vee yz \vee xz$ является самодвойственной.

3.12. Представить полиномами Жегалкина:

(a) $x \vee y \vee z$;

(b) $xy \vee yz \vee xz$;

(c) $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

3.13. Какие из логических операций являются монотонными функциями?

3.14. Какие из указанных функций являются монотонными:

(a) $xy \vee yz \vee \bar{x}z$;

(b) $x \rightarrow (x \rightarrow y)$;

(c) $\overline{x \vee y} \sim \bar{x} \vee \bar{y}$;

(d) $\overline{x \vee y} \sim \overline{xy}$;

(e) $xy \vee x \vee \bar{x}z$

(f) $xy \vee yz \vee xz$?

3.15. Доказать полноту следующих систем функций:

(a) $f_{x \wedge y}, f_{\bar{x}}$;

(b) $f_{x \vee y}, f_{\bar{x}}$;

(c) $f_{x \wedge y}, f_{x \oplus y}, f_1$;

(d) $f_{x \oplus y}, f_{x \vee y}, f_1$;

(e) $x \oplus y \oplus z, f_{x \wedge y}, f_0, f_1$;

(f) $f_{x \rightarrow y}, f_{\bar{x}}$;

(g) $f_{x \rightarrow y}, f_0$.

3.16. Показать неполноту следующих систем функций, используя теорему Поста:

(a) $f_0, f_{x \wedge y}, x \oplus y \oplus z;$

(b) $f_1, f_{x \wedge y}, x \oplus y \oplus z;$

(c) $\overline{xy} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz};$

(d) $f_0, f_1, f_{x \oplus y};$

(e) $f_0, f_1, f_{x \wedge y}.$

4. Теория графов

Основные понятия и обозначения

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V – непустое множество вершин, E – множество ребер, состоящее из пар элементов множества V .

Пусть дан ориентированный граф G . *Началом* ребра называется вершина, указанная в паре первой, *концом* – вторая вершина.

Список ребер – это два n – элементных вектора (n) и $z(n)$, в первом из них указываются начала всех ребер, а во втором концы всех ребер.

Граф $G = (V, E)$ называется *ориентированным* (*неориентированным*), если множество E состоит из упорядоченных (неупорядоченных) пар элементов множества V .

Вершины i_u и $j_u \in V$ называются *смежными*, если ребро $u = (i_u, j_u)$ принадлежит графу $G = (V, E)$; при этом ребро u *инцидентно* каждой из вершин i_u, j_u .

Ребро вида (i, i) называется *петлей*.

Если два ребра u_1, u_2 инцидентны одной вершине, то они называются *смежными*.

Степенью вершины i называется число вершин смежных с ней. Если степень вершины i равна 0, то вершина i называется *изолированной*.

Граф состоящий из изолированных вершин называется *нуль-графом*.

Если степень вершины i равна 1, то вершина i называется *тупиковой*.

Граф состоящий из изолированных вершин называется *нуль-графом*.

Граф $G = (V, E)$ называется *конечным*, если множество V его вершин конечно.

Ребра $u = (i_u, j_u)$ и $v = (i_v, j_v)$, образованные одной парой вершин (u, v) , называются *кратными* или *параллельными*.

Граф $G = (V, E)$ называется *однородным* степени k , если степень любой его вершины равна k .

Граф $G = (V, E)$ называется *полным*, если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром. Полный граф состоящий из m вершин обозначается K_m .

Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на две части так, что каждое ребро графа соединяет вершину из одной части с какой-то вершиной из другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части. Обозначается двудольный граф $K_{m,n}$, где m и n – количество вершин в первой и второй части соответственно.

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными* ($G_1 \cong G_2$), если существует биекция $f : V_1 \rightarrow V_2$, такая, что для любых $i, j \in V_1$ ребро $(i, j) \in E_1$ тогда и только тогда, когда ребро $(f(i), f(j)) \in E_2$; при этом биекция f называется *изоморфизмом* графа G_1 на граф G_2 .

Пусть v_0, v_1, \dots, v_k – вершины некоторого ориентированного графа, причем любые две вершины v_i и v_{i+1} ($i = \overline{0, k-1}$) являются смежными. Последовательность ребер называется *путем* длины k , соединяющим вершины v_0 и v_k и обозначается $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$.

Путь называется *простым*, если все его вершины различны.

Контуром называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают и все ребра различны.

Если граф не является ориентированным, то вместо контура используют понятие *цепи*.

Замкнутая цепь, у которой начало совпадает с концом называется *циклом*.

Цикл называется *простым*, если вершины v_1, \dots, v_k различны.

Граф \bar{G} называется *дополнительным* к графу G , если он построен на множестве вершин графа G и состоит из ребер, добавление которых к графу G делают граф G полным графом.

Подграфом графа $G = (V, E)$ называется такой граф $G_1 = (V_1, E_1)$, что $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$.

Граф $G' = (V', E')$ называется *остовным подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' = V$ и $E' \subseteq E$.

Граф $G' = (V', E')$ называется *порожденным подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' = \{(v_1, v_2) \in E \mid v_1, v_2 \in V'\}$.

Граф называется *перенумерованным*, если его вершины отличаются пометками.

Пусть G – помеченный граф с n вершинами.

Матрицей смежности $A(G) = \{a_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, графа G называется матрица $n \times n$ такая, что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ смежные} \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежные.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности $I(G) = \{b_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ помеченного графа G с n вершинами и m ребрами называется матрица $n \times m$ такая, что $b_{ij} = 1$, если вершины v_i, v_j смежные и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Связный граф – это граф, в котором для любой пары вершин существует как минимум один путь.

Компонента связности графа G – это максимальный (по включению) связный подграф графа G .

Расстояние между двумя вершинами графа – это длина кратчайшего простого пути, соединяющего эти вершины.

Эксцентриситет вершины графа – расстояние до максимально удаленной от нее вершины.

Радиус графа – минимальный эксцентриситет вершин, а *диаметр* – максимальный эксцентриситет вершин.

Центральная вершина – вершина, у которой эксцентриситет равен радиусу.

Центр графа – это множество центральных вершин.

Граф называется *плоским*, если его вершины являются точками на плоскости, а ребра являются непрерывными линиями, соединяющими смежные вершины так, что эти линии пересекаются только в вершинах графа.

Граф изоморфный плоскому графу называется *планарным*.

Гранью плоского графа называется максимальное по включению число точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена простой кривой не пересекающей ребра графа.

Формула Эйлера. Пусть $G = (V, E)$ связный плоский граф с p вершинами и q ребрами, имеющий g граней. Справедливо равенство $p + g = q + 2$.

Упражнения

4.1. Выяснить существуют ли графы с набором степеней:

- 1) $(0, 2, 2, 3, 2)$; 2) $(1, 1, 2, 2, 2)$;
- 3) $(1, 2, 3, 4, 5)$; 4) $(1, 1, 1, 3, 3)$.

4.2. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

4.3. Построить граф, описывающий расстановку 5 ферзей на шахматной доске размера 5×5 , так, чтобы они не били друг друга.

4.4. Пять ученых, участвовавших в конференции обменялись ру-

копожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

- 4.5.** Докажите, что в любом графе
- (a) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (и, следовательно, четна);
 - (b) число вершин нечетной степени четно.
- 4.6.** В группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют три друга (в этой группе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
- 4.7.** Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
- 4.8.** В графе 100 вершин, причем степень каждой из них не меньше 50. Исследовать граф на связность.
- 4.9.** Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существует две соседние клетки закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?
- 4.10.** В каждой клетке квадрата проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть больше 15? больше 20?
- 4.11.** Можно ли на плоскости расположить
- (a) 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?
 - (b) 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?

- 4.12.** В одной из вершин (*a*) октаэдра, (*b*) куба сидит муха. Может ли она проползти по всем его ребрам ровно по одному разу и возвратиться в исходную вершину?
- 4.13.** Определите число простых путей и простых циклов длины 5 в графах K_6 и $K_{5,5}$?
- 4.14.** Определите число простых путей и простых циклов длины k в графах K_n и $K_{m,n}$?
- 4.15.** Построить граф, центр которого:
- (a) состоит ровно из одной вершины;
 - (b) состоит из двух вершин;
 - (c) состоит из трех вершин и не совпадает с множеством всех его вершин;
 - (d) совпадает с множеством всех вершин.
- 4.16.** Выяснить, существует ли планарный граф, у которого:
- (a) 7 вершин и 16 ребер;
 - (b) 8 вершин и 17 ребер.
- 4.17.** Перечислить все графы с указанными свойствами и значениями параметров (в скобках указано число графов):
- (a) 6 вершин, 5 ребер (15);
 - (b) связные, 6 вершин, 6 ребер (13);
 - (c) набор степеней (2, 2, 2, 3, 3, 4) (4);
 - (d) графы с единственным циклом, 6 вершин, 5 ребер (8);
 - (e) имеющие цикл длины 6, 5 вершин (6);
 - (f) двудольные, 5 вершин (13);

- (g) двудольные, 6 вершин, 6 ребер (6);
- (h) ориентированные, без петель, 3 вершины (16);
- (i) ориентированные, без петель, 4 вершины, 3 ребра (13);
- (j) графы с единственным циклом, 5 вершин (9).

Литература

- [1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа - М.:Физматлит, 2006.
- [2] Я. М. Ерусалимский Дискретная математика: теория, задачи, приложения. - М.: Вузовская книга, 2000.
- [3] С. Г. Гиндикин Алгебра логики в задачах. - М.: Наука, 1972.
- [4] С. В. Яблонский Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1986.
- [5] В. Н. Сачков Комбинаторные методы дискретной математики. - М.: Наука, 1977.
- [6] Ф. Харари Теория графов.-М.:Мир, 1973.
- [7] С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин Ленинградские математические кружки. - К.: АСА, 1994
- [8] В. Е. Алексеев, Л. Г. Киселева, Т. Г. Смирнова Сборник задач по дискретной математике. Электронное учебно-методическое пособие. – Н. Новгород, 2012.
- [9] Е. В. Павленкова, Д. Т. Чекмарев Сборник заданий по дискретной математике. Электронное учебно-методическое пособие. – Н. Новгород, 2012.

Светлана Сергеевна Бельмесова

ПРАКТИКУМ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.