Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
«Модели, методы и программные средства»

Основная образовательная программа
010400.62 «Прикладная математика и информатика», профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика», квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Прикладной тензорный анализ»

Основная образовательная программа
010800.62 «Механика и математическое моделирование», профиль «Механика деформируемых тел и сред», квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Прикладной тензорный анализ»

Жидков А.В., Шабаров В.В.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ: **тензорная алгебра**

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ: ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА. Жидков А.В., Шабаров В.В. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.

В учебно-методическом пособии рассматриваются основные понятия и положения прямого тензорного исчисления, необходимые для изучения различных математических и физических дисциплин в современном изложении. Имея своей целью практическую направленность и освоение базовых положений теории тензоров, все вводимые понятия рассматриваются в трёхмерном евклидовом пространстве. Многие математические положения тензорной алгебры, которые изложены в пособии, могут быть использованы для самостоятельной более детальной проработки и вопросов для обсуждения и доказательства на практических занятиях.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010400.62 «Прикладная математика и информатика», 010800.62 «Механика и математическое моделирование», изучающих курс «Прикладной тензорный анализ».

Понимание - это способность
за символами видеть реальные объекты.
Т. Гобс[1]

АННОТАЦИЯ

Тензорное исчисление в настоящее время представляет собой отдельную и важную область математики. Возникшее как необходимый математический аппарат физических наук, оно активно используется и развивается в теоретической механике, механике сплошных сред, кристаллофизике, электродинамике, квантовой механике, теории относительности и др.

В ходе развития тензорного исчисления появилось несколько вариантов его изложения, основными из которых являются координатный (индексный) и бескоординатный (инвариантный) подходы. Последний способ называют прямым тензорным исчислением. С чисто математической точки зрения оба подхода совершенно эквивалентны. Тем не менее, существует мнение, что «прямой тензорный язык позволяет легко видеть и предугадывать результаты, которые трудно увидеть в координатной версии тензорного исчисления. С другой стороны, не редки ситуации, когда прямое тензорное исчисление позволяет легко предугадать новый результат, строгое доказательство которого проще получить на основе координатной формы тензорного исчисления, поскольку имеется хорошо разработанная техника работы с объектами, зависящими от индексов. Поэтому свободное владение обеими формами тензорного исчисления совершенно необходимо любому профессиональному исследователю. К счастью, из свободного владения прямой формой вытекает и свободное владение координатной формой, хотя обратное не имеет места» [4].

Кроме того, прямое тензорное исчисление позволяет не только связать интуитивные представления рассматриваемого явления с его математической моделью и дать наглядную «физическую» интерпретацию элементов тензорной формы уравнений, входящих в математическую модель, но и более экономно изложить многие разделы научного знания.

Главной целью разрабатываемого пособия является достаточно подробное изложение основных сведений по прямому тензорному исчислению, необходимых для изучения в дальнейшем физических дисциплин; ещё одна цель – показать на примерах из других разделов естествознания простоту и компактность соотношений, получаемых с использованием прямого тензорного исчисления, по сравнению с другими вариантами изложения.

[1] **Томас Гоббс** (англ. *Thomas Hobbes*; 05.04.1588 - 04.12.1679) – английский философ-материалист.

Руководствуясь соображениями простоты и наглядности, все вводимые понятия рассматриваются в трёхмерном евклидовом пространстве. Связанное с этим ограничение общности является незначительным. Опыт показывает, что переход к объектам любого числа измерений не вызывает принципиальных трудностей, а усвоить тензорное исчисление на трёхмерном примере значительно проще. Кроме того, трёхмерные объекты очень распространены в прикладных науках. Можно было бы пойти по пути ещё большего упрощения изложения и ограничиться рассмотрением только ортогональных криволинейных координат, как это сделано в работе [13], или даже декартовых прямоугольных координат и не вводить многих понятий, связанных с криволинейными координатами общего вида. Но, как отмечено в [15], «... рассматривая трёхмерное евклидово пространство и притом в прямоугольных декартовых координатах ... тензорный анализ в широком смысле слова ... настолько упрощается, что теряет почти всё своё содержание». Поэтому содержание пособия ограничено сведениями о правилах и приёмах применения тензорного исчисления только в трёхмерном евклидовом пространстве, системы же координат, там, где они используются, – произвольны.

Кроме того, считается, что все рассматриваемые объекты (скалярные, векторные, тензорные величины) являются вещественными. Комплексные величины используются только в том случае, когда в этом возникает необходимость.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Подходы к построению тензорного исчисления

В естествознании различным объектам (физическим системам, их состояниям и происходящим в них процессам) приписываются свойства, общие и одинаковые в качественном отношении для многих объектов, но индивидуальные в количественном отношении для каждого объекта. Отдельное свойство называют **физической величиной** или просто величиной. Примерами таких физических величин являются объём, масса, плотность, температура, работа, энергия, скорость, ускорение, сила, давление и т.д.

Задание числовых значений физическим величинам при выбранной системе единиц заключает в себе произвол, обусловленный выбором той или иной координатной системы. Однако, существующие между величинами объективные связи не зависят от этих субъективных способов описания. Тензорное исчисление представляет математическое средство, с помощью которого формулируются такие **инвариантные**[2] (не зависящие от системы координат) соотношения между величинами изучаемых объектов [11].

Кроме того, в физике используется огромное множество различных понятий. Этих понятий так много, что их необходимо некоторым образом упорядочить и классифицировать. С математической точки зрения наиболее общей является классификация по так называемому тензорному признаку, так как все понятия, описывающие количественные характеристики физических объектов, являются **тензорами**[3], но тензорами различных **рангов**[4] (валентностей[5]). Тензоры нулевого ранга называются **скалярами**[6]. Тензоры первого ранга называются **векторами**[7]. Эти два типа тензоров хорошо известны из школьных курсов математики и физики [4].

Скаляр является простейшим тензором и представляет собой физическую

[2] **Инвариа́нт** – от лат. *invarians* – неизменный, род. падеж *invariantis* – неизменяющийся. Термин «инвариант» ввёл в 1851 году Дж. Сильвестр*.

* **Джеймс Джозеф Сильве́стр** (*James Joseph Sylvester*; 03.09.1814 - 15.03.1897) – английский математик.

[3] **Те́нзор** – от лат. *tendo* – напрягаю, растягиваю; *tensus* – напряжённый. Термин «тензор» ввёл В. Фойгт** в 1898-1903 гг. для описания механических напряжений.

** **Вольдемар Фойгт** (нем. *Woldemar Voigt*; 02.09.1850 - 13.12.1919) – немецкий физик-теоретик. Основные труды посвящены физике кристаллов, магнитооптике, теории упругости, термодинамике, механике, кинетической теории газов.

[4] **Ранг** – от нем. *Rang*, фр. *rang* – звание, чин, разряд, категория, степень.

[5] **Вале́нтность** – от лат. *valentia* – сила, *valens* – имеющий силу.

[6] **Скаля́р** – от лат. *scalaris* – ступенчатый. Термин «скалярный» ввёл У.Р. Га́мильтон*** (1843).

*** Сэр **Уи́льям Ро́уэн Га́мильтон** (англ. Sir *William Rowan Hamilton*; 04.08.1805 - 02.09.1865) – ирландский математик и физик. Дал точное формальное изложение теории комплексных чисел, построил своеобразную, систему чисел, т.н. кватернионов. Это учение было одним из источников развития векторного исчисления.

[7] **Ве́ктор** – от лат. *vector* – несущий. Термин «вектор» ввёл У.Р. Гамильтон (ок. 1845).

величину, которая полностью характеризуется заданием одного вещественного числа, не зависящего от выбора системы координат (одним и тем же во всех системах координат). Таковы объём, масса, плотность, температура, работа. Скаляр – инвариант по его определению [11].

Числа, как самостоятельные объекты, начали рассматриваться во времена Пифагора[8], приблизительно две с половиной тысячи лет назад. Древние греки для действий с числами использовали отрезки. Наиболее удобным и наглядным представлением действительных чисел является геометрическое изображение точкой на числовой прямой (числовой оси). Для этого на прямой выбираются: 1) точка O – начало отсчёта, 2) масштабный или единичный отрезок, 3) положительное направление оси. Каждое действительное число изображается точкой на числовой прямой. Установленное взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой привело к тому, что часто понятия «число» и «точка» не различаются. Если некоторая точка A является образом числа a, то число a называется **декартовой координатой** или просто координатой точки A.

Область практического использования чисел значительно расширилась после того, как Р. Декарт[9] ввёл понятие системы координат[10] и перевёл геометрию на аналитический язык («Геометрия», 1637).

Координатный подход

Введение системы координат открыло прямой путь к координатному, (арифметическому, индексному) построению тензорного исчисления. Приведём схему координатного подхода к построению тензорного исчисления [4].

Величины, полностью определяемые заданием одного числа ($3^0 = 1$, 3 – размерность пространства), называются скалярами или тензорами нулевого ранга. Объекты, полностью определяемые заданием тройки чисел ($3^1 = 3$) – координат, меняющихся при замене системы координат по предписанному закону, называются векторами или тензорами первого ранга. Объекты, полностью определяемые заданием девяти чисел ($3^2 = 9$) – координат, меняю-

[8] **Пифагор Самосский** (др.-греч. *Πυθαγόρας ὁ Σάμιος*, лат. *Pythagoras*; ок. 570 - ок. 500 до н.э.) – древнегреческий философ, математик и мистик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев.

[9] **Рене́ Дека́рт** (фр. *René Descartes*, лат. *Renatus Cartesius* - **Картезий**; 31.03.1596 - 11.02.1650) – французский математик, философ, физик и физиолог.

[10] Декарт ввёл координаты на плоскости и только как положительные числа. В издании 1659-61 к «Геометрии» приложена работа И. Гудде*, в которой впервые допускаются как положительные, так и отрицательные значения координат. Пространственную декартову систему координат ввёл (1679) Ф. Лаир**; он же впервые применил термин «начало» (фр. *origine*) – отсюда, видимо, обозначение O.

* **Иоганн Гудде** (Гюдде, Хюдде, *Johann Hudde*; ок. 1633 - 16.04.1704) – голландский математик.

** **Филипп де Лаир** (Лагир, Ла Гир, *Philippe de La Hire*; 18.03.1640 - 21.04.1718) – французский математик и механик.

щихся по предписанному закону при замене системы координат, называются тензорами второго ранга и т.д. Здесь для определённости имеются в виду тензоры в трёхмерном пространстве, а цепочку определений можно продолжить по индукции до бесконечности.

Пусть дано множество $\mathcal{M}$ элементов произвольной природы (например, множество точек прямой или кривой, или множество точек плоскости или поверхности, или множество точек пространства). Пусть для определённости, как и выше, это множество образует трёхмерный континуум. Чтобы сделать множество $\mathcal{M}$ доступным для применения математических методов, его элементы необходимо параметризовать, т.е. каждому элементу множества нужно поставить во взаимно однозначное соответствие тройку чисел. Допустим, что параметризация множества возможна. Система параметризации множества $\mathcal{M}$ называется системой координат на этом множестве. Если возможна одна параметризация множества, то, очевидно, существует бесконечно много других параметризаций этого множества. В самом деле, пусть упорядоченная тройка чисел $x^1,\, x^2,\, x^3$ есть параметризация $\mathcal{M}$, а числа $x^m, \quad m = 1,\, 2,\, 3$, называемые координатами, непрерывно заполняют интервалы

$$a^m < x^m < b^m, \qquad m = 1,\, 2,\, 3.$$

По условию, каждому элементу $\mathcal{M}$ сопоставлена одна и только одна тройка чисел x^m и, наоборот, каждой тройке чисел x^m отвечает один и только один элемент множества $\mathcal{M}$. Тогда можно ввести, и притом бесконечно большим числом способов, новые тройки чисел $y^m, \quad m = 1,\, 2,\, 3$, такие, что

$$y^m = \mathrm{Y}^m(x^1,\, x^2,\, x^3) \iff x^m = \mathrm{X}^m(y^1,\, y^2,\, y^3), \qquad m = 1,\, 2,\, 3. \tag{1}$$

Эти соотношения можно записать в локальной форме

$$dy^m = \mathrm{Y}^m_p\, dx^p, \qquad \mathrm{Y}^m_p = \frac{\partial \mathrm{Y}^m}{\partial x^p}, \qquad dx^m = \mathrm{X}^m_p\, dy^p, \qquad \mathrm{X}^m_p = \frac{\partial \mathrm{X}^m}{\partial y^p},$$

где по повторяющемуся индексу p подразумевается суммирование от 1 до 3 (**правило А. Эйнштейна**[11]). Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\mathrm{X}^m_p\, \mathrm{Y}^p_n = \delta^m_n, \qquad \mathrm{Y}^m_p\, \mathrm{X}^p_n = \delta^m_n,$$

[11] В тензорном исчислении и его приложениях, при записи выражений из многокомпонентных величин, пронумерованных верхними и нижними индексами, для экономии записи бывает удобно использовать **правило**, называемое **соглашением Эйнштейна**: если одна и та же буква в обозначении индекса встречается и сверху, и снизу, то такое выражение считается суммой по всем значениям, которые может принимать этот индекс. Это правило упрощенной (без символа $\sum$) записи конечной суммы предложено Эйнштейном в 1916 году. Требованием записи индексов на разных уровнях иногда пренебрегают.

Альбе́рт Эйнште́йн (нем. *Albert Einstein*; 14.03.1879 - 18.04.1955) – физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, создатель специальной и общей теории относительности. Жил в Германии (1879—1893, 1914—1933), Швейцарии (1893—1914) и США (1933—1955).

показывающих взаимную обратность **матриц**[12] X_p^m и Y_p^m. Здесь

$$\delta_n^m = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

– символы Кро́некера[13]. Разумеется, определители матриц X_p^m и Y_p^m отличны от нуля, что обеспечивает локальную обратимость отображений (1), которые предполагаются дифференцируемыми по всем переменным нужное число раз.

Множество $\mathcal{M}$, с присоединённым к нему семейством параметризаций (1), называется **гладким дифференцируемым многообразием**.

Гладкое дифференцируемое многообразие является исходной конструкцией, в которой задаются разного рода объекты. В частности, именно на этом многообразии определяются объекты, называемые тензорами. Пусть в каждой точке многообразия заданы объекты, зависящие от k индексов. Они называются объектами k-го ранга. **Зависимость объекта от индексов означает его зависимость от выбора системы координат**. Существует два типа объектов первого ранга a_m и a^m. Вообще говоря, это разные объекты. Объект a_m называется **ковариантным** вектором, если при замене системы координат он преобразуется по закону

$$\hat{a}_m = \mathrm{X}_m^p \, a_p.$$

Символом a обозначена координата в исходной системе координат (x^i), символом $\hat{a}$ координата в новой системе координат (y^i). Объект a^m называется **контравариантным** вектором, если при замене системы координат он преобразуется согласно закону

$$\hat{a}^m = \mathrm{Y}_p^m \, a^p.$$

Термин «ковариантный» означает «меняющийся аналогично» чему-либо, а термин «контравариантный» означает «меняющийся противоположно» чему-либо. В данном случае совсем неясно: аналогично чему меняется ковариантный вектор и противоположно чему меняется контравариантном вектор. На самом деле ковариантный вектор преобразуется по закону, совпадающему с законом преобразования базиса, но базисы при координатном подходе остаются как бы за кадром. Контравариантный вектор преобразуется по закону, обратному к закону преобразования базиса.

Объекты второго ранга могут быть уже́ четырёх различных типов: A_{mk}, $A_{m\,\cdot}^{\,\cdot\, k}$, A^{mk}, $A_{\,\cdot\, m}^{k\,\cdot}$. Пусть при замене системы координат они преобразуются

[12] **Ма́трица** (лат. *matrix* – первопричина) – математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы действительных или комплексных чисел, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы.

[13] **Леопо́льд Кро́некер** (нем. *Leopold Kronecker*; 07.12.1823 - 29.12.1891) – немецкий математик.

по законам

$$\hat{A}_{mk} = \mathrm{X}^p_m \, \mathrm{X}^q_k \, A_{pq}, \qquad \hat{A}_{m\,\cdot}^{\,\cdot\,k} = \mathrm{X}^p_m \, \mathrm{Y}^k_q \, A_{p\,\cdot}^{\,\cdot\,q},$$
$$\hat{A}^{mk} = \mathrm{Y}^m_p \, \mathrm{Y}^k_q \, A^{pq}, \qquad \hat{A}^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,m} = \mathrm{Y}^m_p \, \mathrm{X}^q_k \, A^{q\,\cdot}_{\,\cdot\,p}.$$

Тогда эти объекты называются тензорами второго ранга, причём первый из них называется дважды ковариантным, второй – один раз ковариантным и один раз контравариантным, третий – один раз контравариантным и один раз ковариантным, четвёртый – дважды контравариантным. Заметим, что все эти тензоры второго ранга суть разные тензоры.

Вполне аналогично вводятся объекты третьего ранга и отвечающие им тензоры третьего ранга и т.д.

Затем вводятся различные операции над полученными объектами.

В логическом отношении такое построение тензорного исчисления является вполне естественным. Это исчисление нетрудно освоить и с пользой применять. Профессионал обязан свободно владеть координатной формой тензорного исчисления, поскольку на его основе написаны очень многие книги по физике и механике.

Координатное построение тензорного исчисления проведено в работах [1, 2, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 17, 20].

Бескоординатный подход

Следуя работе [4], ниже приводится схема бескоординатного (безиндексного) подхода к построению тензорного исчисления.

При создании аналитической геометрии Декарт впервые ввёл (1637) одну из основных теоретико-множественных конструкций, широко используемую практически во всех областях математики, – **прямое произведение**, часто называемое также **декартовым произведением**. Прямое произведение двух множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – это множество всех *упорядоченных* пар (a_1, a_2), в которых первый элемент a_1 принадлежит первому множеству ($a_1 \in \mathcal{A}_1$), второй элемент a_2 принадлежит второму множеству ($a_2 \in \mathcal{A}_2$). Прямое произведение обозначается $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Если множество $\mathcal{A}_1$ имеет N элементов, а в множестве $\mathcal{A}_2$ имеется M элементов, то их прямое произведение $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ содержит $N\,M$ элементов. Прямое произведение большего количества множеств $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ при $n > 2$ определяется по индукции. Прямое произведение n множеств $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ ... \ \times \mathcal{A}_n$ – это множество *упорядоченных* **кортежей** из n элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$, в которых $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $a_2 \in \mathcal{A}_2$, ... $a_n \in \mathcal{A}_n$. При $n = 1$ прямое произведение множества $\mathcal{A}_1$ считается по определению совпадающим с $\mathcal{A}_1$. Прямое произведение пустого множества с любым другим множеством – пустое множество. В определении прямого произведения множеств не предполагаются, что все множества $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ должны быть различными. Прямое произведение, в котором все множества одинаковые $\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \ \ (k = 1, 2, \ldots, n)$, обозначается $\mathcal{A}^n$.

Если на плоскости введена некоторая аффинная[14] система координат (косоугольная прямолинейная система координат), то между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел (x, y) можно установить взаимно однозначное соответствие. Поэтому плоскость можно отождествить с декартовым произведением $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$ на себя[15]. Аналогично трёхмерное пространство можно отождествить с прямым произведением $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Исходным объектом при построении прямого тензорного исчисления является векторное ориентированное пространство $\mathbb{T}_1$, элементами которого являются векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$, воспринимаемые, как направленные отрезки, но отнюдь не совокупности троек чисел. Далее в рассмотрение вводится специальная конструкция $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_1$, называемая тензорным произведением двух векторных пространств. Элементы $\mathbb{T}_2$ называются тензорами второго ранга и в дальнейшем будут обозначаться преимущественно заглавными полужирными буквами латинского алфавита: $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \ldots$. **По определению** любой тензор второго ранга $\mathbf{L}$ является конечной совокупностью ***упорядоченных пар векторов***. Упорядоченные пары векторов называются **диадами**[16] и чаще всего обозначаются $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. Таким образом, любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы конечного числа диад

$$\mathbf{L} = \underbrace{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \ldots + \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}}_{n \text{ диад}},$$

где $n > 0$ – любое конечное число. Простейшими элементами $\mathbb{T}_2$ являются диады. В то же время, диады являются элементами множества $\mathbb{T}_1^2 = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_1$, которое представляет собой прямое произведение векторного пространства на себя. В силу того, что сумма диад в общем случае не может быть преобразована в единственную диаду, множество $\mathbb{T}_1^2$ является подмножеством $\mathbb{T}_2$ ($\mathbb{T}_1^2 \subset \mathbb{T}_2$). Поэтому каждая диада является тензором второго ранга, но не всякий тензор второго ранга является диадой.

Аналогично $\mathbb{T}_2$ вводится тензорное произведение $\mathbb{T}_3$ трёх векторных пространств $\mathbb{T}_3 = \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_1$, элементами которого являются совокупности упорядоченных троек векторов (триад), которые называются тензорами третьего ранга ${}^{(3)}\mathbf{L} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \ldots + \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}$. Индекс в скобках слева от

[14] от лат. *affinis* – родственный.

[15] Взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и комплексными числами установлено в конце XVIII в.

[16] от др. греч. $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma, \delta\upsilon\acute{\alpha}\delta o\varsigma$ – число два, двойка; филос. – диада, двоица.

обозначения тензора указывает ранг тензора. Тензоры более высоких рангов вводятся по индукции.

Из сказанного видно, что при построении прямого тензорного исчисления никакие координатные системы не привлекаются к рассмотрению, а сами тензоры не зависят от выбора координатной системы. Именно исключение из рассмотрения надстроечных и совершенно необязательных элементов, каковыми являются координатные системы, и делает возможным интуитивное восприятие тензора. От прямой записи тензора нетрудно перейти к его координатному представлению, если в $\mathbb{T}_1$ ввести **базис**[17]. В этом случае приходим к координатному тензорному исчислению. Поэтому с чисто математической точки зрения оба подхода совершенно эквивалентны.

Бескоординатное построение тензорного исчисления проведено в работах [3, 4, 5, 8, 10, 13].

Краткие исторические сведения

Сведения по истории тензорного исчисления приводятся по работам [3, 4].

Исторически появлению тензоров предшествовало введение и использование таких математических объектов как векторы, матрицы и «системы с индексами».

Ещё Архимед[18] складывал силы по правилу параллелограмма, т.е. интуитивно вводил особые объекты, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Этот основополагающий шаг в сторону разработки векторного исчисления долго оставался единственным. В 1580 году С. Стевин[19], чтобы описать понятие силы и правило сложения сил, ввёл представление о векторе и фактически переоткрыл ещё раз закон сложения сил (правда, только для частного случая перпендикулярных сил; в общем случае правило открыл Роберваль[20]). Этот же закон сформулировал И. Ньютон[21] в своём основополагающем труде «Математические начала натуральной философии» (1686) наряду с законами движения тел.

Как видим, векторное исчисление зарождалось как бескоординатное исчисление.

Следующий важнейший с современной точки зрения шаг был сделан толь-

[17] от греч. *βάσις* – основание.

[18] **Архиме́д** (*Αρχιμήδης*; 287 до н.э. - 212 до н.э.) – древнегреческий механик, физик, математик и инженер.

[19] **Саймон (Си́мон) Сте́вин** (нидерл. *Simon Stevin*; 1548-1620) – фламандский математик и инженер.

[20] **Жиль Роберваль** (фр. *Gilles Personne de Roberval*; 08.08.1602 - 27.10.1675) – французский математик, астроном и физик.

[21] Сэр **Исаа́к Нью́тон** (англ. Sir *Isaac Newton*; 25.12.1642 - 20.03.1727 по юлианскому календарю, действовавшему в Англии до 1752 года; или 04.01.1643 - 31.03.1727 года по григорианскому календарю) – английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики, дифференциального и интегрального исчисления, теории цвета и многих других математических и физических теорий.

ко в XIX веке ирландским математиком У.Р. Га́мильтоном[22], который занимаясь теорией кватернионов-гиперкомплексных чисел, в 1845 году ввёл сам термин «вектор», а также термины: «скаля́р», «скалярное произведение», «векторное произведение», – и дал определение этих операций. Геометрическое изображение вектора как отрезка со стрелкой также устойчиво появилось впервые, по-видимому, у Гамильтона, а в 1853 году О. Коши[23] ввёл в обращение понятие радиус-вектора и соответствующее ему обозначение $\vec{r}$. В эти же годы Г. Грассманом[24] была создана теория внешних произведений (само понятие введено в 1844 году), известная в настоящее время как алгебра Грассмана. В 1880 году Дж.У. Гиббс[25] объединяет две математические идеи: «кватернион» Гамильтона и «внешнюю алгебру» Грассмана, в векторный анализ. Независимо от Гиббса и одновременно с ним О. Хевисайд[26] также объединил векторные представления Гамильтона и Грассмана в векторное исчисление в его современном виде; ввёл термин «орт» (1892) и название «набла» для оператора Гамильтона; предложил обозначать векторы жирными буквами (1891). Несколько ранее У. Клиффорд[27] приступил к объединению подходов Гамильтона и Грассмана, окончательная же связь кватернионов, алгебры Грассмана и векторной алгебры была установлена Гиббсом и Хевисайдом.

В XIX веке математики стали активно использовать ещё один объект – предшественник тензоров – матрицы[28]. Первое появление матриц связывают с древнекитайскими математиками, которые во II веке до н.э. применяли их для записи систем линейных уравнений. Матричная запись алгебраических уравнений и само современное матричное исчисление было развито А. Кэ́ли[29],

[22] прим. на стр. 6.

[23] **Огюсте́н Луи́ Коши́** (фр. *Augustin Louis Cauchy*; 21.08.1789 - 23.05.1857) – французский математик. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики.

[24] **Герман Гюнтер Гра́ссман** (нем. *Hermann Gunther Grassmann*; 15.04.1809 - 26.09.1877) – немецкий физик, математик и филолог. Дал первое систематическое построение учения о многомерном евклидовом пространстве, способствовавшее развитию векторного и тензорного исчислений. Однако из-за абстрактного изложения и необычайной терминологии сочинение было малодоступным.

[25] **Джозайя Уиллард Гиббс** (англ. *Josiah Willard Gibbs*; 11.02.1839 - 28.04.1903) – американский математик, физик и физикохимик, один из создателей векторного анализа, статистической физики, математической теории термодинамики. В 1880-х годах увлёкся работами У. Гамильтона по кватернионам и алгебраическими работами Г. Грассмана.

[26] **О́ливер Хе́висайд** (англ. *Oliver Heaviside*; 18.05.1850 - 03.02.1925) – английский учёный-самоучка, инженер, математик и физик.

[27] **Уи́льям Ки́нгдон Кли́ффорд** (англ. *William Kingdon Clifford*; 04.05.1845 - 03.03.1879) – английский математик и философ. Наряду с Гиббсом и Хевисайдом считается основоположником векторного анализа. Ввёл (1878) современные термины «дивергенция» (которую Максвелл* называл «конвергенцией») и «ротор». В посмертно изданном труде «Здравый смысл в точных науках» (1885) дал современное определение скалярного произведения векторов.

* **Джеймс Клерк Ма́ксвелл** (англ. *James Clerk Maxwell*; 13.06.1831 - 05.11.1879) – британский физик и математик. Шотландец по происхождению. Заложил основы классической электродинамики.

[28] Понятие «матрица» (прим. на стр. 9) для обозначения прямоугольной таблицы ввёл Дж. Сильвестр (прим. на стр. 6).

[29] **А́ртур Кэ́ли** (Кейли, Кэйлей; англ. *Arthur Cayley*; 16.08.1821 - 26.01.1895) – английский математик. Большая часть его работ относится к линейной алгебре, дифференциальным уравнениям и эллиптическим функциям.

который, в частности, в 1841 году ввёл используемое и сейчас обозначение для определителя: $|\ |$. Многие основополагающие результаты в теории систем линейных алгебраических уравнений были получены немецким математиком Л. Кро́некером[30].

В течение всё того же XIX века в разных областях математики появляются «системы с индексами». В алгебре это, например, квадратичные формы, теорию которых разрабатывали А. Кэли, С. Ли[31] и др., в геометрии – квадратичные дифференциальные формы, которые в настоящее время известны как первая и вторая квадратичная форма поверхности и квадрат длины элементарного отрезка. Основоположником теории поверхностей по праву считают выдающегося немецкого учёного К.Ф. Гаусса[32]. Многие важнейшие результаты в этой области были установлены Б. Риманом[33], который развил теорию поверхностей на n измерений. Выдающаяся роль принадлежит Э.Б. Кристоффелю[34], который 1869 году, рассматривая преобразования дифференциальных квадратичных форм, впервые обнаружил тензорный закон их преобразования, а также ввёл понятие производных от векторных величин, которые преобразуются по тензорному закону (сейчас их называют ковариантными производными).

Возникшая ещё в XVIII веке усилиями крупнейших математиков и механиков: Л. Эйлера[35], Ж.-Л. Лагранжа[36], П. Лапласа[37], С. Пуассона[38], О. Коши[39], М.В. Остроградского[40] – наука о движении и равновесии упругих тел (теория упругости), стала ещё одним источником появления «систем с индексами» –

---

[30] прим. на стр. 9.

[31] **Ма́риус Со́фус Ли** (норв. *Marius Sophus Lie*; 17.12.1842 - 18.02.1899) – норвежский математик.

[32] **Иоганн Карл Фри́дрих Га́усс** (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*; 30.04.1777 - 23.02.1855) – немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики: алгебре, дифференциальной и неевклидовой геометрии, в математическом анализе, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, а также в астрономии, геодезии и механике.

[33] **Георг Фридрих Бернхард Риман** (нем. *Georg-Friedrich-Bernhard Riemann*; 17.09.1826 - 20.07.1866) – немецкий математик. За свою короткую жизнь (всего 10 лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики. Выдвинул ряд основных идей топологии. Рассматривал геометрию как учение о непрерывных совокупностях любых однородных объектов (многообразиях). Ввёл т.н. римановы пространства и развил их теорию (т.н. риманову геометрию).

[34] **Элвин Бруно Кристоффель** (нем. *Elwin Bruno Christoffel*; 10.11.1829 - 15.03.1900) – немецкий математик. Известен работами в области теории функций, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории инвариантов алгебраических форм и теории дифференциальных квадратичных форм.

[35] **Леона́рд Э́йлер** (нем. *Leonhard Euler*; 04(15).04.1707 - 07(18).09.1783) – швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

[36] **Жозе́ф Луи́ Лагра́нж** (фр. *Joseph Louis Lagrange*, итал. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*; 25.01.1736 - 10.04.1813) – французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

[37] **Пьер-Симо́н Лапла́с** (фр. *Pierre-Simon Laplace*; 23.03.1749 - 05.03.1827) – французский математик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

[38] **Симео́н Дени́ Пуассо́н** (фр. *Simeon Denis Poisson*; 21.06.1781 - 25.04.1840) – французский физик и математик.

[39] прим. на стр. 13.

[40] **Михаи́л Васи́льевич Острогра́дский** (12(24).09.1801 - 20.12.1861 (01.01.1862)) – российский математик и механик украинского происхождения, признанный лидер математиков Российской империи середины XIX века.

компонент напряжений и деформаций. Обозначались X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x, X_z, Z_y, Y_x. Операции над такими системами с индексами были весьма громоздкими, содержали многочисленные повторения с точностью до круговой замены обозначений. Однако только в конце XIX века удалось понять внутреннее единство формул, содержащих «системы с индексами», и найти новый математический аппарат, сделавший операции с ними компактными и удобными.

Впервые для векторных величин эту задачу удалось решить Дж.У. Гиббсу, который создал векторную алгебру с операциями сложения, скалярного и векторного умножения, показав её связь с теорией кватернионов и алгеброй Грассмана. Кроме того Гиббс создал современный векторный анализ – теорию дифференциального исчисления векторных полей и сам «язык» векторного исчисления, в котором используется как компонентная, так и безиндексная форма записи соотношений. В частности, им были даны удобные представления для операций дивергенции и ротора векторных полей. Созданные Гиббсом векторная алгебра и анализ также прочно вошли в современную физику и механику, его лекции «Элементы векторного анализа в изложении для студентов», выпущенные в 1881-1884 гг., представляют собой, по сути, первый учебник по векторному исчислению. Г. Герц[41], основываясь на работах Гиббса, и независимо от него О. Хевисайд дали современную векторную запись уравнений электромагнетизма Максвелла, сам же Максвелл использовал метод кватернионов.

Однако в тех областях науки, где возникают системы с большим числом индексов, чем у векторов (более одного): в геометрии, в теории упругости, в кристаллофизике, – векторное исчисление Гиббса оказалось бессильным, и он сам, например, при записи уравнений теории упругости в 1889 году использовал всё те же общепринятые в то время обозначения X_x, Y_y, ...

Проблему обобщения векторного исчисления на системы с произвольным числом индексов удалось решить Г. Риччи[42], который в своих работах 1886-1901 гг. создал новый аппарат, названный им абсолютным дифференциальным исчислением. Исчисление, созданное Риччи, оказало настолько сильное влияние на геометрию и физику, что некоторое время оно даже называлось «исчислением Риччи». С некоторыми изменениями оно широко используется и в настоящее время.

Применение теории абсолютного дифференцирования для римановых про-

[41] **Ге́нрих Ру́дольф Герц** (нем. *Heinrich Rudolf Hertz*; 22.02.1857 - 01.01.1894) – немецкий физик.

[42] **Грегорио Ри́ччи-Курба́стро** (итал. *Gregorio Ricci-Curbastro*; 12.01.1853 - 06.08.1925) – итальянский математик. Его важная научная заслуга заключается в создании «абсолютного дифференциального исчисления» (тензорного исчисления), широко используемого в общей теории относительности, дифференциальной геометрии, теории многообразий и т.д. Наряду с Риччи в этом признается фундаментальный вклад Римана (прим. на стр. 14), Кристоффеля (прим. на стр. 14) и Ле́ви-Чиви́ты (прим. на стр. 16).

странств было осуществлено Т. Леви-Чивитой[43], бывшим учеником, а в последующем коллегой и соавтором Риччи в нескольких основополагающих работах.

Для зарождавшейся на рубеже XIX и XX веков теории относительности аппарат абсолютного дифференциального исчисления оказался весьма удобным. Так в 1913 году А. Эйнштейн[44] совместно с М. Гроссманом[45] применяет абсолютное дифференциальное исчисление к теории относительности и теории гравитации, а в 1916 году он предлагает «ради простоты» пропускать знак суммы в тех случаях, когда суммирование идёт по дважды повторяющимся индексам. С тех пор правило стало широко применяться и в настоящее время называется соглашением Эйнштейна о суммировании.

Новое исчисление примерно в тоже время начали применять в теории упругости и кристаллофизике для описания свойств кристаллов. Здесь прежде всего следует назвать немецкого учёного В. Фойгта[46], который и ввёл в 1898-1903 гг. сам термин «тензор» именно для описания механических напряжений. Фойгт одним из первых дал матричное представление координат тензоров второго и четвёртого рангов, задающих физические свойства различных типов кристаллов. Термин «тензор» был активно воспринят не только в теории упругости, но и в геометрии и физике, для обозначения ковариантных и контравариантных систем. Так, начиная с 1913 года, в своих работах Эйнштейн использует этот термин.

Дальнейшее развитие тензорного исчисления в начале XX века осуществлялось многими учёными, среди которых назовём упоминавшегося Т. Леви-Чивиту, голландского математика Я. Схоутена[47], которые выпустили соответственно в 1927 и в 1924 годах первые специализированные учебники по тензорному исчислению. Книга Схоутена называлась «Исчисление Риччи» (*Der Ricci-Kalkul*).

Тем не менее, как и в случае векторного анализа, не обходилось и без определённой критики появившегося тензорного исчисления, главным образом сводившегося к тому, что расшифровка тензорных формул требует дополнительных усилий при анализе тех или иных физических соотношений. Однако затраты на овладение тензорным аппаратом с лихвой окупаются при даль-

[43] **Ту́ллио Ле́ви-Чиви́та** (итал. *Tullio Levi-Civita*; 29.03.1873 - 29.12.1941) – итальянский математик и механик еврейского происхождения. Автор ряда важных открытий в области небесной механики, гидродинамики, теории дифференциальных уравнений и других разделов математики и физики. Его крупнейшим вкладом в науку является создание на рубеже 20 в. (совместно с Г. Риччи-Курбастро) тензорного исчисления, которое нашло широкое применение в дифференциальной геометрии, теории римановых пространств, теории относительности, электродинамике и многих других областях.

[44] прим. на стр. 8.

[45] **Марсе́ль Гро́ссман** (нем. *Marcel Grossmann*; 09.04.1878 - 07.09.1936) – швейцарский математик, друг Эйнштейна и соавтор его ранних работ по общей теории относительности.

[46] прим. на стр. 6.

[47] **Ян Арнольдус Схо́утен** (Схаутен; *Jan Arnoldus Schouten*; 28.08.1883 - 29.01.1971) – нидерландский математик. Основные труды по тензорной дифференциальной геометрии и её приложениям. Автор работ, посвящённых релятивистской физике.

нейшей работе с ним.

Важным шагом стало введение безиндексной формы записи тензорных соотношений, которая появилась в середине XX века в исследованиях по механике сплошных сред Р. Ривлина[48], Дж. Эриксена[49], В. Нолла[50], Дж. Адкинса[51], А. Грина[52], Дж. Смита[53], К. Труселлла[54], А.И. Лурье[55]. Безиндексная форма, введённая ещё Гиббсом, позволила записать специальным математическим языком все физические законы в простой, компактной и объективной (т.е. независящей от выбора системы координат) форме, в которой индексы «не заслоняют» физической сути законов. Современное тензорное исчисление использует все три упоминавшиеся формы записи соотношений: компонентную, матричную и безиндексную.

1 Евклидово геометрическое пространство

Все физические явления рассматриваются в некотором пространстве. Для определённости и наглядности всюду в дальнейшем считаем пространство трёхмерным евклидовым[56] пространством, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. Применение математических методов требует параметризации пространства (идентификации точек пространства), т.е. введения системы координат.

Для этого сначала необходимо ввести в рассмотрение тело отсчёта. Природа не позаботилась о предоставлении нам какого-либо естественного тела отсчёта, и мы вынуждены сотворить его сами. Поступим следующим образом.

Зафиксируем некоторое произвольное место (в идеале точку) и поставим на нем метку O, которая будет рассматриваться в качестве начала в теле отсчёта. Теперь необходимо ориентировать тело – указать направления: «вперёд-назад», «влево-вправо», «вверх-вниз». Возьмём три указателя-стрелки $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,

---

48 **Рональд Самуэль Ривлин** (*Ronald Samuel Rivlin*; 1915 - 04.10.2005) – англо-американский физик, математик.

49 **Джеральд Лаверне Эриксен** (*Jerald LaVerne Ericksen*; род. 20.12.1924) – американский математик, специализирующийся в механике сплошных сред.

50 **Вальтер (Уолтер) Нолл** (*Walter Noll*; род. 07.01.1925) – американский (?) математик немецкого происхождения. Известен как разработчик математического аппарата классической механики и термодинамики.

51 **Джон Эдвард Адкинс** (*John Edward Adkins*) – профессор теоретической механики Ноттингемского университета.

52 **Альберт Эдвард Грин** (*Albert Edward Green*; 11.11.1912 - 12.08.1999) – британский математик и механик.

53 (?)

54 **Клиффорд Амброс Труселлл III** (*Clifford Ambrose Truesdell III*; 18.02.1919 - 14.01.2000) – американский математик, естествоиспытатель и историк науки.

55 **Анато́лий Иса́кович Лурье́** (06(19).07.1901 - 12.02.1980) – советский учёный в области теоретической и прикладной механики, член-корреспондент АН СССР.

56 **Эвкли́д** или **Эвкли́д** (др.-греч. *Εὐκλείδης*; ок. 300 г. до н. э.) – древнегреческий математик, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его главная работа – «Начала» (*Στοιχεῖα*, в латинизированной форме – «Элементы»).

выходящих из O. Длины стрелок будем считать масштабами по соответствующему направлению. Они могут быть различными. Для простоты будем считать их одинаковой длины. Стрелки могут быть расположены под произвольными углами друг к другу, но не лежать в одной плоскости. Опять же для простоты считаем, что углы между стрелками составляют 90°. В результате получаем фигуру $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, которая в геометрии называется **репером**. Идентифицируем (отметим) точки тела с помощью радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad -\infty < (x, y, z) < +\infty$, который представляет собой стрелку, выходящую из начала O. Конец стрелки радиус-вектора указывает точку A, присоединяемую к реперу, и расположенную в вершине (на диагонали OA) параллелепипеда со сторонами x, y, z соответственно вдоль стрелок $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Аналогичным образом к реперу присоединяется весь бесконечный набор точек, отвечающих всевозможным значениям параметров x, y, z радиус-вектора. Репер $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ с присоединённым к нему множеством точек $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad -\infty < (x, y, z) < +\infty$ называется **телом отсчёта**. Для описания последовательности событий и изменения количественных характеристик необходим ещё один элемент, позволяющий фиксировать время, а именно **часы**. Часами называют любой периодический процесс. Тело отсчёта, снабжённое часами, называется **системой отсчёта**.

Порядок направлений системы отсчёта $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ считаем фиксированным, т.е. $\vec{i}$ – всегда первое направление, $\vec{j}$ – второе направление, $\vec{k}$ – третье направление. Система отсчёта называется **правоориентированной**, если с конца стрелки третьего направления $\vec{k}$ поворот стрелки первого направления $\vec{i}$ к стрелке второго направления $\vec{j}$ на меньший угол виден против хода часовой стрелки. Система отсчёта называется **левоориентированной**, если с конца стрелки третьего направления $\vec{k}$ поворот стрелки первого направления $\vec{i}$ к стрелке второго направления $\vec{j}$ на меньший угол виден по ходу часовой стрелки. ***Заметим***, при этом, что ориентации системы отсчёта имеет смысл только в трёхмерном пространстве.

По отношению к выбору ориентации системы отсчёта[57] тензоры любого ранга различаются по своему типу. Тензоры, не зависящие от выбора ориентации, называются **полярными** или **истинными**; тензоры, которые умножаются на (-1) при замене ориентации на противоположную, называются **аксиальными** или **псевдотензорами**.

Система идентификации точек системы отсчёта называется **системой координат** в данной системе отсчёта.

Все точки системы отсчёта уже идентифицированы координатами x, y и z, которые мы будем называть отсчётными координатами [4]. Последние

[57] Названия «правая» и «левая» ориентация предложены (1873) Дж. Максвеллом.

играют выделенную роль, ибо определяют как саму систему отсчёта, так и точки системы отсчёта, присваивая им определённые имена. Наряду с отсчётными координатами можно ввести в рассмотрение и другие координаты, т.е. помимо подлинных имён точек можно присвоить им псевдонимы y^1, y^2, y^3

$$y^k = Y^k(x,\, y,\, z,\, t).$$

Это отображение каждой точке системы отсчёта, определяемой координатами $(x,\, y,\, z)$, сопоставляет в данный момент времени одну и только одну тройку чисел $(y^1,\, y^2,\, y^3)$. Таким образом, этими соотношениями в данной системе отсчёта вводится ещё одна система координат, которая меняется во времени, т.е. движется относительно системы отсчёта. При этом точка, неподвижная в системе отсчёта, будет иметь меняющиеся во времени координаты $y^1,\, y^2,\, y^3$. И наоборот, точка с фиксированными координатами $y^1,\, y^2,\, y^3$ будет двигаться относительно системы отсчёта. Преобразования предполагаются непрерывными и однозначно обратимыми. Иными словами, в данный момент времени тройке чисел $(y^1,\, y^2,\, y^3)$ отвечает одна и только одна тройка чисел $(x,\, y,\, z)$

$$x = X(y^1,\, y^2,\, y^3,\, t), \qquad y = Y(y^1,\, y^2,\, y^3,\, t), \qquad z = Z(y^1,\, y^2,\, y^3,\, t).$$

Заметим, что здесь координаты $x,\, y,\, z$ не зависят от времени, а координаты $y^1,\, y^2,\, y^3$ являются функциями времени. Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial X}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0.$$

Вместо координат y^k можно было ввести и другие координаты z^k такие, что

$$z^k = Z^k(x,\, y,\, z,\, t).$$

Подставляя сюда соотношения для $x,\, y,\, z$ через y^k , получаем

$$z^k = \widehat{Z}^k(y^k;\, t).$$

Этими соотношениями устанавливаются замены систем координат в данной системе отсчёта, **но при этом сама система отсчёта оказывается вне поля зрения и о ней, чаще всего, нет никаких упоминаний**.

В данной системе отсчёта можно ввести сколь-угодно много различных систем координат, и все они **равноправны**. Кроме того, ориентация вводимой системы координат, может отличаться от зафиксированной ориентации системы отсчёта. Например, в правоориентированной системе отсчёта можно использовать как левые, так и правые системы координат. Однако, в теоретических и практических исследованиях принято использовать системы координат фиксированной ориентации, по общепринятому соглашению – правоориентированные.

Обычно система координат выбирается так, что точкам тела отсчёта отвечают неизменные во времени тройки чисел y^k. В таком случае говорят, что выбранная система координат неподвижна относительно тела отсчёта.

Простейшей координатной системой в данном теле отсчёта является декартова система координат x^k. Она строится так. Выбирается произвольная точка тела отсчёта, которую принимается за начало декартовой системы координат. В этой точке строится тройка ортонормированных векторов $\mathbf{r}_k$. Тогда радиус-вектор

$$\mathbf{r} = x^k \, \mathbf{r}_k,$$

определяет точку тела отсчёта, помеченную координатами x^k. Когда координаты x^k пробегают все допустимые значения, конец радиус-вектора пробегает все точки тела отсчёта. Система координат x^k неподвижна относительно тела отсчёта. Можно использовать подвижную декартову систему координат.

Наряду с декартовыми системами координат могут использоваться и другие системы координат. Чаще других используются цилиндрические и сферические системы координат.

Заметим, что многие физические или геометрические характеристики зависят от выбора системы отсчёта, но ни одна из них не зависит от выбора системы координат.

Конечно, координатное описание того или иного факта будет выражаться по разному в разных системах координат. Однако векторное (или тензорное) описание того же самого факта имеет инвариантный, т.е. независимый от выбора системы координат, вид. Таким образом, без использования координатных систем вполне можно обойтись. Однако исключить из рассмотрения системы отсчёта, включая отсчётную систему координат, невозможно. Без системы отсчёта практически все понятия, используемые в физике, теряют всякий смысл [4].

2 ТЕНЗОРЫ НУЛЕВОГО РАНГА – СКАЛЯРЫ

Физические величины, которые полностью характеризуются заданием одного вещественного числа, не зависящего от выбора системы координат, называются скалярными величинами.

Скаляры, будучи вещественными числами, подчиняются обычным, известным из школьной программы, правилам сложения, вычитания, умножения и деления. Скаляры определяют физические величины и имеют размерность. Например, масса измеряется в килограммах, расстояние – в метрах, объем – в кубических метрах и т.д. Складывать и вычитать можно скаляры, имеющие одинаковую размерность. Делить и умножать можно скаляры разной размерности. Например, если массу тела разделить на его объем, то получим новую скалярную величину, называемую средней массовой плотностью. В дальнейшем скаляры будем считать элементами множества вещественных чисел, на котором введены обычные операции сложения, вычитания, умножения и деления. Это множество будем обозначать символом $\mathbb{T}_0$, а физическую величину, полностью определяемую одним элементом множества $\mathbb{T}_0$, будем называть скаляром или тензором нулевого ранга.

3 ТЕНЗОРЫ ПЕРВОГО РАНГА – ВЕКТОРЫ

3.1 Определения. Полярные и аксиальные векторы

Ве́ктор – направленный отрезок прямой, у которого один конец (точка A) называется началом вектора, другой конец (точка B) называется концом вектора. Чтобы задать вектор необходимо указать направление в физическом (трёхмерном) пространстве (от A к B) и вещественное число (скаляр), называемое **длиной** (**модулем**) вектора. Для обозначения векторов используются следующие символы: $\mathbf{a}$, $\bar{\mathrm{a}}$, $\vec{\mathrm{a}}$ или $\overline{AB}$ [58]. В дальнейшем векторы будем обозначать малыми полужирными буквами преимущественно латинского алфавита: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... Длина (модуль) вектора $\mathbf{a}$ равна длине отрезка AB и обозначается $|\mathbf{a}|$. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются равными если они имеют одно и тоже направление (сонаправлены) в физическом пространстве и одинаковые длины $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ [59]. Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым вектором** и обычно обозначается $\mathbf{0}$. Направление нулевого вектора не определено и не имеет значения (нулевому вектору можно приписать любое направление). Все нулевые векторы эквивалентны между собой. В этом смысле говорят, что существует только один нулевой вектор. Вектор единичной длины называется **единичным вектором** или **ортом**[60] (направ-

[58] Обозначение $\bar{\mathrm{a}}$ ввёл Ж. Арган* (1806); $\overline{AB}$ – А. Мёбиус**; $\mathbf{a}$ – О. Хевисайд.

* **Жан Робер Арга́н** (фр. *Jean-Robert Argand*; 18.07.1768 - 13.08.1822) – швейцарский математик; в изучении математики был самоучкой, скорее всего рассматривал математику как хобби, а не профессию (был управляющим в книжном магазине в Париже).

** **А́вгуст Фе́рдинанд Мёбиус** (нем. *August Ferdinand Mobius*; 17.11.1790 - 26.09.1868) – немецкий математик и астроном-теоретик.

[59] Такие векторы называются **свободными**, так как начальная точка таких векторов может быть выбрана произвольно или, другими словами, начало вектора может быть перенесено в любую точку пространства. Кроме свободных векторов в физических науках рассматриваются векторы, которые характеризуются модулем, направлением и точкой приложения. Множество равных между собой векторов, расположенных на одной прямой, называется **скользящим вектором**. Рассматриваются ещё **связанные векторы**, которые считаются равными, если они имеют не только равные модули и направления, но и общую точку приложения. В векторном и тензорном исчислении рассматриваются свободные векторы, так как задание скользящего или связанного вектора может быть заменено заданием двух свободных векторов.

[60] от греч. *ὀρθός* – прямой. Термин «орт» ввёл О. Хевисайд (1892).

ляющим вектором).

Математические объекты в физических науках необходимы для описания изучаемых явлений, процессов и их величин. В частности, в механике введённый вектор позволяет описать трансляционное движение, которое характеризует перенос тела в пространстве. Но в Природе существует ещё один тип движения, которое не сводится к трансляционному. Это так называемое спинорное[61] движение, характеризующее изменение ориентации тела в пространстве. Для описания таких движений вводится понятие спин-вектора. ***Заметим***, что спин-векторы однозначно определены только в трёхмерном пространстве. Формально спин-вектор определяется следующим образом [4]. В физическом (трёхмерном) пространстве задаётся прямая, называемая осью спин-вектора. Затем в плоскости, ортогональной оси спин-вектора, изображается круговая стрелка, идущая вокруг оси и показывающая направление вращения. Длина круговой стрелки называется модулем (длиной) спин-вектора и указывает величину вращения или поворота. Итак, спин-векторы изображают вращения в трёхмерном физическом пространстве, в то время как прямые векторы изображают трансляции в этом же пространстве. Спин-векторы будем обозначать малыми полужирными латинскими буквами в виде $\overset{\circlearrowleft}{\mathbf{a}}$.

Однако работать с двумя множествами элементов различной природы неудобно. Тем более, что спин-векторам можно взаимно однозначно сопоставить прямые векторы, если использовать дополнительное соглашение, называемое ориентацией системы отсчёта.

Сопоставим спин-вектору $\overset{\circlearrowleft}{\mathbf{a}}$ «обычный» вектор $\mathbf{a}$ по следующему правилу:

а) вектор $\mathbf{a}$ расположен на оси спин-вектора $\overset{\circlearrowleft}{\mathbf{a}}$;

б) длина вектора $\mathbf{a}$ равна модулю спин-вектора $\overset{\circlearrowleft}{\mathbf{a}}$: $|\mathbf{a}| = |\overset{\circlearrowleft}{\mathbf{a}}|$;

в) вектор $\mathbf{a}$ направлен так, чтобы при взгляде с его конца направление вращения, задаваемое спин-вектором $\overset{\circlearrowleft}{\mathbf{a}}$, было согласовано с ориентацией системы отсчёта.

Таким образом, в ориентированной системе отсчёта можно работать только с одним множеством: множеством направленных отрезков. Однако в этом множестве все равно сохраняется различие между векторами. Оно заключается в следующем: одни векторы при замене ориентации системы отсчёта на противоположную, не меняются (такие векторы называются **полярными** или **истинными**); другие векторы при замене ориентации системы отсчёта на противоположную меняют своё направление на противоположное, сохраняя свою длину (такие векторы называются **аксиальными**[62], **осевыми** или

[61] от англ. *spin* – вращаться.
[62] от лат. *axis* – ось.

псевдовекторами).

Необходимо учитывать, что за аксиальными векторами всегда стоят спин-векторы, т.е. вращения в физическом пространстве. Поэтому с физической точки зрения различие между полярными и аксиальными векторами существенно и неустранимо. Это различие никак не связано с выбором системы координат в системе отсчёта. Например, в правоориентированной системе отсчёта мы можем использовать как левые, так и правые системы координат, выбор которых совершенно не сказывается ни на полярных, ни на аксиальных векторах.

3.2 Действия с векторами

Сложение векторов. Двум векторам одного типа и одной размерности[63] $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ставится в соответствие третий вектор $\mathbf{c}$ такого же типа и размерности, построенный по правилу параллелограмма или по правилу треугольника. Вектор $\mathbf{c}$ называется суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (коммутативность сложения);

2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (ассоциативность сложения);

3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Умножение вектора на скаляр. Любому вектору $\mathbf{a}$ и любому скаляру α ставится в соответствие вектор $\mathbf{c}$, который обозначается $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}$, и такой, что $|\mathbf{c}| = |\alpha||\mathbf{a}|$, направление вектора $\mathbf{c}$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\alpha > 0$, направление вектора $\mathbf{c}$ противоположно направлению вектора $\mathbf{a}$, если $\alpha < 0$. Операция умножения вектора на скаляр обладает следующими дистрибутивными свойствами:

1) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$;

2) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Из принятого определения видно, что при умножении вектора на полярный скаляр тип вектора не меняется, а при умножении вектора на аксиальный скаляр тип вектора меняется на противоположный.

Скалярное произведение. Двум произвольным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ставится в соответствие скаляр α, который обозначается $\alpha \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и вычисляется по правилу $\alpha = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Операция скалярного умножения обладает следующими свойствами:

[63] Векторы являются физическими величинами.

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (коммутативность);

2) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (дистрибутивность).

Через скалярное произведение определяется длина вектора $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ и угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

Из определения скалярного произведения следует, что $\alpha=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ есть полярный скаляр, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковый тип, и есть аксиальный скаляр, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют разные типы.

Два ненулевых вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю. Векторы $\mathbf{a}$ ($|\mathbf{a}|\neq 0$) и $\mathbf{b}$ ($|\mathbf{b}|\neq 0$) взаимно перпендикулярны, если $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

Если говорить о **физическом смысле скалярного произведения**, можно привести следующий пример. По определению (в простейшем случае), работа A, совершаемая постоянной силой F на прямолинейном перемещении u при условии, что сила составляет с перемещением постоянный угол α, равна

$$A=F\,u\,\cos\alpha.$$

Таким образом, простейшей физической интерпретацией скалярного произведения векторов является работа,совершаемая силой на перемещении. Можно привести и другие физические примеры.

Векторное умножение. Упорядоченной паре векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, в которой вектор $\mathbf{a}$ считается первым (левым) сомножителем, а вектор $\mathbf{b}$ – вторым (или правым) сомножителем, ставится в соответствие вектор $\mathbf{c}$ такой что

1) $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=0$ и $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=0$ (вектор $\mathbf{c}$ ортогонален и вектору $\mathbf{a}$ и вектору $\mathbf{b}$ или, другими словами, вектор $\mathbf{c}$ ортогонален плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$);

2) направление кратчайшего поворота от вектора $\mathbf{a}$ (левого сомножителя) к вектору $\mathbf{b}$ (правому сомножителю), которое видимо с конца вектора $\mathbf{c}$, согласуется с выбранной ориентацией системы отсчёта (для правоориентированной – против хода часовой стрелки, для левоориентированной – по ходу часовой стрелки);

3) модуль вектора $\mathbf{c}$ вычисляется по правилу $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ угол кратчайшего поворота от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$. **Геометрически** модуль векторного произведения равен **площади параллелограмма**, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, выходящих из одной точки.

Векторное произведение будем обозначать $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Операция векторного умножения обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (антикоммутативность);

2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (дистрибутивность).

Возникает вопрос о типе вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, решение которого зависит от типов векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ оба полярные векторы, т.е. не зависят от выбора ориентации в физическом пространстве, тогда вектор $\mathbf{c}$ зависит от выбора ориентации и, следовательно, является аксиальным. Векторное произведение двух векторов различных типов есть полярный вектор, т.е. он не зависит от выбора ориентации в пространстве. Векторное произведение двух аксиальных векторов есть аксиальный вектор [4].

Смешанное произведение трёх векторов – $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. В смешанном произведении последовательность выполнения операций очевидна: сначала производится векторное умножение, а затем – скалярное умножение. **Геометрически** смешанное произведение равно **объёму параллелепипеда**, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, выходящих из одной точки. Напомним известное тождество

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

Двойное векторное произведение – $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Здесь уже важно знать последовательность выполнения операций, поэтому при двойном векторном произведении первая операция обязательно должна выделяться скобками, т.к. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Напомним известное тождество

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{2}$$

3.3 Координаты вектора

В трёхмерном пространстве существуют тройки линейно независимых векторов. Три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называются **линейно независимыми**, если равенство нулю линейной комбинации этих векторов $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – действительные числа (скаляры), возможно тогда и только тогда, когда $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$. Геометрически линейная зависимость трёх векторов означает, что все три вектора лежат в одной плоскости. Поэтому условием линейной независимости системы трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ является отличие от нуля смешанного произведения этих векторов $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0$. Смысл этого условия становится очевидным, если вспомнить, что модуль смешанного произведения трёх векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Любая тройка линейно независимых векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ называется **базисом**[64]. Название объясняется тем, что любой вектор $\mathbf{a}$ может быть един-

[64] от греч. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ – основание.

ственным образом представлен в виде разложения по векторам базиса. В самом деле, любые четыре вектора в трёхмерном пространстве линейно зависимы, т.е. равенство $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{r}_1 + \gamma\mathbf{r}_2 + \delta\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$ возможно, когда не все скалярные коэффициенты равны нулю. Понятно, что $\alpha \neq 0$. В противном случае векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ были бы линейно зависимы. Поэтому из предыдущего равенства следует

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{r}_1 + a^2\mathbf{r}_2 + a^3\mathbf{r}_3;\ a^1 = -\frac{\beta}{\alpha}, \qquad a^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad a^3 = -\frac{\delta}{\alpha},$$

где числа a^1, a^2, a^3 называются **координатами** вектора $\mathbf{a}$ относительно базиса $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$.

Всюду в дальнейшем будем пользоваться **правилом суммирования Эйнштейна**, согласно которому наличие в выражении одинаковых верхнего и нижнего индексов предполагает суммирование по повторяющемуся индексу, а знак суммирования опускается

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{r}_1 + a^2\mathbf{r}_2 + a^3\mathbf{r}_3 \equiv \sum_{k=1}^{3} a^k\mathbf{r}_k \equiv a^k\mathbf{r}_k.$$

Индекс, по которому производится суммирование, встречается в выражении только дважды (один раз внизу и один раз вверху) и называется **немым**. Суммирование по повторяющемуся индексу выполняется от 1 до 3, в соответствии с размерностью рассматриваемого пространства. Ясно, что обозначение немого индекса совершенно несущественно; его можно менять произвольно не изменяя смысла формул:

$$\mathbf{a} = a^k\mathbf{r}_k = a^s\mathbf{r}_s = a^r\mathbf{r}_r \text{ и т.д.}$$

Индекс, не участвующий в суммировании (встречающийся в левой и/или правой части только один раз), называется **свободным**; ему поочерёдно приписываются значения 1, 2, 3. Свободные индексы в обеих частях равенства должны иметь одинаковые обозначения, например: запись $\hat{a}_m = \mathrm{X}_m^p a_p$ представляет собой три равенства с тремя слагаемыми в правой части каждого (индекс m – свободный, индекс p – немой).

Чтобы для заданного вектора $\mathbf{a}$ определить координаты относительно базиса $\mathbf{r}_k$, необходимо ввести взаимный базис $\mathbf{r}^n$ такой, что выполняются соотношения

$$\mathbf{r}^n \cdot \mathbf{r}_k = \delta_k^n = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases} \tag{3}$$

представляющие собой девять равенств, позволяющие однозначно определить три вектора $\mathbf{r}^n$. Можно показать, что

$$\mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3}, \qquad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3}, \qquad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3}.$$

Если векторы $\mathbf{r}_k$ представляют собой базис, то векторы $\mathbf{r}^n$ – линейно независимы и могут быть использованы в качестве ещё одного базиса. При этом базис $\mathbf{r}_k$ называется **основным**; базис $\mathbf{r}^n$, удовлетворяющий соотношениям (3), называется **взаимным**, **дуальным** или **сопряжённым**. Один и тот же вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде разложения как по векторам основного, так и взаимного базисов

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{r}_k = a_n \mathbf{r}^n,$$

где a^k, a_n – координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно основного ($\mathbf{r}_k$) и взаимного ($\mathbf{r}^n$) базисов соответственно. В общем случае $a^m \neq a_m$. Совпадение координат вектора в основном и взаимном базисах возможно только в том случае, когда основной базис является ортонормированным, т.е. векторы основного базиса взаимно ортогональны и имеют единичную длину. При этом векторы основного и взаимного базисов совпадают $\mathbf{r}^m = \mathbf{r}_m$, следовательно координаты любого вектора в основном и взаимном базисах совпадают $a^m = a_m$ и положение индексов (верхний-нижний) становится безразличным.

Введение основного и взаимного базисов позволяет определить координаты любого вектора $\mathbf{a}$ в этих базисах. Для вычисления координат вектора в основном базисе воспользуемся разложением вектора $\mathbf{a}$ в основном базисе и умножим скалярно вектор $\mathbf{a}$ на вектор взаимного базиса

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}^m = (a^k \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{r}^m = a^k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}^m) = a^k \delta_k^m = a^m,$$

т.е. координаты вектора $\mathbf{a}$ в основном базисе определяются по формуле

$$a^m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}^m.$$

Аналогично координаты вектора $\mathbf{a}$ во взаимном базисе определяются по формуле

$$a_m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_m.$$

Используя эти соотношения, вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен через векторы основного и взаимного базисов следующим образом:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}^m)\mathbf{r}_m = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_s)\mathbf{r}^s. \tag{4}$$

Зная координаты вектора в основном и взаимном базисах, можно легко найти длину вектора

$$|\,\mathbf{a}\,| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} = (a_k\, a^k)^{1/2}. \tag{5}$$

3.4 Некоторые формулы векторной алгебры

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_k b^k = a^n b_n. \tag{6}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \upsilon\begin{vmatrix}\mathbf{r}^1 & \mathbf{r}^2 & \mathbf{r}^3\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix} = \frac{1}{\upsilon}\begin{vmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}, \tag{7}$$

где $\upsilon = (\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3 = \left[(\mathbf{r}^1\times\mathbf{r}^2)\cdot\mathbf{r}^3\right]^{-1}$.

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \upsilon\begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix} = \frac{1}{\upsilon}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{8}$$

$$[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}][(\mathbf{d}\times\mathbf{e})\cdot\mathbf{f}] = \begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{f}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{f}\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{f}\end{vmatrix}. \tag{9}$$

$$[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]^2 = \begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix} \tag{10}$$

– определитель Грама[65].

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \begin{vmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix}. \tag{11}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}. \tag{12}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{c}[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}] - \mathbf{d}[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}] = \mathbf{b}[(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}] - \mathbf{a}[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}]. \tag{13}$$

Разложение вектора $\mathbf{a}$ на две компоненты: 1) по направлению произвольного единичного вектора $\mathbf{n}$ и 2) по направлению ортогональному к $\mathbf{n}$ и компланарному векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n}). \tag{14}$$

4 ЕВКЛИДОВО ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Евклидовым векторным пространством называется линейное пространство над полем действительных чисел, в котором определена операция скалярного умножения, которая каждой паре элементов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ставит в соответствие действительное число, обозначаемое $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, и обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (коммутативность);

[65] **Йорген Педерсен Грам** (Jørgen Pedersen Gram; 27.06.1850 - 29.04.1916) – датский математик.

2) $(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ (дистрибутивность)
$\alpha,\ \beta$ – действительные числа;

3) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geqslant 0, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0 \iff \mathbf{a}=\mathbf{0}$ (положительная определённость).

Множество всех векторов трёхмерного евклидова геометрического пространства с обычным скалярным произведением является евклидовым векторным пространством. Будем обозначать это пространство $\mathbb{T}_1$.

5 ПОЯВЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА

Внимательное изучение формул векторной алгебры может привести к представлению о появлении **новых математических структур**, фигурирующих в этих формулах. В частности, при рассмотрении формулы двойного векторного произведения трёх векторов (2)

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{ba}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{ca}\cdot\mathbf{b}. \tag{15}$$

может возникнуть вопрос: что представляет собой объект $\mathbf{ba}$ (или $\mathbf{ca}$), между векторами которого «отсутствует» знак математической операции и который скалярно умножается справа на вектор? Скобки, заключающие в себя скалярное произведение векторов, в правой части (2) специально опущены в (15) и без них действительно можно обойтись. Как будет определено в дальнейшем этот объект представляет собой простейший тензор второго ранга – диаду (упорядоченную пару векторов).

Физический пример, показывающий необходимость введения тензоров второго ранга, приведён в работе [4]. В 1638 г. вышла в свет книга Г. Галилея[66] «Беседы о двух новых науках», сыгравшая огромную роль в развитии механики. В ней, при обсуждении проблемы прочности каната на разрыв, Галилей ввёл понятие напряжения. Он указал, что прочность каната определяется величиной $\sigma=F/A$, где F – сила, действующая на канат вдоль оси каната; A – площадь поперечного сечения каната. Понятие напряжения оказалось очень плодотворным, но в общем случае выяснилось, что напряжение является объектом совершенно новой природы.

Попытки обобщить понятие напряжения приводят в первую очередь к тому, что в определении, данном Галилеем, следовало бы заменить силу F вектором силы $\mathbf{F}$

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{F}/A.$$

[66] **Галиле́о Галиле́й** (итал. *Galileo Galilei*; 15.02.1564 - 08.01.1642) – итальянский физик, механик, астроном, философ и математик

В таком случае напряжение оказалось бы векторной величиной. Но при этом трудности не исчезают. Действительно, для каната площадь поперечного сечения A вполне определена. Но в общем случае площадка является векторной величиной $\mathbf{A}$, и предыдущая формула должна быть переписана в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}/\mathbf{A}.$$

Получаем абсурдный результат, т.к. операция деления вектора на вектор не определена и не может быть определена. Известно, что операция деления может быть определена только на тех множествах, в которых имеется единичный элемент и притом единственный. Векторное пространство таким множеством не является, поскольку в нем имеется несчётное множество различных по направлению единичных векторов. Возникшая ситуация означает, что напряжение не является ни скаляром, ни вектором и необходимо ввести новое понятие. Для этого рассмотрим деформируемое твёрдое тело. Выберем в нём произвольную точку M. В точке M зададим произвольно направленный единичный вектор $\mathbf{n}$. Проведём через M плоскость, ортогональную $\mathbf{n}$, и в этой плоскости рассмотрим область ΔA, содержащую точку M. Пусть на ΔA действует сила $\Delta\mathbf{F}$, моделирующая воздействие части тела, находящейся со стороны положительной нормали $\mathbf{n}$, на часть тела, находящуюся со стороны отрицательной нормали $\mathbf{n}$. Вектором напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})}$ в точке M, действующим по бесконечно малой площадке $\mathbf{n}\Delta A$, называется предел отношения

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta A},$$

где $\Delta A \to 0$ означает, что к нулю стремится наибольший диаметр площадки ΔA. Таким образом, чтобы определить напряжение в точке M деформируемого тела, необходимо задать: 1) ориентированную площадку $\mathbf{n}dA$, определяемую вектором нормали $\mathbf{n}$; 2) вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})}$, действующий по этой площадке. При этом, напряжение может быть определено как упорядоченная пара векторов $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})}$, из которых первый вектор задаёт площадку, а второй – действующую по этой площадке силу, отнесённую к единице площади. Эта пара векторов составляет единое целое. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, описанную пару векторов записывают в виде $\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})}$, где $\otimes$ – знак тензорного произведения. Должно быть понятно, что

$$\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})} \neq \boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})} \otimes \mathbf{n},$$

т.к. в последнем случае в соответствии с соглашением $\boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})}$ – вектор нормали, а $\mathbf{n}$ – сила. Поэтому понятие напряжения связывается с упорядоченной парой векторов $\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{n})}$. Чтобы полностью описать напряжение в точке M, необходимо задать напряжения по всем площадкам, проходящим через эту точку. Однако таких площадок бесконечно много. Если применить специальные рассуждения, использующие законы механики, (только математики недостаточно! [4]), то можно показать, что напряжённое состояние в точке M полностью определено, если задана неупорядоченная совокупность трёх упорядоченных пар векторов

$$\mathbf{T} = \mathbf{n}_{(1)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{(1)} + \mathbf{n}_{(2)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{(2)} + \mathbf{n}_{(3)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{(3)},$$

где $\mathbf{n}_{(i)}$, $(i = 1,\, 2,\, 3)$ -– три единичных ортогональных между собой вектора, задающие три взаимно ортогональные площадки; $\boldsymbol{\sigma}_{(i)}$ – вектор напряжения, действующий по площадке с нормалью $\mathbf{n}_{(i)}$. Знаки «+» в предыдущей формуле следует понимать как символы объединения, т.е. правая часть – это именно совокупность трёх пар векторов, являющаяся примером нового объекта – тензора второго ранга – тензора напряжений[67].

6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ ВЫСШИХ РАНГОВ

Из предыдущего должно быть понятно, что иногда приходится иметь дело с парами векторов, рассматриваемыми как единое целое и называемыми диадами. По определению, диада векторов – *упорядоченная* пара векторов, которая является элементом множества, представляющего собой прямое (декартово) произведение (стр. 10) двух векторных пространств $\mathbb{T}_1^{(1)}$ и $\mathbb{T}_1^{(2)}$

$$\mathcal{T} = \mathbb{T}_1^{(1)} \times \mathbb{T}_1^{(2)} = \left\{ \mathbf{ab} \,:\, \mathbf{a} \in \mathbb{T}_1^{(1)},\; \mathbf{b} \in \mathbb{T}_1^{(2)} \right\}.$$

Всюду в дальнейшем $\mathbb{T}_1^{(1)}$ и $\mathbb{T}_1^{(2)}$ считаются копиями одного и того же трёхмерного евклидова векторного пространства, элементами которого являются векторы классической физики. В этом случае $\mathbb{T}_1^{(1)}$ и $\mathbb{T}_1^{(2)}$ неразличимы и упорядоченность пары векторов означает, что

$$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}.$$

Замечание. Часто диадное (тензорное) умножение обозначают знаком $\otimes$. Однако, использование специального обозначения для тензорного умножения совсем необязательно, если, во-первых, для скалярного и векторного умножения использовать уже введённые обозначения и, во-вторых, принять **соглашение** о том, что отсутствие знака между сомножителями означает тензорное умножение. Это, по-видимому [13], является удобным и естественным,

[67] Следует обратить особое внимание на тот факт, что тензор напряжений, который был впервые введён знаменитым французским математиком О. Коши (прим. на стр. 13) в 1822 году, является самостоятельным объектом, имеет ясный физический смысл и может изучаться сам по себе. Широко распространённая точка зрения, что тензоры второго ранга являются некими операторами, переводящими что-то во что-то другое, хотя и имеет право на существование, но мало плодотворна [4].

если проанализировать известную формулу (15) векторной алгебры и аналогичные ей.

Ещё одно важное обстоятельство, заключается в том, множество диад $\mathcal{T}$ не является линейным пространством [4], так как в общем случае невозможно определить операцию суммирования диад, не выводящую за пределы множества $\mathcal{T}$.

Чтобы устранить создавшееся затруднение, вводится тензорное произведение векторных пространств. Множество $\mathbb{T}_2$ называется **тензорным произведением** $\mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_1$ векторного пространства $\mathbb{T}_1$ на себя, если элементом этого множества является любая неупорядоченная совокупность конечного числа диад (упорядоченных пар векторов)

$$\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_1 = \{\, \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n \;:\; \mathbf{a}_k,\, \mathbf{b}_k \in \mathbb{T}_1,\; (k = 1,\, 2,\, ...,\, n)\,\}\,.$$

Неупорядоченная совокупность означает, что элементы множества $\mathbb{T}_2$ равны между собой (неразличимы), если они отличаются друг от друга только порядком следования одних и тех же диад, например:

$$\mathbf{ab} + \mathbf{cd} = \mathbf{cd} + \mathbf{ab}.$$

Кроме того, необходимо, чтобы операции сложения и диадного умножения удовлетворяли свойству дистрибутивности (и слева, и справа):

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$

А также, при умножении диады на скаляр должны выполняться равенства

$$\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{ab},$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{ab} = \alpha\mathbf{ab} + \beta\mathbf{ab}.$$

Также, наличие нулевой диады, которая представляется

$$\mathbf{0} = \mathbf{00} = 0\mathbf{ab} = \mathbf{a0} = 0\mathbf{b}$$

и прибавление которой к произвольной диаде $\mathbf{ab}$ не меняет диады $\mathbf{ab}$, позволяет установить принадлежность отдельной диады множеству $\mathbb{T}_2$ и существование для любого элемента $\mathbf{L} \in \mathbb{T}_2$ противоположного элемента $\mathbf{M} \in \mathbb{T}_2$ такого, что

$$\mathbf{L} + \mathbf{P} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{P} = (-1)\mathbf{L}.$$

Введённое множество $\mathbb{T}_2$ обладает структурой линейного пространства. Как будет показано ниже, на нём может быть введена операция умножения на число и определено понятие суммы элементов, которые не выводят за пределы исходного множества $\mathbb{T}_2$.

Элементы множества $\mathbb{T}_2$ называются тензорами второго ранга и будут обозначаться преимущественно полужирными прописными буквами

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ ...,\ \mathbf{L},\ \mathbf{M},\ \mathbf{N},\ ...$$

Таким образом, **тензор второго ранга** – это неупорядоченная совокупность конечного числа упорядоченных пар векторов (диад). Отметим, что любая диада является тензором второго ранга, но тензор второго ранга может быть сведён к одной диаде только в исключительных и очень редких случаях.

Аналогично вводится тензорное произведение $\mathbb{T}_3$ трёх векторных пространств $\mathbb{T}_3 = \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_1$, элементами которого являются неупорядоченные совокупности упорядоченных троек векторов (триад), которые называются **тензорами третьего ранга**

$$^{(3)}\mathbf{A} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 + ... + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n\mathbf{c}_n.$$

По индукции вводятся тензоры четвёртого и более высоких рангов.

7 ТЕНЗОРЫ ВТОРОГО РАНГА

7.1 Действия с тензорами второго ранга

При определении алгебраических операций с тензорами второго ранга будем рассматривать тензоры, заданные суммами некоторого количества диад

$$\mathbf{L} = \sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k, \qquad \mathbf{M} = \sum_m \mathbf{c}_m\mathbf{d}_m.$$

Сложение. Суммой двух тензоров второго ранга $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ называется тензор второго ранга, содержащий все диады, входящие в $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$

$$\mathbf{L} + \mathbf{M} = \sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k + \sum_m \mathbf{c}_m\mathbf{d}_m.$$

Операция сложения обладает свойствами:
– коммутативности

$$\mathbf{L} + \mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{L};$$

– ассоциативности

$$(\mathbf{L} + \mathbf{M}) + \mathbf{N} = \mathbf{L} + (\mathbf{M} + \mathbf{N}).$$

Заметим, что складывать можно тензоры одного ранга. Кроме того, считая тензоры физическими величинами, имеющими физическую размерность, складывать можно тензоры одинаковой размерности.

Умножение на скаляр. Произведением тензора второго ранга $\mathbf{L}$ на скаляр α называется тензор второго ранга $\mathbf{A}$, в котором первые векторы всех диад, входящих в тензор $\mathbf{L}$, заменены произведением их на скаляр α

$$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{L} = \alpha\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right) = \sum_k (\alpha\mathbf{a}_k)\,\mathbf{b}_k.$$

Операция умножения обладает свойствами:

$$\alpha(\mathbf{L} + \mathbf{M}) = \alpha\mathbf{L} + \alpha\mathbf{M},$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{L} = \alpha\mathbf{L} + \beta\mathbf{L}.$$

Таким образом, определено **линейное пространство** тензоров второго ранга, обладающее многочисленными свойствами, важным из которых является наличие двух элементов: нулевого тензора и противоположного тензора. **Нулевым тензором** второго ранга называется тензор, представимый в виде нулевой диады $\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{0}$: $\mathbf{L}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{L} = \mathbf{L}$. **Тензором противоположным** тензору $\mathbf{L}$ называется тензор $\mathbf{P} = (-1)\mathbf{L}$: $\mathbf{L} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$.

Транспонирование. Тензором, транспонированным заданному тензору второго ранга $\mathbf{L}$ называется такой тензор $\mathbf{L}^{\mathrm{т}}$ также второго ранга, в котором изменён порядок сомножителей во всех диадах, входящих в $\mathbf{L}$, т.е. первый и второй векторы в каждой диаде переставлены местами

$$\mathbf{L}^{\mathrm{т}} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)^{\mathrm{т}} = \sum_k \mathbf{b}_k\mathbf{a}_k.$$

Для отдельной диады

$$\mathbf{D} = \mathbf{ab}, \qquad \mathbf{D}^{\mathrm{т}} = \mathbf{ba}.$$

Скалярное произведение тензора на вектор справа (слева). Скалярным произведением тензора $\mathbf{L}$ на вектор $\mathbf{x}$ справа (слева) называется вектор $\mathbf{c}$ (соответственно $\mathbf{d}$), который определяется следующим образом

$$\mathbf{c} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{x} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\cdot\mathbf{x} = \sum_k \mathbf{a}_k\,(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{x}\cdot\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right) = \sum_k (\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_k)\,\mathbf{b}_k.$$

В общем случае результаты скалярного умножения одного и того же тензора слева и справа на один и тот же вектор представляют собой различные векторы ($\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$), т.е. операция скалярного умножения тензора на вектор **не коммутативна**

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{L} \neq \mathbf{L}\cdot\mathbf{x}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}.$$

Заметим, что скалярное произведение тензора второго ранга на вектор представляет собой линейное преобразование векторного пространства в векторное пространство. Это обстоятельство можно использовать для определения понятия «тензор второго ранга», как это сделано в работе [АИЛ].

Векторное произведение тензора на вектор справа (слева). Векторным произведением тензора $\mathbf{L}$ на вектор $\mathbf{y}$ справа (слева) называется тензор второго ранга $\mathbf{M}$ (соответственно $\mathbf{N}$), который определяется следующим образом

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{y} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \times \mathbf{y} = \sum_k \mathbf{a}_k \left(\mathbf{b}_k \times \mathbf{y} \right),$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{y} \times \mathbf{L} = \mathbf{y} \times \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) = \sum_k \left(\mathbf{y} \times \mathbf{a}_k \right) \mathbf{b}_k.$$

В общем случае результаты векторного умножения одного и того же тензора слева и справа на один и тот же вектор представляют собой различные тензоры ($\mathbf{M} \neq \mathbf{N}$), т.е. операция векторного умножения тензора на вектор **не коммутативна**

$$\mathbf{y} \times \mathbf{L} \neq \mathbf{L} \times \mathbf{y}.$$

С другой стороны, можно показать, что

$$\mathbf{L} \times \mathbf{y} = -\left(\mathbf{y} \times \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}}, \text{ или } \mathbf{y} \times \mathbf{L}^{\mathrm{T}} = -(\mathbf{L} \times \mathbf{y})^{\mathrm{T}}, \text{ или } (\mathbf{y} \times \mathbf{L})^{\mathrm{T}} = -\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{y}.$$

Тензорное произведение тензора на вектор справа (слева). Тензорным произведением тензора $\mathbf{L}$ на вектор $\mathbf{c}$ справа (слева) называется тензор третьего ранга ${}^{(3)}\mathbf{M}$ (соответственно ${}^{(3)}\mathbf{N}$), который определяется следующим образом

$${}^{(3)}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{c} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \mathbf{c} = \sum_k \left(\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{c} \right),$$

$${}^{(3)}\mathbf{N} = \mathbf{c}\mathbf{L} = \mathbf{c} \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) = \sum_k \left(\mathbf{c} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right).$$

Операция тензорного умножения тензора на вектор так же **не коммутативна**

$$\mathbf{c}\mathbf{L} \neq \mathbf{L}\mathbf{c}.$$

Скалярное произведение (свёртка) тензоров. Скалярным произведением тензоров второго ранга $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ называется тензор второго ранга $\mathbf{N}$, который определяется следующим образом

$$\mathbf{N} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \cdot \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m \right) = \sum_k \sum_m \left[\mathbf{a}_k \left(\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{c}_m \right) \mathbf{d}_m \right].$$

Операция скалярного умножения тензора на тензор **не коммутативна**

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} \neq \mathbf{M} \cdot \mathbf{L}.$$

Транспонирование скалярного произведения нескольких тензоров определяется соотношением

$$\left(\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} \right)^{\text{т}} = \mathbf{M}^{\text{т}} \cdot \mathbf{L}^{\text{т}}, \qquad \left(\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} \right)^{\text{т}} = \mathbf{N}^{\text{т}} \cdot \mathbf{M}^{\text{т}} \cdot \mathbf{L}^{\text{т}}.$$

Заметим, что введённое таким образом скалярное произведение в некоторых работах называется внутренним произведением (например, [4]) или свёрткой тензоров, а скалярным произведением называется другая операция (о которой речь пойдёт ниже), обладающая свойствами аналогичными свойствам скалярного произведения векторов.

Векторное произведение тензора на тензор. Векторным произведением тензоров второго ранга $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ называется тензор третьего ранга ${}^{(3)}\mathbf{N}$, который определяется следующим образом

$${}^{(3)}\mathbf{N} = \mathbf{L} \times \mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \times \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m \right) = \sum_k \sum_m \left[\mathbf{a}_k \left(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_m \right) \mathbf{d}_m \right].$$

Операция векторного умножения тензора на тензор **не коммутативна**

$$\mathbf{L} \times \mathbf{M} \neq \mathbf{M} \times \mathbf{L}.$$

Тензорное произведение тензора на тензор. Тензорным произведением тензоров второго ранга $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ называется тензор четвёртого ранга ${}^{(4)}\mathbf{N}$, который определяется следующим образом

$${}^{(4)}\mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m \right) = \sum_k \sum_m \left(\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m \right).$$

Операция тензорного умножения тензора на тензор **не коммутативна**

$$\mathbf{L}\mathbf{M} \neq \mathbf{M}\mathbf{L}.$$

Двойное скалярное произведение (двойная свёртка) двух тензоров. Двойным скалярным произведением двух тензоров второго ранга $\mathbf{L}$ и

$\mathbf{M}$ называется скаляр α, который определяется следующим образом

$$\alpha = \mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\cdot\cdot\left(\sum_m \mathbf{c}_m\mathbf{d}_m\right) = \sum_k\sum_m \left[(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{c}_m)(\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{d}_m)\right].$$

Первая точка в символе $\cdot\cdot$ относится к ближайшим векторам перемножаемых диад, а вторая – к дальним векторам. Операция двойного скалярного умножения двух тензоров **коммутативна**

$$\mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{M} = \mathbf{M}\cdot\cdot\,\mathbf{L}.$$

Кроме того, можно показать, что

$$\mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\mathbf{M}^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, если двойное скалярное произведение некоторого тензора $\mathbf{L}$ на себя равно нулю, из этого совсем не следует, что тензор $\mathbf{L}$ нулевой. В этом легко можно убедиться на примере тензора представляющего собой диаду $\mathbf{L} = \mathbf{ab}$:

$$\mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{L} = (\mathbf{ab})\cdot\cdot(\mathbf{ab}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2.$$

Поэтому $\mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{L} = 0$, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, следовательно тензор $\mathbf{L}$ может быть отличен от нулевого тензора.

Двойное векторное произведение тензоров. По аналогии вводится двойное векторное произведение тензоров. Двойным векторным произведением двух тензоров второго ранга $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ называется тензор второго ранга, который определяется следующим образом

$$\mathbf{L}\times\times\,\mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\times\times\left(\sum_m \mathbf{c}_m\mathbf{d}_m\right) = \sum_k\sum_m \left[(\mathbf{b}_k\times\mathbf{c}_m)(\mathbf{a}_k\times\mathbf{d}_m)\right].$$

Первый знак векторного умножения в символе $\times\times$, относится к ближайшим векторам перемножаемых диад, а второй – к дальним векторам, при этом результат векторного умножения ближайших векторов ставится на первое место, а векторное произведение дальних векторов – на второе. При этом справедливы равенства

$$(\mathbf{L}\times\times\,\mathbf{M})^{\mathrm{T}} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\times\times\,\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}\times\times\,\mathbf{L},$$

и следствия из них

$$\mathbf{L}\times\times\,\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}\times\times\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\times\times\,\mathbf{L}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\times\times\,\mathbf{M}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Скалярно-векторное произведение тензоров определяется следующим образом:

$$\mathbf{L}\cdot\times\,\mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\cdot\times\left(\sum_m \mathbf{c}_m\mathbf{d}_m\right) = \sum_k\sum_m \left[(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{c}_m)(\mathbf{a}_k\times\mathbf{d}_m)\right].$$

Векторно-скалярное произведение тензоров определяется аналогично:

$$\mathbf{L} \times\cdot\, \mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k\right) \times\cdot \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m\right) = \sum_k \sum_m \left[(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_m)(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{d}_m)\right].$$

Заметим, что операции двойного умножения тензоров могут быть введены иначе. Например, можно считать, что первый знак умножения относится к первым векторам диад, а второй – ко вторым. Но тогда необходимо изменить обозначения [13]. Знаки двойного умножения будем располагать вертикально и считать, что верхний знак умножения относится к первым векторам диад, а нижний – ко вторым. При этом операции двойного умножения определяются следующим образом:

$$\mathbf{L} \overset{\cdot}{\cdot} \mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k\right) \overset{\cdot}{\cdot} \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m\right) = \sum_k \sum_m \left[(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{c}_m)(\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{d}_m)\right],$$

$$\mathbf{L} \overset{\times}{\times} \mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k\right) \overset{\times}{\times} \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m\right) = \sum_k \sum_m \left[(\mathbf{a}_k \times \mathbf{c}_m)(\mathbf{b}_k \times \mathbf{d}_m)\right],$$

$$\mathbf{L} \overset{\cdot}{\times} \mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k\right) \overset{\cdot}{\times} \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m\right) = \sum_k \sum_m \left[(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{c}_m)(\mathbf{b}_k \times \mathbf{d}_m)\right],$$

$$\mathbf{L} \overset{\times}{\cdot} \mathbf{M} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k\right) \overset{\times}{\cdot} \left(\sum_m \mathbf{c}_m \mathbf{d}_m\right) = \sum_k \sum_m \left[(\mathbf{a}_k \times \mathbf{c}_m)(\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{d}_m)\right].$$

Легко получить связи этих произведений с введёнными выше:

$$\mathbf{L} \overset{\cdot}{\cdot} \mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot\cdot\, \mathbf{M} = \mathbf{L} \cdot\cdot\, \mathbf{M}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{L} \overset{\times}{\times} \mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \times\times\, \mathbf{M} = \left(\mathbf{L} \times\times\, \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{L} \overset{\cdot}{\times} \mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot\times\, \mathbf{M} = \mathbf{L} \times\cdot\, \mathbf{M}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{L} \overset{\times}{\cdot} \mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \times\cdot\, \mathbf{M} = \mathbf{L} \cdot\times\, \mathbf{M}^{\mathrm{T}}.$$

Выбор той или иной формы определения операций двойного умножения связан только с удобством их использования в алгебраических преобразованиях. Выбор обозначений операций двойного умножения – горизонтальных или вертикальных – дело соглашений. Следует отметить, что операция $\mathbf{L} \overset{\cdot}{\cdot} \mathbf{M}$ по своим свойствам сходна с операцией скалярного умножения векторов. Во-первых, результат операции – скалярная величина; во-вторых, эта операция коммутативна $\mathbf{L} \overset{\cdot}{\cdot} \mathbf{M} = \mathbf{M} \overset{\cdot}{\cdot} \mathbf{L}$, в-третьих из условия $\mathbf{L} \overset{\cdot}{\cdot} \mathbf{L} = 0$ следует, что тензор $\mathbf{L}$ – нулевой. В последнем легко можно убедиться на примере тензора представляющего собой диаду $\mathbf{L} = \mathbf{ab}$:

$$\mathbf{L} \cdot\cdot \mathbf{L} = (\mathbf{ab}) \cdot\cdot (\mathbf{ab}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}).$$

Поэтому $\mathbf{L} \cdot\cdot \mathbf{L} = 0$, если вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо вектор $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; в любом случае тензор $\mathbf{L} = \mathbf{0}$.

7.2 Операции умножения на примере простейших тензоров второго ранга – диад

Используя простейшие представления тензоров $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ в виде диад

$$\mathbf{L} = \mathbf{ab}, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{xy},$$

приведём упрощённые определения операций умножения

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}, \tag{16}$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{ab}, \tag{17}$$

$$\mathbf{L} \times \mathbf{c} = (\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{ab} \times \mathbf{c}, \tag{18}$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{L} = \mathbf{c} \times (\mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{ab}, \tag{19}$$

$$\mathbf{Lc} = (\mathbf{ab})\,\mathbf{c} = \mathbf{abc}, \tag{20}$$

$$\mathbf{cL} = \mathbf{c}\,(\mathbf{ab}) = \mathbf{cab}, \tag{21}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{xy}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\,\mathbf{y}, \tag{22}$$

$$\mathbf{L} \times \mathbf{M} = (\mathbf{ab}) \times (\mathbf{xy}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{x})\,\mathbf{y}, \tag{23}$$

$$\mathbf{LM} = (\mathbf{ab})\,(\mathbf{xy}) = \mathbf{abxy}, \tag{24}$$

$$\mathbf{L} \cdot\cdot \mathbf{M} = (\mathbf{ab}) \cdot\cdot\, (\mathbf{xy}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})\,, \tag{25}$$

$$\mathbf{L} \times\times \mathbf{M} = (\mathbf{ab}) \times\times\, (\mathbf{xy}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{x})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{y})\,, \tag{26}$$

$$\mathbf{L} \cdot\times \mathbf{M} = (\mathbf{ab}) \cdot\times\, (\mathbf{xy}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{y})\,, \tag{27}$$

$$\mathbf{L} \times\cdot \mathbf{M} = (\mathbf{ab}) \times\cdot\, (\mathbf{xy}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{x})\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})\,. \tag{28}$$

7.3 Некоторые формулы двойного умножения

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\cdot\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{d}\right)=\mathbf{c}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{d}=\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)=\\=\mathbf{d}\cdot(\mathbf{L}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{d}\cdot\mathbf{L})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{L}\cdot\cdot\;(\mathbf{cd})=(\mathbf{cd})\cdot\cdot\,\mathbf{L},\end{aligned}\tag{29}$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{L}\times\mathbf{d})=(\mathbf{c}\times\mathbf{L})\times\mathbf{d}=\mathbf{c}\times\mathbf{L}\times\mathbf{d}=-\mathbf{L}\times\times\;(\mathbf{dc})=-(\mathbf{dc})\times\times\,\mathbf{L},\tag{30}$$

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{L}\times\mathbf{d})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{L})\times\mathbf{d}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{L}\times\mathbf{d}=\mathbf{L}\times\cdot\;(\mathbf{dc})=-(\mathbf{dc})\cdot\times\,\mathbf{L},\tag{31}$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{L}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{c}\times\mathbf{L})\cdot\mathbf{d}=\mathbf{c}\times\mathbf{L}\cdot\mathbf{d}=-\mathbf{L}\cdot\times\;(\mathbf{dc})=(\mathbf{dc})\times\cdot\,\mathbf{L},\tag{32}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{M})\cdot\cdot\,\mathbf{N}=(\mathbf{M}\cdot\mathbf{N})\cdot\cdot\,\mathbf{L}=(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L})\cdot\cdot\,\mathbf{M}=\\=\mathbf{M}\cdot\cdot\;(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L})=\mathbf{N}\cdot\cdot\;(\mathbf{L}\cdot\mathbf{M})=\mathbf{L}\cdot\cdot\;(\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}).\end{aligned}\tag{33}$$

7.4 Свойства и характеристики тензоров второго ранга

След тензора. Следом тензора второго ранга $\mathbf{L}=\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k$ называется скаляр, который обозначается[68] $\operatorname{tr}\mathbf{L}$ и определяется по формуле

$$\operatorname{tr}\mathbf{L}=\sum_k \mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_k.$$

След диады равен скалярному произведению векторов, составляющих диаду,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{ab})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Эта важная характеристика тензора второго ранга является инвариантом и обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)=\operatorname{tr}\mathbf{L},$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{M})=\operatorname{tr}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{L})=\operatorname{tr}\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{M}.$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{N})=\operatorname{tr}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{L})=\operatorname{tr}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}),$$

т.е. след скалярного произведения тензоров не меняется при циклической перестановке сомножителей и при транспонировании тензора.

Векторный инвариант тензора. Векторным инвариантом тензора второго ранга $\mathbf{L}$ называется вектор, который обозначается $\mathbf{L}_\times$ и определяется по формуле

$$\mathbf{L}_\times=\sum_k \mathbf{a}_k\times\mathbf{b}_k.\tag{34}$$

Из определений:

$$(\mathbf{L}+\mathbf{M})_\times=\mathbf{L}_\times+\mathbf{M}_\times,\tag{35}$$

[68] от англ. *trace* – след. Наряду с таким обозначением используется обозначение $\operatorname{Sp}\mathbf{L}$, происходящее от нем. *Spur* – след.

$$\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)_{\times} = -\mathbf{L}_{\times}. \tag{36}$$

С понятием векторного инварианта связано понятие вектора сопутствующего тензору. **Вектор сопутствующий тензору $\mathbf{L}$** обозначается $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{L}}$ и определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)_{\times} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{L}_{\times}. \tag{37}$$

Сопутствующий вектор обладает свойствами векторного инварианта: сопутствующий вектор суммы тензоров равен сумме сопутствующих векторов каждого тензора; сопутствующий вектор транспонированного тензора противоположно направлен сопутствующему вектору исходного тензора и равен ему по модулю.

Определитель (детерминант) тензора. Важное значение имеет характеристика тензоров, называемая определителем или детерминантом. Как уже отмечалось, с помощью тензора второго ранга может быть задано линейное отображение векторного пространства на векторное пространство. Причём из курса линейной алгебры известно, что любое линейное отображение представимо в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{x}, \tag{38}$$

где $\mathbf{L}$ – тензор второго ранга. Среди линейных отображений важную роль играют однозначно обратимые отображения. Из курса линейной алгебры также известно, что линейное отображение (38) обратимо тогда и только тогда, когда образы трёх линейно независимых векторов являются линейно независимыми, т.е. для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ таких, что

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \neq 0,$$

их образы $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}$, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{c}$ удовлетворяют условию

$$\left(\hat{\mathbf{a}}\times\hat{\mathbf{b}}\right)\cdot\hat{\mathbf{c}} \neq 0.$$

Оказывается при этом, что отношение объёма параллелепипеда, построенного на образах трёх линейно независимых векторов к объёму параллелепипеда, построенного на самих линейно независимых векторах, для данного тензора есть величина одинаковая для любых линейно независимых векторов (доказательство этого утверждения может быть получено прямым вычислением смешанного произведения образов линейно независимых векторов в координатном виде; координаты тензоров будут рассмотрены ниже). Это отношение

$$\det\mathbf{L} = \frac{[(\mathbf{L}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{L}\cdot\mathbf{b})]\cdot(\mathbf{L}\cdot\mathbf{c})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}} \tag{39}$$

называется определителем тензора второго ранга.

Для любых тензоров справедливы равенства

$$\det \mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{L}, \tag{40}$$

$$\det (\mathbf{L} \cdot \mathbf{M}) = \det \mathbf{L} \ \det \mathbf{M}. \tag{41}$$

Заметим, что для однозначной обратимости линейного отображения (38) необходимо и достаточно, чтобы определитель отображающего тензора был отличен от нуля $\det \mathbf{L} \neq 0$. Тензор, определитель которого равен нулю, называется **особенным** или **вырожденным**. Соответственно, тензор, определитель которого не равен нулю, называется **неособенным** или **невырожденным**.

Единичный тензор. Среди тензоров второго ранга есть единственный тензор $\mathbf{E}$, для которого справедливо равенство

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{x}, \tag{42}$$

при этом $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\mathrm{T}}$. Такой тензор называется единичным.

Если в рассматриваемом трёхмерном пространстве выбран основной базис $\mathbf{r}_k$ и построен взаимный базис $\mathbf{r}^k$, то единичный тензор может быть представлен в виде суммы диад следующим образом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_k. \tag{43}$$

В этом легко убедиться непосредственной проверкой по определению. Например,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \left(\mathbf{r}_k \mathbf{r}^k\right) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}_k \left(\mathbf{r}^k \cdot \mathbf{x}\right) = \mathbf{r}_k x^k = x^k \mathbf{r}_k = \mathbf{x}.$$

Здесь использовано определение скалярного произведения тензора второго ранга на вектор справа, определение координаты вектора и разложение вектора по векторам базиса.

След единичного тензора равен 3 (размерности пространства):

$$\operatorname{tr} \mathbf{E} = \operatorname{tr} \left(\mathbf{r}_k \mathbf{r}^k\right) = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}^k = \delta_k^k = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3. \tag{44}$$

Векторный инвариант (соответственно и сопутствующий вектор) единичного тензора равен нулю

$$\mathbf{E}_\times = 0, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \tag{45}$$

Определитель единичного тензора равен единице, т.е.

$$\det \mathbf{E} = 1. \tag{46}$$

Для единичного тензора справедливы равенства

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{E} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{L}, \qquad \mathbf{L} \cdot\cdot\, \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{L} = \operatorname{tr} \mathbf{L}, \tag{47}$$

где $\mathbf{L}$ – произвольный тензор. Кроме того, для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливы тождества

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{E})_{\times}=(\mathbf{E}\times\mathbf{a})_{\times}=-2\mathbf{a}, \tag{48}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{E}\times\mathbf{b}=\mathbf{ba}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\mathbf{E}, \tag{49}$$

Обратный тензор. Для любого неособенного тензора $\det\mathbf{L}\neq 0$ существует единственный обратный тензор, обозначаемый $\mathbf{L}^{-1}$, который удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{L}^{-1}\cdot\mathbf{L}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^{-1}=\mathbf{E}. \tag{50}$$

Для обратного тензора имеем:

$$\det\left(\mathbf{L}^{-1}\right)=\frac{1}{\det\mathbf{L}}, \tag{51}$$

$$(\mathbf{L}\cdot\mathbf{M})^{-1}=\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{L}^{-1},\qquad (\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{N})^{-1}=\mathbf{N}^{-1}\cdot\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{L}^{-1}. \tag{52}$$

Для любого неособенного тензора и любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо равенство

$$(\mathbf{L}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{L}\cdot\mathbf{b})=\det\mathbf{L}\left(\mathbf{L}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,. \tag{53}$$

Тензор алгебраических дополнений (взаимный тензор) [10]. Тензором алгебраических дополнений тензора второго ранга $\mathbf{L}$ называется тензор[69]

$$\overset{\times}{\mathbf{L}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_k\times\mathbf{r}_m\right)\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}^k\right)\times\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}^m\right), \tag{54}$$

представленный через диады векторов $\mathbf{r}_k\times\mathbf{r}_m$ и $\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}^k\right)\times\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}^m\right)$, где $\mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}^n$ – векторы основного и взаимного базисов трёхмерного векторного пространства.

Если тензор $\mathbf{L}$ имеет обратный тензор ($\det\mathbf{L}\neq 0$), то взаимный тензор может быть определён соотношениями:

$$\overset{\times}{\mathbf{L}}=(\det\mathbf{L})\,\mathbf{L}^{-1},\qquad \mathbf{L}^{-1}=\frac{\overset{\times}{\mathbf{L}}}{\det\mathbf{L}},\qquad \mathbf{L}\cdot\overset{\times}{\mathbf{L}}=(\det\mathbf{L})\,\mathbf{E}. \tag{55}$$

Отметим ещё соотношения:

$$\overset{\times}{\overbrace{\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}}=\overset{\times}{\mathbf{L}}{}^{\mathrm{T}},\qquad \overset{\times}{\overbrace{\mathbf{L}^{-1}}}=\overset{\times}{\mathbf{L}}{}^{-1}=\frac{\mathbf{L}}{\det\mathbf{L}},\qquad \overset{\times}{\overset{\times}{\mathbf{L}}}=(\det\mathbf{L})\,\mathbf{L},$$

$$\overset{\times}{\overbrace{\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}}}=\overset{\times}{\mathbf{M}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{L}},\qquad \overset{\times}{\overbrace{\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}}}=\overset{\times}{\mathbf{N}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{M}}\cdot\overset{\times}{\mathbf{L}}, \tag{56}$$

[69] Смешанные координаты взаимного тензора $\overset{\times}{\mathbf{L}}$ равны соответствующим адъюнктам (от лат. *adjuncta* – присоединённая, сопряжённая; в математике – то же, что алгебраическое дополнение) матрицы смешанных координат транспонированного тензора второго ранга $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$. О координатах тензоров – ниже.

$$\det\left(\overset{\times}{\mathbf{Q}}\right) = \left(\det\mathbf{Q}\right)^2.$$

С помощью понятий взаимного тензора и следа тензора можно записать **общую формулу для детерминанта суммы двух произвольных *трёхмерных* тензоров $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$** [18]

$$\det\left(\mathbf{L}+\mathbf{M}\right) = \det\mathbf{L} + \operatorname{tr}\left(\overset{\times}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{M}\right) + \operatorname{tr}\left(\mathbf{L}\cdot\overset{\times}{\mathbf{M}}\right) + \det\mathbf{M}. \tag{57}$$

В частном случае, если тензор $\mathbf{M}=\lambda\,\mathbf{E}$, то

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbf{L}-\lambda\,\mathbf{E}\right) = \det\mathbf{L} + \operatorname{tr}\left[\overset{\times}{\mathbf{L}}\cdot\left(-\lambda\,\mathbf{E}\right)\right] + {}\\ + \operatorname{tr}\left[\mathbf{L}\cdot\overset{\times}{\overbrace{\left(-\lambda\,\mathbf{E}\right)}}\right] + \det\left(-\lambda\,\mathbf{E}\right) = \\ = \det\mathbf{L} - \operatorname{tr}\overset{\times}{\mathbf{L}}\,\lambda + \operatorname{tr}\mathbf{L}\,\lambda^2 - \lambda^3.\end{aligned} \tag{58}$$

Если $\mathbf{M}$ равно диаде $\mathbf{M}=\mathbf{ab}$, то, поскольку

$$\det\left(\mathbf{ab}\right)=0, \qquad \overset{\times}{\overbrace{\mathbf{ab}}}=0,$$

из (57) получаем

$$\det\left(\mathbf{L}+\mathbf{ab}\right) = \det\mathbf{L} + \mathbf{b}\cdot\overset{\times}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{a}.$$

Симметричные тензоры. Тензор второго ранга называется симметричным, если он совпадает со своим транспонированным тензором, т.е.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}.$$

Для симметричных тензоров операция скалярного умножения тензора на вектор является коммутативной

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{S}.$$

Симметричным является единичный тензор $\mathbf{E}$. Кроме того, для любого симметричного тензора его векторный инвариант (а, следовательно, и сопутствующий вектор) равен нулю

$$\mathbf{S}_\times = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{S}} = \mathbf{0}, \tag{59}$$

и, наоборот, если векторный инвариант (сопутствующий вектор) некоторого тензора равен нулю, то такой тензор является симметричным.

Если тензор $\mathbf{S}$ симметричен, то таковы же будут обратный тензор $\mathbf{S}^{-1}$ и тензор алгебраических дополнений $\overset{\times}{\mathbf{S}}$.

Шаровой тензор. Симметричный тензор $\alpha\mathbf{E}$, где α – действительное число, называется шаровым[70] .

Девиатор. Симметричный тензор, след которого равен нулю, называется девиатором[71] ($\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}, \operatorname{tr}\mathbf{L} = 0$).

Произвольный симметричный тензор $\mathbf{S}$ можно представить в виде суммы шарового тензора и девиатора. Такое разложение имеет вид

$$\mathbf{S} = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\mathbf{E} + \operatorname{dev}\mathbf{S}. \tag{60}$$

Здесь первое слагаемое в правой части представляет собой шаровой тензор по определению, второе слагаемое девиатор симметричного тензора $\mathbf{S}$

$$\operatorname{dev}\mathbf{S} = \mathbf{S} - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\mathbf{E}. \tag{61}$$

Убедимся, что $\operatorname{tr}(\operatorname{dev}\mathbf{S}) = 0$. Из соотношения $\operatorname{tr}\mathbf{L} = \mathbf{E}\cdot\cdot\,\mathbf{L}$

$$\operatorname{tr}(\operatorname{dev}\mathbf{S}) = \mathbf{E}\cdot\cdot\,(\operatorname{dev}\mathbf{S}) = \mathbf{E}\cdot\cdot\,\left[\mathbf{S} - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\mathbf{E}\right] =$$
$$= \mathbf{E}\cdot\cdot\,\mathbf{S} - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\mathbf{E}\cdot\cdot\,\mathbf{E} = \operatorname{tr}\mathbf{S} - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)3 = 0.$$

Антисимметричные (кососимметричные) тензоры. Тензор $\mathbf{A}$ называется антисимметричным (кососимметричным), если справедливо равенство

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}. \tag{62}$$

Для любого вектора $\mathbf{x}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}. \tag{63}$$

След и определитель любого антисимметричного тензора равны нулю

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = 0, \qquad \det\mathbf{A} = 0. \tag{64}$$

Любой антисимметричный тензор $\mathbf{A}$ представим в виде

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}, \tag{65}$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} = -\dfrac{1}{2}\mathbf{A}_{\times}$ – вектор сопутствующий антисимметричному тензору $\mathbf{A}$.

Взаимный тензор любого антисимметричного тензора, по (54), представляет собой диаду сопутствующих этому тензору векторов

$$\overset{\times}{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}. \tag{66}$$

[70] геометрическая поверхность, соответствующая такому тензору, представляет собой сферу.
[71] от англ. *deviation* – отклонение (от шарового тензора).

Важным фактом является то, что двойное скалярное произведение любого симметричного тензора $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ и любого антисимметричного тензора $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ равно нулю

$$\mathbf{S} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{S} = 0, \tag{67}$$

из которого следует, что след скалярного произведения симметричного и антисимметричного тензора равен нулю

$$\operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}) = 0. \tag{68}$$

Кроме того, легко доказать, что для любого антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ и любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = 0. \tag{69}$$

Симметрирование и альтернирование. Любой тензор второго ранга может быть однозначно представлен в виде разложения на симметричный и антисимметричный тензоры

$$\mathbf{L} = \overset{(S)}{\mathbf{L}} + \overset{[A]}{\mathbf{L}}, \tag{70}$$

где

$$\overset{(S)}{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right), \tag{71}$$

называется симметричной частью тензора $\mathbf{L}$, а сама операция называется симметрированием тензора,

$$\overset{[A]}{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right), \tag{72}$$

называется антисимметричной частью тензора $\mathbf{L}$, а сама операция называется альтернированием тензора.

Заметим, что по формуле (57) определитель суммы двух тензоров, один из которых представляет собой произвольный симметричный тензор $\mathbf{S}$, а второй $\mathbf{A}$ – произвольный антисимметричный тензор, определяется соотношением

$$\det(\mathbf{S} + \mathbf{A}) = \det \mathbf{S} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}, \tag{73}$$

Разложение произвольного тензора второго ранга на три составляющих. Используя соотношения (60) и (70) любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы трёх тензоров – шарового тензора, девиатора и антисимметричного тензора:

$$\mathbf{L} = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{L}\right)\mathbf{E} + \operatorname{dev}\mathbf{L} + \overset{[A]}{\mathbf{L}}. \tag{74}$$

Ортогональные тензоры. Как уже отмечалось, произвольный тензор второго ранга представляет собой тензор линейного отображения векторного пространства в векторное пространство. В общем случае образы векторов исходного пространства могут изменять длину (деформироваться: сжиматься или растягиваться) и направление (поворачиваться) по отношению к своим прообразам. Рассмотрим специальный класс линейных отображений, не изменяющих длин векторов, т.е.

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{x}, \tag{75}$$

удовлетворяющих условию

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{x}|. \tag{76}$$

Из этого условия следует

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \tag{77}$$

из которого выясняется необходимость выполнения равенства

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = \mathbf{E}. \tag{78}$$

Равенство (78) обеспечивает при преобразовании не только сохранение длин векторов, но и углов между векторами. Пусть $\mathbf{a} = \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{x}$ и $\mathbf{b} = \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{y}$, тогда при выполнении (78) получим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \tag{79}$$

Назовём **ортогональным тензором** такой тензор, транспонированный к которому совпадает с обратным к нему, т.е.

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1}. \tag{80}$$

Множество ортогональных тензоров непусто, т.к. единичный тензор является ортогональным тензором

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}^{-1}, \tag{81}$$

и это множество образует **группу**[72].

Ортогональный тензор невырожденный, т.е. для него существует обратный, т.к. транспонированный тензор существует всегда. При этом

$$\det \boldsymbol{\mathcal{O}} = \pm 1, \tag{82}$$

так как

$$\det \mathbf{E} = \det \left(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} \right) = (\det \boldsymbol{\mathcal{O}})^2 = 1. \tag{83}$$

[72] **Группа** (от нем. *Gruppe*, фр. *groupe* – совокупность чего-либо) – непустое множество $\mathcal{G}$ с заданной на нём бинарной операцией $\circ$, удовлетворяющей следующим аксиомам: 1) ассоциативность – $\forall a, b, c \in \mathcal{G} : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$; 2) наличие нейтрального (единичного) элемента – $\exists e \in \mathcal{G},\ \forall a \in \mathcal{G} : e \circ a = a \circ e = a$; 3) наличие обратного элемента – $\forall a \in \mathcal{G},\ \exists a^{-1} \in \mathcal{G} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Таким образом, множество ортогональных тензоров можно разбить на два подмножества. Первое подмножество $\det \boldsymbol{\mathcal{P}} = +1$ так же образует группу, которая называется собственно ортогональной группой, а её элементы называются собственно ортогональными тензорами или **тензорами поворота**. Второе подмножество $\det \boldsymbol{\mathcal{Z}} = -1$ не образует группу; его элементы называют несобственно ортогональными тензорами и их можно представить в виде произведения

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}} = (-\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}, \qquad \det \boldsymbol{\mathcal{Z}} = -1, \qquad \det \boldsymbol{\mathcal{P}} = +1. \tag{84}$$

Ортогональный тензор $\boldsymbol{\mathcal{O}} = -\mathbf{E}$ называется **тензором инверсии**.

При действии на тройку линейно независимых векторов тензором, принадлежащим первому подмножеству, правая переводится в правую, левая – в левую. При действии на ту же тройку тензором, принадлежащим второму подмножеству, правая – в левую, левая – в правую.

Любой ортогональный тензор может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \mathbf{e}_k \mathbf{r}^k = \mathbf{e}^k \mathbf{r}_k, \tag{85}$$

где $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}^k$ – образы линейно независимых троек векторов соответственно $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{r}^k$

$$\mathbf{e}_k = \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{r}_k, \qquad \mathbf{e}^k = \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{r}^k.$$

По **теореме Эйлера** [4] любой собственно ортогональный тензор отличный от единичного представим в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{mm} + \cos\varphi\,(\mathbf{E} - \mathbf{mm}) + \sin\varphi\,\mathbf{m} \times \mathbf{E}, \ -\pi < \varphi < \pi, \tag{86}$$

где $\mathbf{m}$ – единичный (орт) и неподвижный вектор тензора $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, он определяет прямую в пространстве, называемую осью поворота; φ – угол поворота, который считается положительным, если поворот при взгляде с конца вектора $\mathbf{m}$ происходит против хода часовой стрелки, при этом угол φ равен углу между проекциями векторов $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{x}$ на плоскость ортогональную оси поворота, но не между самими векторами.

Положительно определённый тензор. Как уже отмечалось, понятие тензора может быть введено через линейное отображение. Другой способ определения понятия тензора исторически сложился при исследовании полилинейных форм. В частности, через тензор второго ранга представляется билинейная форма. **Билинейной формой** называется функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ставящая в соответствие двум произвольным векторам $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ скаляр и являющуюся линейной по каждому своему аргументу. Любую билинейную форму можно однозначно представить с помощью тензора второго ранга

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}, \tag{87}$$

причём $\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}$.

Если в (87) положить $\mathbf{y}=\mathbf{x}$, получим **квадратичную форму**

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}, \tag{88}$$

которая определяется только симметричной частью тензора $\mathbf{B}$, т.к. для любого антисимметричного тензора квадратичная форма равна нулю (69), т.е. различным тензорам может соответствовать одна и та же квадратичная форма, если их симметричные части совпадают.

Симметричный тензор $\mathbf{S}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ называется **положительно определённым**, если для любого вектора $\mathbf{x}$, исключая нулевой вектор $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, справедливо неравенство

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}>0. \tag{89}$$

Геометрически положительная определённость тензора $\mathbf{S}$ означает, что угол, образуемый любым вектором $\mathbf{x}$ и вектором $\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}$, полученным из него путём действия тензора $\mathbf{S}$, должен быть острым (т.к. скалярное произведение $\mathbf{x}$ на $\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}$, равное $\mathbf{x}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}$, положительно).

Если симметричный тензор $\mathbf{S}$ положительной определён, то таковыми же будут обратный тензор $\mathbf{S}^{-1}$ и тензор алгебраических дополнений $\overset{\times}{\mathbf{S}}$.

Полярное разложение тензора. Любой неособенный тензор второго ранга $\mathbf{L}$ может быть единственным образом представлен в виде скалярного произведения симметричного положительно определённого тензора на ортогональный тензор и наоборот:

$$\mathbf{L}=\boldsymbol{\mathcal{O}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}=\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}}, \tag{90}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ – ортогональный тензор, $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ – симметричные положительно определённые тензоры, называемые соответственно правым и левым тензорами искажения

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1},\qquad \boldsymbol{\mathcal{U}}=\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}\cdot\mathbf{x}>0,\qquad \boldsymbol{\mathcal{U}}=\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\mathbf{x}>0.$$

Представление (90) называется полярным разложением тензора второго ранга. Это название связано с полярным представлением комплексного числа z:

$$z=|z|e^{i\varphi},$$

в котором положительное число $|z|$ является аналогом положительно определённого тензора $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, а величина $e^{i\varphi}$, описывающая поворот комплексной плоскости на угол φ, соответствует ортогональному тензору $\boldsymbol{\mathcal{O}}$.

Тензоры искажения связаны с исходным тензором $\mathbf{L}$ соотношениями

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}}=\boldsymbol{\mathcal{V}}^{2}, \tag{91}$$

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} = \boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}^2, \tag{92}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{U}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}}. \tag{93}$$

Ортогональный тензор определяется по формулам

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\mathcal{U}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{V}}^{-1} \cdot \mathbf{L}. \tag{94}$$

В работе [5] приведено доказательство теоремы о полярном разложении.

С некоторыми оговорками полярное разложение может быть применено и к особенным тензорам $\mathbf{L}$ ($\det \mathbf{L} = 0$). Такие тензоры тоже могут быть представлены в виде (90), в котором симметричные тензоры $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ однозначно определяются по формулам (91)-(93), но являются положительно полуопределёнными

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mathcal{U}} \cdot \mathbf{x} \geqslant 0, \qquad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}} \cdot \mathbf{x} \geqslant 0,$$

ортогональный же тензор $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ определяется неоднозначно.

Примером такого разложения может служить представление нулевого тензора $\mathbf{0}$ в виде $\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – положительно полуопределённый тензор, $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ – произвольный ортогональный тензор.

Заметим, что определение тензоров искажения по формулам (91), (92) требует извлечения корня квадратного из тензора, другими словами необходима операция возведения тензора в дробную степень (возведение в целую степень определяется скалярным произведением тензоров). Для однозначного определения такой операции используется так называемое спектральное разложение тензора.

Собственные числа (главные значения) и собственные векторы (главные направления) тензора. Возвращаясь к трактовке тензора второго ранга как оператора, переводящего вектор в некоторый другой вектор, кроме рассмотренного вопроса о сохранении длин и углов (т.е. изменении только направлений) при преобразовании векторов, поставим вопрос о сохранении направления преобразуемых векторов с возможным изменением длины. Ответ на этот вопрос математически сводится к решению векторного уравнения.

По тензору второго ранга $\mathbf{Q}$ определяются левые и правые векторы $\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}}$ и $\overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}}$, сохраняющие направления при заданном преобразовании векторного пространства

$$\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q} = \overset{\mathrm{L}}{\lambda}\, \overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}}, \qquad \mathbf{Q} \cdot \overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}} = \overset{\mathrm{R}}{\lambda}\, \overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}}. \tag{95}$$

Заметим, что наряду с векторами $\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}}$ и $\overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}}$ этим векторным равенствам (95) удовлетворяют соответственно и любые векторы $\alpha\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}}$ и $\beta\overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}}$ (α и β – произвольные скаляры). Заменяя теперь векторы $\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}}$ и $\overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}}$ выражениями $\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{E} \cdot \overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}}$

и перенося все слагаемые в левую часть каждого уравнения в (95), получаем

$$\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}} \cdot \left(\mathbf{Q} - \overset{\mathrm{L}}{\lambda}\,\mathbf{E}\right) = \mathbf{0}, \qquad \left(\mathbf{Q} - \overset{\mathrm{R}}{\lambda}\,\mathbf{E}\right) \cdot \overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}} = \mathbf{0}.$$

Эти векторные уравнения образуют однородные системы линейных алгебраических уравнений, которые имеют нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определители ("характеристические детерминанты") этих систем равны нулю, т.е.

$$\det\left(\mathbf{Q} - \overset{\mathrm{L}}{\lambda}\,\mathbf{E}\right) = 0, \qquad \det\left(\mathbf{Q} - \overset{\mathrm{R}}{\lambda}\,\mathbf{E}\right) = 0.$$

откуда следует, что $\overset{\mathrm{L}}{\lambda} = \overset{\mathrm{R}}{\lambda} = \lambda$.

Таким образом левые и правые векторы тензора $\mathbf{Q}$, сохраняющие своё направление при преобразовании векторного пространства, определяются из соотношений

$$\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q} = \lambda\,\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{e}}, \qquad \mathbf{Q} \cdot \overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}} = \lambda\,\overset{\mathrm{R}}{\mathbf{e}}, \tag{96}$$

а $\boldsymbol{\lambda}$ является корнем уравнения третьей степени

$$\det\left(\mathbf{Q} - \lambda\,\mathbf{E}\right) = 0, \tag{97}$$

в котором левая часть представляет собой по формуле (58) полином третьей степени

$$P(\lambda) = \det\mathbf{Q} - \operatorname{tr}\overset{\times}{\mathbf{Q}}\,\lambda + \operatorname{tr}\mathbf{Q}\,\lambda^2 - \lambda^3, \tag{98}$$

и называется **определяющим или характеристическим полиномом**, а само уравнение (97), которое по (98) принимает вид

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}\mathbf{Q}\,\lambda^2 - \operatorname{tr}\overset{\times}{\mathbf{Q}}\,\lambda + \det\mathbf{Q} = 0, \tag{99}$$

называется **определяющим или характеристическим уравнением**. Коэффициенты характеристического полинома и, естественно, характеристического уравнения $\operatorname{tr}\mathbf{Q}$, $\operatorname{tr}\overset{\times}{\mathbf{Q}}$, $\det\mathbf{Q}$ являются инвариантами тензора $\mathbf{Q}$. Обозначим коэффициенты характеристического уравнения

$$I_1(\mathbf{Q}) = \operatorname{tr}\mathbf{Q}, \qquad I_2(\mathbf{Q}) = \operatorname{tr}\overset{\times}{\mathbf{Q}}, \qquad I_3(\mathbf{Q}) = \det\mathbf{Q}. \tag{100}$$

Корни уравнения третьей степени $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$ называются **собственными или главными значениями тензора $\mathbf{Q}$**. Инвариантность коэффициентов характеристического уравнения (99) означает инвариантность главных значений $\lambda_{(k)}$ тензора $\mathbf{Q}$, они также сохраняют независимые от выбора системы координат значения. Согласно основной теореме алгебры характеристический полином представим через его корни

$$P(\lambda) = -\left(\lambda - \lambda_{(1)}\right)\left(\lambda - \lambda_{(2)}\right)\left(\lambda - \lambda_{(3)}\right). \tag{101}$$

Это позволяет выразить инварианты тензора $\mathbf{Q}$ через его главные значения

$$\begin{aligned} &I_1(\mathbf{Q}) = \operatorname{tr}\mathbf{Q} = \lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \lambda_{(3)}, \\ &I_2(\mathbf{Q}) = \operatorname{tr}\overset{\times}{\mathbf{Q}} = \lambda_{(1)}\lambda_{(2)} + \lambda_{(2)}\lambda_{(3)} + \lambda_{(3)}\lambda_{(1)}, \\ &I_3(\mathbf{Q}) = \det\mathbf{Q} = \lambda_{(1)}\lambda_{(2)}\lambda_{(3)}. \end{aligned} \tag{102}$$

Кроме того, очевидно, что $\lambda_{(k)}$ являются также собственными значениями транспонированного тензора $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$.

Правые и левые векторы тензора $\mathbf{Q}$, соответствующие собственным значениям $\lambda_{(k)}$, называются **собственными векторами, главными осями или главными направлениями** тензора $\mathbf{Q}$. Будем обозначать их соответственно $\mathbf{e}_{(k)}$ и $\mathbf{e}^{(k)}$. По (96) они определяются из векторных уравнений

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_{(k)} = \lambda_{(k)}\ \mathbf{e}_{(k)}, \qquad \mathbf{e}^{(k)}\cdot\mathbf{Q} = \lambda_{(k)}\ \mathbf{e}^{(k)}. \tag{103}$$

Здесь нет суммирования по k (индекс не является немым, т.к. входит и в левую и в правую части равенств).

Заметим, что для корней характеристического уравнения существуют две возможности: во-первых, все главные значения вещественные; во-вторых, два главных значения комплексно сопряжённые, а третье – вещественное. Комплексно сопряжённым главным значениям соответствуют комплексно сопряжённые собственные векторы. Это следует из (103), поскольку тензор $\mathbf{Q}$ вещественный. В случае вещественности собственных значений, очевидно, могут иметь место только три следующие возможности: 1) все собственные значения тензора $\mathbf{Q}$ различны; 2) тензор имеет два различных собственных значения и 3) все собственные значения тензора совпадают.

Будем считать вначале, что все главные значения вещественные и различные (некратные). Покажем, во-первых, что правые (левые) собственные векторы линейно независимы, т.е. соотношение (записанное для правых векторов)

$$c_1\mathbf{e}_{(1)} + c_2\mathbf{e}_{(2)} + c_3\mathbf{e}_{(3)} = 0 \tag{104}$$

выполняется тогда, когда постоянные c_k все равны нулю одновременно. Скалярно умножая это векторное равенство слева на тензор $\mathbf{Q}$, а затем полученное равенство – ещё раз на $\mathbf{Q}$ и используя (103), получим

$$\lambda_{(1)}c_1\mathbf{e}_{(1)} + \lambda_{(2)}c_2\mathbf{e}_{(2)} + \lambda_{(3)}c_3\mathbf{e}_{(3)} = 0, \tag{105}$$

$$\lambda_{(1)}^2c_1\mathbf{e}_{(1)} + \lambda_{(2)}^2c_2\mathbf{e}_{(2)} + \lambda_{(3)}^2c_3\mathbf{e}_{(3)} = 0. \tag{106}$$

Система однородных уравнений (104)-(106) имеет только тривиальное (нулевое) решение, т.к. определитель системы не равен нулю с учётом того, что собственные векторы являются ненулевыми векторами. Значение же определителя вычисляется через определитель Вандермонда[73]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_{(1)} & \lambda_{(2)} & \lambda_{(3)} \\ \lambda_{(1)}^2 & \lambda_{(2)}^2 & \lambda_{(3)}^2 \end{vmatrix} = \left(\lambda_{(1)} - \lambda_{(2)}\right)\left(\lambda_{(2)} - \lambda_{(3)}\right)\left(\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}\right), \qquad (107)$$

который в силу предположения о некратности главных значений отличен от нуля.

Аналогично и для левых собственных векторов. Линейная независимость собственных векторов позволяет использовать их в качестве векторных базисов. Покажем, во-вторых, что правые собственные векторы и левые собственные векторы образуют взаимные (дуальные) базисы.

Общий множитель, входящий в векторные уравнения (103) относительно $\mathbf{e}_{(k)}$ и $\mathbf{e}^{(k)}$ при известном $\lambda_{(k)}$, может быть определён условием

$$\mathbf{e}_{(n)} \cdot \mathbf{e}^{(n)} = 1, \qquad (n = 1,\ 2,\ 3). \qquad (108)$$

Вместе с тем

$$\mathbf{e}^{(n)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{(k)} = \lambda_{(k)}\, \mathbf{e}^{(n)} \cdot \mathbf{e}_{(k)}, \qquad \mathbf{e}^{(n)} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{(k)} = \lambda_{(n)}\, \mathbf{e}^{(n)} \cdot \mathbf{e}_{(k)},$$

$$\left(\lambda_{(k)} - \lambda_{(n)}\right) \mathbf{e}^{(n)} \cdot \mathbf{e}_{(k)} = 0. \qquad (109)$$

и в предположении, что все корни характеристического уравнения простые, т.е. $\lambda_{(k)} \neq \lambda_{(n)}$, получаем

$$\mathbf{e}^{(n)} \cdot \mathbf{e}_{(k)} = \delta_k^n, \qquad (110)$$

что означает, векторные базисы $\mathbf{e}_{(k)}$ и $\mathbf{e}^{(k)}$ являются взаимными.

Заметим, что предположение о симметричности тензора $\mathbf{Q}$ вносит существенное упрощение. Дело заключается в том, что для симметричного тензора отпадает различие между скалярными произведениями тензора на вектор справа и слева. При этом основной и взаимный базисы совпадают и становятся единственным ортонормированным триэдром. Кроме того, можно показать, что корни характеристического уравнения симметричного тензора всегда вещественные [10, 19].

Спектральное разложение, канонический вид тензора. Важнейшим свойством тензора является **число различных собственных значений**, которыми обладает тензор. Как уже отмечалось, в случае вещественности собственных значений, очевидно, могут иметь место только три следующие возможности: 1) все собственные значения тензора $\mathbf{Q}$ различны; 2)

[73] введён Вандермондом* в 1774 году для третьего порядка, в общем случае О. Коши (прим. на стр. 13) - в 1815 году.

* **Александр Теофил Вандермонд** (фр. *Alexandre-Théophile Vandermonde*) (28.02.1735 - 01.01.1796) – французский музыкант и математик.

тензор имеет два различных собственных значения и 3) все собственные значения тензора совпадают.

Используя базисы собственных векторов $\mathbf{e}_{(k)}$ и $\mathbf{e}^{(k)}$ произвольного тензора $\mathbf{Q}$, единичный тензор $\mathbf{E}$ по (43) может быть представлен выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^{(k)}\mathbf{e}_{(k)} = \mathbf{e}_{(k)}\mathbf{e}^{(k)}. \tag{111}$$

Собственные значения тензора вместо $\lambda_{(k)}$ в дальнейшем чаще будем обозначать той же буквой, что и сам тензор, только строчной, например, для тензора $\mathbf{Q}$: $q_{(1)}$, $q_{(2)}$, $q_{(3)}$.

Предполагая *вещественность и некратность собственных значений произвольного тензора* $\mathbf{Q}$, тензорно умножим первое равенство (103) справа на $\mathbf{e}^{(k)}$, второе равенство – слева на $\mathbf{e}_{(k)}$ и просуммируем, получим

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{Q} = q_{(1)}\ \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + q_{(2)}\ \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}^{(2)} + q_{(3)}\ \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}^{(3)}. \tag{112}$$

Такое представление тензора называется **спектральным разложением**, **каноническим представлением**, или, как говорят, в своих главных осях тензор имеет **канонический вид**. Для транспонированного тензора

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = q_{(1)}\ \mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + q_{(2)}\ \mathbf{e}^{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + q_{(3)}\ \mathbf{e}^{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \tag{113}$$

Если $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ *(тензор* $\mathbf{Q}$ *несимметричный), то основной и взаимный базисы являются косоугольными.* Для *симметричного тензора* $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$: *все собственные значения* $s_{(k)}$ *вещественны*; *левые и правые собственные векторы совпадают*, *также вещественны и взаимно ортогональны.* В своём главном векторном базисе симметричный тензор будет иметь вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = s_{(1)}\ \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + s_{(2)}\ \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + s_{(3)}\ \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \tag{114}$$

Будем нумеровать собственные значения в порядке не убывания $s_{(1)} \leqslant s_{(2)} \leqslant s_{(3)}$ [74]. Если симметричный тензор $\mathbf{S}$ положительно определён, т.е. квадратичная форма $\mathbf{x}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x} > 0$ при любом $\mathbf{x}$, исключая случай $\mathbf{x} = 0$, то все собственные значения $s_{(k)}$ положительны. Известно [18], что наибольшее и наименьшее собственные значения тензора $\mathbf{S}$ являются экстремальными значениями квадратичной формы $\mathbf{x}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}$, которые она может принять при $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию $\mathbf{x}^2 = 1$. Отсюда следует, что тензор $\mathbf{S}-s_{(+)}\mathbf{E}$, где $s_{(+)} < s_{(1)}$, будет положительно определённым. Действительно, $\mathbf{x}\cdot\big(\mathbf{S} - s_{(+)}\mathbf{E}\big)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x} - s_{(+)} > 0$, так как $\mathbf{x}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x} \geqslant s_{(1)} > s_{(+)}$. Аналогично тензор $\mathbf{S} - s_{(-)}\mathbf{E}$ при $s_{(-)} > s_{(3)}$ будет отрицательно определённым.

[74] В механике сплошных сред исторически принято нумеровать собственные значения в порядке не возрастания $s_{(1)} \geqslant s_{(2)} \geqslant s_{(3)}$. Некоторые из приводимых ниже формул, необходимо адаптировать на этот случай.

Ранее предполагалась некратность главных значений. Теперь можно отказаться от этого ограничения. Для произвольного тензора $\mathbf{Q}$ *при наличии кратного (двукратного) корня*, (для определённости будем считать, что $q_{(1)} = q_{(2)} \neq q_{(3)}$), получим

$$\mathbf{Q} = q_{(1)} \; \left(\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}^{(2)}\right) + q_{(3)} \; \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}^{(3)} = q_{(1)} \; \mathbf{E} + \left(q_{(3)} - q_{(1)}\right) \; \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}^{(3)}. \quad (115)$$

Векторы $\mathbf{e}_{(3)}$ и $\mathbf{e}^{(3)}$ в общем случае не параллельны между собой, но скалярное произведение $\mathbf{e}_{(3)} \cdot \mathbf{e}^{(3)} = 1$. Это означает, что угол между векторами $\mathbf{e}_{(3)}$ и $\mathbf{e}^{(3)}$ – острый. Длина одного из векторов $\mathbf{e}_{(3)}$ и $\mathbf{e}^{(3)}$ может быть выбрана произвольно. В частности, можно выбрать $\mathbf{e}_{(3)}$ и $\mathbf{e}^{(3)}$ равной длины. Представление тензора в виде (115) будет по существу однозначным, если отвлечься от возможности одновременного изменения направлений векторов $\mathbf{e}_{(3)}$ и $\mathbf{e}^{(3)}$ на противоположные.

Вектор $\mathbf{e}_{(3)}$ задаёт собственное направление тензора. С другой стороны, всякое направление $\mathbf{e}$, лежащее в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{e}^{(3)}$ также является собственным направлением. Следовательно, плоскость перпендикулярная $\mathbf{e}^{(3)}$ является двумерным собственным подпространством тензора, а соответствующее собственное значение – двукратным. При транспонировании тензора векторы $\mathbf{e}_{(3)}$ и $\mathbf{e}^{(3)}$ меняются ролями. Вектор $\mathbf{e}_{(3)}$, определяющий одномерное собственное подпространство тензора, можно назвать осью тензора, в таком случае вектор $\mathbf{e}^{(3)}$ будет являться осью транспонированного тензора. При этом ось каждого из тензоров является нормалью к двумерному собственному подпространству другого тензора.

Случай *наличия трёхкратного корня* возможен, по-видимому, только для симметричного тензора $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$. Когда $s_{(1)} = s_{(2)} = s_{(3)} = s$, тензор $\mathbf{S}$ является шаровым и представляет собой произведение скаляра на единичный тензор

$$\mathbf{S} = s \; \mathbf{E}. \quad (116)$$

Тензор по своим свойствам ничем не отличается от числа. Такой тензор называется изотропным (любой вектор – собственный).

Случай *комплексно-сопряжённых корней* характеристического уравнения [11] связан только с несимметричными тензорами. Здесь вводятся в рассмотрение две системы собственных векторов – «правых» и «левых». При этом для трёхмерных вещественных тензоров второго ранга – два корня характеристического уравнения комплексно-сопряжённые и один корень вещественный. Рассматривая несимметричный тензор $\mathbf{Q}$, для определённости будем считать

$$\widetilde{q}_{(1)} = q_{(1)} + iq_{(2)}, \qquad \widetilde{q}_{(2)} = q_{(1)} - iq_{(2)}, \qquad q_{(3)}. \quad (117)$$

Комплексно-сопряжённым корням соответствуют комплексно-сопряжённые правые собственные векторы

$$\widetilde{\mathbf{e}}_{(1)} = \mathbf{e}_{(2)} + i\mathbf{e}_{(1)}, \qquad \widetilde{\mathbf{e}}_{(2)} = \mathbf{e}_{(2)} - i\mathbf{e}_{(1)}, \tag{118}$$

вещественному собственному значению $q_{(3)}$ соответствует вещественный собственный правый вектор $\mathbf{e}_{(3)}$. Разделяя действительные и мнимые части в соотношениях (96), которые для правых векторов принимают вид

$$\mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{e}_{(2)} \pm i\mathbf{e}_{(1)}\right) = \left(q_{(1)} \pm iq_{(2)}\right)\left(\mathbf{e}_{(2)} \pm i\mathbf{e}_{(1)}\right), \qquad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = q_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}, \tag{119}$$

получим вещественные зависимости

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = q_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + q_{(2)}\mathbf{e}_{(2)}, \qquad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = q_{(1)}\mathbf{e}_{(2)} - q_{(2)}\mathbf{e}_{(1)},$$
$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = q_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \tag{120}$$

Теперь в рассмотрение вводится взаимный (неортогональный) векторный базис

$$\overline{\mathbf{e}}^1 = \frac{1}{\upsilon}\mathbf{e}_{(2)} \times \mathbf{e}_{(3)}, \qquad \overline{\mathbf{e}}^2 = \frac{1}{\upsilon}\mathbf{e}_{(3)} \times \mathbf{e}_{(1)}, \qquad \overline{\mathbf{e}}^3 = \frac{1}{\upsilon}\mathbf{e}_{(1)} \times \mathbf{e}_{(2)}, \tag{121}$$
$$\upsilon = \left(\mathbf{e}_{(1)} \times \mathbf{e}_{(2)}\right) \cdot \mathbf{e}_{(3)},$$

такой, что

$$\overline{\mathbf{e}}^n \cdot \mathbf{e}_{(k)} = \delta^n_k = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases} \tag{122}$$

Это позволяет записать правое спектральное представление несимметричного тензора

$$\mathbf{Q} = q_{(1)}\left(\mathbf{e}_{(1)}\overline{\mathbf{e}}^1 + \mathbf{e}_{(2)}\overline{\mathbf{e}}^2\right) + q_{(2)}\left(\mathbf{e}_{(2)}\overline{\mathbf{e}}^1 - \mathbf{e}_{(1)}\overline{\mathbf{e}}^2\right) + q_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}\overline{\mathbf{e}}^3. \tag{123}$$

Аналогично можно получить левое спектральное представление несимметричного тензора

$$\mathbf{Q} = q_{(1)}\left(\overline{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}^{(1)} + \overline{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}^{(2)}\right) + q_{(2)}\left(\overline{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}^{(1)} - \overline{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}^{(2)}\right) + q_{(3)}\overline{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}^{(3)}. \tag{124}$$

В частном случае *антисимметричного тензора* $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, для которого характеристическое уравнение по (73) имеет вид

$$\det\left(\mathbf{A} - a\,\mathbf{E}\right) = -a\,\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} - a^3 = 0, \tag{125}$$

собственные значения $a_{(1),(2)} = \pm\, i\,\omega$, $a_{(3)} = 0$, где обозначено $\omega = |\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}| = \sqrt{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}}$. Соответствующие им собственные векторы

$$\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{e}_{(2)} \pm\, i\,\mathbf{e}_{(1)}\right) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \times \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{e}_{(2)} \pm\, i\,\mathbf{e}_{(1)}\right) =$$
$$= \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \times \left(\mathbf{e}_{(2)} \pm\, i\,\mathbf{e}_{(1)}\right) = \pm\, i\,\omega\,\left(\mathbf{e}_{(2)} \pm\, i\,\mathbf{e}_{(1)}\right), \tag{126}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_{(3)}=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_{(3)}=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}\times\mathbf{e}_{(3)}=a_{(3)}\,\mathbf{e}_{(3)}=0, \tag{127}$$

Из соотношения $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}\times\mathbf{e}_{(3)}=0$ получаем $\mathbf{e}_{(3)}=\dfrac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}}{\omega}$. Подставляя в (126), получим

$$\omega\,\mathbf{e}_{(3)}\times\left(\mathbf{e}_{(2)}\pm\,i\,\mathbf{e}_{(1)}\right)=\pm\,i\,\omega\,\left(\mathbf{e}_{(2)}\pm\,i\,\mathbf{e}_{(1)}\right),$$

откуда следует

$$\mathbf{e}_{(1)}=\mathbf{e}_{(2)}\times\mathbf{e}_{(3)},\qquad\mathbf{e}_{(2)}=\mathbf{e}_{(3)}\times\mathbf{e}_{(1)}. \tag{128}$$

Векторы $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ образуют ортогональный базис; можно принять, что $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$ – единичные векторы, они определены с точностью до поворота вокруг $\mathbf{e}_{(3)}$. В таких ортонормированных базисах (взаимный базис совпадает с основным) спектральное разложение кососимметричного тензора имеет вид

$$\mathbf{A}=\omega\,\left(\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(1)}-\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(2)}\right). \tag{129}$$

Другой пример спектрального разложения несимметричного тензора – разложение *ортогонального тензора* $\boldsymbol{\mathcal{O}}$: $\left(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1}\right)$. Определитель ортогонального тензора

$$\det\boldsymbol{\mathcal{O}}=\pm1.$$

Инварианты ортогонального тензора по (100)

$$\begin{aligned}
&I_1(\boldsymbol{\mathcal{O}})=\operatorname{tr}\boldsymbol{\mathcal{O}},\\
&I_2(\boldsymbol{\mathcal{O}})=\operatorname{tr}\overset{\times}{\boldsymbol{\mathcal{O}}}=\det\boldsymbol{\mathcal{O}}\ \operatorname{tr}\boldsymbol{\mathcal{O}}=\pm\operatorname{tr}\boldsymbol{\mathcal{O}}=\pm I_1(\boldsymbol{\mathcal{O}}),\\
&I_3(\boldsymbol{\mathcal{O}})=\det\boldsymbol{\mathcal{O}}=\pm1.
\end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения для взаимного тензора (55-56). Характеристическое уравнение (99) принимает вид

$$-\,\lambda^3+I_1(\boldsymbol{\mathcal{O}})\,\lambda^2\mp I_1(\boldsymbol{\mathcal{O}})\,\lambda\pm1=0,$$

которое может быть преобразовано к виду

$$-\,(\lambda\mp1)\left[\lambda^2-(I_1(\boldsymbol{\mathcal{O}})\mp1)\,\lambda+1\right]=0.$$

Откуда получаем один вещественный корень равный ±1 и два комплексно сопряжённых, которые обозначим

$$\lambda_{(1),(2)}\equiv\widetilde{o}_{(1),(2)}=o_{(1)}\pm\,i\,o_{(2)},\qquad\lambda_{(3)}\equiv o_{(3)}=\pm1.$$

Соответствующие этим собственным значениям правые собственные векторы обозначим

$$\widetilde{\mathbf{e}}_{(1),(2)}=\mathbf{e}_{(2)}\pm\,i\,\mathbf{e}_{(1)},\qquad\mathbf{e}_{(3)}.$$

Используя выражения (102) для инвариантов тензора через корни характеристического уравнения, для действительных и мнимых частей собственных значений получим равенство

$$o_{(1)}^2 + o_{(2)}^2 = 1,$$

которое будет тождественно выполняться, если положить

$$o_{(1)} = \cos\varphi, \qquad o_{(2)} = \sin\varphi.$$

Разделяя теперь в (119) действительные и мнимые части, для вещественных векторов $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ получим соотношения

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = \cos\varphi\, \mathbf{e}_{(1)} + \sin\varphi\, \mathbf{e}_{(2)}, \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = \cos\varphi\, \mathbf{e}_{(2)} - \sin\varphi\, \mathbf{e}_{(1)}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = \pm\, \mathbf{e}_{(3)}. \end{aligned} \tag{130}$$

Умножим скалярно левые и правые части полученных равенств на тензор $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}}$, воспользуемся свойствами ортогонального тензора и свойствами скалярного произведения вектора на тензор, найдём выражения скалярных произведений ортогонального тензора $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ на векторы $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ слева, получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = \cos\varphi\, \mathbf{e}_{(1)} - \sin\varphi\, \mathbf{e}_{(2)}, \\ &\qquad\qquad \mathbf{e}_{(2)} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = \cos\varphi\, \mathbf{e}_{(2)} + \sin\varphi\, \mathbf{e}_{(1)}, \qquad \mathbf{e}_{(3)} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = \pm\, \mathbf{e}_{(3)}. \end{aligned} \tag{131}$$

Умножим первое равенство на $\pm\, i$ $\left(i^2 = -1\right)$, сложим полученное со вторым равенством, сгруппируем слагаемые, получим

$$\left(\mathbf{e}_{(2)} \pm i\, \mathbf{e}_{(1)}\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = (\cos\varphi \pm i\, \sin\varphi) \left(\mathbf{e}_{(2)} \pm i\, \mathbf{e}_{(1)}\right), \qquad \mathbf{e}_{(3)} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = \pm\, \mathbf{e}_{(3)}.$$

Откуда следует, что векторы $\widetilde{\mathrm{e}}^{(1),(2)} = \mathbf{e}_{(2)} \pm i\, \mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}^{(3)} = \mathbf{e}_{(3)}$ являются левыми собственными векторами ортогонального тензора. Из соотношений (130) и (131), вычисляя произведения вида $\mathbf{e}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} \cdot \mathbf{e}_{(k)}$, получим следующие условия на векторы $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$:

$$\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = 0, \qquad \mathbf{e}_{(2)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = 0, \qquad \mathbf{e}_{(3)} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = 0,$$

которые показывают взаимную ортогональность векторов $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$. В силу того, что собственные векторы по определению могут иметь произвольную длину, будем считать векторы $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ единичными (ортами). В этом случае они будут образовывать ортонормированный триэдр, т.е.

$$\mathbf{e}_{(n)} \cdot \mathbf{e}_{(k)} = \delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases}$$

Используя представление единичного тензора в ортонормированном триэдре

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)},$$

из соотношений (130) и (131) получим каноническое представление ортогонального тензора

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \cos\varphi\left(\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)}\right) + \sin\varphi\left(\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(1)} - \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(2)}\right) \pm \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}, \qquad (132)$$

которое в случае собственно ортогонального тензора достаточно просто приводится к виду Эйлера (86), если обозначить $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(3)}$. Таким образом вещественный собственный вектор $\mathbf{e}_{(3)}$ ортогонального тензора играет роль оси поворота (в случае собственно ортогонального тензора) и оси поворота и зеркального отражения (в случае несобственно ортогонального тензора).

Возведение в степень. Имея спектральное разложение (112) тензора $\mathbf{Q}$, легко определить степень тензора. Так, умножая скалярно тензор $\mathbf{Q}$ на себя и учитывая свойства основного и взаимного базисов, образованных собственными векторами, непосредственно получим

$$\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q} = q^2_{(1)}\ \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + q^2_{(2)}\ \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}^{(2)} + q^2_{(3)}\ \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}^{(3)}, \qquad (133)$$

и вообще при целом положительном n

$$\mathbf{Q}^n = q^n_{(1)}\ \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + q^n_{(2)}\ \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}^{(2)} + q^n_{(3)}\ \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}^{(3)}. \qquad (134)$$

Если тензор $\mathbf{Q}$ неособенный ($\det\mathbf{Q} \neq 0$), в числе корней характеристического полинома нет равного нулю. Это позволяет используя определение получить выражение обратного тензора $\mathbf{Q}^{-1}$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{q_{(1)}}\ \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + \frac{1}{q_{(2)}}\ \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}^{(2)} + \frac{1}{q_{(3)}}\ \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}^{(3)}. \qquad (135)$$

Главные значения обратного тензора равны обратным значениям главных значений исходного неособенного тензора, собственные векторы обоих тензоров совпадают. Имея спектральное разложение (135) обратного тензора $\mathbf{Q}^{-1}$, можно определить отрицательную степень неособенного тензора $\mathbf{Q}$, которая будет определяться формулой (134), если считать, что показатель степени n может принимать и положительные, и отрицательные целые значения. При этом значению показателя степени $n = 0$ соответствует единичный тензор.

При необходимости можно определить и дробную степень тензора, если наложить дополнительные условия на свойства исходного тензора. Так, например, по положительно определённому тензору $\mathbf{Q}$ может быть определён тензор $\mathbf{Q}^{1/2}$, следующим образом:

$$\mathbf{Q}^{1/2} = \sqrt{q_{(1)}}\ \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + \sqrt{q_{(2)}}\ \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}^{(2)} + \sqrt{q_{(3)}}\ \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}^{(3)}. \qquad (136)$$

Если тензор $\mathbf{Q}$ полжительно определён, его собственные значения $q_{(k)} > 0$ положительны. Можно было бы назначить любые комбинации знаков $\sqrt{q_{(k)}}$ $(k =$

1, 2, 3), но принято приписывать $\sqrt{q_{(k)}}$ положительные значения, иными словами, считать тензор $\mathbf{Q}^{1/2}$ положительно определённым.

Теорема Га́мильтона-Кэ́ли: тензор удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Исходим из равенства

$$\mathbf{Q}^3 = \sum_{k=1}^{3} q_{(k)}^3 \; \mathbf{e}_{(k)}\mathbf{e}^{(k)}.$$

Заменим $q_{(k)}^3$ его значением из характеристического уравнения

$$q_{(k)}^3 = I_1(\mathbf{Q})\, q_{(k)}^2 - I_2(\mathbf{Q})\, q_{(k)} + I_3(\mathbf{Q}).$$

Получим

$$\mathbf{Q}^3 = I_1(\mathbf{Q}) \sum_{k=1}^{3} q_{(k)}^2 \; \mathbf{e}_{(k)}\mathbf{e}^{(k)} - I_2(\mathbf{Q}) \sum_{k=1}^{3} q_{(k)} \; \mathbf{e}_{(k)}\mathbf{e}^{(k)} + I_3(\mathbf{Q}) \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_{(k)}\mathbf{e}^{(k)}.$$

Откуда следует

$$-\mathbf{Q}^3 + I_1(\mathbf{Q})\,\mathbf{Q}^3 - I_2(\mathbf{Q})\,\mathbf{Q} + I_3(\mathbf{Q})\,\mathbf{E} = 0. \qquad (137)$$

Следствием этой теоремы является тот факт, что $\mathbf{Q}^n$ при целом $n \geqslant 3$ и $n \leqslant -1$ можно выразить через $\mathbf{Q}^2$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{E} = \mathbf{Q}^0$.

Физические оси симметричных тензоров. Любой трёхмерный вещественный симметричный тензор $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$, у которого все собственные значения различны, является двухосным, т.е. его можно представить в виде

$$\mathbf{S} = a\mathbf{E} + b\left[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\right], \qquad (138)$$

где $a,\ b$ – скаляры

$$a = s_{(2)},\ b = \frac{s_{(3)} - s_{(1)}}{2} > 0,$$

$\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2$ – единичные векторы

$$\mathbf{c}_1 = \sqrt{\frac{s_{(2)} - s_{(1)}}{s_{(3)} - s_{(1)}}}\mathbf{e}_{(1)} + \sqrt{\frac{s_{(3)} - s_{(2)}}{s_{(3)} - s_{(1)}}}\mathbf{e}_{(3)},$$

$$\mathbf{c}_2 = -\sqrt{\frac{s_{(2)} - s_{(1)}}{s_{(3)} - s_{(1)}}}\mathbf{e}_{(1)} + \sqrt{\frac{s_{(3)} - s_{(2)}}{s_{(3)} - s_{(1)}}}\mathbf{e}_{(3)}.$$

Можно убедиться, что форма (138) сохраняется после любого ортогонального преобразования системы координат. Представление (138) вполне однозначно, если не считаться с тем очевидным фактом, что у обоих векторов $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ одновременно знак может быть изменён на противоположный. Очевидно, что направления $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ играют для тензора $\mathbf{S}$ особую роль; их естественно назвать **физическими осями**[75] тензора (не смешивать с **главными осями** - собственными векторами!). Векторы $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ имеют вполне определённый геометрический или физический смысл в зависимости от того, какую величину характеризует тензор $\mathbf{S}$. Следовательно, всякий трёхмерный вещественный симметричный тензор, у которого все собственные значения различны, является двухосным; это есть чисто математическое обстоятельство, имеющее общее значение независимо от физического смысла, приписываемого тензору [18].

Собственные векторы тензора $\mathbf{S}$ весьма просто выражаются через единичные векторы его осей

$$\mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2\right)}} \left(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2\right),$$

$$\mathbf{e}_{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{\left[1 - \left(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2\right)^2\right]}} \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2,$$

$$\mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2\right)}} \left(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\right).$$

Таким образом, один собственный вектор $\mathbf{e}_{(2)}$ перпендикулярен к плоскости физических осей тензора, а два других $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ лежат в этой плоскости, совпадая с биссектрисами углов между физическими осями. Собственные значения выражаются через параметры a и b следующим образом:

$$s_{(1),(3)} = a \mp b\left(1 \mp \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2\right), \qquad s_{(2)} = a.$$

По теореме Гамильтона-Кэли *обратный тензор* квадратично выражается через исходный тензор. При возведении в квадрат тензора $\mathbf{S}$, наряду со слагаемыми вида $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1$, появится слагаемое $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$. Поэтому обратный тензор может быть найден в виде

$$\mathbf{S}^{-1} = x\mathbf{E} + y\left[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\right] + z\left[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\right]. \tag{139}$$

Из условия $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E}$ находятся коэффициенты x, y, z:

$$x = \frac{1}{a}, \; y = -\frac{b\left[a + b\ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2\right]}{\det \mathbf{S}}, \; z = \frac{b^2}{\det \mathbf{S}}.$$

Так как выражение для обратного тензора (139) не совпадает по форме с выражением для исходного тензора (138), то можно заключить, что физические оси исходного тензора не являются физическими осями обратного тензора.

[75] просто осями [18].

Однако обратный тензор вследствие своей симметричности также является двухосным и может быть записан в виде

$$\mathbf{S}^{-1} = p\mathbf{E} + q\,[\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2\mathbf{d}_1]\,,$$

где $\mathbf{d}_1,\ \mathbf{d}_2$ – физические оси обратного тензора $\mathbf{S}^{-1}$. Собственные значения обратного тензора $\mathbf{S}^{-1}$ обратны собственным значениям исходного тензора $\mathbf{S}$. По аналогии, p лежит между двумя другими собственными значениями, поэтому должно быть $p = x = \dfrac{1}{a}$, следовательно, вектор $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$ и вектор $\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2$ – коллинеарны $(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \parallel \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)$, откуда следует, что оси обратного тензора $\mathbf{d}_1,\ \mathbf{d}_2$ лежат в той же плоскости, что и оси $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2$. Используя условия $b > 0,\ q > 0$, можно записать

$$p + q\,[1 + \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2] = \frac{1}{a - b\,[1 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2]},$$

$$p - q\,[1 - \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2] = \frac{1}{a + b\,[1 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2]}.$$

Вычитая из первого равенства второе, находим

$$q = \frac{ab}{\det \mathbf{S}}.$$

Непосредственной проверкой устанавливаются соотношения

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{c}_2 = \frac{a^2}{\det \mathbf{S}},$$

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{d}_2 = \frac{\det \mathbf{S}}{a^2}.$$

Для *тензора, взаимного* к $\mathbf{S}$, будем иметь

$$\begin{aligned}\overset{\times}{\mathbf{S}} &= \det(\mathbf{S})\mathbf{S}^{-1} = p\det(\mathbf{S})\mathbf{E} + q\det(\mathbf{S})\,[\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2\mathbf{d}_1] = \\ &= \frac{\det \mathbf{S}}{a}\mathbf{E} - b\,[a + b\ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2]\,[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1] + b^2\,[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2]\,.\end{aligned}$$

Для симметричного тензора $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ *при наличии двукратного корня* ($s_{(1)} = s_{(2)} \neq s_{(3)}$) представление

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = a\ \mathbf{E} + b\ \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}, \tag{140}$$

где $a = s_{(1)}$, $b = s_{(3)} - s_{(1)}$, однозначно, за исключением того, что вектор $\mathbf{e}_{(3)}$ определён с точностью до знака и, следовательно, задаёт двустороннее направление, которое естественно назвать **физической осью** тензора $\mathbf{S}$.

Всякий вектор $\mathbf{e}$, перпендикулярный к оси $\mathbf{e}_{(3)}$, также является собственным, так как при условии $\mathbf{e}_{(3)} \cdot \mathbf{e} = 0$ имеем $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e} = s_{(1)} \mathbf{e}$. Точнее говоря, двукратному собственному значению $s_{(1)}$ отвечает двумерное собственное подпространство, ортогональное к оси $\mathbf{e}_{(3)}$. В связи с вышеизложенным уместно относить понятие **одноосный** вообще ко всякому вещественному симметричному трёхмерному тензору, имеющему двукратное собственное значение независимо от его физического смысла [18].

Тензор, *обратный одноосному тензору*, очевидно, также будет одноосным с тем же направлением оси. Выражение для него получается сразу путём замены собственных значений тензора на обратные

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{a} \left(\mathbf{E} - \frac{b}{a+b} \, \mathbf{e}_{(3)} \mathbf{e}_{(3)} \right). \tag{141}$$

Легко проверить, что, перемножая (140) на (141) в любом порядке, получим единичный тензор. Наконец, для *взаимного тензора* получим

$$\begin{aligned} \overset{\times}{\mathbf{S}} = \det(\mathbf{S}) \, \mathbf{S}^{-1} = a^2 \, (a+b) \left[\frac{1}{a} \left(\mathbf{E} - \frac{b}{a+b} \, \mathbf{e}_{(3)} \mathbf{e}_{(3)} \right) \right] = \\ = a \left[(a+b) \, \mathbf{E} - b \, \mathbf{e}_{(3)} \mathbf{e}_{(3)} \right]. \end{aligned} \tag{142}$$

7.5 Главные инварианты тензоров

Инвариантами называются характеристики тензоров, сохраняющие свою величину при смене базиса. Любая функция инвариантов – инвариант. Скаляр (тензор нулевого ранга) – инвариант. Инвариант вектора (тензора первого ранга) – длина. Вектор не имеет других инвариантов кроме функций его длины. Тензор второго ранга $\mathbf{Q}$ имеет три независимых инварианта.

Линейный инвариант тензора $\mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{Q}) = \operatorname{tr} \mathbf{Q} = \mathbf{E} \cdot\cdot \, \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot\cdot \, \mathbf{E} = q_{(1)} + q_{(2)} + q_{(3)} = \\ = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}^k = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_k = Q_{k \cdot}^{\cdot k} = Q^{k \cdot}_{\cdot k}. \end{aligned} \tag{143}$$

Квадратичный инвариант тензора $\mathbf{Q}$ определяется, как линейный инвариант тензора алгебраических дополнений $\overset{\times}{\mathbf{Q}}$

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{Q}) = \operatorname{tr} \overset{\times}{\mathbf{Q}} = I_1(\overset{\times}{\mathbf{Q}}) = q_{(1)} \, q_{(2)} + q_{(2)} \, q_{(3)} + q_{(3)} \, q_{(1)} = \\ = \frac{1}{2} \left[I_1^2(\mathbf{Q}) - I_1(\mathbf{Q}^2) \right] = \frac{1}{2} \left(Q_{k \cdot}^{\cdot k} \, Q_{n \cdot}^{\cdot n} - Q_{m \cdot}^{\cdot i} \, Q_{i \cdot}^{\cdot m} \right). \end{aligned} \tag{144}$$

Кубический инвариант тензора $\mathbf{Q}$

$$
\begin{aligned}
I_3(\mathbf{Q}) = \det\mathbf{Q} = q_{(1)}\,q_{(2)}\,q_{(3)} = \frac{1}{6}\,\left[I_1^3(\mathbf{Q}) - 3\,I_1(\mathbf{Q})\,I_1(\mathbf{Q}^2) + 2\,I_1(\mathbf{Q}^3)\right] = \\
= \frac{1}{3}\,\left[I_1(\mathbf{Q}^3) - I_1^3(\mathbf{Q}) + 3\,I_1(\mathbf{Q})\,I_2(\mathbf{Q})\right].
\end{aligned}
\tag{145}
$$

В качестве независимых инвариантов тензора $\mathbf{Q}$ могут быть выбраны инварианты $I_1(\mathbf{Q}^k)$ $(k = 1,\,2,\,3)$.

Главные инварианты транспонированного тензора $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ совпадают с главными инвариантами исходного тензора

$$
I_k(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) = I_k(\mathbf{Q}) \qquad k = 1,\,2,\,3. \tag{146}
$$

Главные инварианты обратного тензора $\mathbf{Q}^{-1}$

$$
I_1(\mathbf{Q}^{-1}) = \frac{I_2(\mathbf{Q})}{I_3(\mathbf{Q})}, \qquad I_2(\mathbf{Q}^{-1}) = \frac{I_1(\mathbf{Q})}{I_3(\mathbf{Q})}, \qquad I_3(\mathbf{Q}^{-1}) = \frac{1}{I_3(\mathbf{Q})}. \tag{147}
$$

Главные инварианты тензора алгебраических дополнений (взаимного тензора) $\overset{\times}{\mathbf{Q}}$

$$
\begin{aligned}
I_1(\overset{\times}{\mathbf{Q}}) = I_2(\mathbf{Q}), \qquad I_2(\overset{\times}{\mathbf{Q}}) = I_1(\overset{\times\times}{\mathbf{Q}}) = I_1(\mathbf{Q})\,I_3(\mathbf{Q}), \\
I_3(\overset{\times}{\mathbf{Q}}) = \det\overset{\times}{\mathbf{Q}} = I_3^2(\mathbf{Q}).
\end{aligned}
\tag{148}
$$

Главные инварианты шарового тензора $\alpha\,\mathbf{E}$

$$
I_1(\alpha\,\mathbf{E}) = 3\,\alpha, \qquad I_2(\alpha\,\mathbf{E}) = 3\,\alpha^2, \qquad I_3(\alpha\,\mathbf{E}) = \alpha^3. \tag{149}
$$

Главные инварианты девиатора симметричного тензора $\mathbf{S}$ $\left(\mathbf{L} = \operatorname{dev}\mathbf{S} = \mathbf{S} - \left(\frac{1}{3}\,\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\,\mathbf{E}\right)$:

$$
\begin{aligned}
I_1(\mathbf{L}) &= 0, \\
I_2(\mathbf{L}) &= -\frac{1}{2}\,I_1(\mathbf{L}^2) = I_2(\mathbf{S}) - \frac{1}{3}\,I_1^2(\mathbf{S}) = \\
&= -\frac{1}{6}\,\left[\left(s_{(1)} - s_{(2)}\right)^2 + \left(s_{(2)} - s_{(3)}\right)^2 + \left(s_{(3)} - s_{(1)}\right)^2\right], \\
I_3(\mathbf{L}) &= \frac{1}{3}\,I_1(\mathbf{L}^3) = I_3(\mathbf{S}) - \frac{1}{3}\,I_1(\mathbf{S})\,I_2(\mathbf{S}) + \frac{2}{27}\,I_1^3(\mathbf{S}).
\end{aligned}
\tag{150}
$$

Главные инварианты антисимметричного тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

$$
I_1(\mathbf{A}) = 0, \qquad I_2(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}^2, \qquad I_3(\mathbf{A}) = 0. \tag{151}
$$

Главные инварианты ортогонального тензора $\boldsymbol{\mathcal{O}}$

$$
I_1(\boldsymbol{\mathcal{O}}) = 2\,\cos\varphi \pm 1, \qquad I_2(\boldsymbol{\mathcal{O}}) = 1 \pm 2\,\cos\varphi, \qquad I_3(\boldsymbol{\mathcal{O}}) = \pm 1. \tag{152}
$$

7.6 Координаты тензора

В векторном пространстве для определения координат векторов вводятся два базиса: основной $\mathbf{r}_k$ и взаимный $\mathbf{r}^n$, связанные условием $\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}^n = \delta_k^n$. Входящие в тензор второго ранга векторы диад могут быть представлены разложениями по тому или другому базису. При этом, естественно, левые векторы всех диад, входящих в представление тензора, должны быть представлены разложениями в одном и том же векторном базисе, либо в основном, либо во взаимном. Аналогично – правые векторы всех диад. Поэтому в разложении тензора второго ранга возможны четыре тензорные базиса

$$\mathbf{r}^k \mathbf{r}^n, \qquad \mathbf{r}^k \mathbf{r}_n, \qquad \mathbf{r}_k \mathbf{r}^n, \qquad \mathbf{r}_k \mathbf{r}_n$$

В каждом из этих тензорных базисов девять линейно независимых элементов. Линейная независимость означает, что число элементов базиса нельзя уменьшить. Доказательство линейной независимости приведено в работе [13].

Базис пространства тензоров, образованный как совокупность тензорных произведений векторов основного базиса евклидова векторного пространства и взаимного к нему, называется простым. Если же в совокупности тензорных произведений участвуют векторы из различных базисов векторного пространства, то такой базис называется сложным [5].

Тензор второго ранга может быть записан в любом из перечисленных базисов

$$\mathbf{Q} = Q_{kn}\, \mathbf{r}^k \mathbf{r}^n = Q_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n}\, \mathbf{r}^k \mathbf{r}_n = Q^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n}\, \mathbf{r}_k \mathbf{r}^n = Q^{kn}\, \mathbf{r}_k \mathbf{r}_n. \tag{153}$$

Числа Q_{kn} называются **координатами** тензора $\mathbf{Q}$ относительно тензорного базиса $\mathbf{r}^k \mathbf{r}^n$; их ещё называют **ковариантными координатами** тензора $\mathbf{Q}$. Числа Q^{kn} – **координаты** относительно базиса $\mathbf{r}_k \mathbf{r}_n$ или **контравариантные координаты**. Числа $Q_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n}$, $Q^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n}$ – **координаты** относительно базисов $\mathbf{r}^k \mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}_k \mathbf{r}^n$ соответственно; их называют **смешанными координатами**. В каждом разложении **девять** координат и девять слагаемых. Для вычисления координат тензора используются формулы

$$Q_{kn} = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_n, \quad Q_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n} = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}^n, \quad Q^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n} = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_n, \quad Q^{kn} = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}^n. \tag{154}$$

Порядок следования индексов у координат важен; первый индекс у координаты всегда относится к первому базису в диаде базисных векторов, а второй – ко второму. Поэтому при записи тензора в смешанном базисе $\mathbf{r}^k \mathbf{r}_n$ или $\mathbf{r}_k \mathbf{r}^n$ у координатных индексов ставятся точки, чтобы было ясно, какой индекс является первым, а какой вторым.

Использование базиса позволяет установить взаимно однозначное соответствие между тензорами второго ранга и матрицами размерности 3×3 и использовать аналогию некоторых действий с матрицами и тензорами. Однако, не следует отождествлять тензор с матрицей его координат. Тензор есть инвариантный объект, не связанный с выбором базиса, в то время как его координаты зависят от выбора базиса.

Для выяснения характера этой зависимости рассмотрим два векторных базиса $\mathbf{r}_k$ и $\widehat{\mathbf{r}}_n$ и соответствующие им взаимные базисы $\mathbf{r}^k$ и $\widehat{\mathbf{r}}^n$, связанных между собой матрицей X_k^p и обратной к ней Y_p^n:

$$\widehat{\mathbf{r}}_n = X_n^p \,\mathbf{r}_p, \qquad \widehat{\mathbf{r}}^n = Y_p^n \,\mathbf{r}^p.$$

Соответствующие обратные соотношения:

$$\mathbf{r}_p = Y_p^n \,\widehat{\mathbf{r}}_n, \qquad \mathbf{r}^p = X_n^p \,\widehat{\mathbf{r}}^n.$$

Найдём связь между координатами тензора $\mathbf{Q}$ в базисах $\mathbf{r}_k\,\mathbf{r}_n$ и $\widehat{\mathbf{r}}_k\,\widehat{\mathbf{r}}_n$. Сам тензор $\mathbf{Q}$ не зависит от выбора базиса. Поэтому имеем

$$\mathbf{Q} = \widehat{Q}^{kn}\,\widehat{\mathbf{r}}_k\,\widehat{\mathbf{r}}_n = Q^{kn}\,\mathbf{r}_k\,\mathbf{r}_n. \tag{155}$$

Заменяя старый базис на новый, получим

$$\mathbf{Q} = \widehat{Q}^{kn}\,\widehat{\mathbf{r}}_k\,\widehat{\mathbf{r}}_n = Q^{ps}\,Y_p^k\,Y_s^n\,\widehat{\mathbf{r}}_k\,\widehat{\mathbf{r}}_n.$$

Откуда

$$\widehat{Q}^{kn} = Q^{ps}\,Y_p^k\,Y_s^n. \tag{156}$$

Аналогично для остальных координат тензора

$$\widehat{Q}_{kn} = Q_{ps}\,X_k^p\,X_n^s, \qquad \widehat{Q}_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n} = Q_{p\,\cdot}^{\,\cdot\,s}\,X_k^p\,Y_s^n, \qquad \widehat{Q}^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n} = Q^{p\,\cdot}_{\,\cdot\,s}\,Y_p^k\,X_n^s. \tag{157}$$

При координатном подходе соотношения (156), (157) используются в качестве определения тензора второго ранга.

Координаты единичного тензора. Основываясь на определении единичного тензора (42) и формулах нахождения координат тензора второго ранга (154), получим координаты единичного тензора

$$\begin{aligned}
&g_{kn} = \mathbf{r}_k\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}_n, &&g^{kn} = \mathbf{r}^k\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}^n = \mathbf{r}^k\cdot\mathbf{r}^n,\\
&g_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n} = \mathbf{r}_k\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}^n = \mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}^n = \delta_k^n, &&g^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n} = \mathbf{r}^k\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}_n = \mathbf{r}^k\cdot\mathbf{r}_n = \delta_n^k.
\end{aligned} \tag{158}$$

Координатное представление единичного тензора по (153) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= g_{kn}\,\mathbf{r}^k\,\mathbf{r}^n = g^{kn}\,\mathbf{r}_k\,\mathbf{r}_n = g_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n}\,\mathbf{r}^k\,\mathbf{r}_n = g^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n}\,\mathbf{r}_k\,\mathbf{r}^n =\\
&= \delta_k^n\,\mathbf{r}^k\,\mathbf{r}_n = \mathbf{r}^n\,\mathbf{r}_n = \delta_n^k\,\mathbf{r}_k\,\mathbf{r}^n = \mathbf{r}_k\,\mathbf{r}^k.
\end{aligned} \tag{159}$$

Таким образом, величины $g_{kn} = g_{nk}$, $g^{kn} = g^{nk}$, $g_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n} = g_{n\,\cdot}^{\,\cdot\,k} = \delta_k^n$, $g^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n} == g^{n\,\cdot}_{\,\cdot\,k} = \delta_n^k$ являются координатами единичного тензора.

Кроме того, формула для квадрата длины вектора (5) (отрезка), записанная в виде квадратичной метрической формы

$$|\,\mathbf{a}\,| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{a} = g_{kn}\,a^k\,a^n = g^{kn}\,a_k\,a_n = \delta^n_k\,a^k\,a_n = a^k\,a_k = a_n\,a^n\,, \tag{160}$$

позволяет назвать единичный тензор **метрическим**. Обозначения, применяемые для скалярных произведений векторов основного и взаимного базиса

$$\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}_n = g_{kn} = g_{nk},\quad \mathbf{r}^k\cdot\mathbf{r}^n = g^{kn} = g^{nk},\quad \mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}^n = g_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,n} = g^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,n} = g^n_k = \delta^n_k\,, \tag{161}$$

являются до некоторой степени общепринятыми и стандартными для коэффициентов метрической формы.

Используя координаты единичного (метрического) тензора, можно представить векторы основного и взаимного базисов друг через друга следующим образом

$$\mathbf{r}_k = g_{kn}\,\mathbf{r}^n,\qquad \mathbf{r}^k = g^{kn}\,\mathbf{r}_n\,. \tag{162}$$

Формулы (162) легко проверяются и представляют собой простейший пример **операций поднятия и опускания индексов** (**жонглирования индексами**).

Объём параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, равен смешанному произведению этих векторов

$$V = (\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3\,, \tag{163}$$

квадрат этого объёма по (10) равен определителю Грама, составленному из скалярных произведений векторов основного базиса

$$\begin{aligned} V^2 &= [(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3]^2 = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_3\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_3\cdot\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3\cdot\mathbf{r}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{1\,1} & g_{1\,2} & g_{1\,3} \\ g_{2\,1} & g_{2\,2} & g_{2\,3} \\ g_{3\,1} & g_{3\,2} & g_{3\,3} \end{vmatrix} = |\,g_{kn}\,| = g > 0\,, \end{aligned} \tag{164}$$

и, считая тройку векторов основного базиса правой, получим

$$V = (\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3 = \sqrt{g}\,. \tag{165}$$

Кроме того, используя (161) и (162)

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}^k = g^{kn}\,\mathbf{r}_n = g^{kn}\,g_{nm}\,\mathbf{r}^m, \\ &\qquad\qquad \delta^k_p = \mathbf{r}^k\cdot\mathbf{r}_p = g^{kn}\,g_{nm}\,\mathbf{r}^m\cdot\mathbf{r}_p = g^{kn}\,g_{nm}\,\delta^m_p = g^{kn}\,g_{np}\,, \end{aligned} \tag{166}$$

получаем, что матрицы ковариантных координат $||\,g_{np}\,||$ и контравариантных координат $||\,g^{kn}\,||$ единичного (метрического) тензора являются взаимно обратными, их произведение представляет собой единичную матрицу $||\,\delta^k_p\,||$, т.е. $||\,g^{kn}\,||\,||\,g_{np}\,|| = ||\,\delta^k_p\,||$ и определитель $|\,g^{kn}\,| = g^{-1}$.

Между различными координатами тензора существует взаимно однозначная связь, которая легко может быть получена из формул (153) и (154)

$$\begin{aligned}
Q_{kn} &= g_{km}\, g_{np}\, Q^{mp} = g_{km}\, Q^{m\,\cdot}_{\cdot\,n} = g_{np}\, Q^{\cdot\,p}_{k\,\cdot}\,,\\
Q^{kn} &= g^{km}\, g^{np}\, Q_{mp} = g^{np}\, Q^{k\,\cdot}_{\cdot\,p} = g_{km}\, Q^{\cdot\,n}_{m\,\cdot}\,,\\
Q^{k\,\cdot}_{\cdot\,n} &= g^{km}\, Q_{mn} = g_{np}\, Q^{kp} = g^{km}\, g_{np}\, Q^{\cdot\,p}_{m\,\cdot}\,,\\
Q^{\cdot\,n}_{k\,\cdot} &= g^{np}\, Q_{kp} = g_{km}\, Q^{mn} = g_{km}\, g^{np}\, Q^{m\,\cdot}_{\cdot\,p}\,.
\end{aligned} \tag{167}$$

Это ещё один пример операции жонглирования индексами.

8 О ТЕНЗОРАХ ВЫСШИХ РАНГОВ

Тензором ранга s $(s \geqslant 1)$ называется неупорядоченная конечная совокупность кортежей[76] из s векторов

$$^{(s)}\mathbf{Q} = \underbrace{\mathbf{a}_1\, \mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{z}_1}_{s \text{ векторов}} + \ldots + \underbrace{\mathbf{a}_n\, \mathbf{b}_n \ldots \mathbf{z}_n}_{s \text{ векторов}}, \tag{168}$$

где n – любое натуральное число.

Аналогично тому, как были введены операции с тензорами второго ранга, для тензоров высших рангов могут быть определены операции сложения, умножения на скаляр, скалярного, векторного, тензорного, двойного умножения тензоров произвольных рангов. Кроме того, некоторые действия с тензорами могут быть обобщены [3, 5, 10]. Так, например: транспонирование – взаимной перестановкой векторов, стоящих на i-ом и j-ом местах в каждом кортеже тензора; определение следа и векторного инварианта – свёрткой (скалярным перемножением) и, соответственно, векторным перемножением векторов, стоящих на i-ом и j-ом местах в каждом кортеже тензора; двойное умножение – k-кратным умножением.

Среди тензоров третьего ранга наиболее частое применение находит **тензор Ле́ви-Чиви́ты**, который определяется для трёхмерного евклидова пространства соотношением

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E} \tag{169}$$

и является совокупностью триад векторов

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E} = -\mathbf{r}^k \mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_n \mathbf{r}^n = -\mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \times \mathbf{r}^n \mathbf{r}_n. \tag{170}$$

Заметим, что свёртка (скалярное умножение) тензора Леви-Чивиты по любой паре векторов, входящих в триады, – (1,2), (2,3), (3,1) – приводит к нулевому вектору.

[76] **Корте́жем** (фр. cortége) в математике называется упорядоченный конечный набор длины m (где m – любое натуральное число либо 0), каждый из элементов которого принадлежит некоторому множеству.

Одним из важных и полезных применений тензора Леви-Чивиты является возможность записать операцию векторного умножения с помощью операции скалярного умножения. Так, например, векторное произведение двух векторов

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}) \times (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{b}. \tag{171}$$

Чтобы получить удобную формулу для определения координат тензора Леви-Чивита, рассмотрим векторное произведение $\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_n$ в разложении (170). Векторное произведение двух векторов представляет собой вектор. Этот вектор может быть разложен по векторам базиса. Разложим вектор $\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_n$ по векторам взаимного базиса, обозначив коэффициенты разложения ε_{kns},

$$\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_n = \varepsilon_{kns} \mathbf{r}^s. \tag{172}$$

Коэффициенты разложения ε_{kns}, которые называются [4] **символами Леви-Чивиты**, являются смешанными произведениями базисных векторов

$$\varepsilon_{kns} = (\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{r}_s. \tag{173}$$

Из определения и свойств смешанного произведения векторов следует, что символы Леви-Чивиты ε_{kns} равны нулю, если среди индексов есть равные. Кроме того, если переставить местами любые два индекса, то ε_{kns} меняет знак на противоположный. В таких случаях говорят, что ε_{kns} есть **абсолютно кососимметричный объект** третьего порядка. Такой объект может быть представлен в виде произведения некоторой отличной от нуля величины ε_o и символов Риччи

$$\varepsilon_{kns} = \varepsilon_o \, e_{kns}. \tag{174}$$

Символы Риччи или **символы перестановок** [4] определяются следующим образом. Если индексы kns представляют собой последовательности 123, 231, 312, получающиеся круговой перестановкой из прямой последовательности 123, то $e_{kns} = +1$. Если индексы kns представляют собой последовательности 321, 213, 132, получающиеся круговой перестановкой из обратной последовательности 321, то $e_{kns} = -1$. Если среди индексов kns есть повторяющиеся, то $e_{kns} = 0$. Таким образом,

$$e_{kns} = \begin{cases} +1, & \{kns\} = \{123, 231, 312\}; \\ -1, & \{kns\} = \{321, 213, 132\}; \\ \ \ 0, & \text{при наличии повторяющихся индексов.} \end{cases} \tag{175}$$

Символы Риччи используются при вычислении определителей матриц, кофакторов (алгебраических дополнений) и т.д.

Для сомножителя ε_o в представлении символов Леви-Чивиты (174) с использованием соотношения (164) получим выражение

$$\varepsilon_o = \varepsilon \sqrt{g}, \tag{176}$$

где $\varepsilon = +1$, если тройка базисных векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ – правая, и $\varepsilon = -1$, если тройка базисных векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ – левая.

Окончательно для ковариантных символов Леви-Чивиты получим представление

$$\varepsilon_{kns} = \varepsilon \sqrt{g}\, e_{kns}. \tag{177}$$

Аналогично для контравариантных символов Леви-Чивиты получается представление

$$\varepsilon^{kns} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}\, e^{kns}, \tag{178}$$

где e^{kns} также называются символами Риччи и определяются соотношениями аналогичными (175). **Заметим**, что в отличие от символов Леви-Чивиты символы Риччи $\left(e_{kns},\, e^{kns}\right)$ не являются ни ковариантными, ни контравариантными объектами.

Теперь в координатном виде тензор Леви-Чивиты может быть представлен следующим образом

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \varepsilon_{kns}\, \mathbf{r}^k\, \mathbf{r}^n\, \mathbf{r}^s = \varepsilon^{kns}\, \mathbf{r}_k\, \mathbf{r}_n\, \mathbf{r}_s. \tag{179}$$

Заметим, что тензор Леви-Чивиты $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ является, на самом деле, псевдотензором (стр. 18). Истинный тензор Леви-Чивиты может быть записан как $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \varepsilon\, \boldsymbol{\mathcal{E}}$. Представление истинного тензора Леви-Чивиты одинаково во всех ортонормированных базисах независимо от их ориентации и имеет вид $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_2$. Если при переходе от одного базиса к другому ориентация базиса не меняется, то разницы между тензорами и псевдотензорами никакой нет.

Среди тензоров четвёртого ранга особую роль играют так называемые **изотропные**[77] тензоры, которые нашли применение, в первую очередь, для описании физических свойств различных материалов. Тензор произвольного ранга называется **изотропным**, если при любых ортогональных преобразованиях векторного базиса координаты тензора остаются неизменными.

Следующие ниже утверждения относятся к истинным тензорам.

Любой тензор нулевого ранга (скаляр) является изотропным тензором. Поэтому произведение изотропного тензора на скаляр – изотропный тензор. Для тензоров нечётного ранга существует утверждение [5], что никакой тензор

[77] **Изотропи́я**, **изотро́пность** (от др.-греч. *ἴσος* – равный, одинаковый, подобный; и *τρόπος* – оборот, поворот; характер) – одинаковость свойств во всех направлениях, инвариантность, симметрия по отношению к выбору направления.

нечётного ранга (кроме нулевого) не может быть изотропным, потому что он меняет знак при инверсии (несобственно ортогональном преобразовании – ортогональном преобразовании, сопровождающимся зеркальным отражением) пространства. Изотропным тензором второго ранга является любой шаровой тензор $\alpha\,\mathbf{E}$. Тензоры высшего (чётного) ранга, представляемые через единичный (метрический) тензор $\mathbf{E}$, изотропны. Кроме того, любая перестановка векторов, стоящих на одних и тех же местах в каждом кортеже *изотропного* тензора, также является изотропным тензором [5]. Теорема **об общем представлении изотропного тензора** утверждает: любой изотропный тензор чётного ранга $2k$ представляет собой линейную комбинацию перестановок тензора $\underbrace{\mathbf{E}\,\mathbf{E}\ldots\mathbf{E}}_{k\text{ раз}}$.

Тензор произвольного ранга называется **гиротропным**[78], если при любых *собственно* ортогональных преобразованиях векторного базиса координаты тензора остаются неизменными.

Примером гиротропного тензора является истинный тензор Леви-Чивитты. Теорема **об общем представлении гиротропного тензора** утверждает: любой гиротропный тензор нечётного ранга $2k+1$ представляет собой линейную комбинацию перестановок тензора $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\,\underbrace{\mathbf{E}\,\mathbf{E}\ldots\mathbf{E}}_{k-1\text{ раз}}$. Кроме того, очевидно, что если тензор чётного ранга является гиротропным, то он будет и изотропным.

Понятие изотропности и гиротропности применимы и к псевдотензорам. Псевдотензор Леви-Чивиты $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ является изотропным. Псевдотензоры чётного ранга могут быть только гиротропными [5].

Изотропными тензорами четвёртого ранга, несводимыми друг к другу, являются три тензора [10]

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{I} = \mathbf{E}\,\mathbf{E} = \mathbf{r}_k\mathbf{r}^k\mathbf{r}_n\mathbf{r}^n\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{II} = \mathbf{r}_k\mathbf{r}_n\mathbf{r}^k\mathbf{r}^n\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{III} = \mathbf{r}_k\,\mathbf{E}\,\mathbf{r}^k = \mathbf{r}_k\mathbf{r}_n\mathbf{r}^n\mathbf{r}^k\,, \tag{180}$$

представления которых через базисные векторы допускают эквивалентные записи. Так для тензора $\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$ в каждой из диад $\mathbf{r}_k\mathbf{r}^k$, $\mathbf{r}_n\mathbf{r}^n$ допустима замена верхнего индекса нижним, нижнего – верхним. В $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II}$ переставимы диады $\mathbf{r}_k\mathbf{r}_n$, $\mathbf{r}^k\mathbf{r}^n$; их можно записать и в видах $\mathbf{r}_k\mathbf{r}^n$, $\mathbf{r}^k\mathbf{r}_n$. В $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}$ переставимы первый вектор с четвёртым, второй с третьим.

Общее выражение изотропного тензора четвёртого ранга может быть записано в виде [10]

$${}^{(4)}\!\boldsymbol{\mathcal{C}} = \lambda\boldsymbol{\mathcal{C}}_I + \mu\left(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II} + \boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}\right) + \nu\left(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III} - \boldsymbol{\mathcal{C}}_{II}\right). \tag{181}$$

[78] от др.-греч. $\gamma\tilde{\upsilon}\varrho o\varsigma$ – круг; и $\tau\varrho\acute{o}\pi o\varsigma$ – прим. на стр. 70

Двукратное свёртывание $\boldsymbol{\mathcal{C}}_K\cdot\cdot\boldsymbol{\mathcal{C}}_N$, $(K,\, N = I,\, II,\, III)$ приводит к одному из этих же изотропных тензоров, как показано в таблице ниже

	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II}$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$	$3\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$
$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II}$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_I$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II}$	$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}$

Двойная свёртка с произвольным тензором второго ранга приводит к тензорам

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_I\cdot\cdot\,\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_I = I_1(\mathbf{L})\,\mathbf{E}\,, \tag{182}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II}\cdot\cdot\,\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,, \tag{183}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}\cdot\cdot\,\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III} = \mathbf{L}\,. \tag{184}$$

Поэтому двукратное свёртывание с $\dfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II} + \boldsymbol{\mathcal{C}}_{III})$ выделяет симметричную, а с $\dfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III} - \boldsymbol{\mathcal{C}}_{II})$ – кососимметричную часть тензора $\mathbf{L}$. Приходим к соотношению

$$[\lambda\boldsymbol{\mathcal{C}}_I + \mu\,(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{II} + \boldsymbol{\mathcal{C}}_{III}) + \nu\,(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{III} - \boldsymbol{\mathcal{C}}_{II})]\cdot\cdot\,\mathbf{L} = \lambda\, I_1(\mathbf{L})\,\mathbf{E} + 2\mu\,\overset{(\mathrm{S})}{\mathbf{L}} + 2\nu\,\overset{[\mathrm{A}]}{\mathbf{L}}\,. \tag{185}$$

9 АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА

Тензорной функцией называется отображение, ставящее в соответствие нескольким тензорам различных рангов из некоторого множества тензор ранга s . Если $s = 0$, функцию называют скалярной функцией тензорного аргумента. Если $s = 1$, функцию называют векторной функцией тензорного аргумента. Если $s \geqslant 2$, функцию называют тензорной функцией тензорного аргумента.

Рассмотрим особо случай функции одного тензорного аргумента. Причём аргументом и значением функции являются тензоры второго ранга.

Если тензорно-значную функцию тензорного аргумента $f(\mathbf{X})$, представляющую собой отображение, ставящее в соответствие тензору второго ранга тензор второго ранга, можно представить в виде сходящегося степенного ряда

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\mathbf{X}^k\,, \tag{186}$$

то такая тензорная функция называется **аналитической** или **полиномиальной**. c_k – константы, $\mathbf{X}^0 = \mathbf{E}$. Сходимость ряда понимается по норме $||\mathbf{X}|| = \sqrt{\mathbf{X}\cdot\cdot\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}}$.

Полиномиальная функция (186) является **изотропной**. Условием изотропности рассматриваемых тензорных функций $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}_2$ является совпадение преобразованных значений функции со значениями функции на преобразованных аргументах при любых ортогональных преобразованиях, то есть для любого ортогонального тензора $\boldsymbol{\mathcal{O}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot f(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}} = f(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}) . \tag{187}$$

Данное выше определение аналитической функции позволяет, пользуясь разложениями соответствующих элементарных скалярных функций, ввести такие функции как $\sin \mathbf{X}$, $\exp \mathbf{X}$ и т.п. В том случае, если аргумент функции представляет собой симметричный тензор, используя канонический вид (114), получим равенство

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= f(\lambda_{(1)}\, \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \lambda_{(2)}\, \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + \lambda_{(3)}\, \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \lambda_{(1)}^k\, \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \lambda_{(2)}^k\, \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \lambda_{(3)}^k\, \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)} = \\ &= f(\lambda_{(1)})\, \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + f(\lambda_{(2)})\, \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + f(\lambda_{(3)})\, \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)} , \end{aligned} \tag{188}$$

которое позволяет ввести эквивалентные определения функциям вида $\sin \mathbf{X}$, $\exp \mathbf{X}$ и т.п. Например:

$$\sin \mathbf{X} = \sin \lambda_{(1)}\, \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \sin \lambda_{(2)}\, \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + \sin \lambda_{(3)}\, \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)} . \tag{189}$$

Таким образом, любой полиномиальной изотропной тензорной функции может быть сопоставлена обычная функция скалярного аргумента $f(\lambda)$. Верно и обратное утверждение: по любой полиномиальной обычной функции можно образовать изотропную тензорную функцию.

Транспонированием соотношения (186) устанавливается важное свойство полиномиальной функции:

$$[f(\mathbf{X})]^{\mathrm{T}} = f(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}) . \tag{190}$$

Кроме того, воспользовавшись теоремой Гамильтона-Кэли (стр. 7.4), любую изотропную полиномиальную тензорную функцию всегда можно представить в виде:

$$f(\mathbf{X}) = \varphi_0\, \mathbf{E} + \varphi_1\, \mathbf{X} + \varphi_2\, \mathbf{X}^2 , \tag{191}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(I_1(\mathbf{X}),\, I_2(\mathbf{X}),\, I_3(\mathbf{X}))$ – скалярные функции от инвариантов тензора $\mathbf{X}$.

Рассмотрим тензорную функцию

$$\exp \mathbf{X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \mathbf{X}^k . \tag{192}$$

Для экспоненты от тензора свойство обычной экспоненты $\exp(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \exp(\mathbf{X}_1) + \exp(\mathbf{X}_2)$ выполняется лишь для коммутирующих тензоров, то есть при условии $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1$. При этом

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} C_k^n \, \mathbf{X}_1^n \cdot \mathbf{X}_2^{k-n} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n! \, (k-n)!} \mathbf{X}_1^n \cdot \mathbf{X}_2^{k-n} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{n!} \mathbf{X}_1^n \right) \cdot \left[\frac{1}{(k-n)!} \mathbf{X}_2^{k-n} \right] = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{X}_1^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{X}_2^k \right) = \exp(\mathbf{X}_1) + \exp(\mathbf{X}_2) \, .
\end{aligned} \tag{193}$$

Здесь использовано правило Коши для произведения бесконечных абсолютно сходящихся рядов

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \, b_{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_k \, b_n \, . \tag{194}$$

Пусть теперь тензор $\mathbf{X} = \mathbf{A}$ является кососимметричным тензором ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$), тогда по (191)

$$(\exp \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \exp \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \exp(-\mathbf{A}) \, . \tag{195}$$

Умножив теперь $\exp \mathbf{A}$ на транспонированный к нему, по (193) и (195) получим:

$$\exp \mathbf{A} \cdot (\exp \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \exp(\mathbf{A} - \mathbf{A}) = \mathbf{E} \, . \tag{196}$$

Таким образом, экспонента от кососимметричного тензора образует ортогональный тензор.

Список литературы

[1] Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 352 с.

[2] Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления – М.: Высшая школа, 1966. – 252 с.

[3] Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.

[4] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. – СПб: Нестор, 2001. – 276 с.

[5] Зубов Л.М., Карякин М.И. Элементы тензорного исчисления. – Ростов: РГУ, 2003. – 108 с.

[6] Кильчевский Н.А. Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. – М.: Гостехиздат, 1954. – 168 с.

[7] Коренев Г.В. Тензорное исчисление: Учеб. пособие: Для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 240 с.

[8] Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 427 с.

[9] Лагалли М Векторное исчисление в применении к математической физике. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 344 с.

[10] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. – 512 с.

[11] Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

[12] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 411 с.

[13] Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа: Учебное пособие. — СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 109 с.

[14] Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 264 с.

[15] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1967. -– 664 с.

[16] Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и механике сплошных сред. – М.: Наука, 1971. – 376 с.

[17] Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков – М.: Наука, 1965. – 456 с.

[18] Федоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. – Минск: Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.

[19] Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций: Учеб. пособие для мех.-мат. и физич. фак-тов ун-тов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 253 с.

[20] Широков П.А. Тензорное исчисление: алгебра тензоров. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1961. – 447 с.