МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

Эгамов А.И., Приставченко О.В.

Элементы высшей математики

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
46.03.02 «Документоведение и архивоведение»

Нижний Новгород
2017

УДК 005.92 (075.8)
ББК 381я73

Э 82 Эгамов А.И., Приставченко О.В. Элементы высшей математики: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017.

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент А.В. Калинин.

Учебно-методическое пособие содержит материалы лекционных и практических занятий, которые могут быть полезны для организации текущего, промежуточного контроля и самостоятельной работы студентов направления 46.03.02 «Документоведение и архивоведение» по учебной дисциплине «Элементы высшей математики».

УДК 005.92 (075.8)
ББК 381я73

Оглавление

Часть 1. Элементы линейной алгебры

Матрица – это прямоугольная таблица размерности $m \times n$, заполненная числами. Здесь m — число строк таблицы, n — число столбцов. Как правило, матрицы обозначается заглавными буквами ее элементы - строчными:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} стоит на пересечении $i-$той строки и $j-$того столбца. Если задана вторая матрица B размерности $m \times n$ с элементами b_{ij}, то она считается равной матрице A тогда и только тогда, когда соответствующие элементы равны, то есть $a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}.$

Матрица размерности $1 \times n$ называется вектор-строкой $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, матрица размерности $m \times 1$ называется вектор-столбцом $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$.

Если все элементы матрицы равны нулю, то она называется нулевой. Если $m = n$ матрица называется квадратной. Диагональ, проходящая через левый верхний и правый нижний угол, называется главной.

Квадратная матрица, у которой все $a_{ij} = 0,\ i \neq j,$ называется диагональной.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной и обозначается E, например, для $m = n = 3$ она имеет вид: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрицы можно складывать, вычитать, умножать на число и друг на друга по определенным правилам.

Складывать и вычитать можно только матрицы одной размерности, при этом получается матрица той же самой размерности. Если $C = A \pm B$, то $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\quad i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}.$

Пример 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 31 \end{pmatrix}.$

Пример 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & -13 \end{pmatrix}.$

Еще проще умножать матрицу на константу (действительное число), при этом каждый элемент матрицы умножается на эту константу:

Пример 3: $5\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{pmatrix}$.

Для того, чтобы умножать матрицу на матрицу необходимо и достаточно, чтобы число столбцов первой матрицы равнялось бы числу строк второй матрицы. В результате получается матрица, у которой число строк равно числу строк первой матрицы, а число столбцов ─ числу столбцов второй матрицы. Это означает, что если $A\times B=C$, причем матрица A размерности $m\times n$, то матрица B имеет размерность $n\times k$, а матрица C имеет размерность $m\times k$. Матрица C определяется формулой:

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj},$$

где $i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,k}.$

Пример 4: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$.

Пример 5:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 4 & 3 & 20\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot4 & 1\cdot1+2\cdot5+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot20\\ 4\cdot1+5\cdot0+6\cdot4 & 4\cdot1+5\cdot5+6\cdot3 & 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot20\\ 7\cdot1+8\cdot0+9\cdot4 & 7\cdot1+8\cdot5+9\cdot3 & 7\cdot1+8\cdot2+9\cdot20\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13 & 20 & 65\\ 28 & 47 & 134\\ 43 & 74 & 203\end{pmatrix}.$$

Внимание!

Для матриц $A\times B\neq B\times A$. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 8 & 5\\ 9 & 3\end{pmatrix}$.

Тогда $A\times B=\begin{pmatrix}1\cdot7+2\cdot8+3\cdot9 & 1\cdot0+2\cdot5+3\cdot3\\ 4\cdot7+5\cdot8+6\cdot9 & 4\cdot0+5\cdot5+6\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50 & 19\\ 122 & 43\end{pmatrix}$.

$$B\times A=\begin{pmatrix}7\cdot1+0\cdot4 & 7\cdot2+0\cdot5 & 7\cdot3+0\cdot6\\ 8\cdot1+5\cdot4 & 8\cdot2+5\cdot5 & 8\cdot3+5\cdot6\\ 9\cdot1+3\cdot4 & 9\cdot2+3\cdot5 & 9\cdot3+3\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14 & 21\\ 28 & 41 & 54\\ 21 & 33 & 45\end{pmatrix}.$$

Однако, справедлив сочетательный закон, то есть
$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$.

Определитель матрицы ─ это число, которое ставится в соответствие каждой квадратной матрице последующим правилам:

если $n = 1$, то матрица вырождается в число. Это число и является определителем.

если $n = 2$, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ($|A|$ – определитель матрицы A).

если $n = 3$, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Определитель матриц 4×4 и выше вычисляется сложнее и его изучение не входит в настоящий курс лекций по высшей математике.

Пример 6: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

Пример 7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 =$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Проще всего вычисление определителя понимается следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix},$$

где жирными точками показаны элементы, которые нужно перемножать.

Пусть дана матрица A размерности $m \times n$. Для натурального $k \leq \min(m, n)$ зачеркнем в матрице A какие-либо k строк и k столбцов. Элементы матрицы, находящиеся на их пересечении образуют квадратную матрицу $k \times k$. Ее определитель называется определителем $k-$го порядка, порожденным матрицей A.

Рангом матрицы называется наибольшее натуральное число k, для которого существует не равный нулю определитель $k-$го порядка, порожденным матрицей A (обозначается rgA.). Ранг матрицы существует для всех (не только квадратных!) матриц.

Пример 8: $rg\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad rg\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad rg\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,.$

Пример 9: Ранг матрицы примера 7 равен двум, так как единственный определитель 3×3 (определитель самой матрицы) равен нулю. Однако, взяв, например, первую и вторую строку, а также первый и второй столбец получим $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0.$

Справедливо следующее утверждение: для матрицы A размерности $n \times n$ определитель матрицы A не равен нулю тогда и только тогда, когда ранг матрицы равен n.

Квадратная матрица, которая при умножении на квадратную матрицу A слева дает в результате единичную матрицу, называется обратной и обозначается A^{-1}.

$A^{-1}A = E.$

Обратная матрица существует только у матриц, определитель которых не равен нулю. Не существует двух различных обратных матриц для одной и той же матрицы $A.$. Кроме того, она обладает также свойством:

$AA^{-1} = E.$

Обратную матрицу можно найти по следующему правилу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, - это алгебраическое дополнение к матрице A. Это число, которое вычисляется по формуле:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

где M_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, - определитель матрицы, которая получается при вычеркивании из матрицы A $i-$ой строки и $j-$ого столбца.

Пример 10: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \neq 0.$

Вычисляем алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4;$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1;$

тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1.5 \cdot 1 + (-0.5) \cdot 3 & 1.5 \cdot 2 + (-0.5) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 11: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 1 \cdot 6 \cdot 8 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 105 - 0 - 48 = 27.$$

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 48 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 42) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 24) = 24;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 21) = -21;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 14) = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3;$$

Из этого следует, что

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{16}{9}\cdot 1 + \frac{8}{9}\cdot 4 - \frac{1}{9}\cdot 7 & -\frac{16}{9}\cdot 2 + \frac{8}{9}\cdot 5 - \frac{1}{9}\cdot 8 & -\frac{16}{9}\cdot 3 + \frac{8}{9}\cdot 6 - \frac{1}{9}\cdot 0 \\ \frac{14}{9}\cdot 1 - \frac{7}{9}\cdot 4 + \frac{2}{9}\cdot 7 & \frac{14}{9}\cdot 2 - \frac{7}{9}\cdot 5 + \frac{2}{9}\cdot 8 & \frac{14}{9}\cdot 3 - \frac{7}{9}\cdot 6 + \frac{2}{9}\cdot 0 \\ -\frac{1}{9}\cdot 1 + \frac{2}{9}\cdot 4 - \frac{1}{9}\cdot 7 & -\frac{1}{9}\cdot 2 + \frac{2}{9}\cdot 5 - \frac{1}{9}\cdot 8 & -\frac{1}{9}\cdot 3 + \frac{2}{9}\cdot 6 - \frac{1}{9}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных уравнений

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

называется системой линейных уравнений. Здесь a_{ij}, b_i, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, — некоторые известные действительные константы, а x_i, $i = \overline{1,n}$, — неизвестные переменные. Число n называется размерностью системы. Вначале будут рассматриваться системы у которых число уравнений совпадают с числом неизвестных.

Нетрудно видеть, что любую систему линейных уравнений можно записать в матричном виде

$$Ax = b, \qquad (2)$$

где A — матрица размерности $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

x, b — вектор-столбцы:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Для решения систем линейных уравнений существует много различных приемов. Мы познакомимся с тремя основными методами.

Справедлива следующая теорема

Теорема: *Если определитель матрицы коэффициентов* $|A|$ *не равен нулю, то существует единственное решение системы линейных уравнений; если же* $|A| = 0$*, то либо решения нет, либо существует бесконечно много различных решений системы.*

Для начала вспомним школьную программу и рассмотрим случай одного уравнения ($n = 1$). Решим уравнение

$$px = q, \qquad (3)$$

где p и q — некоторые константы. Если $p \neq 0$, то $x = \frac{q}{p}$. Если $p = 0$, то возможны 2 случая. Если $q = 0$, то уравнение переписывается в виде $0x = 0$, значит любое $x \in R$ является решением уравнения (3), если $q \neq 0$, то решений нет.

В общем случае определитель матрицы коэффициентов играет роль «коэффициента перед неизвестной переменной».

Рассмотрим систему уравнений (2) в случае $|A| \neq 0$.

1. Метод Крамера

Пусть Δ_i ─ определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i-го столбца на вектор-столбец b. Тогда если $|A| \neq 0$, то

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}.$$

Отметим важность условия $|A| \neq 0$, так как делить на ноль нельзя.

Пример 1: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 13 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}.$$

В данном примере $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1 \neq 0$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} = 13 \cdot 4 - 18 \cdot 3 = 52 - 54 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot 18 - 3 \cdot 13 = 36 - 39 = -3.$$

Следовательно $x_1 = \dfrac{-2}{-1} = 2$, $x_2 = \dfrac{-3}{-1} = 3$.

Пример 2: Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = 15 \end{cases}$.

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 27.$$

Вычисляем Δ_i, $i = \overline{1,3}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 15 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot5\cdot0 + 2\cdot6\cdot15 + 3\cdot8\cdot3 - 3\cdot5\cdot15 - 2\cdot3\cdot0 - 0\cdot6\cdot8 = 27.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0 + 0\cdot6\cdot7 + 4\cdot15\cdot3 - 3\cdot3\cdot7 - 0\cdot4\cdot0 - 1\cdot6\cdot15 = 27.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot15 + 2\cdot3\cdot7 + 4\cdot8\cdot0 - 0\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot15 - 1\cdot3\cdot8 = -27.$$

Поэтому $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/27 \\ 27/27 \\ -27/27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Метод обратной матрицы

В предыдущей лекции было сказано, что если $|A| \neq 0$, то существует единственная обратная матрица A^{-1} такая, что $A^{-1}A = E$.

Рассмотрим систему (1) в матричном виде (2). Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow \quad Ex = A^{-1}b \Rightarrow \quad x = A^{-1}b.$$

Так как матрица A^{-1} определяется единственным образом, решение системы (1) единственно. В случае, когда b является нулевым вектором, решение системы также нулевой вектор: $x = A^{-1}0 = 0$.

Пример 3: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 13 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}.$$

Аналогично примеру 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot4 - 3\cdot3 = -1 \neq 0$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (как вычисляется A^{-1} см. лекцию 1). Тогда

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot13 + 3\cdot18 \\ 3\cdot13 + (-2)\cdot18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4: Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=3 \\ 7x_1+8x_2 \qquad\;\; =15 \end{cases}$.

Аналогично примеру 2 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\3\\15\end{pmatrix}$. В лекции 1 для данной матрицы A вычислена матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\ \frac{-1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$. Поэтому

$$x=A^{-1}b=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}\cdot 0+\frac{8}{9}\cdot 3-\frac{1}{9}\cdot 15\\ \frac{14}{9}\cdot 0-\frac{7}{9}\cdot 3+\frac{2}{9}\cdot 15\\ -\frac{1}{9}\cdot 0+\frac{2}{9}\cdot 3-\frac{1}{9}\cdot 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

3. Метод Гаусса

Расширенной матрицей называется матрица, полученная приписыванием справа к матрице A вектора b. Нетрудно видеть, что решать систему линейных уравнений, можно оперируя лишь этой матрицей.

Если

1) любую строку расширенной матрицы умножить (разделить) на некоторое ненулевое действительное число;
2) из любой строки вычесть «почленно» другую строку, предварительно умноженную на некоторое действительное число;
3) любые строки поменять местами;

то получим матрицу, описывающую эквивалентную (т.е. имеющую те же самые решения) систему линейных уравнений. Преобразования 1) и 2) назовем эквивалентными преобразованиями.

Цель метода Гаусса: посредством эквивалентных преобразований получить матрицу вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&\bar{a}_{12}&\bar{a}_{13}&\bar{b}_1\\0&1&\bar{a}_{23}&\bar{b}_2\\0&0&1&\bar{b}_3\end{array}\right)$$

для 3 неизвестных переменных. На «главной диагонали» (совпадающей с главной диагональю матрицы A) у этих матриц стоят единицы, а ниже ее нули. (Над остальными элементами специально поставлены черточки, чтобы подчеркнуть их отличие от элементов матрицы в начальной постановке задачи.) Для систем большей размерности представление матриц аналогично. Например, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{a}_{34} & \bar{b}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{b}_4 \end{array}\right)$ для 4 неизвестных переменных.

Решение системы после преобразований представляется в виде

$$x_n = \bar{b}_n$$
$$x_{n-1} = \bar{b}_{n-1} - \bar{a}_{n-1\ n} x_n$$
$$\ldots$$
$$x_1 = \bar{b}_1 - \sum_{j=2}^{n} \bar{a}_{1j} x_j,$$

где n - число неизвестных. О том, как приводить матрицу к нужному виду, поясним на примерах:

Пример 5: Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = 15 \end{cases}$.

Шаг 1. Составим расширенную матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 0 & 15 \end{array}\right)$.

Рассматриваем элемент первой строки, стоящий на главной диагонали. В левом верхнем углу уже стоит единица. Если бы на ее месте стояло бы произвольное число $a \neq 0$, то всю строку необходимо было бы разделить на a. Если $a = 0$, то нужно проверить, имеются ли в этом столбце ненулевые элементы матрицы в строках с большими номерами (ниже главной диагонали). Если да, то меняем местами исходную строку и найденную строку с ненулевым элементом в рассматриваемом столбце. Эту проверку нужно производить в начале каждого шага.

Для того чтобы получить вместо числа 4 в первом столбце второй строки число 0, умножим первую строку на 4 и вычтем ее из второй. Получим матрицу, в которой изменена только вторая строка $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 7 & 8 & 0 & 15 \end{array}\right)$. Аналогично, чтобы получить вместо числа 7 в первом столбце третьей строки число 0, умножим первую строку на 7 и вычтем ее из третьей. Получим матрицу, в которой на этот раз изменилась третья строка $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & -21 & 15 \end{array}\right)$.

Обратите внимание, что первая строка остается без изменений! Цель первого шага достигнута — в первом столбце ниже «главной диагонали» стоят нули.

Шаг 2. Рассматривается элемент второй строки, стоящий на главной диагонали (т.е. во втором столбце): $-3 \neq 0$.

Разделим вторую строку на (-3): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -21 & 15 \end{array}\right)$.

Чтобы получить вместо числа -6 во втором столбце третьей строки число 0, умножим вторую строку на -6 и вычтем ее из третьей: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{array}\right)$.

Шаг 3. Рассматривается элемент третьей строки, стоящий на главной диагонали (т.е. в третьем столбце): $-9 \neq 0$.

Разделим третью строку на -9: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

Вычислим неизвестные значения переменных:

$x_3 = -1$,

$x_2 = -1 - 2 \cdot x_3 = -1 - 2 \cdot (-1) = 1,$

$x_1 = 0 - 2x_2 - 3x_3 = 0 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 1.$

Ответ: $x = (1,1,-1)^T$.

Ниже приводится аналогичный пример без подробных комментариев, который позволяет закрепить изучаемый материал. Символ ~ означает эквивалентные преобразования.

Пример 6: Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 8 \\ -4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$.

Решение:

Шаг 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 8 \\ -4 & 4 & 8 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

Шаг 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 0 & 4{,}5 & -9 \end{array}\right)$$

Шаг 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 0 & 4{,}5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

$x_3 = -2$,

$$x_2 = 4 - 0{,}5 \cdot x_3 = 4 - 0{,}5 \cdot (-2) = 5,$$
$$x_1 = 2 + x_2 + 2x_3 = 2 + 5 + 2 \cdot (-2) = 3.$$

Ответ: $x = (3{,}5{,}-2)^T$.

Часть 2. Элементы математического анализа

Теория последовательностей

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определённая на множестве N натуральных чисел. Аргумент этой функции обычно обозначается n, а сама функция – буквой с индексом внизу: a_n, b_n, x_n и т.п. Таким образом, бесконечная последовательность задана, если указан закон, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие определённое число a_n. Бесконечная последовательность $a_n, n \in N$, записывается в виде: $a_1; a_2; ...; a_n; ...$ или кратко $\{a_n\}$. Числа a_1, a_2, a_n называются элементами или членами последовательности, a_1 — первым членом, a_2 — вторым, a_n — n-ым членом последовательности.

Последовательности задаются различными способами. Например, указывается формула, связывающая значение n-го члена последовательности с его номером для любого натурального n, (такова последовательность а) см. ниже). Закон соответствия между номером члена и значением этого члена может быть задан словесно, как, например, в последовательности б). Используется также рекуррентный способ: задаются несколько первых членов последовательности и формула, называемая рекуррентным соотношением, выражающая следующие члены последовательности через предыдущие, например, последовательность в).

Пример 1:

а) каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $\frac{n-1}{n+1}$, тем самым определяется последовательность:

$$0;\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{5};...;\frac{n-1}{n+1};...$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

б) каждому натуральному числу n сопоставляется число, равное n - му десятичному знаку после запятой числа $\frac{1972}{2005}$ в десятичной записи. Этот закон соответствия определяет последовательность, у которой $a_1 = 9, a_2 = 8, a_3 = 3, a_4 = 5.$

в) пусть $a_1 = 1,\ \ a_n = 2a_{n-1} + 3$ при $n \geq 2$.

г) $a_n = c$, где c- некоторая константа, такая последовательность называется стационарной.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если

существуют два числа a *и* b *такие, что при всех* n *выполняются неравенства* $a \leq a_n \leq b$.

При этом говорят, что число a ограничивает последовательность снизу, а число b- сверху. Данному определению ограниченной последовательности равносильно следующее:

последовательность $\{a_n\}$ *называется ограниченной, если существует число* M *такое, что при всех* n *выполняется неравенство* $|a_n| \leq M$.

Последовательность, не являющаяся ограниченной, называется неограниченной, т.е для любого числа M, существует такое n, для которого выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Пример 2: Доказать, что последовательность $\{n\}$ не является ограниченной.

Предположим противное, т.е. предположим, что последовательность $\{n\}$ ограниченная. Это означает, что существует такое число M, что при всех n справедливо неравенство $|n| \le M$. Однако, например, для натурального числа $n = [M] + 1$ (здесь $[M]$ — целая часть числа M) это неравенство не выполняется. Следовательно, предположение неверно, т.е. последовательность $\{n\}$ не является ограниченной.

Если изображать члены последовательности точками координатной прямой, то все члены ограниченной последовательности лежат на некотором отрезке.

Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей, если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$. Последовательность $\{a_n\}$ называется убывающей, если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} < a_n$. Последовательность $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $a_{n+1} \ge a_n$ для любого n, и невозрастающей, если $a_{n+1} \le a_n$ для любого n.

Пример 3:

а) последовательность $\{n^2\}$ возрастающая, так как для любого натурального n имеет место $a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 = a_n$.

б) последовательность $(1/n)$ убывающая, так как для каждого n справедливо неравенство $1/(n+1) < 1/n$, т.е. $a_{n+1} < a_n$.

в) последовательность с n-м членом $a_n = [(n+1)/2]$ неубывающая: 1;1;2;2;3;3;…, где $[x]$ – означает целую часть числа x.

Все такие последовательности (возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие) называются монотонными.

Центральным понятием в математическом анализе является понятие предела последовательности.

Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ***имеет своим пределом число*** a ***(сходится к*** a***), т.е.***

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ ***существует число*** $N = N(\varepsilon)$ ***такое, что*** $|a_n - a| < \varepsilon$ ***при любом*** $n > N$.

В частности, a_n называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся. Нетрудно видеть, что предел стационарной последовательности $a_n = c$ равняется c.

Пример 4: Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Последнее неравенство верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Если $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то, при этом $n \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Пример 5: Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

Следующие неравенства эквивалентны при $|q| < 1$:

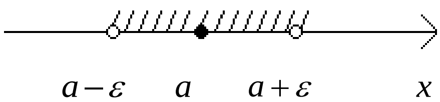
$$\left|q^n - 0\right| < \varepsilon, \quad |q|^n < \varepsilon, \quad n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Если $N = [\log_{|q|} \varepsilon]$, то, при этом $n \ge [\log_{|q|} \varepsilon] + 1 > \log_{|q|} \varepsilon$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = [\log_{|q|} \varepsilon]$ такое, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $\left|q^n - 0\right| < \varepsilon$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

Геометрическая интерпретация. Заметим, что неравенство $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$ равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \text{ или } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Это означает, что число a_n принадлежит интервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$.Такой интервал называется ε- окрестностью точки a.



Определение предела можно перефразировать следующим образом, придав ему геометрическую интерпретацию: число a называется пределом последовательности (a_n), если в любую ε- окрестность числа a попадают все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа их. Действительно, если $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что члены последовательности с номерами $n > N$ лежат в ε- окрестности числа a и, значит, вне этой окрестности могут находиться только первые N членов последовательности. В силу произвольности ε имеем: Если предел существует, то он единственен!

Пример 6: Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

В ε - окрестность точки нуль:

при $\varepsilon = \frac{1}{10}$ попадают все члены последовательности, кроме первых десяти, так как $-\frac{1}{10} < \frac{(-1)^n}{n} < \frac{1}{10}$ при $n \geq 11$;

при $\varepsilon = \frac{1}{100}$ - все члены последовательности, кроме первых ста, так как

$$-\frac{1}{100} < \frac{(-1)^n}{n} < \frac{1}{100} \text{ при } n \geq 101.$$

Теоремы о существовании предела.

Теорема 1(о двух милиционерах).

Предположим, что начиная с некоторого n *выполняются неравенства*

$$y_n \leq x_n \leq z_n;$$

Причем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Пример 7: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$.

Нетрудно видеть, что $0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$.

Теорема 2 (Вейерштрасса).

Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

Это очень важная в математическом анализе теорема даёт достаточные условия существования предела последовательности. Из теоремы Вейерштрасса следует, например, что последовательность площадей правильных n-угольников, вписанных в окружность единичного радиуса, имеет предел, так как является возрастающей и ограниченной последовательностью. Предел этой последовательности обозначается π.

Теорема 3 (Критерий Коши). *Для существования предела последовательности* $\{x_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что при любом* $n > N$ *и любом натуральном* $p > 0$

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| < \varepsilon .$$

Пример 8: Существует ли предел последовательности $x_n = (-1)^n$?

Из критерия Коши следует, что если предел не существует, то *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любого числа* N *имеются числа* $n > N$ *и натуральное* $p > 0$ *для которых*

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| \geq \varepsilon .$$

Возьмем любое $n > N$ и $p = 1$, тогда $\left|x_n - x_{n+1}\right| = 2$, поэтому последовательность $x_n = (-1)^n$ расходящаяся.

Для сходящихся последовательностей справедлива Теорема об арифметических действиях с пределами, которая при знании некоторых простейших пределов существенно упрощает нахождение других пределов.

Теорема 4. (Арифметические свойства пределов.) *Предположим, что существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty} x_n, c = const;$

б) $\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$

в) $\lim_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n;$

г) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, *если* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

д) если $x_n \leq y_n$, *то* $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, а последовательность y_n расходится. Будут ли сходится

последовательности $z_n = x_n y_n$ *и* $s_n = x_n + y_n$. Оказывается s_n обязательно расходится, так как в противном случае, последовательность $s_n - x_n$ по Теореме 4 была бы сходящейся, но это и есть последовательность y_n, а она расходится.

Последовательность z_n может как сходиться, так и расходиться. Например, 1.) $x_n = 0,\ y_n = (-1)^n,\ z_n = 0$ -сходится;

2.) $x_n = 1,\ y_n = (-1)^n,\ z_n = (-1)^n$ -расходится;

Доказать от противного, аналогично описанному выше не удается, т. к. необязательно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n},\ \textit{если}\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Пример 9: Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 - 3n}{n^2 + 2}$.

Так как $\dfrac{7n^2 - 3n}{n^2 + 2} = \dfrac{7 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то, применяя Теорему 4, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2 - 3n}{n^2 + 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7 - \frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{7 - 3\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{1 + 2\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2} = 7.$$

Пример 10: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

а) Случай $a = 0$. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ по числу ε^2 найдётся такое N, что при $n > N$ имеет место $|a_n| < \varepsilon^2$. Так как по условию $a_n \geq 0$ то, $0 \leq a_n < \varepsilon^2$. Но тогда при тех же $n > N$ выполняется неравенство $\left|\sqrt{a_n - 0}\right| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$.

б) Случай $a > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}.$$

Тогда при тех же $n > N$ будет справедливо неравенство:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon.$$

В обоих случаях доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Аналогично (попробуйте!), можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$ для произвольного a_n.

Пример 11: Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

В данном случае имеется неопределенность $\infty-\infty$. Так как

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$ (см. пример 10), то по Теореме 4 будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 12: Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt[3]{n^3+n})$.

В данном случае имеется неопределенность $\infty-\infty$. Так как по формуле разность кубов справедливо равенство:

$$(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt[3]{n^3+n})=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt[3]{n^3+n})((\sqrt[3]{(n^3+3n^2)^2}+\sqrt[3]{n^3+3n^2}\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2})}{((\sqrt[3]{(n^3+3n^2)^2}+\sqrt[3]{n^3+3n^2}\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2})}=$$

$$=\frac{3n^2-n}{((\sqrt[3]{(n^3+3n^2)^2}+\sqrt[3]{n^3+3n^2}\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2})}=$$

$$=\frac{3-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt[3]{n^3+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{1+1\cdot1+1}=1.$$

Бесконечно большие последовательности

Существуют, так называемые бесконечно большие последовательности, для которых пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, хотя на самом деле предела у них не существует : это «жаргон». По определению последовательность называется бесконечно большой, если

для любого $E>0$ ***существует число*** $N=N(E)$ ***такое, что*** $x_n>E$ ***при любом*** $n>N$**.**

Последовательность, обратная бесконечно малой является бесконечно большой. Например $x_n = \frac{1}{n}$- бесконечно малая. $1/x_n = X_n = n$- бесконечно большая. Так же последовательность обратная бесконечно большой является бесконечно малой.

Выше было доказано, что последовательность $\{n\}$- также неограничена. Эти понятия различны. Из того, что последовательность бесконечно большая следует, что она неограничена, обратное, вообще говоря, неверно. Например, последовательность $x_n = \begin{cases} n, n - \textit{четное} \\ 0, n - \textit{нечетное} \end{cases}$ - неограниченная, но не бесконечно большая.

Бесконечно большими последовательностями являются $\{\ln n\}, \{n^k\}, k > 0, \{a^n\}, a > 1, \{n!\}, \{n^n\}$.

Причем

$$\{\ln n << n^k << a^n << n! << n^n\},$$

где знак << означает,что если $b_n << c_n$, **то** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0$.

Предел функции в точке.

Назовем проколотой δ-окрестностью точки x_0 объединение интервалов $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$.

Определение предела функции в точке по Коши: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ если для

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$, и как только x принадлежит проколотой δ-окрестности точки x_0,

т.е. $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_0) - A| < \varepsilon$.

Определение предела функции в точке по Гейне: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ если для любой последовательности $\{x_n\}$, лежащей в проколотой δ-окрестности точки x_0 и сходящейся к точке x_0 справедливо свойство: $f(x_n) \to A.$.

Оба определения эквивалентны. Если функция имеет предел в точке x_0 по Коши, то она имеет там же предел и по Гейне и наоборот. Доказывать существование предела как правило удобнее по Коши, а отсутствие предела по Гейне.

Для предела функции в точке справедливы аналоги теорем о пределе последовательности

Если предел существует, то он единственен.

Аналог Теоремы о двух милиционерах: *Предположим, что существуют пределы*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

И окрестности точки x_0 *выполняются неравенства* $f(x) \le h(x) \le g(x)$. *Тогда* $\lim_{x \to x_0} h(x) = A$.

Аналоги Теоремы 4. (Арифметические свойства пределов.) *Предположим, что существуют пределы*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA \,, c = const;$

б) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$*;*

в) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$*;*

г) $\lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = A/B$, *если* $B \ne 0$.

д) если $x_n \le y_n$, *то* $A \le B$.

1 замечательный предел: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2 замечательный предел: $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Предел функции на бесконечности

Различают понятия $+\infty, -\infty$ *и* ∞. «Окрестность «Плюс бесконечности» - это интервал $(M; +\infty)$*, для достаточно большого* M. «Окрестность «Минус бесконечности» - это интервал $(-\infty; -M)$*, для достаточно большого* M. *А окрестность* бесконечности – это объединение этих двух интервалов.

Определение предела функции на $+\infty$ ***по Коши***: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$ если для

$\forall E > 0, \exists \Delta(E)$, и как только $x > \Delta(E)$, выполняется неравенство $|f(x_0) - A| < \varepsilon$.

Здесь $\Delta(E)$ играет роль «*для достаточно большого* M ».

Определение предела функции на $+\infty$ ***по Гейне***: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$ если для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \to +\infty$ справедливо свойство: $f(x_n) \to A$.

Оба определения эквивалентны. Если функция имеет предел в точке x_0 по Коши, то она имеет там же предел и по Гейне и наоборот. Доказывать существование предела как правило удобнее по Коши, а отсутствие предела по Гейне.

Определения предела на «минус бесконечности» и «бесконечности» аналогичны. Также справедливы аналоги теорем о пределе в точке.

Непрерывные функции

Определение непрерывности функции в точке: функция непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; функция непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке множества X.

Односторонние пределы:

Определение предела функции слева в точке по Коши: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$, если для $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon)$, и x принадлежит левой половине проколотой δ-окрестности точки x_0,

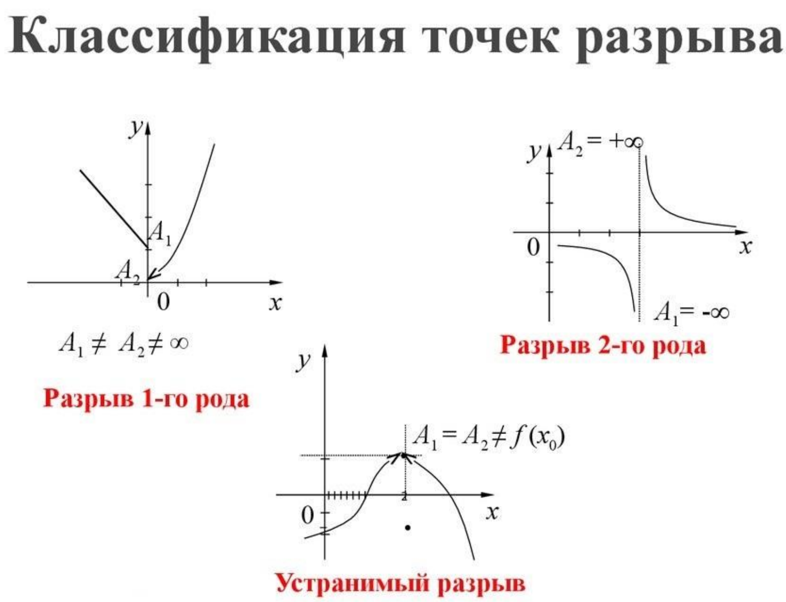
т.е. $0 < x_0 - x < \delta$, выполняется неравенство $\left|f(x_0) - A\right| < \varepsilon$.

Определение предела функции справа в точке по Гейне: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если для любой последовательности $\{x_n\}, x_n > x_0, x_n \to x_0$ справедливо свойство: $f(x_n) \to A$.

Пусть в точке x_0 функция разрывна: тогда если пределы слева и справа конечны, то такая точка называется точкой разрыва 1 рода. Если они еще и равны, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва. А если хотя бы один односторонний предел не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется точкой разрыва 2 рода.

Теорема: Для того, чтобы функция была непрерывна в точке x_0 необходимо и достаточно, чтоб ее предел слева в этой точке был бы равен пределу справа в этой точке и они соответственно были равны значению функции в точке x_0.

Для непрерывных функций предел и функцию можно менять местами, например, $\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)}$, здесь была использована непрерывная элементарная функция $y = \sqrt{x}$.



Элементарные функции непрерывны на области определения.

Рассмотрим пример 13. При $x \to 3$ по арифметическим свойствам пределов числитель стремится к 5, а знаменатель к 20. Учитывая непрерывность полиномов, подставляем вместо x число 3 и получаем ответ:

Пример 13: Найти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - x - 10}{x^3 - 7} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$.

Однако в ряде случаев возникает неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или 1^{∞}, или как в случае с последовательностями $\dfrac{\infty}{\infty}$.

В этих случаях необходимо владеть некоторыми методами раскрытия неопределенностей:

Пример 14: Найти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - x - 15}{x^3 - 27}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - x - 15}{x^3 - 27} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(2x + 5)(x - 3)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x + 5}{x^2 + 3x + 9} = \dfrac{11}{27}$

Эквивалентные функции.

Говорят, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

В пределах при умножении или делении можно заменять одну эквивалентную функцию на другую следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{p(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{p(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{p(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{p(x)} = 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{p(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{p(x)}$$

При $x \to 0$ удобно пользоваться так называемой таблицей эквивалентностей

ТАБЛИЦА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

При $x \to 0$ верны соотношения:

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim shx \sim thx \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x) \sim \frac{a^x - 1}{\ln a}$$

$$\log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a}; \quad (1 + x)^m - 1 \sim mx; \qquad 1 - \cos x \sim chx - 1 \sim \frac{x^2}{2}.$$

Пример 15: Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\arcsin 7x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\arcsin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{7x}=\dfrac{5}{7}$.

Пример 16: Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+5x)sh8x}{7^{\sin x^2}-1}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+5x)sh8x}{7^{\sin x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot 8x}{\ln 10\sin x^2\ln 7}=\dfrac{40}{\ln 10\ln 7}$.

Пример 17: Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 4x)}{\ln(\cos 5x)}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 4x)}{\ln(\cos 5x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos 4x-1)}{\ln(1+\cos 5x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{\cos 5x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{(4x)^2}{2}}{-\dfrac{(5x)^2}{2}}=\dfrac{16}{25}$.

Пример 18: Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$.

Решение: Применим 2 замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=e^1=e.$$

Пример 19: Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

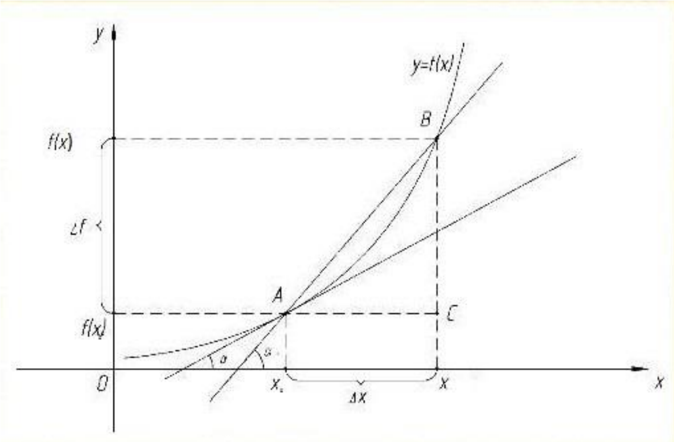
Решение: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+tgx-1)^{\frac{1}{tgx-1}tg2x(tgx-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2x(tgx-1)}=e^{-1}$,

поскольку $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2x(tgx-1)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}(tgx-1)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2tgx}{-1-tgx}=-1$.

Производная.

Зафиксируем точку x_0. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то есть*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$



Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной, проведенной к функции в точке x_0. Если функция имеет производную во всех точках множества X, то она дифференцируема на всем этом множестве.

Если функция дифференцируема, то она непрерывна. Производная очень важна для исследования графиков функций: если производная положительна на множестве X, то функция возрастает на множестве X, если отрицательна, то убывает.

Естественно, по определению производные вычисляют в крайних случаях. В основном их вычисляют по таблице производных с помощью правил дифференцирования. Заметим, что формула 9. – частный случай формулы 2.

Таблица производных:

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Правила дифференцирования:

1 $(cf(x))' = cf'(x)$; 3 $(f \cdot g)' = f'g + fg'$;

2 $(f \pm g)' = f' \pm g'$; 4 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;

Дифференцирование сложной функции: $(f(g(x)))' = f'(g)g'(x)$.

Производная обратной функции: $(y(x))' = \frac{1}{x'(y)}$.

Пример 20: Найти «табличную» производную функции $y = \sin x$ по определению.

Решение:

$$y'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} \lim_{x\to a} \frac{2\frac{x-a}{2}}{x-a} \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} == \cos a\,.$$

Пример 21: Найти производную функции $y = \frac{\sin 5x}{\cos 4x}$.

Решение: используем правило 4: $y' = \frac{5\cos 5x \cos 4x - \sin 5x(-4\sin 4x)}{\cos^2 4x}$.

Пример 22: Найти производную функции $y = \frac{tg(\arcsin 2x^3)}{\sqrt{arctg 4x}}$.

Решение: По правилам 4 и 5 имеем

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2(\arcsin 2x^3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x^6}}6x^2\cdot\sqrt{arctg4x} - tg(\arcsin 2x^3)\frac{1}{2\sqrt{arctg4x}}\cdot\frac{4}{1+16x^2}}{arctg4x}.$$

Пример 23: Найти производные

$y = \sin 3x$, $y' = 3\cos 3x$,

$y = \sin 3^x$, $y' = \cos 3^x \cdot 3^x \ln 3$,

$y = (\sin 3)^x$, $y' = (\sin 3)^x \cdot \ln\sin 3$,

$y = \sin x^3$, $y' = \cos x^3 \cdot 3x^2$,

$y = 3^{\sin x}$, $y' = 3^{\sin x}\ln 3 \cdot \cos x$,

$y = x^{\sin 3}$, $y' = \sin 3 \cdot x^{\sin 3 - 1}$,

Пример 24: Найти производную функции $y = x^x$.

Функция в степени функция! Подобных функций в таблице нет. Прежде чем брать производную, сделаем преобразование.

$$y' = (x^x)' = (e^{\ln x \cdot x})' = e^{\ln x \cdot x}(x \ln x)' = x^x (\ln x + \frac{x}{x}) = x^x (\ln x + 1)..$$

Пример 25: Найти производную функции $y = \arcsin x$.

Докажем «табличную производную» с помощью обратной функции.

Обратная функция $x = \sin y,\ y \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа в 2 ч-х. Часть 1. М.Физматлит, 2005г.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.Физматлит, 1999г.
3. Кудрявцев, *Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Том 1 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 703 с.