МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О.В. Приставченко, А.И. Эгамов

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.
ЧАСТЬ 2

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 46.03.02 «Документоведение и архивоведение»

Нижний Новгород
2019

УДК 005.92 (075.8)
ББК 381я73
П 77
Приставченко, О.В. Элементы высшей математики. Часть 2: учебно-метод. пособие / О.В. Приставченко, А.И. Эгамов. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 25 с.

Рецензент: проф. Д.С. Малышев

Учебно-методическое пособие содержит материалы лекционных и практических занятий, которые могут быть полезны для организации текущего, промежуточного контроля и самостоятельной работы студентов направления 46.03.02 «Документоведение и архивоведение» по учебной дисциплине «Математика».

УДК 005.92 (075.8)
ББК 381я73

Оглавление

Предисловие

Данное учебно-методическое пособие является второй частью УМП «Элементы высшей математики». После опубликования первой части прошло два года, за которые, по отзывам студентов, первая часть учебно-методического пособия зарекомендовала себя как полезный и доходчивый материал. В первой части была собрана основная часть материала, который необходим студентам при сдаче предмета в экзаменационную сессию. Однако, среди студенчества был запрос на более полную версию материала.

Вторая часть учебно-методического пособия «Элементы высшей математики» также предназначается, в первую очередь, для студентов направления 46.03.02 «Документоведение и архивоведение», а также для всех заинтересованных студентов гуманитарных направлений ННГУ.

Во второй части пособия имеется большое количество разобранных примеров, которые позволяют детально проследить последовательность применяемых в них методов и теорем по изучаемому материалу дисциплины «Математика».

Предполагается, что при прочтении второй части пособия студент всегда может обратиться для разъяснений к первой части пособия, хотя второй частью можно пользоваться и отдельно, так как в нем при необходимости повторяются основные определения и формулы.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Вычисление определителя посредством разложения матрицы по строке или столбцу

Продолжение. (Начало, см.[3].)

Матрица – это прямоугольная таблица размерности $m \times n$, заполненная числами. Здесь m— число строк таблицы, n— число столбцов. Как правило, матрицы обозначается заглавными буквами ее элементы - строчными:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} стоит на пересечении i –той строки и j –того столбца.

Определитель матрицы — это число, которое ставится в соответствие каждой квадратной матрице последующим правилам:

если $n = 1$, то матрица вырождается в число. Это число и является определителем.

если $n = 2$, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ($|A|$ –определитель матрицы A).

если $n = 3$, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

В действительности, настоящее определение определителя матрицы произвольной размерности имеет довольно таки сложную структуру для студента юридического факультета, см., например, [1], и простых формул (типа вышеописанных для $n = 2$ и 3) нет. Однако, определители матриц размерности 4×4 и выше можно вычислять с помощью разложений по какому-нибудь (любому) столбцу или строке. Какой бы столбец или строка не были бы взяты – результат получится один и тот же.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

где A_{ij}, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n},$ – это алгебраическое дополнение к матрице A, – число, которое вычисляется по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij}, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n},$ – определитель матрицы, которая получается при вычеркивании из матрицы A i– ой строки и j– ого столбца.

Пример 1: Вычислить определитель.

Раскрываем по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3+24-21=0\cdot$$

Как правило, определитель раскрывают по столбцу или строке, где больше нулей для облегчения вычислений. Например, если матрица «верхнетреугольная», т.е. ниже главной диагонали матрицы все ее элементы равны нулю, то, нетрудно видеть, что ее определитель равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 = 45.$$

Аналогичное утверждение проходит и для нижнетреугольной матрицы (у которой выше главной диагонали все элементы равны нулю).

Пример 2: Вычислить определитель 4-го порядка.

Раскрываем по второму столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & -3 \end{vmatrix} + 0 - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$-2\cdot\left(5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 0 + 7\cdot\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\right) - 1\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 0 + 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2\cdot(5\cdot(-9+12) + 7\cdot(42-6)) - ((-21+4) + 4\cdot(-10-49)) =$$

$$= -2\cdot 5\cdot 3 - 2\cdot 7\cdot 36 + 17 + 4\cdot 59 = -30 - 504 + 17 + 253 = -281.$$

Вычисление определителя аналогично методу Гаусса для СЛУ

Предыдущий способ – «не самый простой способ» вычислить определитель. Рассмотрим вычисление определителя аналогично методу Гаусса для системы линейных уравнений (далее СЛУ).

Справедливы следующие **правила** для вычисления определителя:

1) Если любую строку или столбец матрицы умножить (разделить) на некоторое ненулевое действительное число μ, то и определитель увеличится (уменьшится) в μ раз.

2) Если из любой строки вычесть «почленно» другую строку, предварительно умноженную на некоторое действительное число, то определитель не изменится;

3) Если любые строки или столбцы поменять местами, то определитель поменяет знак, (т.е. его нужно умножить на -1).

Пример 3: Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 12 \\ 9 & -12 & 81 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 9 & -12 & 81 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 27 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 22 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot 3\cdot(-8)\cdot 2 = 144.$$

Пример 4: Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 7 & -18 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -14 & -2 & -31 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -10 & 7 & -18 \\ 0 & -14 & -2 & -31 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 37 & 42 \\ 0 & 0 & 40 & 53 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 37 & 42 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -90 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -90 \\ 0 & 0 & 0 & 281 \end{vmatrix} = -281.$$

Поясняющие действия:

1. Умножаем первую строку на 5 и вычитаем из второй.
2. Умножаем первую строку на 7 и вычитаем из четвертой.
3. Меняем местами третью и вторую строки, ставим перед определителем минус.
4. Умножаем вторую строку на 10 и прибавляем к третьей.
5. Умножаем вторую строку на 14 и прибавляем к четвертой.
6. Вычитаем из четвертой строки третью.
7. Умножаем четвертую строку на 12 и вычитаем из третьей.
8. Умножаем третью строку на 3 и вычитаем из четвертой.

Получена верхнетреугольная матрица. Определитель равен произведению чисел на главной диагонали: -281.

Закончить вычисления можно было бы и раньше. После 5 действия:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 37 & 42 \\ 0 & 0 & 40 & 53 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 37 & 42 \\ 40 & 53 \end{vmatrix} = -(37\cdot 53 - 40\cdot 42) = -1961 + 1680 = -281.$$

Вычисление обратной матрицы «методом Гаусса»

Квадратная матрица, которая при умножении на квадратную матрицу A слева дает в результате единичную матрицу, называется обратной и обозначается A^{-1}.

$A^{-1}A = E.$

Обратная матрица существует только у матриц, определитель которых не равен нулю. Не существует двух различных обратных матриц для одной и той же матрицы A. Кроме того, она обладает также свойством «правой обратной матрицы»:

$AA^{-1} = E.$

Обратную матрицу можно найти по правилу, описанному в [3]:

Существует также метод нахождения обратной матрицы, который аналогичен методу Гаусса для СЛУ. Приписываем к матрице A справа единичную матрицу и эквивалентными преобразованиями (см. часть 1) будем занулять компоненты A, чтобы получить вместо матрицы A единичную матрицу. Причем нужные эквивалентные преобразования будем применять ко всей строке расширенной матрицы $(A|E)$, а не только к A. Тогда, когда на месте матрицы A будет стоять матрица E, там где сначала была матрица E, будет находиться матрица A^{-1}. То есть расширенная матрица $(A|E)$ преобразуется в матрицу $\left(E|A^{-1}\right)$.

Пример 5. (см. пример 10. [3])

Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Проводим преобразования:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Сначала из второй строки вычитаем первую строку, умноженную на $3/2$, то есть

$$\begin{array}{c} (3\ 4\ 0\ 1) \\ -\left(3\ \frac{9}{2}\ \frac{3}{2}\ 0\right) \\ \text{-----------------,} \\ \left(0\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ 1\right) \end{array}$$

чтобы в первом столбце второй строки стоял *0*. Затем делим вторую строку на $-\frac{1}{2}$, чтобы на втором столбце стояло *1*. Вторая строка готова. Теперь с помощью обновленной второй нужно преобразовать первую строку. Умножаем вторую строку на 3 и вычитаем из первой, чтобы во втором столбце первой строки стоял *0*. Затем делим первую строку на *2*, чтобы во втором столбце стояло *1*. Получили слева единичную матрицу, значит слева получена обратная.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 6: (см. пример 11, [3])

Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-21&-7&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&-6&-21&-7&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&-9&1&-2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\0&1&0&\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\0&0&1&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{array}\right).$$

Поясняющие действия:

1. Умножаем первую строку на 4 и вычитаем из второй.
2. Умножаем первую строку на 7 и вычитаем из третьей.
3. Делим вторую строку на -3.
4. Умножаем вторую строку на 2 и вычитаем из первой.
5. Умножаем вторую строку на 6 и прибавляем к третьей.
6. Делим третью строку на -9.
7. Прибавляем к первой строке третью.
8. Умножаем третью строку на 2 и вычитаем из второй.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$.

Заметим, что если бы обратная матрица не существовала, то и единичная матрица слева бы не получилась, так как в левой части расширенной матрицы образовалась бы нулевая строка. Этот метод получения обратной матрицы удобен для решения СЛУ «методом обратной матрицы».

Раздел 2. Элементы математического анализа

Продолжение. (Начало, см. [3])

Первая производная

Зафиксируем точку x_0. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то есть*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

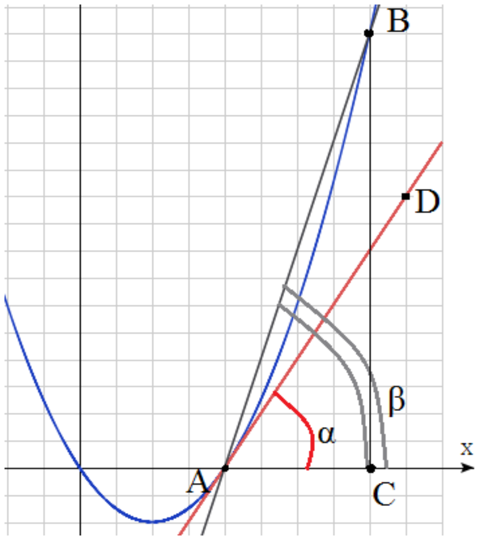

Рис.1

проведенной к функции в точке x_0. Если функция имеет производную во всех точках множества X, то она дифференцируема на всем множестве X. Основные правила взятия производной описаны в 1 части. На рис.1 : *AB* – секущая, *AC* – приращение по *x*, *BC* – приращение по *y*. Если точка *C* стремится по оси *OX* к точке *A*, секущая *AB* переходит в касательную *AD*, а угол β в угол α и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = tg\beta \to tg\alpha.$$

Геометрический смысл производной:

тангенс угла наклона касательной,

Напомним формулы: первая производная для обратной функции:

$$y'_x(x) = \frac{1}{x'_y};$$

первая производная для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; \quad y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

Если функция дифференцируема, то она непрерывна. Производная очень важна для исследования графиков функций: если производная положительна на множестве X, то функция возрастает на множестве X, если отрицательна, то убывает.

Точка x_0 называется строгим локальным минимумом, если существует ее ε-окрестность (интервал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$) такая, что при всех $x\in(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ справедливо неравенство $f(x)>f(x_0)$. Если последнее неравенство нестрогое, то и локальный минимум x_0 называется нестрогим.

Точка x_0 называется строгим локальным максимумом, если существует ее ε-окрестность (интервал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$) такая, что при всех $x\in(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ справедливо неравенство $f(x)<f(x_0)$. Если последнее неравенство нестрогое, то и локальный максимум x_0 называется нестрогим. Локальный минимум или локальный максимум называется локальным экстремумом. Если при этом функция имеет производную в точке x_0, то $f'(x_0)=0$. Этот факт называется **необходимым условием существования локального экстремума.** Иначе говоря, в точке локального экстремума или производная функции равна нулю, или не существует.

Вторая производная

Первая производная от первой производной функции называется второй производной,

Первая производная от второй производной функции называется третьей производной и так далее. Обозначение: $y''_{xx}(x)$ – вторая производная, $y^{(m)}(x)$ – m-тая производная, и т.д.….

Полезно помнить:

$$(x^n)^{(m)}=\begin{cases} n(n-1)\cdot\ldots n(n-m+1)\cdot x^{n-m}, & \text{если}\, m\le n \,\text{или если}\, n\notin \mathrm{N} \\ 0, & \text{если}\, m\le n,\ \text{если}\, m>n \,\text{и}\, n\in \mathrm{N}. \end{cases}$$

$$(a^x)^{(m)}=a^x\ln^m a,\quad a>0, a\ne 1.$$

$$(\sin x)^{(m)}=\sin(x+\frac{\pi m}{2});\ \ (\cos x)^{(m)}=\cos(x+\frac{\pi m}{2}).$$

Вторая производная для обратной функции:

$$y''_x(x)=\left(\frac{1}{x'_y}\right)'_x=\left(\frac{1}{x'_y}\right)'_y\cdot y'_x=\frac{-x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^2}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^3}.$$

Вторая производная для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};\ y''_x(x) = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Функция $f(x)$ будет выпуклой (выпуклой вниз) на интервале (a,b), если (см.рис.2) $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

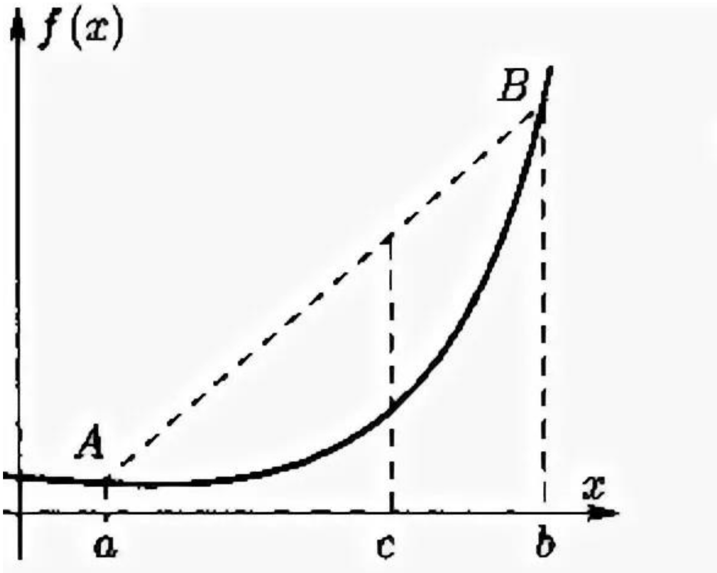

Рис.2

Функция $f(x)$ будет вогнутой (выпуклой вверх) на интервале (a,b), если (см. Рис.3) $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \ge \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

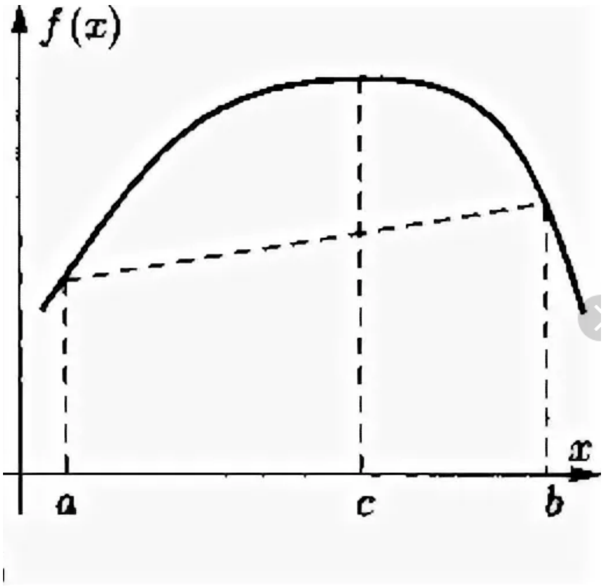

Рис.3

Если неравенства строгие, то говорят, что функция на интервале строго выпукла или строго вогнута.

Если на интервале (a,b) функция $f(x)$ имеет вторую производную и $f''_{xx}(x) > 0$, то функция выпукла на интервале (a,b), если $f''_{xx}(x) < 0$, то функция вогнута на интервале (a,b). Если $c \in (a,b)$, и на интервале (a,c) функция $f(x)$ выпукла, а на интервале (c,b) функция $f(x)$ вогнута или наоборот (в точке c функция меняет вогнутость на выпуклость или наоборот), то **точка c называется точкой перегиба.** Если в точке c существует вторая производная, то $f''_{xx}(c) = 0$. Кроме того, **достаточным условием существования локального минимума** в точке x_0 являются условия: $f'_x(x_0) = 0,\ f''_{xx}(x_0) > 0$. **Достаточным условием существования локального максимума** в точке x_0 являются условия: $f'_x(x_0) = 0,\ f''_{xx}(x_0) < 0$.

Правило Лопиталя

Теорема 1. ***Правило Лопиталя для случая предела отношения двух бесконечно малых величин***. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a, причём в этой окрестность $g'(x) \neq 0$ и если пределы этих функций при стремлении икса к точке a равны между собой и равны нулю, то есть

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

то предел отношения этих функций равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 2. ***Правило Лопиталя для случая предела отношения двух бесконечно больших величин***. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a, причём в этой окрестности $g'(x) \neq 0$ и если пределы этих функций при стремлении икса к значению функции в точке a равны между собой и равны бесконечности

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

то предел отношения этих функций равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Иными словами, для неопределённостей вида 0/0 или ∞/∞ предел отношения двух функций равен пределу отношения их производных, если последний существует (конечный или бесконечный).

Замечания

1. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены при $x = a$.

2. Если при вычислении предела отношения производных функций $f(x)$ и $g(x)$ снова приходим к неопределённости вида 0/0 или ∞/∞, то правило Лопиталя следует применить еще раз.

3. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда аргумент функций (икс) стремится не к конечному числу a, а к бесконечности $(x\to\infty)$.

Примеры 7-10: Найти пределы.

Пример 7: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 8x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8/(1+64x^2)}{3\cos 3x}=\dfrac{8}{3}.$

Пример 8: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{2x^2-9x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{4x-9}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 9: А)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\ln^2(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{2x\ln^2(1+5x)+x^2\dfrac{5\cdot 2\ln(1+5x)}{1+5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\ln^2(1+5x)+x\dfrac{5\cdot\ln(1+5x)}{1+5x}}=.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{2\dfrac{5\cdot\ln(1+5x)}{1+5x}+\dfrac{5\cdot\ln(1+5x)}{1+5x}+x\dfrac{\dfrac{25}{1+5x}(1+5x)-25\ln(1+5x)}{(1+5x)^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2(1+5x)^2}{15\cdot(1+5x)\ln(1+5x)+25x-25x\ln(1+5x)}=\lim_{x\to 0}2\cos x^2\cdot(1+5x)^2\times$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{15\cdot(1+5x)\ln(1+5x)+25x-25x\ln(1+5x)}=$$

$$= 2 \times \lim_{x \to 0} \frac{x}{15 \cdot (1+5x)\ln(1+5x) + 25x - 25x\ln(1+5x)} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{15 \cdot (5\ln(1+5x) + \frac{5(1+5x)}{1+5x}) + 25 - 25\ln(1+5x) - \frac{25x \cdot 5}{1+5x}} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}.$$

Правило Лопиталя, однако, не является панацеей для взятия пределов и применять его нужно аккуратно, например, Пример 9 решается намного быстрее с помощью таблицы эквивалентности:

Пример 9. Б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \ln^2(1+5x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4/2}{x^2(5x)^2} = \frac{1}{50}.$

А в этом примере невнимательность может привести к неверному результату:

Пример 10. Казалось бы: А) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-\sin x}{\sin x} = -1.$

На самом деле, это неправильный ответ. Решим Пример 10 «без Лопиталя»:

Б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-\lim\limits_{x \to \infty}\frac{\sin x}{x}}{1+\lim\limits_{x \to \infty}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$

Все дело в том, что в варианте А) второй предел не существует, поэтому правило Лопиталя неприменимо.

Графики функций

Построение графиков функций

Материал математического анализа в дисциплине «математика» был выбран так [2], чтобы вершиной его изучения была б возможность грамотного построения графиков функций. В том числе, опираясь на нахождение пределов функции в нужных местах и исследование ее первой и второй производной. Ниже дан приблизительный план построения графиков функций и построены 4 стандартные функции согласно этому плану.

План построения графиков функций

1. Найти область определения функции.
2. Найти множество значений функции (если нетрудно). При построении п.2 часто пропускается.

   (Фраза «если нетрудно» имеет смысл: выполнить, если сложность нахождения не очень высока и метод нахождения данного утверждения известен, под фразой «если нужно» имеется в виду, что иногда действие выполнять не нужно из-за свойств функции, например, если функция непрерывна, исследовать точки разрыва не нужно, так как их у функции нет).
3. Проверить функцию на четность, нечетность, периодичность (если функция не является ни той, ни другой, ни третьей, то написать: «функция общего вида». Само по себе, последнее выражение не несет никакой информации, кроме той, что мы не забыли сделать эту проверку).
4. Найти точку пересечения с осью OY.
5. Найти точки пересечения осью ОХ (если нетрудно).
6. Исследовать функцию на непрерывность.
7. Найти точки разрыва (если нужно) и исследовать поведение функции справа и слева от каждой точки разрыва.
8. Исследовать поведение функции на $-\infty$ и $+\infty$ (если нужно).
9. Сделать выводы о существовании горизонтальных, вертикальных и наклонных асимптот (если нужно).
10. Взять производную.
11. Найти точки подозрительные на экстремум.
12. Найти интервалы возрастания и убывания функции.
13. Определить точки локального минимума и максимума.
14. Взять вторую производную.
15. Найти точки подозрительные на перегиб.
16. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции.
17. Определить точки перегиба.
18. Отметить на рисунке Оси координат, точку начала координат, какой-нибудь масштаб по каждой из осей.

***К пункту 3*:**

Функция называется нечетной, если для любого *x*, принадлежащего области определения имеет место равенство: $f(-x) = -f(x)$. (Графически это означает, что функция симметрична относительно начала координат – точки *O*.)

Функция называется четной, если для любого *x*, принадлежащего области определения имеет место равенство: $f(-x) = f(x)$. (Графически это означает, что функция симметрична относительно оси координат *OY*.)

Если функция нечетная или четная дальнейшее исследование можно проводить только при $x \geq 0$, а в области $x < 0$ достроить из соображений симметрии.

Функция называется периодической, если существует наименьшее $T > 0$, такое что $f(x+T) = f(x)$; при этом T - называют периодом функции. Если функция периодическая, то дальнейшее исследование можно проводить на любом отрезке $[x; x+T]$. А потом, при построении графика продолжить ее на всю действительную ось R.

К пункту 9:

У функции $f(x)$ имеется горизонтальная асимптота $y = a$, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$. У функции $f(x)$ имеется вертикальная асимптота $x = b$, если существует $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to b+0} f(x) = \infty$. У функции $f(x)$ имеется наклонная асимптота $y = kx + l$, $k \neq 0$, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ и, кроме того, для «той бесконечности» (или «тех»), для которой это верно справедливо $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \neq 0 \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = l \end{cases}$.

Примеры графиков функций

Пример 11: Построить график функции: $y = 3x - x^3$.

Исследование: 1. Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$.

3. $y(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -(3x - x^3) = -y(x)$ – функция нечетная.

4. $y(0)=0$. Точка пересечения с осью OY : (0,0).

5. $y=0 \Leftrightarrow x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)=0$.Точки пересечения с осью OX : $\left(-\sqrt{3};0\right)$; (0;0); $\left(\sqrt{3};0\right)$.

6. Функция является непрерывной.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-x^3=-\infty$.

9. Вертикальных, горизонтальных наклонных асимптот нет. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} 3-x^2=\infty$.

10. Возьмем производную: $y'_x=3-3x^2$.

11. $y'_x=3-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm1$– точки подозрительные на экстремум.

12. $y'_x=3-3x^2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;1\right)$ – на этом интервале функция возрастает, следовательно, при $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ функция убывает.

13. Из п.п.10–12 следует, что точка *x=-1* – точка локального минимума, а точка *x=1* – точка локального максимума, $y(-1)=-2,\ y(1)=2$.

14. Возьмем вторую производную: $y''_{xx}=-6x$.

15. $y''_{xx}=-6x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ – точка подозрительная на перегиб.

16. $y''_{xx}=-6x>0 \Leftrightarrow x<0$ – на этом интервале функция выпукла, при $x>0$ функция вогнута.

17. Из п.16 следует, что $x=0$– точка перегиба. $y(0)=0$.

18. Построение графика.

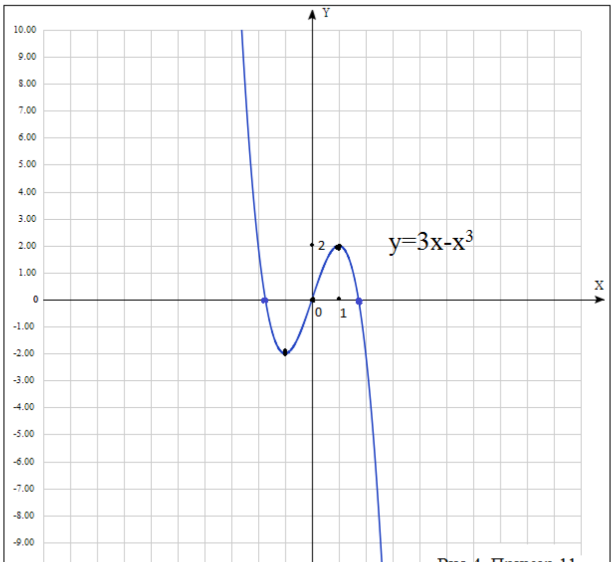

Рис.4. Пример 11

Пример 12: Построить график функции: $y=\dfrac{4x+3}{x-2}$.

Исследование: 1. Область определения $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

3. Функция общего вида.

4. $y(0)=-\dfrac{3}{2}$. Точка пересечения с осью OY: $\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$.

5. $y=0\Leftrightarrow 4x+3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$.Точка пересечения с осью OX: $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

6. Функция является непрерывной на интервалах $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

7. Точка разрыва $x=2$. $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{4x+3}{x-2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4x+3}{x-2}=+\infty$.

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x+3}{x-2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4+3/x}{1-2/x}=4$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x+3}{x-2}=4$.

9. Из п.7 следует, что вертикальная асимптота: $x=2$, а из п.8, что горизонтальная асимптота: $y=4$.

10. Возьмем производную: $y'_x = \dfrac{4(x-2)-(4x+3)}{(x-2)^2} = \dfrac{-11}{(x-2)^2} < 0$.

11. Точек подозрительных на экстремум нет.

12. Из п.10 следует, что функция убывает на области определения.

13. Из п.п.10-12 следует, что локальных экстремумов нет.

14. Возьмем вторую производную: $y''_{xx} = \dfrac{22}{(x-2)^3}$.

15. При всех $x \in R,\ x \neq 2$ выполняется неравенство $y''_{xx} \neq 0$, поэтому точек перегиба нет.

16. $y''_{xx} = \dfrac{22}{(x-2)^3} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;2)$ – на этом интервале функция вогнута, следовательно при $x \in (2;+\infty)$ функция выпукла.

17. См п.15.

18. Построение графика.

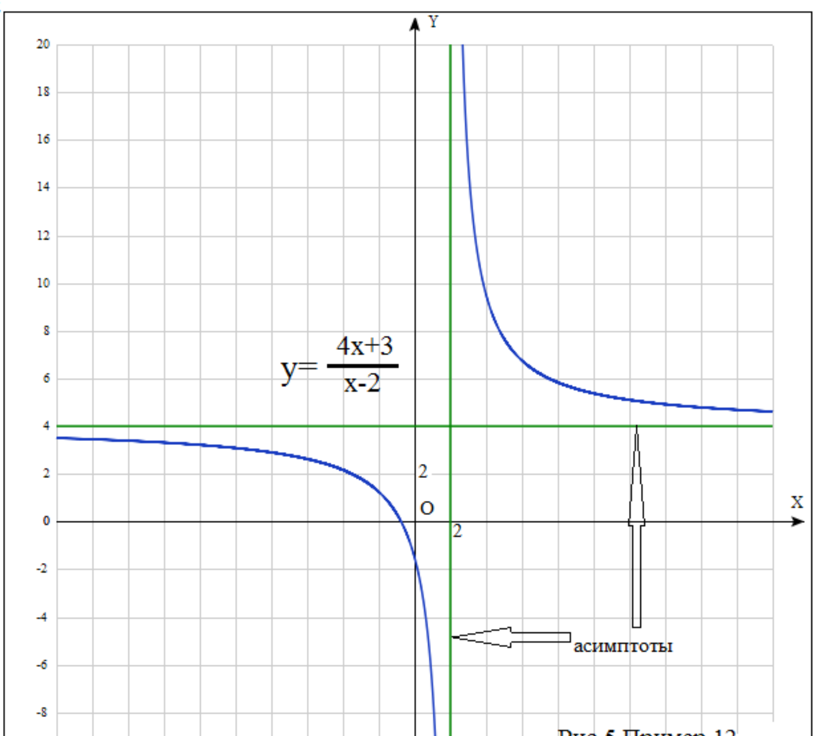

Рис.5 Пример 12

Пример 13: Построить график функции: $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$.

Исследование: 1. Область определения $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

3. Функция общего вида.

4. $y(0) = \dfrac{1}{2}$. Точка пересечения с осью OY: $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

5. $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Точки пересечения с осью OX: $(-1;0)$, $(1;0)$.

6. Функция является непрерывной на интервалах $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

7. Точка разрыва $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$.

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$.

9. Из п.7 следует, что вертикальная асимптота: $x = 2$, а из п.8, что горизонтальных асимптот нет. Также из п.8 следует, что у функции может существовать наклонная асимптота.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x(x - 2)} = 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} - x = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{x - 2} = 2$. Поэтому и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$ существует наклонная асимптота $y = x + 2$.

10. Возьмем производную: $y'_x = \dfrac{2x(x - 2) - (x^2 - 1)}{(x - 2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}$.

11. $y'_x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ - точки подозрительные на экстремум.

12. Из п.10 следует, что функция убывает при $x \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ и, следовательно, возрастает при $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$.

13. Из п.п.10–12 следует, следует, что точка $x = 2 + \sqrt{3}$ – точка локального минимума, а точка $x = 2 - \sqrt{3}$ – точка локального максимума, $y(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$, $y(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$.

14. Возьмем вторую производную: $y''_{xx} = \dfrac{(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x+1)}{(x-2)^3} = \dfrac{6}{(x-2)^3}$.

15.При всех $x \in R,\ x \neq 2$ выполняется неравенство $y''_{xx} \neq 0$, поэтому точек перегиба нет.

16. $y''_{xx} = \dfrac{6}{(x-2)^3} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;2)$ – на этом интервале функция вогнута, следовательно при $x \in (2;+\infty)$ функция выпукла.

17. См. п.15.

18. Построение графика.

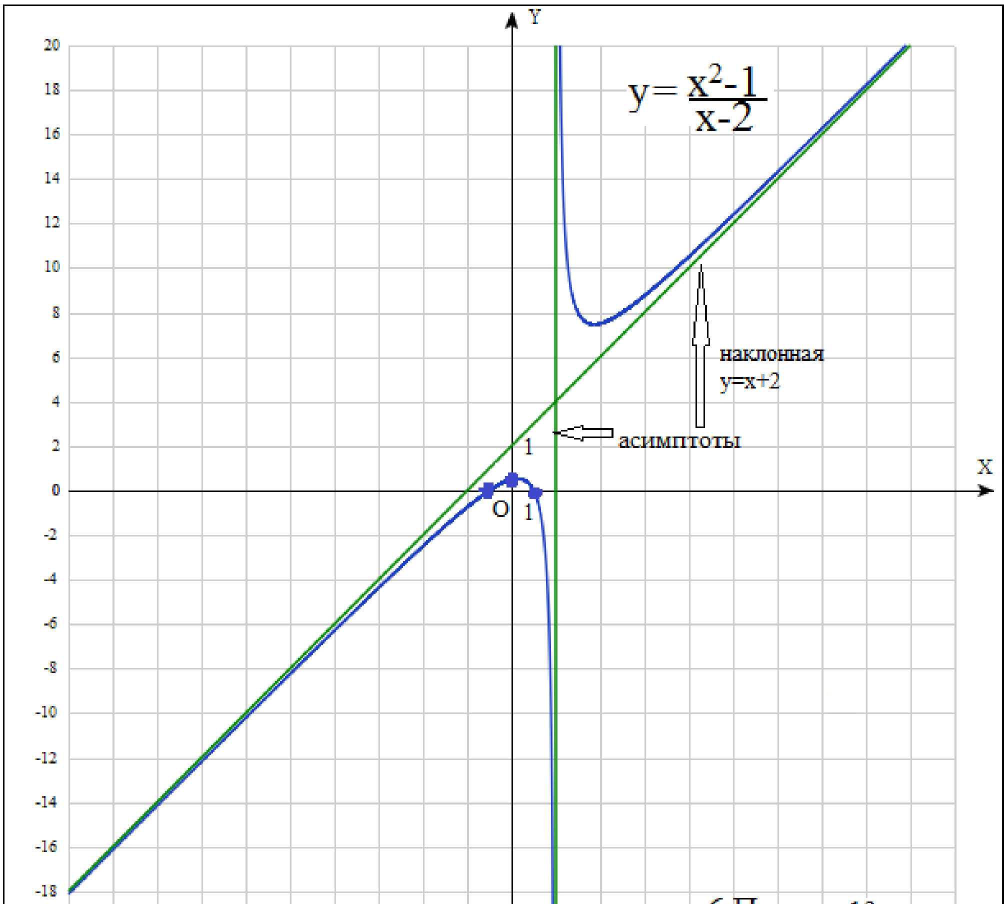

рис.6 Пример 13

Пример 14: Построить график функции: $y = \dfrac{x}{2} + arcctgx$.

Исследование: 1. Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$.

3. Функция общего вида.

4. $y(0) = arcctg0 = \frac{\pi}{2}$. Точка пересечения с осью OY : $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Точки пересечения с осью OX можно подсчитать лишь приблизительно.

6. Функция является непрерывной на области определения: $x \in R$.

7. Точек разрыва нет .

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} + arcctgx = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} + arcctgx = +\infty$.

9. Из п.7 следует, что вертикальной асимптоты нет, а из п.8, что горизонтальных асимптот нет. Однако, из п.8 следует, что у функции может существовать наклонная асимптота.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{x}{2} + arcctgx\right)}{x} = \frac{1}{2}$; обратите внимание, что $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x}{2} + arcctgx - \frac{x}{2}) = \lim\limits_{x \to -\infty} arcctgx = \pi$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x}{2} + arcctgx - \frac{x}{2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} arcctgx = 0$. Поэтому при $x \to -\infty$ существует наклонная асимптота $y = \frac{x}{2} + \pi$, а при $x \to +\infty$. Наклонная асимптота имеет вид: $y = \frac{x}{2}$. То есть в данном примере две наклонные асимптоты.

10. Возьмем производную: $y'_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2 + 1}$.

11. $y'_x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$ – точки подозрительные на экстремум.

12. $y'_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2}{2(x^2 + 1)} < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1;1)$, следовательно, функция убывает при $x \in (-1;1)$ и возрастает при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

13. Из п.п.10–12 следует, что точка $x = -1$ – точка локального максимума, а точка $x = 1$ – точка локального минимума, $y(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}$, $y(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

14. Возьмем вторую производную: $y''_{xx} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

15. $y''_{xx} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ - точка подозрительная на перегиб.

16. $y''_{xx} = -6x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0)$ – на этом интервале функция вогнута, соответственно, при $x \in (0;+\infty)$ функция выпукла.

17. Из п.16 следует, что $x = 0$ – точка перегиба. $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

18.Построение графика.

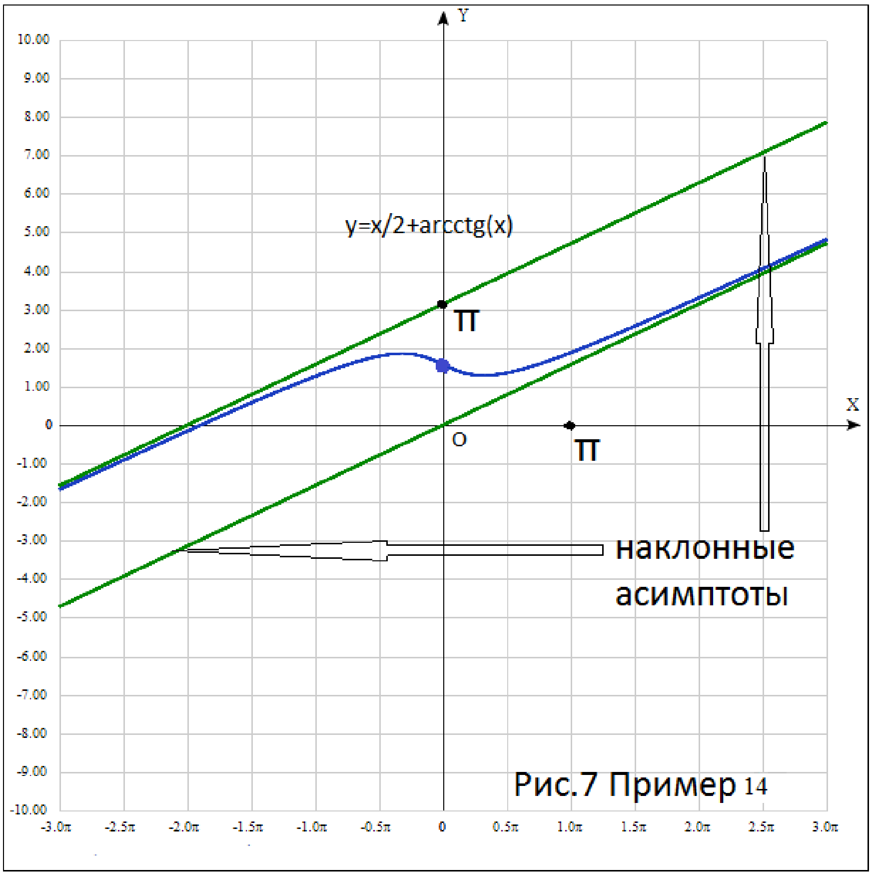

Рис.7 Пример 14

Литература:

1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра, М.: Наука— Физматлит, 1999. 296с.
2. Л.Д. Кудрявцев, Курс математического анализа в 3 т. Том 1: учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. 703 с.
3. А.И. Эгамов, О.В. Приставченко. Элементы высшей математики. Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород, 2017. 30 с.

Оксана Викторовна **Приставченко**
Альберт Исмаилович **Эгамов**

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ЧАСТЬ 2

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.