

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В. А. Еськин

**ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В
ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ
ВОЛНОВОДАХ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для магистрантов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.04.03 «Радиофизика» и 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород
2017

УДК 533.951, 537.876
ББК 22.31
Е87

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Е. Ю. Петров**

Е87 Еськин В.А. ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. — 92 с. — Илл. — 32, библ. — 59 назв.

Цель пособия состоит в ознакомлении читателя с последними достижениями в области электродинамики открытых направляющих систем с гиротропным заполнением. Представлены теоретические основы возбуждения и распространения электромагнитных волн в замагниченных плазменных волноводах. Описаны методы численного исследования волн в замагниченных плазменных волноводах, включая расчёт дисперсионных характеристик, структуры полей и парциальных сопротивлений излучения собственных мод волноводов.

Учебно-методическое пособие предназначено для аспирантов и магистрантов радиофизического факультета, специализирующихся в области электродинамики и физики плазмы, а также в смежных областях.

Пособие написано при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (договор 14.В25.31.0008) и гранта МК-2039.2017.2.

Ответственные за выпуск:
председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н. Д. Миловский**,
зам.председателя методической комиссии радиофизического факультета
ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е. З. Грибова**

УДК 533.951, 537.876
ББК 22.31

© В.А. Еськин, 2017
© Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ	8
1.1. Тензор диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы	8
1.2. Дисперсионные свойства волн в однородной магнитоактивной плазме	13
1.3. Поверхности показателей преломления нормальных волн однородной магнитоактивной плазмы в различных диапазонах частот	17
1.4. Общее представление полей собственных волн замагниченного цилиндрического плазменного волновода	20
Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПЛАЗМЕННЫМ СТОЛБОМ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	24
2.1. Постановка задачи	24
2.2. Типы мод, направляемых плазменным столбом	27
2.3. Объёмные моды однородного плазменного столба	29
2.4. Поверхностные моды однородного плазменного столба	44
2.5. Моды, направляемые однородным плазменным столбом в свободном пространстве при учёте теплового движения электронов	45
2.6. Моды неоднородного плазменного столба	47
2.7. Примеры численного исследования дисперсионных характеристик и структуры полей мод плазменного столба в свободном пространстве	52
Глава 3. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗАМАГНИЧЕННОМ ПЛАЗМЕННОМ СТОЛБЕ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	60
3.1. Исходные уравнения	60
3.2. Волны дискретной и непрерывной частей спектра	62
3.3. Поле и сопротивление излучения кольцевого электрического тока	69
3.4. Результаты численных расчётов сопротивления излучения кольцевого электрического тока при отсутствии и наличии столкновительных потерь в плазменном столбе	71

3.5. Распределение мощности джоулевых потерь в плазменном столбе	78
Заключение	84
Список литературы	86
Приложение А. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ	92

Введение

В последние десятилетия электродинамика открытых направляющих систем с магнитоактивным плазменным заполнением привлекает к себе повышенное внимание. Одним из важнейших направлений в этой области является исследование возбуждения и распространения волн свистового диапазона частот при наличии цилиндрических направляющих плазменных структур, расположенных в свободном пространстве [1–8] или фоновой магнитоактивной плазме параллельно внешнему магнитному полю [9–13] (в последнем случае такие структуры принято называть дактами плотности). Особое внимание при этом уделяется волнам, принадлежащим резонансной области свистового диапазона, поскольку они играют весьма важную роль во многих фундаментальных физических процессах в околоземном космическом пространстве [14–21], а также представляют значительный интерес для ряда приложений, связанных, в частности, с так называемыми геликонными высокочастотными (ВЧ) разрядами [1, 2]. Такие разряды, сопровождающиеся формированием плазменно-волноводных каналов в лабораторных условиях, считаются в настоящее время весьма эффективными источниками плотной низкотемпературной плазмы и могут поддерживаться при сравнительно малых внешних постоянных магнитных полях и удельных вкладах мощности [1, 2, 22]. Разряды подобного типа находят широкое применение в плазмохимических технологиях [23, 24], а также используются для создания активных сред газовых лазеров [22, 25, 26], генерации плазмы в магнитных ловушках [27], разработки новых методов ускорения частиц [28–31] и т. д.

Методы активного воздействия на ионосферу и магнитосферу Земли, получившие в последнее время широкое распространение, основанные на использовании плазменно-волноводных каналов в целях повышения эффективности возбуждения свистовых волн (вистлеров), открывают дополнительные возможности для волновой диагностики околоземного космического пространства [15, 32, 33], а также управления характеристиками электромагнитных излучателей в магнитоактивной плазме [9, 13, 34, 35]. В этой связи одним из весьма перспективных путей повышения эффективности возбуждения свистовых волн представляется применение так называемых плазменных антенн — самосогласованных плазменных излучающих структур квазицилиндрической формы, возникающих в плазме ионосферного типа вблизи источника и изменяющих условия возбуждения и распространения излучаемых волн. Результаты ряда лабораторных и ионосферных экспериментов свидетельствуют о принципиальной возможности реализации подобных систем [34, 36, 37] и их позитивном влиянии на характеристики излучения источников свистового

диапазона частот в магнитоактивной плазме [9, 34, 38, 39].

В подавляющем большинстве теоретических работ, посвящённых возбуждению и распространению свистовых волн в цилиндрических плазменных каналах, расположенных в свободном пространстве или фоновой магнитоактивной плазме, рассматривается случай, когда столкновительные потери в плазменной среде отсутствуют [40–43]. Случай сравнительно малых столкновительных потерь, не приводящих к значительным изменениям дисперсионных характеристик и структуры полей волн, обсуждался в [4, 44–46] в связи с некоторыми конкретными вопросами волноводного распространения вистлеров. Однако детальное изучение характеристик волн в таких каналах при наличии столкновительных потерь в этих работах не проводилось. К сказанному необходимо добавить, что в литературе, посвящённой теоретическому исследованию возбуждения свистовых волн в условиях геликонных разрядов [5, 7, 44, 47], практически отсутствует строгое рассмотрение соответствующих вопросов, требующее использования полной системы собственных волн открытого плазменного волновода [48, 49].

Целью настоящего учебного пособия является изложение современной теории возбуждения и распространения электромагнитных волн в открытых замагниченных плазменных волноводах, которая даёт основу для более глубокого понимания особенностей работы излучающих систем при наличии таких направляющих структур, расположенных в изотропной среде, а также механизмов поглощения электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме. Большая часть результатов второй и третьей глав получены при непосредственном участии автора и были представлены в работах [50, 51].

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В данной главе даются основы теории электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Обсуждаются дисперсионные свойства и поверхности показателей преломления нормальных волн в однородной магнитоактивной плазме. Приводятся общие выражения для полей собственных волн замагниченного цилиндрического плазменного волновода и вывод дисперсионного уравнения для них.

Отметим, что все выражения в данной главе и далее записаны в системе единиц СГС, за исключением особо оговоренных случаев.

1.1. Тензор диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы

Как известно, уравнения Максвелла, определяющие электромагнитное поле в среде, записываются в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho^e, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi\rho^m. \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы электрической индукции, магнитной индукции, напряжённости электрического поля и напряжённости магнитного поля соответственно. Источники поля в виде плотностей электрических и магнитных токов $\mathbf{j}^{e,m}$ и плотностей электрических и магнитных зарядов $\rho^{e,m}$ удовлетворяют уравнениям непрерывности:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^e + \frac{\partial\rho^e}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^m + \frac{\partial\rho^m}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

Напомним, что фиктивные магнитные заряды и токи, описываемые величинами ρ^m и \mathbf{j}^m , могут быть включены в уравнения Максвелла, поскольку

использование таких источников в ряде случаев позволяет упростить решение некоторых конкретных задач.

Далее электромагнитные поля считаем гармоническими во времени t . Уравнения Максвелла (1.1)–(1.4) линейны. С учётом этого обстоятельства при линейном характере материальных уравнений удобно перейти к описанию электромагнитного поля в комплексной форме. При этом величинам $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ — векторам напряжённости электрического и магнитного полей в данной точке — приводятся в соответствие комплексные амплитуды, $\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H}(\omega)$. Связь между физическими величинами и их комплексными амплитудами даётся соотношениями

$$\mathbf{E}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}\}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{H}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}\}, \quad (1.8)$$

где Re обозначает операцию взятия реальной части, ω — круговая частота поля.

Запишем уравнения Максвелла (1.1)–(1.4) для комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -ik_0\mathbf{B} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = ik_0\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho^e, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi\rho^m. \quad (1.12)$$

Здесь $k_0 = \omega/c$ — волновое число в свободном пространстве. Уравнения непрерывности (1.5), (1.6) для комплексных амплитуд принимают вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^e + i\omega\rho^e = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^m + i\omega\rho^m = 0. \quad (1.14)$$

В рамках данного пособия мы часто будем записывать поля в цилиндрической системе координат. Однако, в некоторых случаях потребуется переходить к использованию декартовой системы координат (например, при построении двумерного распределения поля в поперечном сечении цилиндрического волновода). В связи с этим приведём выражения уравнений Максвелла (1.9)–(1.12) в декартовой и цилиндрической системах координат.

Рассмотрим правовинтовую декартову систему координат (x, y, z) с единичными векторами $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ сонаправленными с осями Ox , Oy и Oz . Компоненты векторов будем обозначать соответствующими индексами x, y, z .

Например, компоненты произвольного вектора \mathbf{A} записываются как A_x, A_y, A_z . В декартовых координатах уравнения (1.9) и (1.10) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -ik_0 B_x - \frac{4\pi}{c} j_x^m, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= ik_0 D_x + \frac{4\pi}{c} j_x^e, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -ik_0 B_y - \frac{4\pi}{c} j_y^m, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= ik_0 D_y + \frac{4\pi}{c} j_y^e, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -ik_0 B_z - \frac{4\pi}{c} j_z^m, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= ik_0 D_z + \frac{4\pi}{c} j_z^e. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Уравнения (1.11), (1.12) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 4\pi \rho^e, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 4\pi \rho^m. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Выберем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) с единичными векторами $(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \mathbf{z}_0)$. Эти координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \\ y &= \rho \sin \varphi & \varphi &= \arctan(y/x), \\ z &= z & z &= z. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Компоненты вектора \mathbf{A} в цилиндрической системе координат обозначим через A_ρ, A_φ, A_z . Уравнения (1.15) в этой системе примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= -ik_0 B_\rho - \frac{4\pi}{c} j_\rho^m, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= ik_0 D_\rho + \frac{4\pi}{c} j_\rho^e, \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} &= -ik_0 B_\varphi - \frac{4\pi}{c} j_\varphi^m, & \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} &= ik_0 D_\varphi + \frac{4\pi}{c} j_\varphi^e, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} &= -ik_0 B_z - \frac{4\pi}{c} j_z^m, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} &= ik_0 D_z + \frac{4\pi}{c} j_z^e. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В свою очередь, уравнения (1.16) сводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 4\pi \rho^e, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 4\pi \rho^m. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Более подробное описание основных дифференциальных операций векторного анализа в криволинейных координатах приведено в Приложении.

Связь между поперечными компонентами вектора в цилиндрических и декартовых координатах даётся соотношениями

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, & A_x &= A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi, \\ A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi, & A_y &= A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Как известно, уравнения Максвелла (1.9)–(1.12) не образуют замкнутой системы. Для получения решения их необходимо дополнить материальными уравнениями, связывающими электрическую и магнитную индукции электромагнитного поля с напряжённостями этих полей. В случае магнитоактивной плазмы материальные уравнения записываются следующим образом [16]:

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (1.22)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы. Запись материальных уравнений в таком виде означает, что величина \mathbf{H} отождествляется с магнитной индукцией \mathbf{B} . Ниже обозначение \mathbf{H} будет использоваться исключительно для переменных полей. Для постоянного магнитного поля будет применяться обозначение \mathbf{B}_0 .

Рассмотрим холодную плазму, в которой внешнее однородное магнитное поле \mathbf{B}_0 направлено по оси z цилиндрической системы координат. В этом случае тензор диэлектрической проницаемости плазмы $\hat{\varepsilon}$ может быть записан в виде

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Компоненты тензора (1.23) в случае двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, при отсутствии потерь даются формулами [16]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 - \omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_H^2 - \omega^2}, \\ g &= -\frac{\omega_p^2 \omega_H}{(\omega_H^2 - \omega^2)\omega} + \frac{\Omega_p^2 \Omega_H}{(\Omega_H^2 - \omega^2)\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где ω_{H} и Ω_{H} — гирочастота электронов и ионов соответственно, ω_{p} и Ω_{p} — плазменная частота электронов и ионов. Эти величины можно записать в виде

$$\begin{aligned}\omega_{\text{p}} &= \left(\frac{4\pi N e^2}{m_{\text{e}}} \right)^{1/2}, & \Omega_{\text{p}} &= \left(\frac{4\pi N e^2}{M_{\text{i}}} \right)^{1/2}, \\ \omega_{\text{H}} &= \frac{|e\mathbf{B}_0|}{m_{\text{e}}c}, & \Omega_{\text{H}} &= \frac{|e\mathbf{B}_0|}{M_{\text{i}}c},\end{aligned}\tag{1.25}$$

где m_{e} и M_{i} — массы электрона и иона соответственно. Компонента ε тензора (1.23) может быть представлена как

$$\varepsilon = \frac{(\omega^2 - \omega_{\text{LH}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\text{H}}^2)(\omega^2 - \Omega_{\text{H}}^2)},\tag{1.26}$$

где ω_{LH} — нижняя гибридная частота, ω_{UH} — верхняя гибридная частота. Эти частоты даются формулами

$$\begin{aligned}\omega_{\text{LH}} &= \omega_{\text{H}} \left(\frac{\Omega_{\text{p}}^2 + \Omega_{\text{H}}^2}{\omega_{\text{p}}^2 + \omega_{\text{H}}^2} \right)^{1/2}, \\ \omega_{\text{UH}} &= (\omega_{\text{p}}^2 + \omega_{\text{H}}^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{1.27}$$

В случае, когда $\omega_{\text{p}} \gg \omega_{\text{H}}$, выражение (1.27) принимает вид $\omega_{\text{LH}} = (\omega_{\text{H}}\Omega_{\text{H}})^{1/2}$. В обратном случае ($\omega_{\text{p}} \ll \omega_{\text{H}}$) имеем $\omega_{\text{LH}} = (\Omega_{\text{p}}^2 + \Omega_{\text{H}}^2)^{1/2}$. При $\omega \gg \omega_{\text{H}}$ выражения (1.24) упрощаются к виду

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 + \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega_{\text{H}}^2 - \omega^2}, \\ g &= -\frac{\omega_{\text{p}}^2 \omega_{\text{H}}}{(\omega_{\text{H}}^2 - \omega^2)\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

При записи формул для тензора диэлектрической проницаемости не учитывались столкновительные потери плазмы. Ниже представлены выражения для компонент тензора при учёте электрон-нейтральных и ион-нейтральных столкновений в плазме с эффективными частотами соударений ν_{e} и ν_{i} соответственно и пренебрежении электрон-ионными соударениями (такая

ситуация часто реализуется как в ионосферной, так и лабораторной плазме):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu_e)}{(\omega_H^2 - (\omega - i\nu_e)^2)\omega} + \frac{\Omega_p^2(\omega - i\nu_i)}{(\Omega_H^2 - (\omega - i\nu_i)^2)\omega}, \\ g &= -\frac{\omega_p^2\omega_H}{(\omega_H^2 - (\omega - i\nu_e)^2)\omega} + \frac{\Omega_p^2\Omega_H}{(\Omega_H^2 - (\omega - i\nu_i)^2)\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - i\nu_e)\omega} - \frac{\Omega_p^2}{(\omega - i\nu_i)\omega}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Уравнения Максвелла в цилиндрических координатах (1.18) с учётом материальных уравнений (1.21) и (1.22) принимают вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -ik_0 H_\rho - \frac{4\pi}{c} j_\rho^m,\tag{1.30}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -ik_0 H_\varphi - \frac{4\pi}{c} j_\varphi^m,\tag{1.31}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = -ik_0 H_z - \frac{4\pi}{c} j_z^m,\tag{1.32}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = ik_0(\varepsilon E_\rho - igE_\varphi) + \frac{4\pi}{c} j_\rho^e,\tag{1.33}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = ik_0(igE_\rho + \varepsilon E_\varphi) + \frac{4\pi}{c} j_\varphi^e,\tag{1.34}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = ik_0 \eta E_z + \frac{4\pi}{c} j_z^e.\tag{1.35}$$

В дальнейшем мы ограничимся анализом решений этих уравнений в области пространства без источников.

1.2. Дисперсионные свойства волн в однородной магнитоактивной плазме

Получим дисперсионное уравнение для плоской волны с угловой частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} . Для этого решение уравнений Максвелла без источников будем искать в виде бегущей плоской волны, компоненты поля которой изменяются в пространстве по закону $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ (\mathbf{r} — радиус вектор точки

наблюдения). В этом случае первые два уравнения Максвелла (1.9) и (1.10) преобразуются к виду

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \mathbf{B}, \quad (1.36)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}] = -\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad (1.37)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k_0$ — вектор волновой нормали. Исключая \mathbf{H} приходим к уравнению

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n})\mathbf{E} - (\mathbf{n}, \mathbf{E})\mathbf{n} - \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 0. \quad (1.38)$$

Это уравнение можно записать в матричной форме:

$$(n^2\delta_{ij} - n_in_j - \varepsilon_{ij})E_j = 0, \quad (1.39)$$

где $i, j = x, y, z$, ε_{ij} — компоненты тензора (1.23) в декартовой системе координат, δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). В более подробном виде уравнение (1.39) выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} n^2 - n_x^2 - \varepsilon & -n_x n_y + ig & -n_x n_z \\ -n_y n_x - ig & n^2 - n_y^2 - \varepsilon & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & n^2 - n_z^2 - \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (1.40)$$

Уравнение (1.39) имеет нетривиальное решение для E_x, E_y, E_z в случае равенства нулю детерминанта

$$D = \det|n^2\delta_{ij} - n_in_j - \varepsilon_{ij}| = 0. \quad (1.41)$$

После громоздких, но несложных алгебраических преобразований формула (1.41) принимает вид

$$\begin{aligned} D = & -\eta n_z^4 - (\eta + \varepsilon)(n_x^2 + n_y^2) n_z^2 - \varepsilon(n_x^2 + n_y^2)^2 \\ & + 2\varepsilon\eta n_z^2 + (\varepsilon\eta + \varepsilon^2 - g^2)(n_x^2 + n_y^2) - \eta(\varepsilon^2 - g^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Данное соотношение есть дисперсионное уравнение для волн в однородной магнитоактивной плазме, решения которого дают показатели преломления $n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$ нормальных волн.

Обсудим свойства показателей преломления. Для этого рассмотрим трёхмерное пространство, которое будем называть пространством показателя преломления, или, более кратко, \mathbf{n} -пространством. Величины n_x, n_y, n_z будем использовать как координаты и выберем направление осей n_x, n_y, n_z параллельно осям x, y, z соответственно «обычного» пространства. Компоненты

вектора \mathbf{n} можно представить в сферических координатах в \mathbf{n} -пространстве таким образом:

$$\begin{aligned} n_x &= n \sin \theta \cos \phi, & n &= (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}, \\ n_y &= n \sin \theta \sin \phi, & \theta &= \arctan \frac{(n_x^2 + n_y^2)^{1/2}}{n_z}, \\ n_z &= n \cos \theta, & \phi &= \arctan (n_y/n_x). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Здесь n — длина вектора \mathbf{n} , θ и ϕ — полярный и азимутальный углы вектора \mathbf{n} . В координатах n, θ, ϕ уравнение (1.42) преобразуется к виду

$$D = -(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta) n^4 + \left[2\varepsilon\eta + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta \right] n^2 - \eta(\varepsilon^2 - g^2) = 0, \quad (1.44)$$

а его решениями являются функции

$$n_{1,2}^2(\theta) = \frac{2\varepsilon\eta + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta \pm \left[(\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta)^2 \sin^4 \theta + 4g^2\eta^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}}{2(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}. \quad (1.45)$$

Отсюда ясно, что в холодной магнитоактивной плазме существует две нормальные волны с различными свойствами. Они отличаются показателями преломления $n_{1,2}(\theta)$, не зависящими от азимутального угла ϕ . В отсутствие столкновений, т.е. при отсутствии поглощения энергии в холодной плазме, каждая из величин $n_{1,2}$ оказывается либо чисто действительной, либо чисто мнимой. При чисто действительном показателе преломления волна является распространяющейся; при чисто мнимом показателе — нераспространяющейся.

Опираясь на выражение (1.45) можно показать, что при $\varepsilon\eta < 0$, один из показателей преломления $n_{1,2}$ становится бесконечным при угле

$$\theta = \theta_r = \arctan \sqrt{-\eta/\varepsilon}. \quad (1.46)$$

Плазма без потерь, в которой имеет место такая бесконечность показателя преломления, называется резонансной. Нетрудно показать, что условие $\varepsilon\eta < 0$ выполняется в трёх диапазонах частот:

$$\begin{aligned} \omega &< \Omega_{\text{H}}, \\ \omega_{\text{LH}} &< \omega < \min\{\omega_{\text{H}}, \omega_{\text{p}}\}, \\ \max\{\omega_{\text{H}}, \omega_{\text{p}}\} &< \omega < \omega_{\text{UH}}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

В частных случаях, когда волновая нормаль параллельна ($\theta = 0$) или перпендикулярна ($\theta = \pi/2$) внешнему магнитному полю \mathbf{B}_0 , формула (1.45) даёт

$$n_{1,2}^2(0) = \varepsilon \pm g, \quad (1.48)$$

$$n_{1,2}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \eta, \\ (\varepsilon^2 - g^2)/\varepsilon. \end{cases} \quad (1.49)$$

Волну, показатель преломления которой при поперечном распространении не зависит от внешнего магнитного поля принято называть «обыкновенной» волной и обозначать символом «о». Другую волну, свойства которой зависят от внешнего магнитного поля при любом направлении распространения, называют «необыкновенной» и обозначают символом «е».

Примем, что реальная часть квадратного корня в (1.45) имеет положительное значение. Тогда в (1.45) «обыкновенной» волне отвечает положительный знак перед корнем, а «необыкновенной» — отрицательный знак. С учётом этого перепишем выражение (1.45) в виде:

$$n_\alpha^2(\theta) = \frac{2\varepsilon\eta + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta - \chi_\alpha \left[(\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta)^2 \sin^4 \theta + 4g^2\eta^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}}{2(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}, \quad (1.50)$$

где индекс $\alpha = o$ соответствует «обыкновенной» волне, индекс $\alpha = e$ — «необыкновенной» волне, $\chi_o = -\chi_e = -1$.

Во многих случаях удобнее представить детерминант (1.42) используя величины q , ϕ , p , которые выражаются через n_x , n_y , n_z таким образом

$$\begin{aligned} n_x &= q \cos \phi, & q &= (n_x^2 + n_y^2)^{1/2}, \\ n_y &= q \sin \phi, & \phi &= \arctan(n_y/n_x), \\ n_z &= p, & p &= n_z. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Тогда уравнение (1.42) принимает вид

$$D = -\eta p^4 - \left[(\eta + \varepsilon) q^2 - 2\varepsilon\eta \right] p^2 - \varepsilon q^4 + (\varepsilon\eta + \varepsilon^2 - g^2) q^2 - \eta(\varepsilon^2 - g^2) = 0. \quad (1.52)$$

Данное уравнение принято называть кватрикой Букера. Решения этого урав-

нения относительно p могут быть записаны таким образом:

$$p_\alpha(q) = \left[\varepsilon - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\eta} \right) q^2 + \chi_\alpha R_p(q) \right]^{1/2},$$

$$R_p(q) = \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\eta} \right)^2 q^4 - \frac{g^2}{\eta} q^2 + g^2 \right]^{1/2}.$$
(1.53)

Здесь подразумевается следующий выбор ветвей многозначных функций $p_\alpha(q)$ и $R_p(q)$: $\text{Im } p_\alpha < 0$, $\text{Re } R_p > 0$.

1.3. Поверхности показателей преломления нормальных волн однородной магнитоактивной плазмы в различных диапазонах частот

Далее при конкретных рассмотрениях основное внимание мы уделим свистовому диапазону частот, представляющему значительный интерес для ряда приложений:

$$\Omega_H \ll \omega \ll \omega_H \ll \omega_p. \quad (1.54)$$

Диапазон (1.54) включает в себя нерезонансную часть

$$\Omega_H \ll \omega < \omega_{LH} \quad (1.55)$$

и резонансную часть, которая, в свою очередь, может быть разбита на два интервала:

$$\omega_{LH} < \omega < \omega_H/2 \ll \omega_p, \quad (1.56)$$

и

$$\omega_H/2 < \omega < \omega_H \ll \omega_p. \quad (1.57)$$

Из двух нормальных волн холодной магнитоактивной плазмы на частотах (1.54) распространяющейся является только «необыкновенная» волна, дисперсионные свойства которой заметно различаются в частотных интервалах (1.55), (1.56), (1.57). Это ясно видно из структуры поверхностей показателей преломления «необыкновенной» волны, изображённых на рисунках 1.1, 1.2 и 1.3 для трёх указанных интервалов частот. Левые графики данных рисунков показывают зависимость p от q ; на правых показана поверхность показателя преломления в \mathbf{n} -пространстве. На рисунках 1.1 и 1.2 отмечены величины $q = q_S$, которые отвечают конусам Стори и находятся из условия $p_e'' = 0$ (штрих означает дифференцирование по аргументу), а также

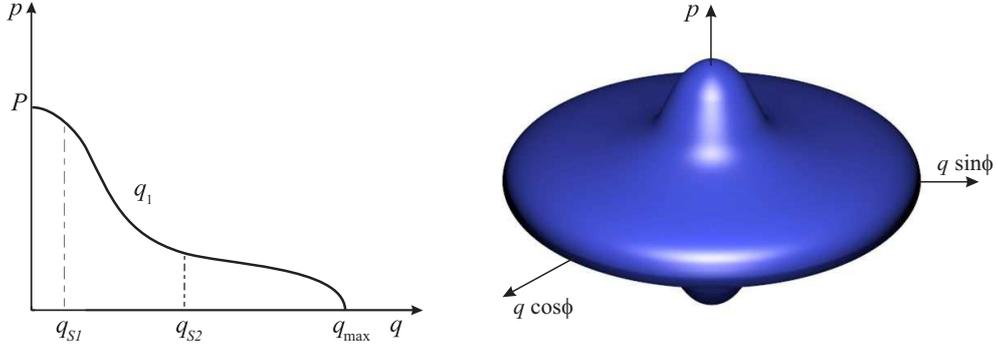


Рис. 1.1. Поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны в интервале частот (1.55)

величины $P = p_e(0) = (\varepsilon - g)^{1/2}$. Кроме того, на рис. 1.1 указана величина $q_{\max} = [(\varepsilon^2 - g^2)/\varepsilon]^{1/2}$, а на рис. 1.2 — величина $q = q_c$, отвечающая конической рефракции. Данная величина находится из условия $p'_e = 0$ при $q \neq 0$; соответствующее ей продольное волновое число $P_c = p_e(q_c)$. В случае резонансной плазмы область достаточно больших значений q , где $p_e \approx \text{sgn}(\varepsilon)(-\varepsilon/\eta)^{1/2}q$, отвечает квазиэлектростатическим волнам (см. рис. 1.2 и 1.3).

Заметим, что для описания поверхностей показателя преломления для плазмы с плотностью N вместо (1.53) можно использовать функции

$$q_k(p, N) = \left\{ \left[\varepsilon^2 - g^2 + \eta\varepsilon - (\eta + \varepsilon)p^2 + (-1)^k R(p) \right] / 2\varepsilon \right\}^{1/2},$$

$$R(p, N) = -(\eta - \varepsilon) \left[(p^2 - P_b^2)(p^2 - P_c^2) \right]^{1/2},$$

$$P_{b,c}(N) = \left\{ \varepsilon - (\eta + \varepsilon) \frac{g^2}{(\eta - \varepsilon)^2} + \frac{2\chi_{b,c}}{(\eta - \varepsilon)^2} [\varepsilon g^2 \eta (g^2 - (\eta - \varepsilon)^2)]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (1.58)$$

$$\chi_b = -\chi_c = -1.$$

Очевидно, что в частотной области (1.56) справедливо соотношение $q_{1,2}(P_c) = q_c$ (см. рис. 1.2). Нетрудно убедиться, что в интервале частот (1.55) поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны (см. рис. 1.1) описывается формулой $q^2 = q_1^2(p, N)$, в интервале частот (1.56) — формулами $q^2 = q_1^2(p, N)$ и $q^2 = q_2^2(p, N)$ при $0 \leq q^2 \leq q_c^2$ и $q^2 > q_c^2$ соответственно, а в интервале частот (1.57) — формулой $q^2 = q_2^2(p, N)$.

При наличии в плазме столкновительных потерь и условии

$$\omega_{\text{ЛH}} \ll |\omega - i\nu_e| \ll \omega_{\text{H}} \quad (1.59)$$

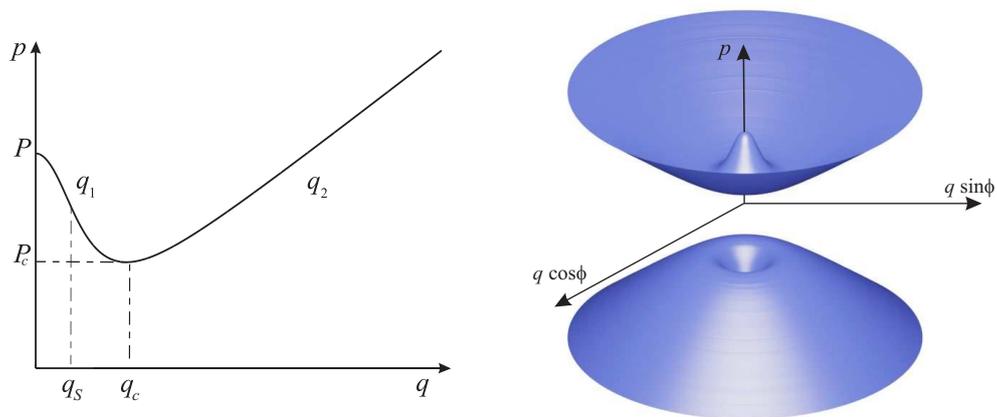


Рис. 1.2. Поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны в интервале частот (1.56)

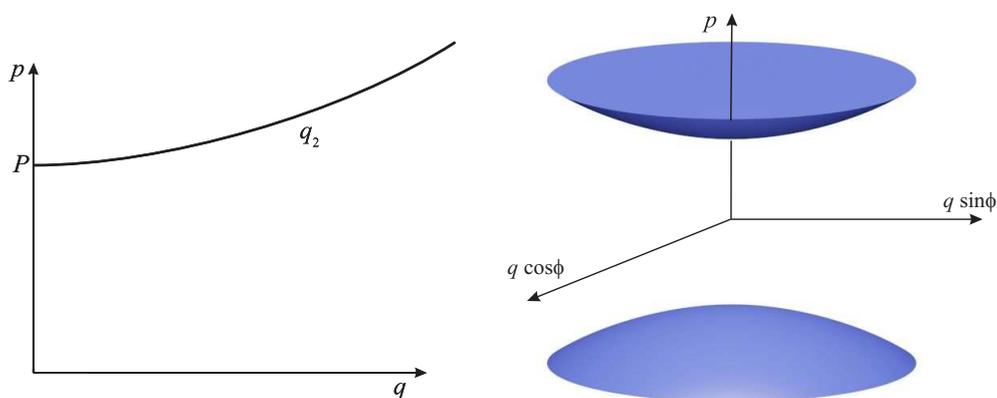


Рис. 1.3. Поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны в интервале частот (1.57)

компоненты тензора (1.29) принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 - \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu_e)}{[(\omega - i\nu_e)^2 - \omega_H^2]\omega}, \\ g &= \frac{\omega_p^2\omega_H}{[(\omega - i\nu_e)^2 - \omega_H^2]\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu_e)}.\end{aligned}\tag{1.60}$$

где $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$ — суммарная эффективная частота электрон-ионных и электрон-нейтральных соударений. Примечательно, что при условиях (1.59) формулы (1.60) оказываются справедливыми при преобладающем влиянии как электрон-нейтральных ($\nu_e \approx \nu_{en} \gg \nu_{ei}$), так и электрон-ионных столкновений ($\nu_e \approx \nu_{ei} \ll \nu_{en}$). Очевидно, при дополнительном условии $\omega_p \gg \omega_H$ область частот, определяемая неравенствами (1.59), по-прежнему соответствует свистовому диапазону. Учёт столкновительных потерь приводит, естественно, к тому, что показатель преломления обеих нормальных волн становятся комплексными.

Отметим, что в выражениях (1.60) не учитывается бесстолкновительное затухание Ландау, роль которого будет рассмотрена отдельно.

1.4. Общее представление полей собственных волн замагниченного цилиндрического плазменного волновода

Рассмотрим продольно-однородный цилиндрический плазменный столб радиуса a , окружённый свободным пространством или замагниченной плазмой. Предполагаем по-прежнему, что столб ориентирован вдоль внешнего однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 . Плотность плазмы такой системы записывается следующим образом:

$$N(\rho) = N_a + (\tilde{N}(\rho) - N_a)[1 - U(\rho - a)],\tag{1.61}$$

где a — радиус дукта, U — единичная функция Хевисайда, \tilde{N} и N_a — плотность плазмы внутри и вне плазменного волновода соответственно. В случае, если окружающая среда является свободным пространством полагаем $N_a = 0$.

Поля мод, поддерживаемых описанной системой, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{E}(\rho) \exp[-im\varphi - ik_0pz], \\ \mathbf{H}(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{H}(\rho) \exp[-im\varphi - ik_0pz].\end{aligned}\quad (1.62)$$

Здесь m — азимутальный индекс ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), p — нормированная на k_0 постоянная распространения. Подставив выражения для поля в виде (1.62) в уравнения Максвелла (1.30)–(1.35) при отсутствии источников, получим следующую систему:

$$\frac{m}{k_0\rho} E_z - pE_\varphi = H_\rho, \quad (1.63)$$

$$pE_\rho - \frac{i}{k_0} \frac{dE_z}{d\rho} = H_\varphi, \quad (1.64)$$

$$\frac{i}{k_0\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho E_\varphi) - \frac{m}{k_0\rho} E_\rho = H_z, \quad (1.65)$$

$$-\frac{m}{k_0\rho} H_z + pH_\varphi = \varepsilon E_\rho - igE_\varphi, \quad (1.66)$$

$$-pH_\rho + \frac{i}{k_0} \frac{dH_z}{d\rho} = igE_\rho + \varepsilon E_\varphi, \quad (1.67)$$

$$-\frac{i}{k_0\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho H_\varphi) + \frac{m}{k_0\rho} H_\rho = \eta E_z. \quad (1.68)$$

Из уравнений (1.63)–(1.68) легко установить связь продольных компонент поля $E_z(\rho)$, $H_z(\rho)$ с поперечными компонентами

$E_\rho(\rho), E_\varphi(\rho), H_\rho(\rho), H_\varphi(\rho)$:

$$\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\
&\quad \times \left\{ ipg \frac{m}{\rho} E_z + ip(\varepsilon - p^2) \frac{dE_z}{d\rho} + (\varepsilon - p^2) \frac{m}{\rho} H_z + g \frac{dH_z}{d\rho} \right\}, \\
E_\varphi &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\
&\quad \times \left\{ p(\varepsilon - p^2) \frac{m}{\rho} E_z + pg \frac{dE_z}{d\rho} - ig \frac{m}{\rho} H_z - i(\varepsilon - p^2) \frac{dH_z}{d\rho} \right\}, \\
H_\rho &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\
&\quad \times \left\{ [g^2 - \varepsilon(\varepsilon - p^2)] \frac{m}{\rho} E_z - p^2 g \frac{dE_z}{d\rho} + ipg \frac{m}{\rho} H_z + ip(\varepsilon - p^2) \frac{dH_z}{d\rho} \right\}, \\
H_\varphi &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\
&\quad \times \left\{ ip^2 g \frac{m}{\rho} E_z - i [g^2 - \varepsilon(\varepsilon - p^2)] \frac{dE_z}{d\rho} + p(\varepsilon - p^2) \frac{m}{\rho} H_z + pg \frac{dH_z}{d\rho} \right\} \quad (1.69)
\end{aligned}$$

При этом скалярные функции $E_z(\rho), H_z(\rho)$ подчиняются уравнениям [9]

$$\begin{aligned}
(p^2 - \varepsilon) \hat{L}_m H_z + k_0^2 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2] H_z &= ipg \hat{L}_m E_z + \\
&+ [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2] \left\{ \left(ip \frac{dE_z}{d\rho} + \frac{m}{\rho} H_z \right) \frac{d}{d\rho} \left[\frac{g}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left(ip \frac{m}{\rho} E_z + \frac{dH_z}{d\rho} \right) \frac{d}{d\rho} \left[\frac{p^2 - \varepsilon}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] \right\}, \\
[g^2 + \varepsilon(p^2 - \varepsilon)] \hat{L}_m E_z + k_0^2 \eta [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2] E_z &= -ipg \hat{L}_m H_z - \\
&- [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2] \left\{ ip \left(ip \frac{m}{\rho} E_z + \frac{dH_z}{d\rho} \right) \frac{d}{d\rho} \left[\frac{g}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + p \left(p \frac{dE_z}{d\rho} - i \frac{m}{\rho} H_z \right) \frac{d}{d\rho} \left[\frac{p^2 - \varepsilon}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] \right\}, \quad (1.70)
\end{aligned}$$

где

$$\hat{L}_m = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}. \quad (1.71)$$

Выражая $\hat{L}_m E_z$ и $\hat{L}_m H_z$ из (1.70), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \hat{L}_m E_z - k_0^2 \frac{\eta}{\varepsilon} (p^2 - \varepsilon) E_z &= -ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} p H_z + \Psi_E, \\ \hat{L}_m H_z - k_0^2 \left(p^2 + \frac{g^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \right) H_z &= ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} \eta p E_z + \Psi_H, \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \frac{pg}{\varepsilon \Delta} \left\{ \left[p \frac{m}{\rho} E_z - p \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{dE_z}{d\rho} + i \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{m}{\rho} H_z - i \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{d\varepsilon}{d\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \left[p \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{m}{\rho} E_z - p \frac{dE_z}{d\rho} + i \frac{m}{\rho} H_z - i \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{dg}{d\rho} \right\}, \\ \Psi_H &= \frac{g}{\varepsilon \Delta} \left\{ \left[ip \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{m}{\rho} E_z - ip(p^2 - 2\varepsilon) \frac{dE_z}{d\rho} - (p^2 - 2\varepsilon) \frac{m}{\rho} H_z + \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{d\varepsilon}{d\rho} + \left[ip(p^2 - 2\varepsilon) \frac{m}{\rho} E_z - ip \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{dE_z}{d\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{m}{\rho} H_z + (p^2 - 2\varepsilon) \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{dg}{d\rho} \right\}, \end{aligned}$$

$$\Delta = (p^2 - \varepsilon + g)(p^2 - \varepsilon - g). \quad (1.73)$$

В случае радиально-неоднородного плазменного столба решение системы уравнений (1.70) может быть получено только численно. Решить эти уравнения аналитически удаётся лишь в случае однородного столба, когда $N = N_0 = \text{const}$, $\tilde{\nu}_e = \nu_e = \text{const}$.

Дисперсионное уравнение для волн, направляемых замагниченным плазменным столбом получается из условия непрерывности тангенциальных компонент поля при $\rho = a$:

$$\begin{aligned} E_\varphi(a-0) &= E_\varphi(a+0), \\ E_z(a-0) &= E_z(a+0), \\ H_\varphi(a-0) &= H_\varphi(a+0), \\ H_z(a-0) &= H_z(a+0). \end{aligned} \quad (1.74)$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПЛАЗМЕННЫМ СТОЛБОМ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим продольно-однородный цилиндрический плазменный столб радиуса a , окружённый свободным пространством и ориентированный вдоль внешнего однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 .

Плотность плазмы при наличии столба записывается следующим образом:

$$N(\rho) = \tilde{N}(\rho)[1 - U(\rho - a)]. \quad (2.1)$$

Напомним, что a — радиус столба, U — единичная функция Хевисайда, $\tilde{N}(\rho)$ — функция, описывающая распределение плотности плазмы внутри столба. Что касается частоты соударений, то в зависимости от конкретных условий она может быть как постоянной величиной, так и функцией координат.

В случае однородного столба с плотностью $\tilde{N} = N$ система уравнений (1.70) в области $\rho < a$ принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_m E_z - k_0^2 \frac{\eta}{\varepsilon} (p^2 - \varepsilon) E_z &= -ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} p H_z, \\ \hat{L}_m H_z - k_0^2 \left(p^2 + \frac{g^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \right) H_z &= ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} \eta p E_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для получения системы уравнения для области $\rho > a$ в (2.2) необходимо положить $\varepsilon = \eta = 1, g = 0$.

Решения системы (2.2) выражаются через цилиндрические функции $Z_m(k_0 q \rho)$ m -го порядка, которые являются собственными функциями оператора \hat{L}_m : $\hat{L}_m Z_m(k_0 q \rho) = -(k_0 q)^2 Z_m(k_0 q \rho)$, где q — нормированное поперечное волновое число. Очевидно, что внутри столба продольные компоненты поля, а также получаемые из них с помощью соотношений (1.69) поперечные компоненты выражаются через функции Бесселя $J_m(k_0 q \rho)$. Вне столба продольные компоненты поля можно представить через функцию Макдональда $K_m(k_0 s \rho)$, где $s = \sqrt{p^2 - 1}$. Выполнив соответствующие выкладки, прихо-

дим к следующим выражениям для компонент поля в случае однородного плазменного столба:

а) при $\rho < a$

$$\begin{aligned}
E_\rho &= -\sum_{k=1}^2 B_k \left[\frac{n_k p + g}{\varepsilon} J_{m+1}(k_0 q_k \rho) + \alpha_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
E_\varphi &= i \sum_{k=1}^2 B_k \left[J_{m+1}(k_0 q_k \rho) + \alpha_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
E_z &= \frac{i}{\eta} \sum_{k=1}^2 B_k n_k q_k J_m(k_0 q_k \rho), \\
H_\rho &= -i \sum_{k=1}^2 B_k \left[p J_{m+1}(k_0 q_k \rho) - n_k \beta_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
H_\varphi &= -\sum_{k=1}^2 B_k n_k \left[J_{m+1}(k_0 q_k \rho) - \beta_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
H_z &= -\sum_{k=1}^2 B_k q_k J_m(k_0 q_k \rho); \tag{2.3}
\end{aligned}$$

б) при $\rho > a$

$$\begin{aligned}
E_\rho &= C_1 m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} - C_2 p \left[K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right], \\
E_\varphi &= i C_1 \left[K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right] - i C_2 p m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho}, \\
E_z &= -i C_2 s K_m(k_0 s \rho), \\
H_\rho &= -i C_1 p \left[K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right] + i C_2 m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \\
H_\varphi &= C_1 p m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} - C_2 \left[K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right], \\
H_z &= C_1 s K_m(k_0 s \rho). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Здесь

$$n_k = n_k(p, N), \quad \alpha_k = \alpha_k(p, N), \quad \beta_k = \beta_k(p, N), \quad q_k^2 = q_k^2(p, N), \tag{2.5}$$

B_k и C_k — некоторые константы. Функции, входящие в формулы (2.5) и зависящие от нормированной постоянной распространения p и плотности

плазмы N в столбе, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} n_k(p, N) &= -\frac{\varepsilon}{pg} \left(p^2 + q_k^2(p, N) + \frac{g^2}{\varepsilon} - \varepsilon \right), \\ \alpha_k(p, N) &= -1 + \frac{p^2 + q_k^2(p, N) - \varepsilon}{g}, \\ \beta_k(p, N) &= 1 + \frac{p}{n_k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Величины $q_k = q_k(p, N)$ вычисляются по формулам (1.58). При этом в выражениях (1.58) и (2.6) компоненты тензора диэлектрической проницаемости берутся соответствующими плотности плазмы N .

Из условия непрерывности тангенциальных компонент поля (1.74) при $\rho = a$ можно получить дисперсионное уравнение, позволяющее определить постоянные распространения мод p плазменного столба и соотношения между коэффициентами B_k и C_k . Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\Delta \equiv \Delta_0 - \sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \delta_1 \left[\eta J_m^{(1)} J_m^{(2)} + J_m^{(1)} \hat{K}_m + \eta J_m^{(2)} \hat{K}_m \right] + \hat{K}_m^2, \\ \Delta_1 &= \delta_2 \eta \hat{J}_m^{(1)} \hat{K}_m, \\ \Delta_2 &= \delta_2 \left[\eta \hat{J}_m^{(1)} + \hat{K}_m \right] \hat{J}_m^{(2)}, \\ \Delta_3 &= \delta_2 \eta \frac{p}{n_1} \frac{m}{S^2} \left[\hat{J}_m^{(1)} + J_m^{(1)} - J_m^{(2)} - \hat{J}_m^{(2)} \right] + p^2 \frac{m^2}{S^4}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} J_m^{(1)} &= \frac{J_{m+1}(Q_1)}{Q_1 J_m(Q_1)} + m \frac{\alpha_1}{Q_1^2}, & J_m^{(2)} &= \frac{J_{m+1}(Q_2)}{Q_2 J_m(Q_2)} - m \frac{\beta_2}{Q_2^2}, \\ \hat{K}_m &= \frac{K_{m+1}(S)}{S K_m(S)} - m \frac{1}{S^2}, & \hat{J}_m^{(k)} &= J_m^{(k)} + (-1)^k m \frac{\alpha_k + \beta_k}{Q_k^2}, \\ Q_k &= k_0 q_k a, \quad S = k_0 s a, \quad \delta_{1,2} = n_{2,1} (n_2 - n_1)^{-1}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В отсутствие потерь решения уравнения (2.7) для распространяющихся мод является действительным. При наличии столкновительных потерь в плазме решения дисперсионного уравнения (2.7) являются комплексными,

т.е. $p = p' - ip''$, где p' и p'' — постоянные распространения и постоянные затухания мод соответственно.

В случае неоднородного столба, когда решение уравнений для поля в области $\rho < a$ приходится отыскивать с использованием численных методов, поле внутри цилиндра представляется в виде суммы линейно независимых решений соответствующих дифференциальных уравнений. Искомые решения должны быть регулярными на оси дакта и при $\rho \rightarrow 0$ по-прежнему описываются цилиндрическими функциями вида (2.3) с аргументами $k_0 q_1 \rho$ и $k_0 q_2 \rho$, где величины q_1 и q_2 отвечают однородной плазме с плотностью $\tilde{N}(0)$ и эффективной частоте электронных соударений $\nu_e(0)$. Использование граничных условий при $\rho = a$ позволяет далее получить дисперсионное соотношение для мод, направляемых неоднородным плазменным столбом.

2.2. Типы мод, направляемых плазменным столбом

Выясним вначале, моды каких типов могут поддерживаться плазменным столбом. Поскольку обсуждение возможных типов мод в различных диапазонах частот заняло бы много места, мы в качестве примера ограничимся случаем, когда круговая частота лежит в диапазоне (1.56). Прежде всего, обратим внимание на то, что в диапазоне частот (1.56) имеет место приближённая формула $\varepsilon\eta \approx -g^2$ и выполняется неравенство $|\varepsilon| \ll |\eta|$. Используя эти результаты, нетрудно показать, что $P_c \approx 2\varepsilon^{1/2}$ и $|P_b| \ll |P_c|$. Кроме того, в выбранном диапазоне выполняется неравенство $|P_b| \ll 1$. Заметим, что при отсутствии столкновительных потерь в плазме величины P_b, P_c и P в интервале частот (1.56) являются чисто действительными и удовлетворяют неравенствам

$$P_b \ll P_c < P, \quad (2.10)$$

позволяющим приближённо положить $P_b \approx 0$.

С учётом сделанных замечаний обсудим поверхности показателей преломления волн в плазме и в свободном пространстве. Для этого проанализируем вначале связь между продольным волновым числом p и поперечными волновыми числами $q_{1,2}$ в однородной магнитоактивной плазме. Напомним, что в рассматриваемом диапазоне частот распространяющейся является только «необыкновенная» волна холодной магнитоактивной плазмы. Поверхность показателя преломления этой волны в однородной плазме для интервала частот (1.59) в случае отсутствия диссипативных потерь показана на рис.2.1 верхней кривой. Как уже отмечалось ранее, здесь имеются две ветви $q = q_1(p)$ и $q = q_2(p)$, описывающие поверхности показателей преломления при $0 < q <$

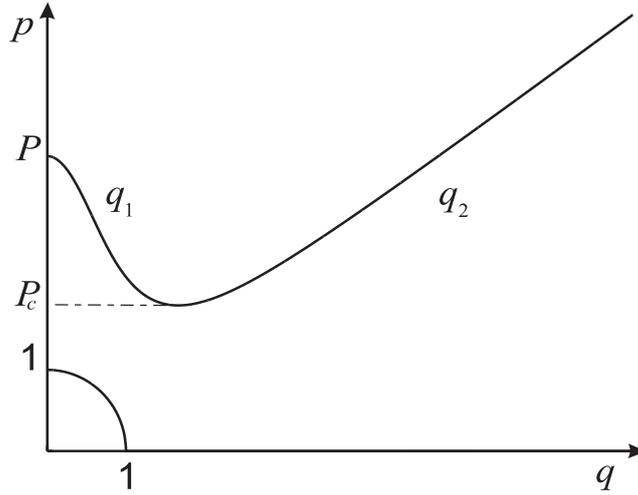


Рис. 2.1. Поверхности показателей преломления для электромагнитных волн в бесстолбовительной магнитоактивной плазме (верхняя кривая) и в свободном пространстве (нижняя кривая)

q_c и $q_c < q < \infty$ соответственно; величина $q_c = q_{1,2}(P_c)$ соответствует так называемым волнам конической рефракции. Ветвь $q_1(p)$ описывает крупномасштабную составляющую поля (так называемые геликоны), а ветвь $q_2(p)$ — мелкомасштабную квазиэлектростатическую составляющую [9].

Поверхность показателя преломления электромагнитных волн в свободном пространстве определяется выражением $p = (1 - q^2)^{1/2} = (1 + s^2)^{1/2}$ и представлена на рис.2.1 нижней кривой. На рисунке учтено, что в рассматриваемом случае имеет место неравенство $P_c > 1$.

Очевидно, что при определённых условиях плазменный столб может поддерживать собственные моды. При отсутствии потерь, когда, очевидно, имеют место соотношения $p' = p$ и $p'' = 0$, постоянные распространения мод должны удовлетворять условию $p > 1$. В этом случае величина s , относящаяся окружающей среде ($\rho > a$), является чисто действительной. Область $p > 1$ можно разбить на три интервала (см. рис. 2.1):

$$p > P, \quad (2.11)$$

$$P_c < p < P, \quad (2.12)$$

$$1 < p < P_c. \quad (2.13)$$

В случае (2.11) величина q_1 является мнимой, а величина q_2 — действительной, так что поле каждой собственной моды с продольным волновым числом, лежащим в интервале (2.11), содержит поверхностную геликонную и объёмную квазиэлектростатическую составляющие. В области (2.12) оба волновых

числа q_1 и q_2 действительны, так что геликонная и квазиэлектростатическая составляющие являются объёмными при $\rho < a$. В интервале (2.13) поперечные волновые числа q_1 и q_2 являются комплексно сопряжёнными ($q_1 = q_2^*$), поэтому поле в этом случае, очевидно, локализовано вблизи границы канала. Соответственно, такие собственные волны можно назвать объёмно–поверхностными. Как будет ясно из дальнейшего, представленная выше классификация, введенная для бесстолкновительного плазменного столба, оказывается пригодной и при наличии потерь в плазме. Следует лишь заменить величины p, P, P_c в (2.11)–(2.13) на $p', P' = \text{Re}P, P'_c = \text{Re}P_c$ соответственно.

2.3. Объёмные моды однородного плазменного столба

Рассмотрим объёмные моды однородного плазменного столба. Хотя уравнение (2.7) является весьма громоздким для аналитического решения, его можно упростить в случае, когда поперечные волновые числа геликонной части поля (ветвь q_1) и его квазиэлектростатической части (ветвь q_2) существенно различны по абсолютному значению ($|q_1| \ll |q_2|$). Для частотного диапазона (1.59) это имеет место в случае

$$|p|^2 \gg |P_c|^2. \quad (2.14)$$

При выполнении условия (2.14) выражения для величин $q_{1,2}, s$ и $n_{1,2}$ упрощаются к виду

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{P^2}{p^2} - p^2, & q_2^2 &= -\frac{\eta}{\varepsilon} \left(p^2 + \frac{g^2}{\eta} - \varepsilon \right), & s^2 &= p^2, \\ n_1 &= \frac{\eta}{p} \left(1 + \frac{\varepsilon}{p^2} \right), & n_2 &= -p \frac{\eta}{g} \left(1 - \frac{\varepsilon}{p^2} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставляя формулы (2.15) в строгое дисперсионное уравнение (2.7), и учитывая соотношение $\varepsilon\eta = -g^2$, справедливое в частотном интервале (1.59), можно получить приближённое представление дисперсионного уравнения, удобное для последующего анализа:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} + \frac{m\alpha_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{S} \left(\frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{J_{m+1}(Q_2)}{J_m(Q_2)} - \frac{m}{k_0 a p} + \frac{Q_2}{\eta S} \left(\frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) \right] = \\ & = \kappa(p) \left(\frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} - \frac{m\beta_1}{Q_1} - \frac{mQ_1}{(k_0 a P)^2} \right) \left(\frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\kappa(p) \approx P^2/(ps) \approx P^2/p^2$.

Проанализируем дисперсионное уравнение (2.16) для некоторых частных случаев. Вначале рассмотрим значения p , удовлетворяющие неравенству (2.11). При дополнительном условии $|p| \gg |P|$ параметр κ в правой части уравнения (2.16) оказывается весьма малым. При малом значении этого параметра дисперсионное уравнение в нулевом приближении теории возмущений ($\kappa = 0$) распадается на два уравнения

$$\frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} + \frac{m\alpha_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{S} \left(\frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{J_{m+1}(Q_2)}{J_m(Q_2)} - \frac{m}{k_0 a p} + \frac{1}{\eta} \frac{Q_2}{S} \left(\frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Анализ уравнений (2.17) и (2.18) показывает, что в области (2.11) решения имеет лишь уравнение (2.18). Эти решения соответствуют собственным модам, в полях которых преобладает квазиэлектростатическая составляющая. В рассматриваемом случае уравнение (2.18) допускает дальнейшее упрощение с учётом приближённого соотношения $|Q_2/(\eta s)| \approx |g^{-1}| \ll 1$. Кроме того, при выполнении дополнительного неравенства $k_0 a |p| \gg |m| + 1$, которое, как правило, имеет место для исследуемых мод, уравнение (2.18) принимает вид

$$J_{m+1}(Q_2) = 0. \quad (2.19)$$

Если воспользоваться приближённым выражением $Q_2 = k_0 a r \omega_{\text{H}} (\omega - i\nu_e)^{-1}$ ($|Q_2| \gg 1$), то решения уравнения (2.19) даются сравнительно простой формулой

$$p_{mn} = \mu_n^{(m+1)} \frac{c}{\omega_{\text{H}} a} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega} \right), \quad (2.20)$$

где $\mu_n^{(m)}$ — n -й нуль функции Бесселя J_m , n — большое положительное целое число ($n \gg 1$). Из формулы (2.20) следует соотношение $p''_{mn}/p'_{mn} \approx \nu_e/\omega$ для мод, поля которых определяются преимущественно квазиэлектростатической составляющей.

При приближении постоянной распространения p к величине P параметр κ возрастает. В области (2.12) имеет место неравенство $|\kappa| > 1$ и дисперсионное уравнение уже не распадается на два уравнения, в отличие от рассмотренного выше случая. Это означает, что собственные моды, постоянные распространения которых лежат в интервале (2.12), являются «гибридными» в том смысле, что их свойства определяются одновременно вкладом как геликонной, так и квазиэлектростатической составляющей. В

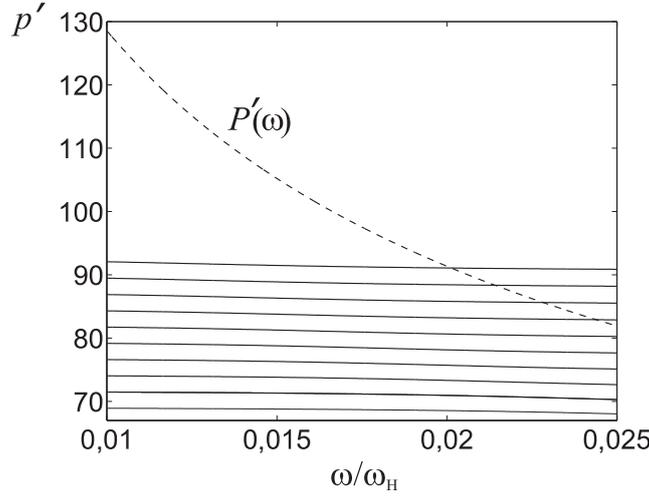


Рис. 2.2. Дисперсионные кривые мод с азимутальным индексом $m = 1$ и радиальными индексами $n = 20, \dots, 29$ (сплошные линии) и зависимость $P'(\omega)$ (штриховая линия) при $\omega_p/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$ и отсутствии столкновительных потерь ($\nu_e = 0$)

этом случае решения дисперсионного уравнения не могут быть получены в аналитическом виде и находятся с помощью численных методов.

Поведение объёмных мод иллюстрируется результатами численного решения точного дисперсионного уравнения (2.7). Начнем обсуждение результатов со случая бесстолкновительного плазменного канала. На рис. 2.2 показаны зависимости постоянных распространения $p_{mn} = p'_{mn}$ от частоты ω для нескольких мод с азимутальным индексом $m = 1$. Данные зависимости были получены численно при $\omega_p/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$ и $\nu_e = 0$. В силу отсутствия столкновительных потерь в данном случае $p''_{mn} = 0$. Штриховая линия на рис. 2.2 изображает зависимость $P'(\omega)$. Заметим, что значения безразмерных параметров, выбранные для численных расчётов, отвечают типичным условиям экспериментов с геликонными источниками плазмы и, в частности, выполняются, если плотность плазмы $N = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, внешнее постоянное магнитное поле $B_0 = 800 \text{ Гс}$, радиус канала $a = 2,5 \text{ см}$. Кроме того, заметим, что соответствующий частотный интервал на рис. 2.2 включает частоту $\omega/2\pi = 27,12 \text{ МГц}$, обычно используемую в соответствующих экспериментах [1, 2]. Безразмерный параметр ω/ω_H , отвечающий этой частоте, равен $\omega/\omega_H = 1,25 \cdot 10^{-2}$. Отметим, что решения p_{mn} пронумерованы в порядке возрастания значений p_{mn} , начиная с нижней границы $p = P'_c = \text{Re } P_c$ области (2.12). Как видно из рис. 2.2, число мод в интервале (2.12) довольно велико. Например, для $\omega/\omega_H = 1,25 \cdot 10^{-2}$ общее число мод равно 36. На рис. 2.2 приведены дисперсионные кривые только для десяти мод с номерами $n = 20, \dots, 29$. Поскольку поля объёмных мод включают два поперечных

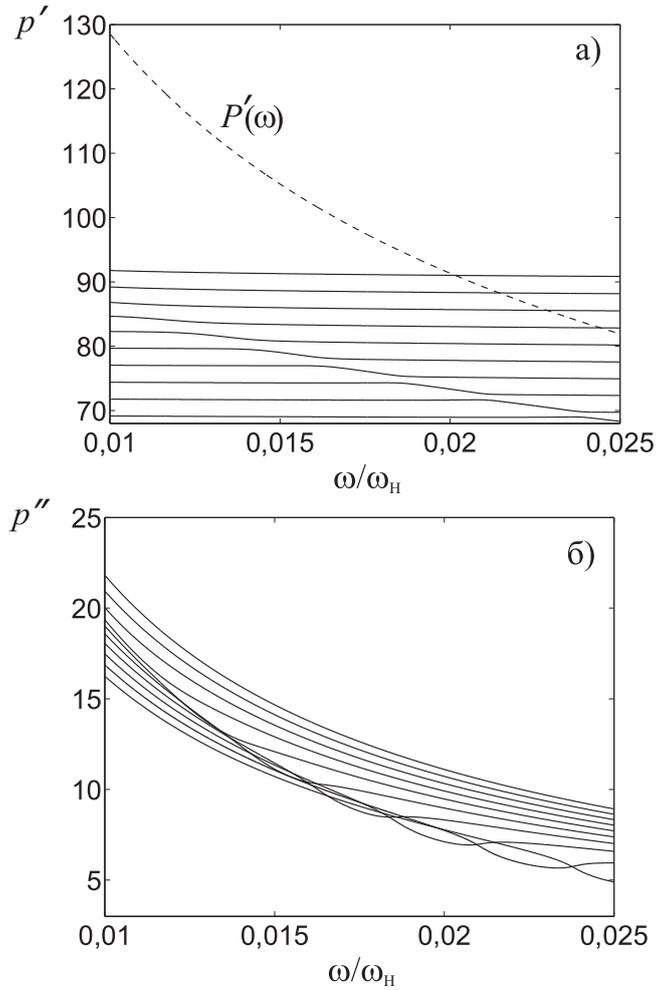


Рис. 2.3. Дисперсионные кривые мод с азимутальным индексом $m = 1$ и радиальными индексами $n = 20, \dots, 29$ (сплошные линии) и зависимость $P'(\omega)$ (штриховая линия) при $\omega_p/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$ и наличии столкновительных потерь ($\nu_e = 2,55 \cdot 10^{-3} \omega_H$)

волновых числа, постольку распределения полей содержат одновременно мелкомасштабные и крупномасштабные вариации по радиусу, отвечающие величинам q_1 и q_2 соответственно. Можно убедиться, что для мод с радиальными числами n и $n + 1$, выполняются соотношения $k_0 a [q_2(p_{m,n+1}) - q_2(p_{m,n})] \simeq \pi$ и $k_0 a [q_1(p_{m,n}) - q_1(p_{m,n+1})] \ll \pi$. Отсюда следует, что моды, отвечающие ближайшим дисперсионным кривым, различаются числом мелкомасштабных вариаций по радиусу. При этом число таких вариаций возрастает с увеличением значения n .

На рис. 2.3 представлены дисперсионные кривые для мод с азимутальным индексом $m = 1$ и радиальными индексами $n = 20, \dots, 29$, полученные из дисперсионного уравнения (2.7) при $\nu_e/\omega = 2,55 \cdot 10^{-3}$ и тех же значениях параметров ω_p/ω_H , $\omega_H a/c$, что и для рис. 2.2. Нумерация мод на рис. 2.3 совпа-

дает с нумерацией в случае бесстолкновительной плазмы (ср. с рис. 2.2). При этом действительные части p'_{mn} комплексных постоянных распространения и постоянные затухания p''_{mn} (для $\omega/\omega_n = 0,025$) возрастают с увеличением индекса n . Как видно из рис. 2.3, при малых столкновительных потерях на кривых $p'_{mn}(\omega)$ появляются ступенчатые участки. Одновременно на частотных зависимостях постоянных затухания $p''_{mn}(\omega)$, возникают локальные минимумы соответствующие частотам, для которых крутизна кривых $p'_{mn}(\omega)$ является максимальной.

Из рис. 2.2, 2.3 следует, что решения приближённого уравнения (2.16) при условии (2.14) с большой степенью точности описывает поведение дисперсионных характеристик. В области (2.11) они хорошо согласуются с приближённой формулой (2.20). Другая важная особенность поведения дисперсионных характеристик $p'_{mn}(\omega)$ состоит в их непрерывном переходе из области (2.11) в область (2.12) с уменьшением частоты.

С дальнейшим увеличением частоты электронных соударений ν_e дисперсионные характеристики мод претерпевают существенные изменения (см. рис. 2.4). Из сравнения рис. 2.3 и 2.4 можно видеть, что начиная с определенных значений ν_e ступенчатые участки кривых $p'_{mn}(\omega)$ трансформируются в единую кривую, соответствующую моде с относительно малыми столкновительными потерями. Одновременно формируется и соответствующая кривая постоянной затухания такой моды. На рис. 2.4 частотные зависимости постоянных распространения и затухания данной моды показаны толстыми линиями. Оставшиеся кривые $p'_{mn}(\omega)$ и $p''_{mn}(\omega)$ соответствуют модам со сравнительно большими потерями. Дисперсионные характеристики таких сильнозатухающих мод показаны на рис. 2.4 тонкими линиями. Таким образом, с возрастанием частоты электронных соударений моды разделяются на слабозатухающие, для которых выполняется неравенство $p''/p' \ll \nu_e/\omega$, и сильнозатухающие, для которых справедливо соотношение $p''/p' \approx \nu_e/\omega$, характерное для квазиэлектростатических волн. Аналогичное поведение демонстрируют и моды с другими значениями азимутального индекса m . В качестве примера на рис. 2.5 приведены дисперсионные кривые нескольких азимутально-симметричных мод, для которых $m = 0$.

Отмеченные особенности дисперсионных характеристик мод при $\nu_e \neq 0$ можно объяснить, анализируя поведение поперечных волновых чисел $Q_1 = k_0 a q_1$ и $Q_2 = k_0 a q_2$. При учёте электронных столкновений в плазме мнимые части поперечных волновых чисел Q_2 слабозатухающих мод быстро возрастают по абсолютному значению с увеличением ν_e . Указанные мнимые части

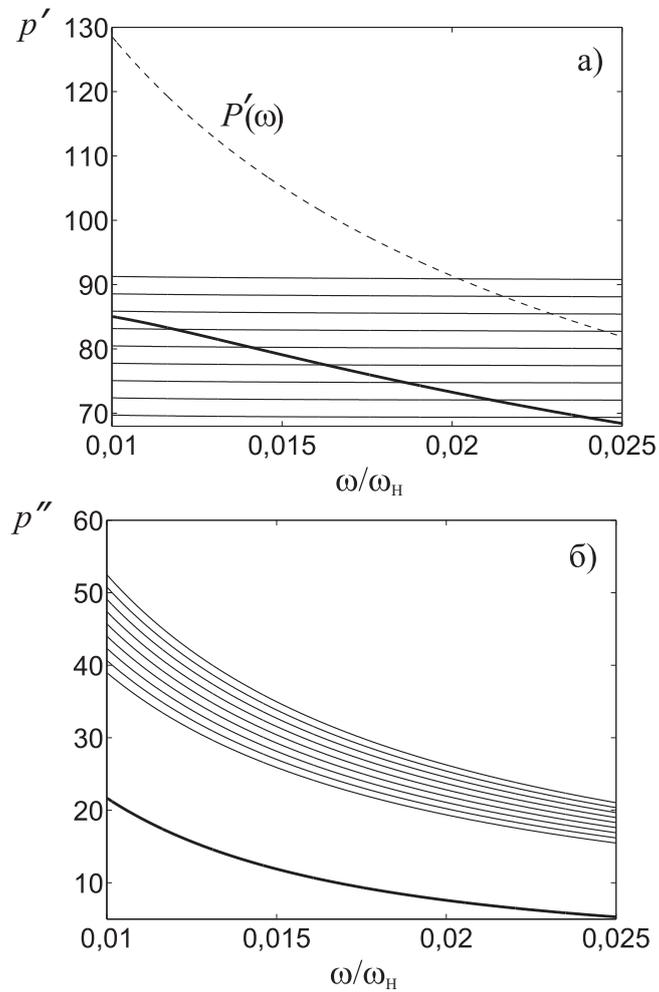


Рис. 2.4. Дисперсионные кривые одной слабозатухающей моды и девяти сильнозатухающих мод с азимутальным индексом $m = 1$ (толстые и тонкие сплошные линии соответственно) и зависимость $P'(\omega)$ при $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$. Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.3

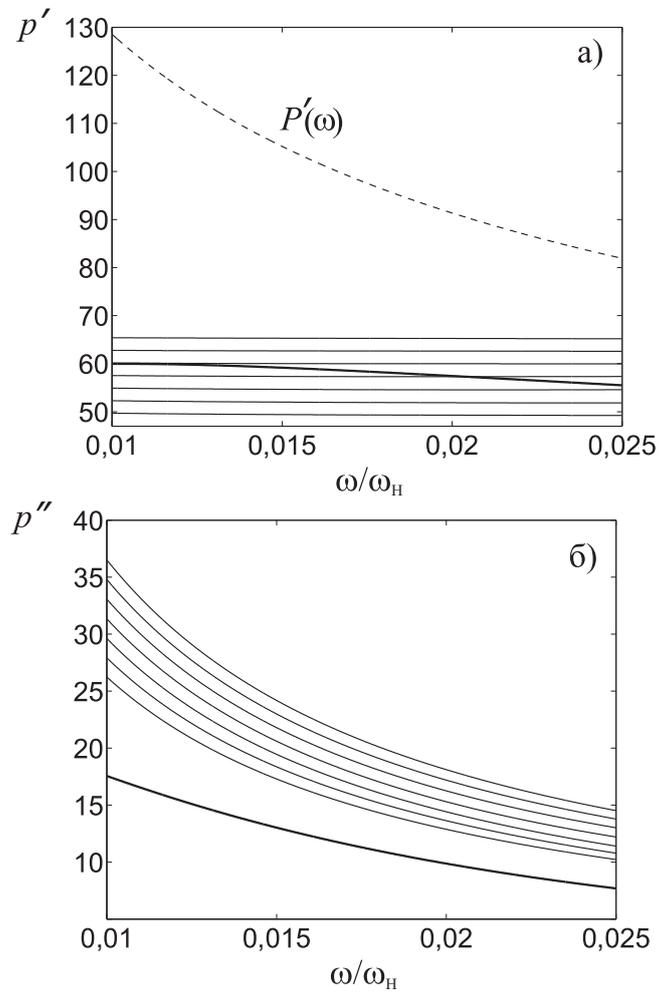


Рис. 2.5. Дисперсионные кривые, одной слаботзатухающей моды и девяти сильнозатухающ мод с азимутальным индексом $m = 0$ (толстая и тонкие сплошные линии соответственно) и зависимость $P'(\omega)$ при $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$. Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.4

описываются выражением

$$\operatorname{Im} Q_2 \approx k_0 a p' \frac{\omega_{\text{H}}}{\omega [1 + (\nu_e/\omega)^2]} \left(\frac{\nu_e}{\omega} - \frac{p''}{p'} \right), \quad (2.21)$$

из которого следует, что при условии $k_0 a p' (\omega_{\text{H}}/\omega) \gg 1$, имеющем место для исследуемых мод, и значениях отношения p''/p' , не слишком близких к ν_e/ω , может выполняться неравенство $\operatorname{Im} Q_2 \gg 1$. В этом случае для мелкомасштабной («квазиэлектростатической») составляющей поля моды имеет место явление, аналогичное скин-эффекту: мелкомасштабная часть поля сильно «прижимается» к границе дакта, так что поле моды определяется преимущественно крупномасштабной составляющей. В результате затухание моды становится близким к затуханию крупномасштабных вистлеров (геликонов): $p''/p' \sim \nu_e/\omega_{\text{H}} \ll \nu_e/\omega$. Напротив, в других (сильнозатухающих) модах мнимая часть поперечного волнового числа Q_1 возрастает по абсолютному значению быстрее, чем $|\operatorname{Im} Q_2|$, так что в поле доминируют квазиэлектростатические волны. Таким образом, потери этих мод оказываются примерно такими же, как для квазиэлектростатических волн в однородной плазме, т.е. $p''/p' \approx \nu_e/\omega$. В результате, для сильнозатухающих мод выполняется неравенство $|\operatorname{Im} Q_2| \ll 1$, а кривые $p'(\omega)$ таких мод, несмотря на значительное столкновительное затухание, мало отличаются от дисперсионных кривых в отсутствие потерь.

Итак, слабозатухающие моды, потери которых значительно меньше, чем потери квазиэлектростатических волн, должны иметь волновые числа Q_2 с большой мнимой частью: $\operatorname{Im} Q_2 \gg 1$. В то же время сильнозатухающие моды, для которых отношение p''/p' близко к ν_e/ω , обладают весьма малой мнимой частью Q_2 : $|\operatorname{Im} Q_2| \ll 1$. Фактически, возможность одновременного существования двух видов мод с близкими постоянными распространения p' и существенно различными постоянными затухания p'' следует непосредственно из формулы (2.21) для $\operatorname{Im} Q_2$.

Следует отметить, что приближённое дисперсионное уравнение (2.16) можно существенно упростить при $\operatorname{Im} Q_2 \gg 1$. В этом случае $J_{m+1}(Q_2)/J_m(Q_2) \approx i$. Используя данный результат и приближённые формулы

$$\alpha_1 = -1 - \frac{P^2}{p^2}, \quad \beta_1 = 1 + \frac{p^2}{P^2}, \quad (2.22)$$

которые выполняются при условии (2.14), уравнение (2.16) преобразуется к виду

$$\frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} - \frac{m}{Q_1} \left(1 + \frac{P^2}{p^2} \right) + \frac{Q_1}{S} \frac{\tilde{K}}{1 + \tilde{\kappa}} = 0, \quad (2.23)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \kappa \left(\frac{m}{k_0 a p} - i \right)^{-1} \tilde{K}, \quad \tilde{K} = S \hat{K}. \quad (2.24)$$

Уравнение (2.23) позволяет найти приближённо комплексные постоянные распространения $p = p' - ip''$ мод с малыми постоянными затухания. Поскольку эти моды различаются числом крупномасштабных вариаций поля по радиусу, мы будем нумеровать их в порядке возрастания числа таких вариаций, используя обозначение ν для радиального индекса ($\nu = 1, 2, \dots$). Очевидно, что постоянные распространения $p'_{m\nu}$ убывают с возрастанием ν .

Представляет интерес сравнить результаты решения точного дисперсионного уравнения (2.7) и приближённого уравнения (2.23) для слабозатухающих мод. Проведём такое сравнение для мод с азимутальным индексом $m = 1$. Из точного дисперсионного уравнения можно найти, что при тех же значениях параметров, что и для рис. 2.4, в интервале (2.12) существуют три слабозатухающие моды с индексом $m = 1$. Зависимости $p'_{m\nu}(\omega)$ и $p''_{m\nu}(\omega)$ для этих мод показаны на рисунке 2.6 сплошными линиями. Кривая с $\nu = 1$ на рис. 2.6 соответствует моде, выделенной жирной линией на рис. 2.4. Штрих-пунктирной линией на рис. 2.6 показана приближённая зависимость, найденная для этой моды из уравнения (2.23). Как видно из рисунка, решение приближённого уравнения (2.23) достаточно хорошо согласуется с решением, найденным на основе точного дисперсионного уравнения, даже когда величина $|p/P_c|$ не слишком велика. В частности, линии на рис. 2.6а, отвечающие строгому и приближённому дисперсионным уравнениям, совпадают с графической точностью. Мы не приводим решения уравнения (2.23) для $\nu = 2$ и $\nu = 3$, поскольку их постоянные распространения $p'_{m\nu}$ лежат весьма близко к P'_c и условие (2.14) не выполняется. Поэтому уравнение (2.23) не позволяет описать поведение дисперсионных зависимостей этих двух мод. С увеличением радиуса столба количество слабозатухающих мод возрастает и уравнение (2.23) даёт возможность получить приближённые решения $p_{m\nu}$ для большего числа мод.

Процесс разделения мод на слабо- и сильнозатухающие можно проследить с помощью рис. 2.7, показывающего зависимости величин p' и p'' от эффективной частоты электронных соударений. Как и выше, здесь тонкие сплошные линии соответствуют сильнозатухающим модам, для которых имеет место соотношение $p''/p' \sim \nu_e/\omega$. Толстая сплошная линия соответствует моде с $\nu = 1$. Для выбранного интервала эффективной частоты электронных соударений отношение p''/p' для моды с $\nu = 1$ лежит между соответствующими величинами p''/p' для квазиэлектростатических волн и крупномасштабных вистлеров (геликонов), распространяющихся в однородной плазме.

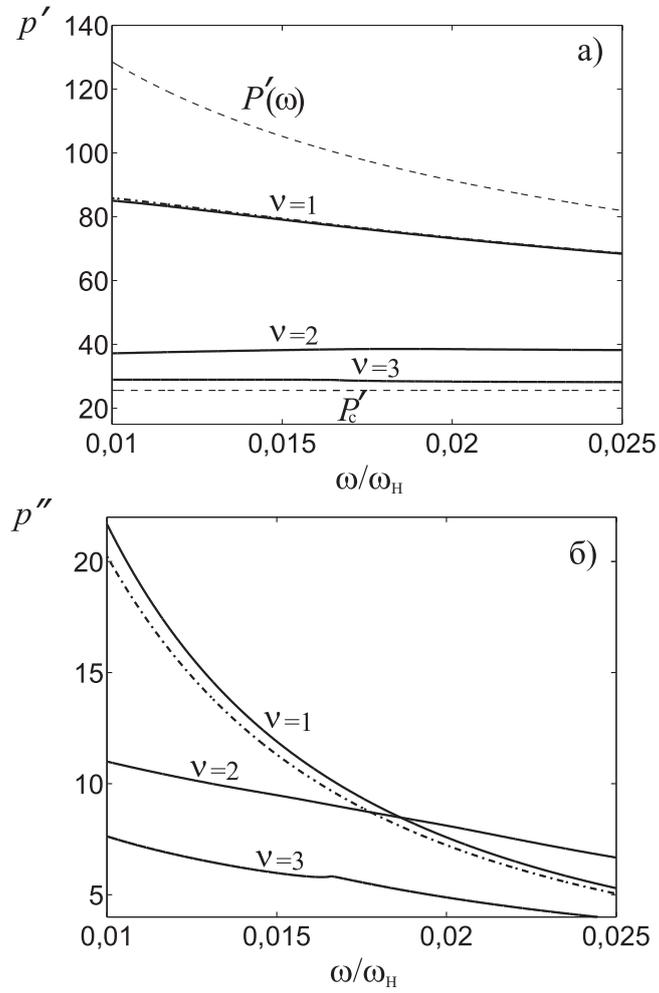


Рис. 2.6. Дисперсионные кривые слабозатухающих мод с азимутальным индексом $m = 1$, полученные из строгого дисперсионного уравнения (сплошные линии) и приближённого уравнения (штрих-пунктирные линии) при $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$. Штриховые линии показывают зависимости $P'(\omega)$ и $P'_c(\omega)$. Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.3

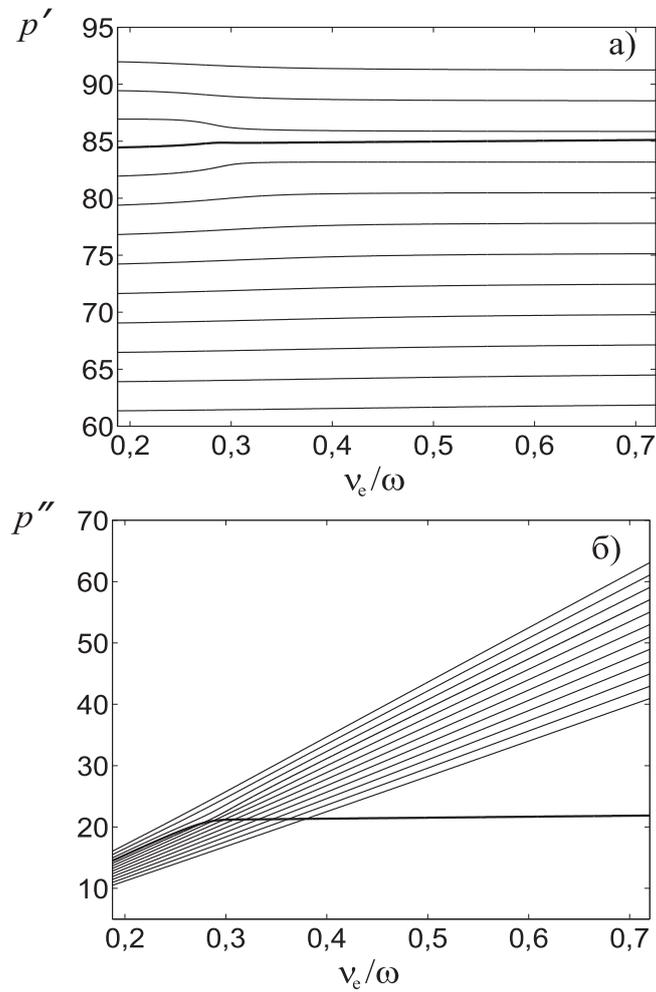


Рис. 2.7. Зависимости постоянных распространения (а) и постоянных затухания (б) слабо-затухающей моды (сплошные толстые линии) и сильнозатухающих мод (тонкие линии) с азимутальным индексом $m = 1$ от эффективной частоты электронных соударений ν_e при $\omega_p/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$, $\omega/\omega_H = 0,01$

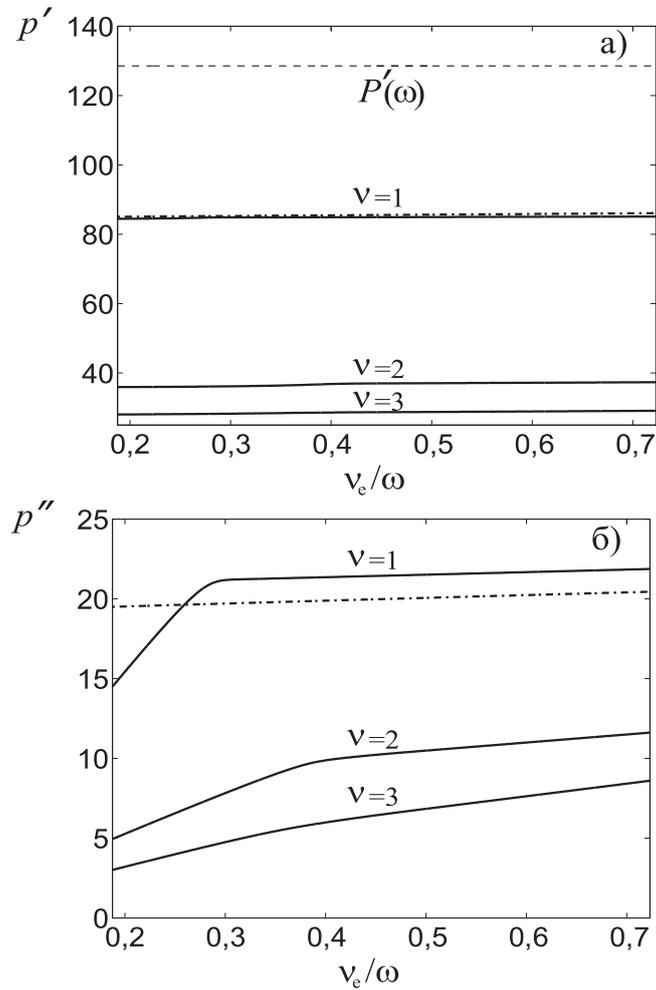


Рис. 2.8. Зависимости постоянных распространения (а) и постоянных затухания (б) слабозатухающих мод с азимутальным индексом $m = 1$ от эффективной частоты электронных соударений. Сплошными и штрих-пунктирными линиями показаны результаты, полученные на основании решений точного и приближённого дисперсионных уравнений соответственно. Штриховая линия показывает зависимость $P'(\omega)$. Значение остальных параметров те же, что и для рис. 2.7

На рис. 2.8 показаны зависимости постоянных распространения p' и постоянных затухания p'' от ν_e для трёх слабозатухающих мод с азимутальным индексом $m = 1$, существующих в рассматриваемом случае. Из рис. 2.8 видно, что решение уравнения (2.23) удовлетворительно описывает зависимости p'' и p' от частоты электронных соударений для моды с $\nu = 1$ за исключением поведения p'' в области $\nu_e/\omega < 0,25$. Это означает, что для умеренных значений ν_e ($\nu_e/\omega < 0.25$), условие $\text{Im } Q_2 \gg 1$, использованное при выводе уравнения (2.23), не выполняется и данное уравнение не может быть использовано для анализа дисперсионных характеристик моды.

Примечательно, что постоянные затухания $p''_{m\nu}$ весьма медленно меняются с увеличением ν_e в выбранном интервале эффективной частот электронных соударений (см. рис. 2.8). Это связано с тем, что величина $p''_{m\nu}$ в значительной степени определяется третьим слагаемым в левой части уравнения (2.23). При $p''_{m\nu} \ll p'_{m\nu}$, указанное слагаемое довольно слабо зависит от ν_e , поэтому $p''_{m\nu}$ в рассматриваемом интервале ν_e изменяется незначительно.

Представляется интересным обсудить, возможна ли для слабозатухающих мод ситуация, когда отношение p''/p' оказывается близким к величине $p''/p' \simeq \nu_e/(2\omega_H)$, характеризующей затухание вистлеров при их распространении в однородной магнитоактивной плазме под малыми углами к направлению внешнего магнитного поля. Анализ уравнения (2.23) показывает, что это возможно лишь в случае очень широкого плазменного столба для мод, действительные части комплексных постоянных распространения которых близки к P' , так что выполняется неравенство $|Q_1| \ll |S_1|$. В этом случае можно пренебречь последним слагаемым в уравнении (2.23), в результате чего приходим к уравнению

$$J_{m-1}(Q_1) \approx 0. \quad (2.25)$$

Решение уравнения (2.25) удобно искать в форме $p_{mn} = P - \Delta p_{mn}$, предполагая, что $|\Delta p_{mn}| \ll |P|$. Учитывая приближённое соотношение $Q_1(p_{mn}) \approx 2(k_0 a)(P \Delta p_{mn})^{1/2}$ и выражение

$$P = P' - iP'' \approx \frac{\omega_p}{(\omega\omega_H)^{1/2}} \left(1 - i \frac{\nu_e}{2\omega_H} \right), \quad (2.26)$$

решение уравнения (2.25) находим в виде

$$p_{m\nu} = P' \left\{ 1 - \left(\frac{\mu_\nu^{(m-1)}}{2k_0 a P'} \right)^2 - i \frac{\nu_e}{2\omega_H} \left[1 + \left(\frac{\mu_\nu^{(m-1)}}{2k_0 a P'} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.27)$$

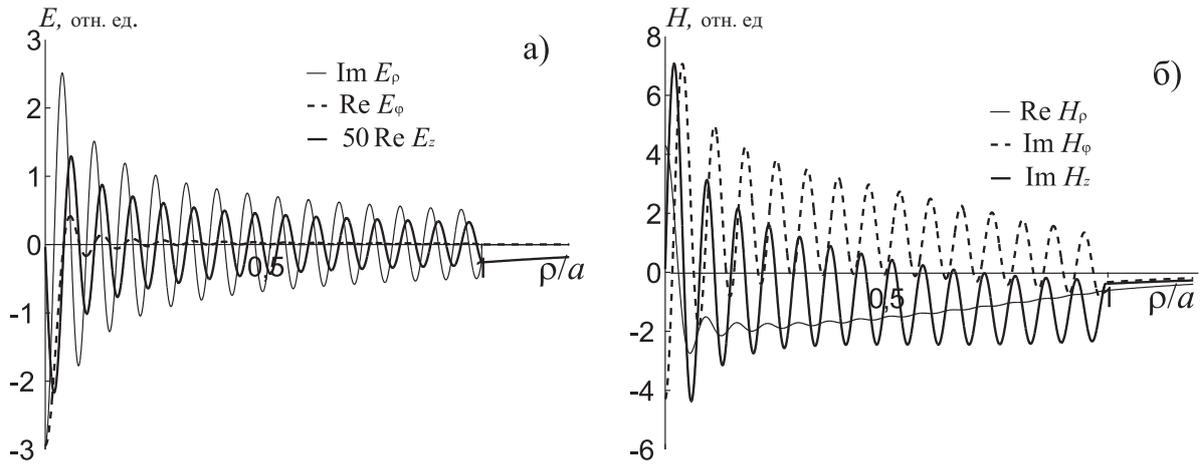


Рис. 2.9. Распределения компонент поля с азимутальным индексом $m=1$ и радиальным индексом $n = 27$ по поперечной координате ρ при отсутствии столкновительных потерь для $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$

где $\mu_n^{(m)}$ — n -й нуль функции Бесселя J_m . Решение (2.27) справедливо при условии $2k_0 a |P| \gg \mu_n^{(m-1)}$. Отсюда следует, что соотношение $p''_{mn}/p'_{mn} \simeq \nu_e/(2\omega_H)$ может иметь место лишь для мод плазменного столба, радиус которого значительно превышает характерную длину волны вистлера $\lambda_w = 2\pi/(k_0 P')$.

Рассмотрим структуру полей объёмных мод, направляемых цилиндрическим плазменным столбом. На рис. 2.9 показаны распределения по радиальной координате ρ компонент поля моды с азимутальным индексом $m = 1$ и радиальным индексом $n = 27$ в случае $\omega_p/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$, $\omega/\omega_H = 1,25 \cdot 10^{-2}$, $\nu_e = 0$. Постоянная распространения этой моды $p_{mn} = 86,88$. Нетрудно убедиться, что постоянная распространения лежит в области (2.12). На рис. 2.9б хорошо видны мелко- и крупномасштабные вариации, соответствующие геликонным и квазиэлектростатическим составляющим полного поля моды. Мелкомасштабные вариации лучше всего заметны в компонентах E_ρ и E_z . Мы не будем анализировать структуры полей других мод с продольными постоянными распространения, лежащими в интервале (2.12). В бесстолкновительном случае такие структуры во многом аналогичны распределениям, приведенным на рис. 2.9. Что же касается мод области (2.11), то они имеют крупномасштабную часть, локализованную вблизи границы столба $\rho = a$. Поэтому в полном поле каждой моды, принадлежащей области (2.11), при $\rho < a$ доминирует объёмная квазиэлектростатическая составляющая.

При наличии столкновительных потерь постоянные распространения становятся комплексными и каждая компонента поля в этом случае имеет

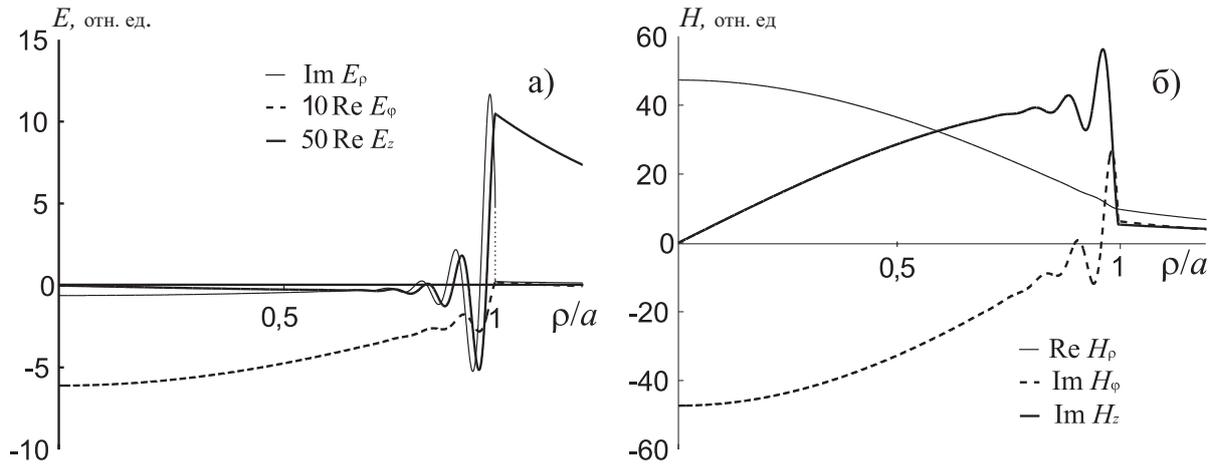


Рис. 2.10. Распределения компонент поля с азимутальным индексом $m=1$ и радиальным индексом $\nu = 1$ по поперечной координате ρ при $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$. Значения остальных параметров те же, что и на рис. 2.9.

как реальную, так и мнимую части. Оказывается, однако, что нет необходимости приводить пространственные распределения реальной и мнимой частей каждой компоненты поля. Напомним, что поле любой моды определяется с точностью до произвольного комплексного множителя. Анализ поведения компонент поля показывает, что в случае, когда $p'' \ll p'$ этот множитель может быть выбран таким образом, чтобы величины $\text{Im } E_\rho$, $\text{Re } E_{\varphi,z}$, $\text{Re } H_\rho$, $\text{Im } H_{\varphi,z}$ значительно превосходили по абсолютному значению величины $\text{Re } E_\rho$, $\text{Im } E_{\varphi,z}$, $\text{Im } H_\rho$, $\text{Re } H_{\varphi,z}$ соответственно. В этом случае достаточно изобразить распределения по ρ лишь величин $\text{Im } E_\rho$, $\text{Re } E_{\varphi,z}$, $\text{Re } H_\rho$, $\text{Im } H_{\varphi,z}$. Все последующие рисунки с распределениями полей приведены с учетом этой нормировки.

На рисунке 2.10 показаны компоненты поля моды с азимутальным индексом $m = 1$ и радиальным индексом $\nu = 1$ при $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$ (значения остальных параметров те же, что и на рис. 2.9). Мода, поле которой изображено для рис. 2.10, имеет продольное волновое число $p_{m\nu} = 82.2 - i15.61$ и соответствует кривой с номером $\nu = 1$ на рис. 2.6. Как видно из рис. 2.10, при наличии столкновительных потерь происходит существенное изменение структуры поля. В этом случае квазиэлектростатическая часть поля оказывается локализованной вблизи границы столба $\rho = a$. В результате, основной вклад в поле вблизи оси столба даёт крупномасштабная геликонная составляющая. Мы не приводим распределения полей сильнозатухающих мод при наличии столкновительных потерь, поскольку они в значительной степени аналогичны структуре поля мод в случае бесстолкновительной плазмы (см. рис. 2.9).

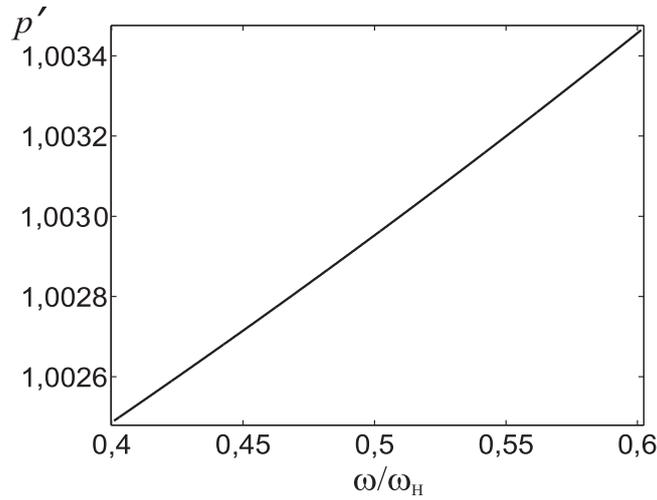


Рис. 2.11. Дисперсионная кривая поверхностной моды с азимутальным индексом $m = 0$ при $\omega_p/\omega_n = 12,8$, $\omega_n a/c = 10,4$, $\nu_e = 0$

2.4. Поверхностные моды однородного плазменного столба

Выше уже отмечалась возможность поддержания плазменным столбом мод с комплексно-сопряжёнными поперечными волновыми числами q_1 и q_2 , когда $q_1^* = q_2$. Поля таких мод «прижаты» к границе канала и поэтому имеют поверхностный характер. Постоянные распространения данных мод могут, как указывалось выше (см. пункт 1.2.2), лежать лишь в области (2.13).

Численное исследование дисперсионного уравнения (2.7) показало, что для фиксированного индекса m плазменный столб поддерживает не более одной поверхностной моды с продольным волновым числом в области (2.13). На рисунке 2.11 изображена дисперсионная зависимость для поверхностной моды с азимутальным индексом $m = 0$ при следующих значениях безразмерных параметров: $\omega_p/\omega_n = 12,8$, $\omega_n a/c = 10,4$, $\nu_e = 0$. В нижней части рассматриваемого частотного интервала имеется частота $\omega = \omega_{cr}$, при которой $p = 1$. Рассмотрим теперь распределения компонент поля этой моды, показанные на рис. 2.12. Как следует из приведённых графиков данная мода слабо локализована снаружи плазменного столба. На рис. 2.12 также видно, что компоненты поля E_ρ и H_φ максимальны на границе столба, причём в области $\rho > a$ поле моды имеет квази-ТЕМ поляризацию. Внутри столба ($\rho < a$) компонента E_ρ настолько мала, что не может быть показана в используемом для рис. 2.12 масштабе. Заметим, что для большей наглядности при построении графиков на рис. 2.11 и 2.12 мы использовали значения ω и a , которые существенно превышают значения параметров в предыдущем

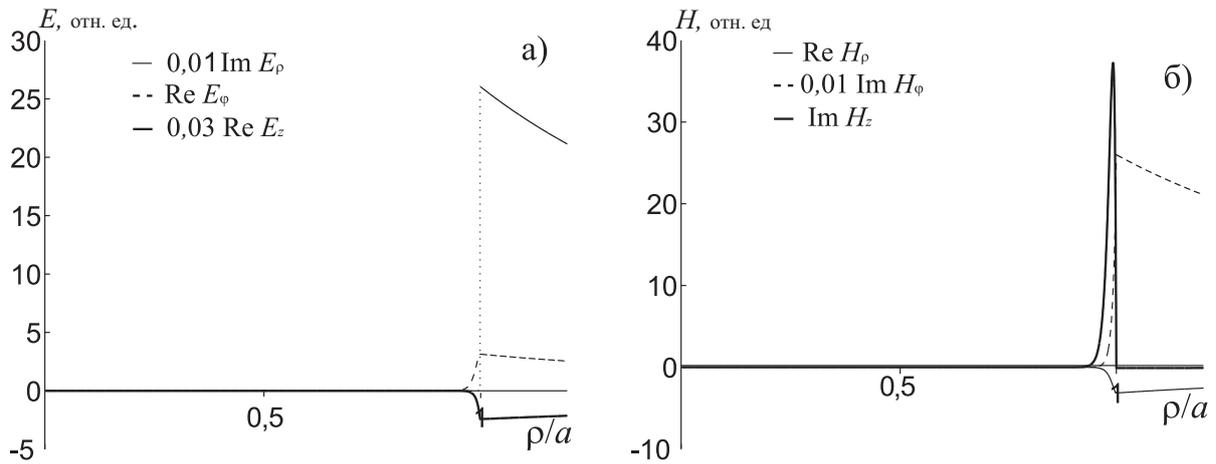


Рис. 2.12. Распределения компонент поля поверхностной моды с азимутальным индексом $m=0$ по поперечной координате ρ для $\omega/\omega_H = 0,4$. Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.11

разделе.

Обратим внимание на то, что поле поверхностной моды сильно спадает внутрь канала, причём это поведение незначительно меняется при наличии потерь. В результате потери в плазме весьма слабо влияют на характеристики данной моды. Поэтому мы не приводим результатов численных расчётов дисперсионных характеристик и структуры поля поверхностной моды при наличии электронных соударений в плазме.

Очевидно, что отмеченные выше особенности распределения поля поверхностной моды по радиусу не позволяют возбуждать её эффективно сторонними источниками. Это обстоятельство, по-видимому, объясняет тот факт, что в литературе, насколько нам известно, отсутствуют какие-либо данные по экспериментальному наблюдению возбуждения и распространения мод данного типа.

2.5. Моды, направляемые однородным плазменным столбом в свободном пространстве при учёте теплового движения электронов

При выполнении условий $\nu_e \ll \omega$, $|k_z|v_{Te} \ll \omega$ и $p'' \ll p'$ необходимо учитывать бесстолкновительное затухание Ландау, связанное с тепловым движением электронов. В этом случае у компоненты η тензора диэлектрической проницаемости (1.23) появляется дополнительное слагаемое и данная

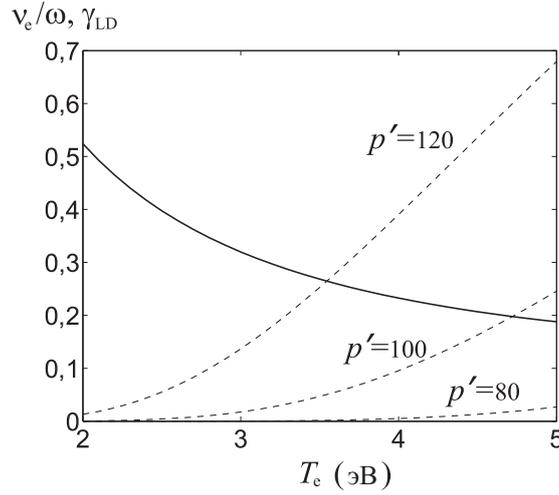


Рис. 2.13. Зависимости ν_e/ω (сплошные линии) и γ_{LD} (штриховые кривые) от температуры электронов в аргонной плазме при давлении 1 мТорр для трёх значений величины p'

компонента тензора принимает вид

$$\eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + i \frac{\nu_e}{\omega} + i \gamma_{LD} \right), \quad (2.28)$$

где

$$\gamma_{LD} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{(k_z v_{Te})^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{(k_z v_{Te})^2}\right). \quad (2.29)$$

Здесь γ_{LD} — дополнительный член, отвечающий затуханию Ландау, $k_z = k_0 p'$ — по-прежнему, действительная часть продольного волнового числа, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ — тепловая скорость электронов (T_e и m_e — температура и масса электронов соответственно). В качестве иллюстрации влияния различных видов затухания на мнимую часть компоненты тензора η на рис. 2.13 представлены зависимости величин ν_e/ω и γ_{LD} от температуры электронов T_e для трёх значений величины p' . При построении рис. 2.13 в качестве рабочего газа был взят аргон при давлении 1 мТорр. Учитывались как электрон-ионные, так и электрон-нейтральные соударения ($\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$), частоты которых вычисляются по формулам

$$\nu_{ei} = 2,9 \cdot 10^{-6} N_0 T_e^{-3/2} \ln \Lambda, \quad (2.30)$$

$$\nu_{en} = 1,3 \cdot 10^9 p_{Ar} T_e. \quad (2.31)$$

Здесь T_e — температура электронов в эВ, $\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм, p_{Ar} — давление аргона в Торр.

Как следует из рис. 2.13, в области $p' < 100$ величина γ_{LD} мала по сравнению с величиной ν_e/ω на выбранном интервале значений температур электронов. С увеличением p' величина γ_{LD} становится сравнимой с величиной ν_e/ω или превышает её. Однако это выполняется для мод с постоянными распространения в интервале (2.11), которые не представляют для нас большого интереса вследствие их сравнительно больших постоянных затухания.

Сопоставим представленные выше результаты решения дисперсионного уравнения (2.7) при $v_{Te} = 0$ с соответствующими результатами, полученными при учёте теплового движения ($v_{Te} \neq 0$).

Результаты численного решения дисперсионного уравнения (2.7) при учёте теплового движения изображены на рис. 2.14 для тех же значений параметров ν_e , B_0 , ω_p/ω_H , a , ω_{LH}/ω_H , что и на рис. 2.4. Зависимости на рис. 2.14 показывают, что поведение кривых, описывающих действительные части нормированных постоянных распространения мод, в данном случае несколько отличается от их поведения при учете лишь столкновительных потерь. Что же касается постоянных затухания, то их поведение остается примерно таким же, как и при наличии лишь столкновительных потерь. Здесь так же, как и при учёте лишь столкновительных потерь, происходит селекция мод по постоянным затухания, проявляющаяся в разделении мод на слабо- и сильнозатухающие. На рис. 2.15 показаны зависимости величин p' и p'' от эффективной частоты электронных соударений при учёте теплового движения. Из рисунка видно, что при малых частотах соударений ($\nu_e = 2,55 \cdot 10^{-3}\omega_H$) решения вновь распадаются на два семейства, содержащих сильнозатухающие и слабозатухающие моды.

2.6. Моды неоднородного плазменного столба

Модель однородного плазменного столба, рассмотренная в предыдущих разделах, является приемлемой при условии, что характерный поперечный масштаб L_\perp спада плотности плазмы вблизи границы столба удовлетворяет неравенству $L_\perp \ll 2\pi(k_0|q_2|)^{-1}$. В противном случае необходимо рассмотрение свойств мод с учётом неоднородного распределения плотности плазмы по радиусу.

Зададим профиль плотности плазмы при $\rho < a$ в виде (см. (2.1))

$$\tilde{N}(\rho) = N_0[1 - (\rho/a)^r]. \quad (2.32)$$

Для дальнейших расчётов положим $r = 10$ в формуле (2.32). Профиль плотности плазмы для этого случая приведен на рисунке 2.16. Как видно

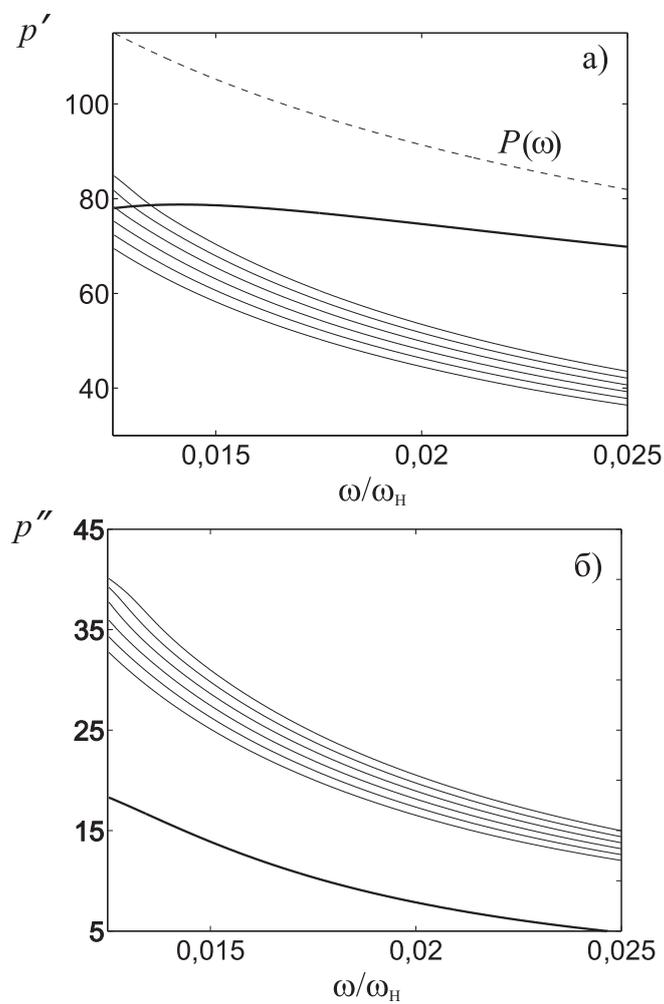


Рис. 2.14. Дисперсионные кривые мод области (2.12) с азимутальным индексом $m=1$ при учете столкновений ($\nu_e = 6 \cdot 10^{-3}\omega_H$) и теплового движения электронов для $B_0 = 800$ Гс, $\omega/\omega_H = 0,01$, $\omega_p/\omega_H = 12,7886$, $a = 2,5$ см, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$, $p_{Ar} = 1$ мТорр, $T_e = 2$ эВ

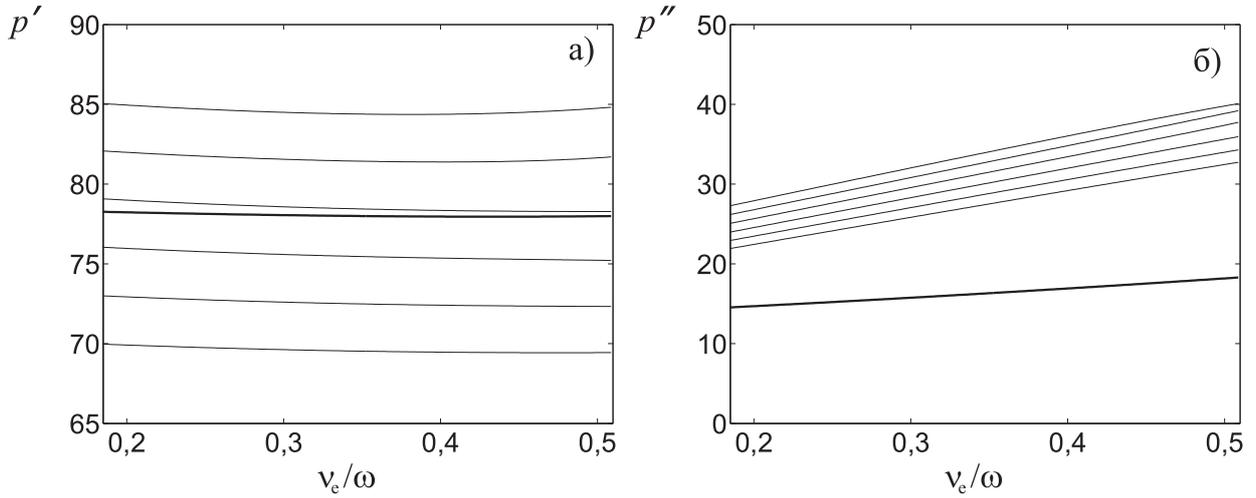


Рис. 2.15. Зависимости постоянных распространения p' и постоянных затухания p'' мод области (28) от эффективной частоты электронных соударений при учете теплового движения электронов в случае $B_0 = 800$ Гс, $\omega/\omega_H = 0,01$, $\omega_p/\omega_H = 12,7886$, $a = 2,5$ см, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$, $p_{At} = 1$ мТорр, $T_e = 2$ эВ

из рисунка, плотность плазмы почти постоянна вблизи оси столба, что позволяет сравнить решения для однородного и неоднородного столбов. С другой стороны, отрезок, на котором плотность плазмы существенно падает, шире, чем характерный поперечный пространственный масштаб квазиэлектростатических волн $2\pi(k_0|q_2|)^{-1}$. Поэтому выбранный профиль плотности позволяет изучить влияние неоднородности плазмы на поведение геликонных и квазиэлектростатических составляющих полей вблизи поверхности $\rho = a$. При проведении численных расчётов мы будем учитывать зависимость частоты ν_{ei} электрон-ионных соударений от плотности плазмы $N(\rho)$, приводящую к зависимости ν_{ei} от поперечной координаты ρ .

Выполненные расчёты не выявили существенных различий в дисперсионных характеристиках и структуре полей объёмных мод в случаях однородного и неоднородного каналов. В случае неоднородного канала поддерживаемые им объёмные свистовые моды имеют постоянные распространения, реальная часть p' которых лежит в интервале

$$\text{Re}P_{c0} < p' < \text{Re}P_0. \quad (2.33)$$

Здесь $P_{c0} \approx 2\varepsilon_0^{1/2}$, $P_0 = [\varepsilon(0) - g(0)]^{1/2}$, где $\varepsilon(0)$ и $g(0)$ — значения компонент тензора диэлектрической проницаемости плазмы на оси столба. Численные расчёты для профиля (2.32) демонстрируют сходство результатов для азимутально-симметричных и несимметричных мод, что уже отмечалось ранее применительно к случаю однородного плазменного столба. Поэтому ниже мы

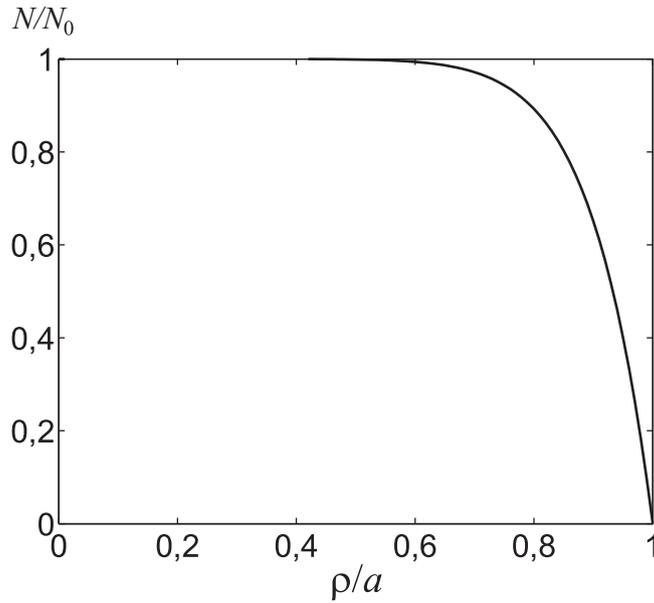


Рис. 2.16. Профиль плотности плазмы, описываемый выражением (2.32) для $r = 10$

остановимся лишь на результатах, полученных для азимутально-симметричных мод.

На рис. 2.17 показаны компоненты поля слабозатухающей азимутально-симметричной моды ($m = 0$) с радиальным индексом $\nu = 1$ при значениях параметров $\omega_{p0}/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$, $\omega/\omega_H = 10^{-2}$, $\nu_{e0}/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$, где ω_{p0} и ν_{e0} плазменная частота и эффективная частота соударений электронов на оси столба соответственно. Продольное волновое число этой моды составляет $p_{m\nu} = 67,39 - i6,17$. Здесь используется та же нумерация мод, что и для однородного канала. Как видно из рисунка, квазиэлектростатическая часть поля моды с радиальным индексом $\nu = 1$ локализована вблизи границы канала. Примечательно, что постоянная затухания данной моды для неоднородного канала несколько уменьшилась по сравнению со случаем однородного канала. Это объясняется спаданием электронной частоты соударений с ростом ρ и локализацией квазиэлектростатической составляющей поля моды вблизи границы. На рис. 2.18 приведена структура поля сильнозатухающей моды с постоянной распространения $p_{mn} = 67,63 - i38,89$, действительная часть которой наиболее близка к соответствующей величине для слабозатухающей моды с $\nu = 1$. Как и для однородного канала, в поле сильнозатухающей моды по-прежнему доминирует квазиэлектростатическая составляющая объёмного типа. Таким образом, основные свойства направляемых однородным плазменным столбом волн при учёте столкновительных потерь сохраняются и в случае размытия профиля плотности плазмы.

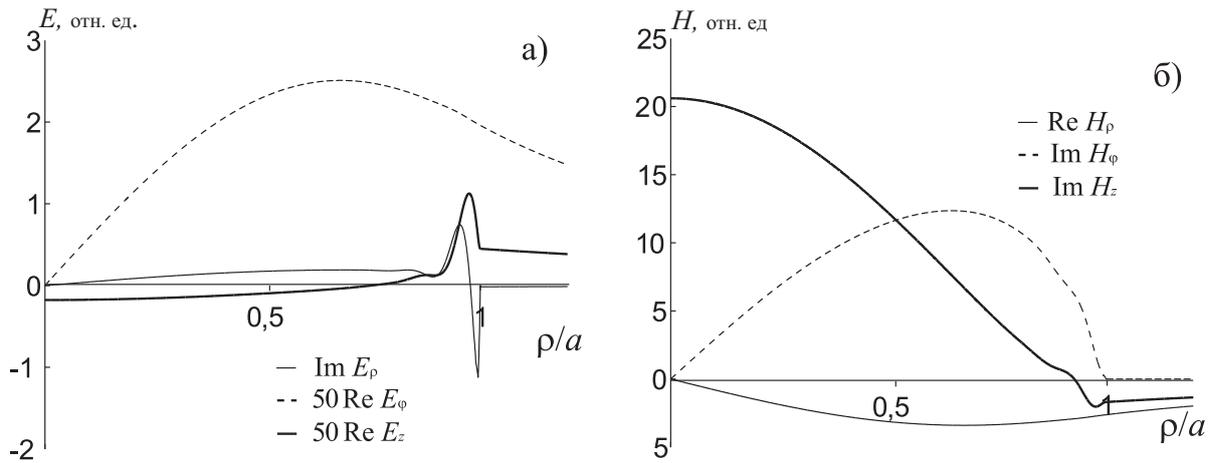


Рис. 2.17. Распределения компонент поля с азимутальным индексом $m=0$ и радиальным индексом $\nu = 1$ по поперечной координате ρ для неоднородного канала при $\omega/\omega_H = 0,01$, $\omega_{p0}/\omega_H = 12,8$, $\omega_H a/c = 1,13$, $\nu_{e0}/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$

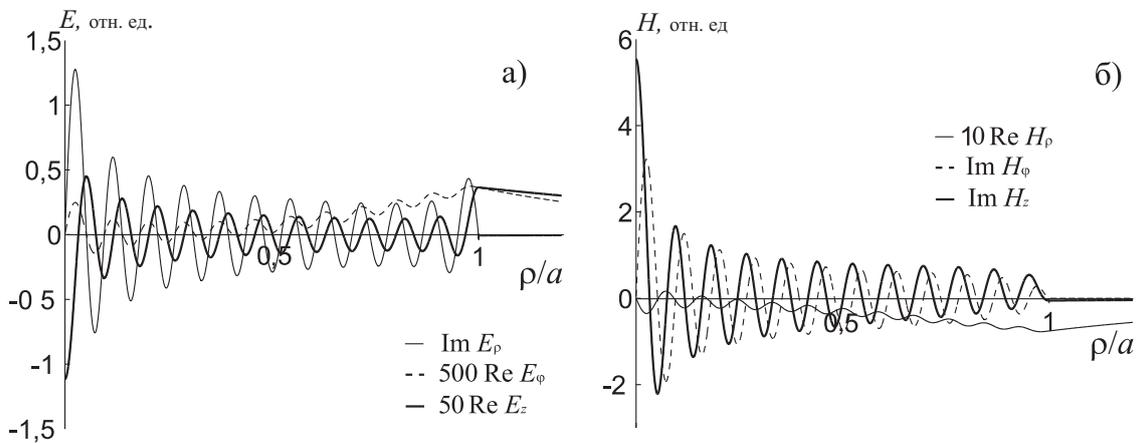


Рис. 2.18. Распределения компонент поля азимутально-симметричной сильнозатухающей моды, действительная постоянная распространения p' которой наиболее близка к соответствующей величине для азимутально-симметричной слабозатухающей моды с радиальным индексом $\nu = 1$. Значения параметров те же, что и для рис. 2.17

Опираясь на представленные выше результаты, нетрудно получить необходимое условие одновременного существования сильно- и слабозатухающих мод при наличии столкновительных потерь. Воспользуемся формулой (2.21) и учтём то обстоятельство, что у слабозатухающих волн отношение p''/p' много меньше ν_{e0}/ω . Соответствующее условие в этом случае принимает вид

$$k_0 a_{\text{eff}} p' \omega_H \nu_{e0} [\omega^2 + \nu_{e0}^2]^{-1} \gg 1 \quad (2.34)$$

где a_{eff} — эффективная ширина распределения плотности плазмы при которой величина p' ещё находится в интервале (2.33). Для плавного профиля величина a_{eff} имеет тот же порядок, что и радиус канала ($a_{\text{eff}} \sim a$). Если характерная ширина радиального распределения плазмы по радиусу не слишком мала, неравенство (2.34) выполняется и для малых частот столкновения электронов. Таким образом, наличие столкновительных потерь может существенно сказываться на свойствах распространяющихся в канале мод даже в случае $\nu_e \ll \omega$.

2.7. Примеры численного исследования дисперсионных характеристик и структуры полей мод плазменного столба в свободном пространстве

В этом разделе приведены примеры программ для численного расчёта структур полей и дисперсионных характеристик электромагнитных волн однородного плазменного столба, расположенного в свободном пространстве. Программы написаны на языке программирования matlab и пригодны для использования как на коммерческой платформе Matlab, так и на её бесплатном аналоге Scilab.

Вначале задаём параметры рассматриваемого замагниченного плазменного столба.

```
global m R EE GG HH ee

n_e = 1e13; % плотность плазмы
w_0 = 2 * pi * 21.645e6 % частота распространяющейся волны
m = 0; % азимутальный индекс поля

m_e = 9.1e-28; % масса электрона
e_0 = 4.8e-10; % заряд электрона
M_Ar = 39.95 * 1.66e-24; % масса иона
```

```

w_H = 1.7e7*800; % гирочастота электрона
w_p = 5.5e4*(n_e)^(1/2); % плазменная частота электронов
O_H = w_H * m_e / M_Ar; % гирочастота ионов
O_p = sqrt(4 * pi * e_0^2 * n_e / M_Ar); % плазменная частота
% ионов

T = 2.1494; % температура плазмы в кельвинах
T_e = T*1.6e-12; % температура плазмы в эВ
r_D = (T_e/(4*pi*e_0^2*n_e))^(1/2); % радиус Дебая
Par = 1; % давление плазмы

a_0 = 5; % радиус столба

Nu_e = 4 * (2 * pi)^0.5 / 3 * e_0^4 * n_e * log(T_e * r_D / ...
e_0^2) / m_e^(1/2) / T_e^(3/2) + 1.3e6 * Par * T;
% частота соударений электронов
Nu_i = 0; % частота соударений ионов

w_LH = w_H * sqrt((O_p^2 + O_H^2)/(w_p^2 + w_H^2));
% нижняя гибридная частота
w_UH = sqrt(w_p.^2 + w_H.^2);
% верхняя гибридная частота

R = w_0 * a_0 / 3e10;

ee = 1; % диэлектрическая проницаемость окружающего пространства

% компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы
EE = 1 + w_p.^2 * (w_0 - i*Nu_e) ./ ((w_H.^2 - (w_0 - i*Nu_e).^2) .* w_0) + ...
O_p.^2 * (w_0 - i*Nu_i) ./ ((O_H.^2 - (w_0 - i*Nu_i).^2) .* w_0);

GG = -w_p.^2 * w_H ./ ((w_H.^2 - (w_0 - i*Nu_e).^2) .* w_0) + ...
O_p.^2 * O_H ./ ((O_H.^2 - (w_0).^2) .* w_0);

HH = 1 - w_p.^2 ./ ((w_0 - i*Nu_e) .* w_0) - O_p.^2 ./ ((w_0) .* w_0);

```

Для вычисления поля внутри и вне плазменного столба используется следующая программа

```

global m R EE GG HH ee Q n alp
p=[109.964    -2.776]; % действительная и мнимая части
                        % постоянной распространения
x0 = p;
p  = p(1) + i*p(2);

% вычисление поперечных волновых чисел для
% внутренней области плазменного столба
mainq = EE^2 - GG^2 + EE*HH - (HH + EE) * p^2;
radq  = sqrt((HH - EE)^2 * p^4 + 2 * (GG^2 * (HH + EE) - ...
            EE * (HH - EE)^2) * p^2 + (EE^2 - GG^2 - EE*HH)^2);
Q      = R * sqrt(0.5 * (mainq - [1 -1] * radq)/EE);

n      = - (EE / (p * GG)) * (p^2 + Q.^2 / R^2 + (GG^2 / EE - EE));
alp    = m * Q / R^2 * (HH + p * n) / (HH * (p^2 - EE + GG));
bet    = -m * Q/R^2 * (p*n.^(-1) + (EE - GG)/HH)/(p^2 - EE + GG);

% поперечное волновое число вне плазменного столба
S      = R * sqrt(p^2 - ee);

JM     = besselj(m+1,Q);
Jm     = besselj(m,Q);
KM     = besselk(m+1,S);
Km     = besselk(m,S);

% матрица системы уравнений для коэффициентов В и С
aa(1,1:2) = i * (JM + alp.*Jm);
aa(1,3)   = -i * (KM - m*Km/S);
aa(1,4)   = i * p * m * Km / S;
aa(2,1:2) = i * Q.* n.* Jm / HH / R;
aa(2,3)   = 0;
aa(2,4)   = i * S * Km / R;
aa(3,1:2) = -Q.* Jm / R;
aa(3,3)   = -Km * S / R;
aa(3,4)   = 0;
aa(4,1:2) = -n.* (JM - bet.* Jm);
aa(4,3)   = -m * p * Km / S;
aa(4,4)   = (KM - m * Km / S);
det(aa);

```

```

% вычисление коэффициентов B и C
B(1) = -det(aa(1:3,[4 2 3]));
B(2) = -det(aa(1:3,[1 4 3]));
C(1) = -det(aa(1:3,[1 2 4]));
C(2) = det(aa(1:3,[1 2 3]));

% задание области расчёта
ri = [0.0002:0.0002:1]';
ro = [1:0.002:2]';
r = [ri;ro];
JM = besselj(m+1,ri * Q);
Jm = besselj(m,ri * Q);
Jm1 = Jm./(ri*[1 1]);
clear KM
KM = besserk(m+1,ro * S);
Km = besserk(m,ro * S);
Km1 = m*Km./ ro / S;

% вычисление полей в области расчёта
Eri = -JM * (B.* (n.'* p + GG)) / EE - Jm1 * (alp.'.* B);
Ero = C(1) * Km1 - C(2) * p * (KM - Km1);
Er = [Eri;Ero];
Efi = i * (JM * B + Jm1 * (alp.'.*B));
Efo = i * C(1)* KM - i * (C(2) * p + C(1)) * Km1;
Ef = [Efi;Efo];
Ezi = i/(HH * R) * Jm * ((n.* Q).'.* B);
Ezo = -i * C(2) * S / R * Km;
Ez = [Ezi;Ezo];
Hri = -i * (p * JM * B - Jm1 * ((n.* bet).'.* B));
Hro = i * C(2) * Km1 - i * C(1) * p * (KM - Km1);
Hr = [Hri;Hro];
Hfi = -JM * (B.* n.') + Jm1 * ((n.* bet).'.*B);
Hfo = -C(2) * KM + (C(2) + C(1) * p) * Km1;
Hf = [Hfi;Hfo];
Hzi = -Jm * (B.* Q.) / R;
Hzo = C(1) * S * Km / R;
Hz = [Hzi;Hzo];

```

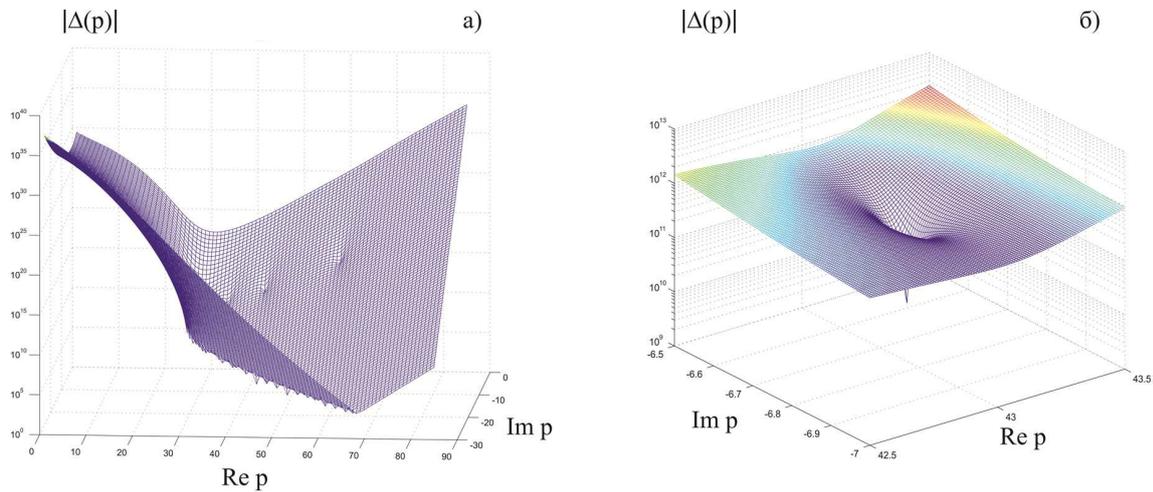


Рис. 2.19. Зависимость $|\Delta(p)|$ от p' и p'' в свистовом диапазоне частот при наличии столкновений в плазме

Анализ дисперсионных характеристик проводится на основе решений уравнения (2.7). Постоянные распространения p , являющиеся решениями этого уравнения, как отмечалось выше, могут быть получены только численно. Процедура нахождения p из уравнения (2.7) заключается в поиске локальных минимумов модуля функции $\Delta(p' + ip'')$, которая представляет собой левую часть уравнения. Аргументами (p' , p'') этой функции являются действительная и мнимая части постоянной распространения волны.

В качестве примера приведём рисунок 2.19, показывающий зависимость $|\Delta(p' + ip'')|$ от p' и p'' в свистовом диапазоне частот при наличии столкновений в плазме. На рис. 2.19а локальные минимумы в «ложбине» отвечают сильнозатухающим модам, минимумы на «склоне» — слабозатухающим. Рис. 2.19б показывает увеличенную область вблизи одного из минимумов.

Ниже представлен код функции $|\Delta(p' + ip'')|$.

```
function z=dispeqh1_new(pp)

global m R EE GG HH ee
p = pp;

% вычисление поперечных волновых чисел и связанных
% с ними коэффициентов во внутренней области плазменного столба
mainq = EE^2 - GG^2 + EE * HH - (HH + EE) * p.^2;
radq = sqrt((HH - EE)^2 * p.^4 + 2 * (GG^2 * (HH + EE) - ...
    EE * (HH - EE)^2) * p.^2 + (EE^2 - GG^2 - EE * HH)^2);
Q1 = R * sqrt(0.5 * (mainq - radq) / EE);
```

```

        Q2 = R * sqrt(0.5 * (mainq + radq) / EE);
n1 = -(EE * (p* GG).^(-1)).* (p.^2+ Q1.^2 / R^2+ (GG^2/ EE- EE));
n2 = -(EE * (p* GG).^(-1)).* (p.^2+ Q2.^2 / R^2+ (GG^2/ EE- EE));

alp1 = (m * Q1 / R^2).* (HH+ p.* n1).* (HH* (p.^2- EE+ GG)).^(-1);
alp2 = (m * Q2 / R^2).* (HH+ p.* n2).* (HH* (p.^2- EE+ GG)).^(-1);
bet1= -m* Q1/R^2.*(p.* n1.^(-1)+(EE-GG)/ HH).* (p.^2-EE+GG).^(-1);
bet2= -m* Q2/R^2.*(p.* n2.^(-1)+(EE-GG)/ HH).* (p.^2-EE+GG).^(-1);

clear mainq
clear radq

JM1 = besselj(m+1,Q1);
JM2 = besselj(m+1,Q2);
Jm1 = besselj(m,Q1);
Jm2 = besselj(m,Q2);

S = R * sqrt(p.^2 - ee);
KM = besserk(m+1,S);
Km = besserk(m,S);

% формирование определителя
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%E_azimutal
aa11 = i * (JM1 + alp1.* Jm1);
aa12 = i * (JM2 + alp2.* Jm2);
aa13 = i * p.* (m * Km).* S.^(-1);
aa14 = -i*(KM - m * Km.* S.^(-1));
%E_z
aa21 = i * Q1.* n1.* Jm1 / HH / R;
aa22 = i * Q2.* n2.* Jm2 / HH / R;
aa23 = i * S.* Km / R;
aa24 = Q1 - Q1;
%H_azimutal
aa31 = - n1.* (JM1 - bet1.* Jm1);
aa32 = - n2.* (JM2 - bet2.* Jm2);
aa33 = (KM - m * Km.* S.^(-1));
aa34 = - m * p.* Km.* S.^(-1);
%H_z

```

```

aa41 = - Q1.* Jm1 / R;
aa42 = - Q2.* Jm2 / R;
aa43 = Q1 - Q1;
aa44 = - Km.* S / R;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% вычисление модуля определителя для каждой из постоянных
% распространения в области поиска
for I = 1 : size(Q1,2)
    for J = 1 : size(Q1,1)
        zz(J,I)=abs(det([aa11(J,I) aa12(J,I) aa13(J,I) aa14(J,I);...
                        aa21(J,I) aa22(J,I) aa23(J,I) aa24(J,I);...
                        aa31(J,I) aa32(J,I) aa33(J,I) aa34(J,I);...
                        aa41(J,I) aa42(J,I) aa43(J,I) aa44(J,I)]));
    end
end
z = zz;

```

Следующая функция используется, например, для поиска зависимости постоянной распространения моды p от частоты волны (в качестве результата работы этой программы см. рис.2.5):

```

parameters;    %% здесь задаются параметры плазменного столба
I=0;

%% задаём постоянные распространения мод, найденные для начального
%% значения частоты.

x0=[ 84.8206   -11.6658
     82.0888   -11.1788
     62.9958    -8.5424
     60.2458    -8.1457];

clear Qpts p_ p__ Po Pi
%% задаём начальное и конечное значение частоты
Qmin = D_Q;
Qmax = 3*D_Q;
Qpts=[Qmin:0.5*(Qmax-Qmin):Qmax];
for Do=Qpts

```

```

%%% здесь рассчитываются элементы тензора диэлектрической
%%% проницаемости для новой частоты
u=1/(D_Q^2);
v=D_k^2*u;
U=D_g^2*u;
I_VW=1-i*V_wH/D_Q;
R=D_Q*D_R;
EE=1-I_VW*v*(I_VW^2-sqrt(u*U))/((I_VW^2-u)*(I_VW^2-U));
GG=I_VW^2*v*sqrt(u)/((I_VW^2-u)*(I_VW^2-U));
HH=1-v/I_VW;

I=I+1;
Qpts(I)=Do;
Pi(I)=real(sqrt(EE-GG));

%%% ищем моды с помощью функции fminsearch
for J=1:size(x0,1)
    x0(J,:)=fminsearch(@dispeqh1_new,x0(J,:),...
        optimset('TolX',1e-7));
    p_(J,I)=x0(J,1);
    p__(J,I)=x0(J,2);
end
end;

```

Описанная в виде предыдущей функции процедура может быть использована при организации поиска зависимостей постоянных распространения p от других параметров плазмы ($\omega_H, \omega_p, \nu_e$).

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗАМАГНИЧЕННОМ ПЛАЗМЕННОМ СТОЛБЕ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Исходные уравнения

Рассмотрим гармонический во времени ($\sim \exp(i\omega t)$) азимутально-симметричный электрический ток с плотностью $\mathbf{J}(\rho, z)$, заданный в ограниченной области пространства $\rho \leq b$, $|z| \leq d$, при наличии плазменного столба, ориентированного вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{z}_0$ и окруженного свободным пространством. Как и ранее, будем полагать, что плотность плазмы N зависит только от координаты ρ (см. 2.1).

Решение для поля вне источника будем искать в виде разложения по собственным волнам плазменного столба:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_q \mathbf{E}_s(\rho, q) e^{-ik_0 p_s(q)z}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \sum_q \mathbf{H}_s(\rho, q) e^{-ik_0 p_s(q)z}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь q — поперечное волновое число в окружающей среде (свободном пространстве), нормированное на $k_0 = \omega/c$, функция $p_s(q)$ описывает зависимость нормированного на k_0 продольного волнового числа от нормированного поперечного волнового числа q в свободном пространстве, индекс s отмечает направление распространения волны ($s = -$ и $s = +$ для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси z соответственно), $\mathbf{E}_s(\rho, q)$ и $\mathbf{H}_s(\rho, q)$ — векторные функции, описывающие распределение по радиусу поля собственной волны, отвечающей поперечному волновому числу q и индексу s . Функции $p_+(q)$ и $p_-(q)$ подчиняются соотношениям $p_+(q) \equiv p(q) = -p_-(q)$, где

$$p(q) = (1 - q^2)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Предполагается, что $\text{Im } p(q) < 0$ при $q > 1$, $\text{Re } p(q) > 0$ при $0 < q < 1$. Соотношение $\text{Re } p(q) > 0$ при $0 < q < 1$ можно получить, введя малые потери в окружающей среде и воспользовавшись прежним условием $\text{Im } p(q) < 0$ (в результирующих формулах эти потери следует положить равными нулю).

Из уравнений Максвелла (1.1)-(1.4) можно получить зависимости радиальной и продольной компонент векторов $\mathbf{E}_s(\rho, q)$ и $\mathbf{H}_s(\rho, q)$ от азимутальных компонент:

$$\begin{aligned} E_{\rho;s}(\rho, q) &= \varepsilon^{-1}[p_s(q)H_{\phi;s}(\rho, q) + igE_{\phi;s}(\rho, q)], \\ E_{z;s}(\rho, q) &= -\frac{i}{\eta k_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi;s}(\rho, q)), \\ H_{\rho;s}(\rho, q) &= -p_s(q) E_{\phi;s}(\rho, q), \\ H_{z;s}(\rho, q) &= \frac{i}{k_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi;s}(\rho, q)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим, что в случае азимутально-симметричного распределения поля данное представление оказывается несколько более удобным по сравнению с представлением через продольные компоненты поля E_z и H_z (см. 1.69).

Азимутальные компоненты $E_{\phi;s}(\rho, q)$ и $H_{\phi;s}(\rho, q)$ подчиняются следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi;s}(\rho, q)) \right] + k_0^2 \varepsilon^{-1} \{ [\varepsilon(\varepsilon - p_s^2(q)) - g^2] E_{\phi;s}(\rho, q) + \\ + igp_s(q)H_{\phi;s}(\rho, q) \} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\eta \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi;s}(\rho, q)) \right] + k_0^2 \varepsilon^{-1} [(\varepsilon - p_s^2(q)) H_{\phi;s}(\rho, q) - \\ - igp_s(q)E_{\phi;s}(\rho, q)] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для отыскания значений q , по которым проводится суммирование в (3.1), и отвечающих им собственных волн

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, q) \\ \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(\rho, q) \\ \mathbf{H}_s(\rho, q) \end{bmatrix} e^{-ik_0 p_s(q)z}, \quad (3.5)$$

необходимо, чтобы величины $\mathbf{E}_s(\rho, q)$ и $\mathbf{H}_s(\rho, q)$, полученные в результате решения уравнений (3.4), были регулярными на оси z и удовлетворяли граничным условиям, заключающимся в непрерывности компонент $E_{\phi;s}(\rho, q)$, $E_{z;s}(\rho, q)$, $H_{\phi;s}(\rho, q)$ и $H_{z;s}(\rho, q)$ в точках разрыва функции $N(\rho)$, а также следующим условиям ограниченности при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\rho^{1/2} |\mathbf{E}_s(\rho, q)| < R^{(1)}, \quad \rho^{1/2} |\mathbf{H}_s(\rho, q)| < R^{(2)}, \quad (3.6)$$

где $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ — некоторые константы [48]. Кроме того, как мы увидим ниже, необходимо, чтобы найденные поля удовлетворяли соотношениям ортогональности, которые устанавливаются с помощью леммы Лоренца, обобщённой

на случай гиротропной среды [52–55]¹. Можно показать, что полное поле, получающееся при суммировании (интегрировании) собственных волн по найденным значениям q , будет удовлетворять условию излучения на бесконечности. Следует заметить, что процедура получения системы таких волн обсуждалась ранее в работах [48, 49, 56–58]. Различие подходов, использованных в этих работах, состоит, главным образом, в способе ортогонализации получаемых решений. Ниже излагается подход, который, даёт более простой (по сравнению с методами, предложенными в указанных работах способ нахождения требуемых решений.

3.2. Волны дискретной и непрерывной частей спектра

Перейдём к отысканию и анализу решений системы уравнений (3.4). Рассмотрим вначале простейший случай однородного столба, в котором плотность плазмы постоянна и равна N_0 при $\rho < a$. В этом случае решения уравнений (3.4) представляются в виде цилиндрических функций. В частности, выражения для продольных компонент поля внутри плазменного столба ($\rho < a$) выглядят таким образом:

$$E_{\phi;s}(\rho, q) = i \sum_{k=1}^2 B_s^{(k)}(q) J_1(k_0 q^{(k)} \rho), \quad (3.7)$$

$$H_{\phi;s}(\rho, q) = - \sum_{k=1}^2 B_s^{(k)}(q) n_s^{(k)} J_1(k_0 q^{(k)} \rho). \quad (3.8)$$

Здесь, как и ранее, J_m — функции Бесселя порядка m , $B_s^{(1)}$ и $B_s^{(2)}$ — подлежащие определению коэффициенты, $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ — поперечные волновые числа внутри столба ($q^{(k)} = q_k(p(q), N_0)$), отвечающие продольному волновому числу $p = p(q)$ и рассматриваемые далее как функции поперечного волнового числа q в окружающей среде. Величины $n_s^{(1)}$ и $n_s^{(2)}$ даются формулой

$$n_s^{(1,2)}(q) = \varepsilon \left[p^2(q) + (q^{(1,2)})^2 + (g^2 - \varepsilon^2) \varepsilon^{-1} \right] (p_s(q)g)^{-1}. \quad (3.9)$$

Поля вне канала ($\rho > a$) записываются следующим образом:

$$E_{\phi;s}(\rho, q) = i \sum_{k=1}^2 C_s^{(k)}(q) H_1^{(k)}(k_0 q \rho), \quad (3.10)$$

¹ Для сред с пространственной дисперсией требуется более сложный подход [55] по сравнению с рассматриваемым здесь случаем холодной магнитоактивной плазменной среды, имеющей только частотную дисперсию.

$$H_{\phi; s}(\rho, q) = - \sum_{k=1}^2 D_s^{(k)}(q) H_1^{(k)}(k_0 q \rho). \quad (3.11)$$

Здесь $C_s^{(1)}$, $C_s^{(2)}$, $D_s^{(1)}$ и $D_s^{(2)}$ — подлежащие определению коэффициенты, $H_m^{(1)}$ и $H_m^{(2)}$ — функции Ханкеля 1-го и 2-го рода порядка m .

Если в уравнениях (3.10) и (3.11) положить $C_s^{(1)} = D_s^{(1)} = 0$, то из непрерывности тангенциальных компонент на границе столба можно получить систему однородных уравнений для определения коэффициентов $B_s^{(1)}$, $B_s^{(2)}$, $C_s^{(2)}$, $D_s^{(2)}$, определитель которой должен обращаться в ноль:

$$\Delta^{(1)}(q) = 0. \quad (3.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(q) = & [(n_s^{(1)}\eta - n_s^{(2)})J^{(1)} - (n_s^{(2)}\eta - n_s^{(1)})J^{(2)}]H^{(2)} \\ & + (n_s^{(2)} - n_s^{(1)})[\eta J^{(1)}J^{(2)} + (H^{(2)})^2], \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$J^{(k)} = \frac{J_1(Q^{(k)})}{Q^{(k)}J_0(Q^{(k)})}, \quad H^{(k)} = \frac{H_1^{(k)}(Q)}{QH_0^{(k)}(Q)}, \quad (3.14)$$

$$Q^{(k)} = k_0 q^{(k)} a, \quad Q = k_0 q a, \quad k = 1, 2. \quad (3.15)$$

Нетрудно убедиться, что комплексные величины $q = q_n$ ($n = 1, 2, \dots$), являющиеся корнями уравнения (3.12) при условии $\text{Im } q_n < 0$ являются поперечными волновыми числами собственных мод (т. е. волн дискретной части спектра значений q). Поля этих мод стремятся к нулю при $\rho \rightarrow \infty$, так, что автоматически выполняются условия (3.6). Таким образом уравнение (3.12) есть уравнение для поперечных волновых чисел собственных мод, свойства которых были подробно изучены выше.

Полагая $C_s^{(2)} = D_s^{(2)} = 0$ в (3.10) и (3.11), приходим аналогичным путём к уравнению

$$\Delta^{(2)}(q) = 0, \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}(q) = & [(n_s^{(1)}\eta - n_s^{(2)})J^{(1)} - (n_s^{(2)}\eta - n_s^{(1)})J^{(2)}]H^{(1)} \\ & + (n_s^{(2)} - n_s^{(1)})[\eta J^{(1)}J^{(2)} + (H^{(1)})^2]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Корни $q = \tilde{q}_n$ уравнения (3.16), удовлетворяющие условию $\text{Im } \tilde{q}_n > 0$, также дают дискретные значения поперечного волнового числа q , соответствующие собственным модам. Однако решения уравнения (3.16) не содержат новых

собственных мод (по сравнению с решениями $q = q_n$), поэтому их можно отбросить.

Поля собственных мод будем далее записывать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,n}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{s,n}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,n}(\rho) \\ \mathbf{H}_{s,n}(\rho) \end{bmatrix} e^{-ik_0 p_{s,n} z}, \quad (3.18)$$

где функции $\mathbf{E}_{s,n}(\rho) = \mathbf{E}_s(\rho, q_n)$ и $\mathbf{H}_{s,n}(\rho) = \mathbf{H}_s(\rho, q_n)$ описывают распределение по поперечной координате поля моды с индексами s и n и продольным волновым числом $p_{s,n} = p_s(q_n)$.

Как известно, волны дискретной части спектра не образуют полной системы собственных волн открытой системы. Для получения полной системы необходимо включить в рассмотрение также волны непрерывной части спектра. Такие волны, удовлетворяющие условиям (3.6) и являющиеся решениями уравнений (3.4) даются выражениями (3.7), (3.8), (3.10), и (3.11) при положительных действительных значениях q . Отрицательные действительные значения q , как можно показать непосредственной проверкой, не дают новых решений по сравнению со случаем положительных значений q .

Для отыскания коэффициентов $B_s^{(1,2)}(q)$, $C_s^{(1,2)}(q)$ и $D_s^{(1,2)}(q)$ волн непрерывной части спектра необходимо обеспечить выполнение граничных условий при $\rho = a$ и условия ортогональности мод. Воспользуемся вначале условием непрерывности продольных компонент поля $E_{z,s}(\rho, q)$ и $H_{z,s}(\rho, q)$ на границе канала $\rho = a$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} B_s^{(1,2)} &= \chi^{(1,2)} Q \{ n_s^{(2,1)} H_0^{(1)}(Q) C_s^{(1)} + n_s^{(2,1)} H_0^{(2)}(Q) C_s^{(2)} \\ &- \eta [H_0^{(1)}(Q) D_s^{(1)} + H_0^{(2)}(Q) D_s^{(2)}] \} [(n_s^{(2)} - n_s^{(1)}) Q^{(1,2)} J_0(Q^{(1,2)})]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\chi^{(1)} = -\chi^{(2)} = 1$. Подставляя выражение (3.19) в условия непрерывности для азимутальных компонент поля $E_{\phi,s}(\rho, q)$ и $H_{\phi,s}(\rho, q)$, получим

$$\begin{aligned} &H_0^{(1)}(Q) D_s^{(1)} + H_0^{(2)}(Q) D_s^{(2)} \\ &= \{ [n_s^{(1)} J^{(2)} - n_s^{(2)} J^{(1)} + (n_s^{(2)} - n_s^{(1)}) H^{(1)}] H_0^{(1)}(Q) C_s^{(1)} \\ &+ [n_s^{(1)} J^{(2)} - n_s^{(2)} J^{(1)} + (n_s^{(2)} - n_s^{(1)}) H^{(2)}] H_0^{(2)}(Q) C_s^{(2)} \} \\ &\times [\eta (J^{(2)} - J^{(1)})]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &[n_s^{(2)} J^{(2)} - n_s^{(1)} J^{(1)} - \eta^{-1} (n_s^{(2)} - n_s^{(1)}) H^{(1)}] H_0^{(1)}(Q) D_s^{(1)} \\ &+ [n_s^{(2)} J^{(2)} - n_s^{(1)} J^{(1)} - \eta^{-1} (n_s^{(2)} - n_s^{(1)}) H^{(2)}] H_0^{(2)}(Q) D_s^{(2)} \\ &= [H_0^{(1)}(Q) C_s^{(1)} + H_0^{(2)}(Q) C_s^{(2)}] (J^{(1)} - J^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Коэффициенты $B_s^{(1,2)}$, $C_s^{(1,2)}$, и $D_s^{(1,2)}$, связанные уравнениями (3.19)–(3.21), обеспечивают выполнение граничных условий при $\rho = a$. Однако выражения (3.20) и (3.21), устанавливающие линейную связь четырёх величин $C_s^{(1)}$, $C_s^{(2)}$, $D_s^{(1)}$, и $D_s^{(2)}$, позволяют любые две из них выбрать произвольным образом. Для возможности расчёта амплитудных коэффициентов мод методом, основанным на использовании леммы Лоренца в «транспонированной» среде, данные величины должны выбираться таким образом, чтобы обеспечить ортогональность волн. Укажем простой метод позволяющий получить ортогональные волны непрерывной части спектра. Для этого положим

$$C_s^{(1,2)} = \chi^{(1,2)} Q H_0^{(2,1)}(Q) \Delta^{(1,2)}, \quad (3.22)$$

Подставляя величины $C_s^{(1)}$, $C_s^{(2)}$, описываемые формулой (3.22), в (3.20) и (3.21) и выражая величины $D_s^{(1)}$, $D_s^{(2)}$ в через $C_s^{(1)}$, $C_s^{(2)}$, после некоторых преобразований получим

$$D_s^{(1,2)} = \psi_s^{(1,2)} C_s^{(1,2)}, \quad (3.23)$$

где

$$\psi_s^{(1,2)} = [n_s^{(1)} J^{(2)} - n_s^{(2)} J^{(1)} + (n_s^{(2)} - n_s^{(1)}) H^{(1,2)}] [\eta(J^{(2)} - J^{(1)})]^{-1}. \quad (3.24)$$

При выводе выражений (3.23) и (3.24), были использованы формулы (3.13) и (3.17), выражения для вронскиана функций Ханкеля, а также тождество $n_s^{(1)} n_s^{(2)} = -\eta$. Можно убедиться, что при использовании найденных выше представлений величин $B_s^{(k)}$, $C_s^{(k)}$ и $D_s^{(k)}$ для волн непрерывной части спектра будут выполняться требуемые соотношения ортогональности.

Запишем теперь соотношения ортогональности для волн дискретной и непрерывной частей спектра:

$$2\pi \int_0^\infty \left[\mathbf{E}_{s,n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{\tilde{s},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{s,n}(\mathbf{r}) \right] \mathbf{z}_0 \rho d\rho = \frac{4\pi}{c} N_{s,n} \delta_{n,\tilde{n}} \delta_{s,-\tilde{s}}, \quad (3.25)$$

$$2\pi \int_0^\infty \left[\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, q) \times \mathbf{H}_{\tilde{s},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{\tilde{s},\tilde{n}}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, q) \right] \mathbf{z}_0 \rho d\rho = 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_0^\infty \left[\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, q) \times \mathbf{H}_{\tilde{s}}^{(T)}(\mathbf{r}, \tilde{q}) - \mathbf{E}_{\tilde{s}}^{(T)}(\mathbf{r}, \tilde{q}) \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, q) \right] \mathbf{z}_0 \rho d\rho = \\ & = \frac{4\pi}{c} N_s(q) \delta(q - \tilde{q}) \delta_{s,-\tilde{s}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь $N_{s,n}$ и $N_s(q)$ — нормы волн дискретной и непрерывной частей спектра соответственно, $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера, $\delta(q)$ — дельта-функция Дирака, а знак (Т) отмечает поля, взятые во вспомогательной (транспонированной) среде, описываемой транспонированным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^T$. Соотношения ортогональности (3.25)–(3.27) могут быть получены с использованием «транспонированной» формулировки леммы Лоренца аналогично тому, как это делается в [9]. Величины $N_n = N_{+,n}$ и $N(q) = N_+(q)$ для волн, распространяющихся в положительном направлении оси z , описываются выражениями

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{1}{2\pi i} \left. \frac{dN(q)}{dq} \right|_{q=q_n}, \\ N(q) &= -\frac{4\pi}{k_0^2} \left(\frac{dp(q)}{dq} \right)^{-1} \left(1 + \psi_s^{(1)} \psi_s^{(2)} \right) C_s^{(1)}(q) C_s^{(2)}(q), \end{aligned} \quad (3.28)$$

Как нетрудно показать, $N_{-,s,n} = -N_{s,n}$, $N_-(q) = -N_+(q)$.

Заметим, что представленная здесь процедура получения ортогональной системы волн дискретной и непрерывной частей спектра может быть использована и для радиально-неоднородного плазменного столба. В этом случае поле внутри столба не может быть выражено через известные функции и находится на основании численного решения уравнений (3.4). Два линейно независимых решения, регулярных на оси z , должны совпадать с выражениями (3.7) и (3.8) при $\rho \rightarrow 0$. Решения при $\rho > a$ остаются прежними. Далее, выполнив описанные выше действия, можно получить ортогональную систему волн дискретной и непрерывной частей спектра для радиально-неоднородного столба.

С учётом проведённого рассмотрения поле в области $|z| > d$ при наличии плазменного столба представляется в виде следующего разложения по собственным волнам дискретной и непрерывной частей спектра:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \sum_n a_{s,n} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{s,n}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{s,n}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} + \int_0^\infty a_s(q) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, q) \\ \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, q) \end{bmatrix} dq, \quad (3.29)$$

где $a_{s,n}$ и a_s — коэффициенты возбуждения волн дискретной и непрерывной частей спектра соответственно. В разложении (3.29) следует положить $s = +$ при $z > d$ и $s = -$ при $z < -d$. Далее, действуя по аналогии с известным методом, разработанным для отыскания коэффициентов возбуждения волн экранированных и открытых волноводов [9, 48, 56, 59], получаем выражения

для коэффициентов возбуждения

$$a_{\pm,n} = \frac{1}{N_n} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\mp,n}^{(T)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.30)$$

$$a_{\pm}(q) = \frac{1}{N(q)} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\mp}^{(T)}(\mathbf{r}, q) d\mathbf{r}, \quad (3.31)$$

в которых интегрирование проводится по области, занятой током \mathbf{J} . Мы не приводим выражения для поля в области $|z| < d$, поскольку они могут быть легко получены при помощи стандартных методов, изложенных в уже упоминавшихся работах.

Полученное представление поля в виде разложения по системе собственных волн со смешанным (дискретно-непрерывным) спектром интересно сравнить с другим возможным представлением в виде разложения в интеграл Фурье по продольному волновому числу. Для азимутально-симметричного источника соответствующее разложение в интеграл Фурье имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, p) \\ \mathbf{H}(\rho, p) \end{bmatrix} e^{-ik_0 p z} dp. \quad (3.32)$$

При вычислении полей (3.32) необходимо взять интеграл по p . Для этого следует аналитически продолжить подынтегральное выражение на комплексную плоскость p (см. рис. 3.1) и учесть, что подынтегральное выражение в (3.32) содержит особые точки — полюсы (на рис. 3.1 они показаны «крестиками»), которые отвечают уравнению (см. 2.7)

$$\Delta(p) = 0, \quad (3.33)$$

а также точки ветвления $p = \pm 1$ с идущими от них (вдоль линий $\text{Im} \sqrt{1-p^2} = 0$) разрезами. Напомним, что наличие разрезов связано с условием $\text{Im} \sqrt{1-p^2} < 0$, эквивалентным условию излучения для $\mathbf{E}(\rho, p)$, $\mathbf{H}(\rho, p)$, которое должно выполняться при использовании представления (3.32). Соотношение (3.33) является дисперсионным уравнением для собственных волн замагниченного плазменного цилиндрического столба в свободном пространстве. Ясно, что для нахождения вклада волн дискретной части спектра в полное поле необходимо вычислить вычеты подынтегральных выражений в (3.32) в точках $p = p_n$, являющихся решениями уравнения (3.33).

Для выделения индивидуальных вкладов волн дискретной и непрерывной частей спектра, контур интегрирования по комплексной плоскости

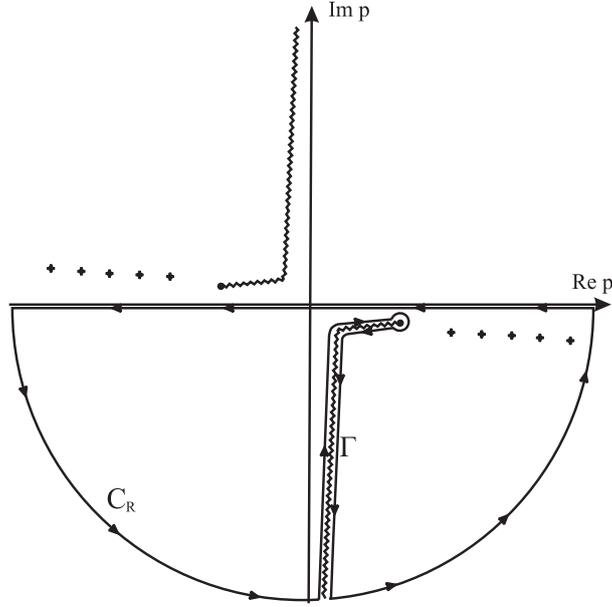


Рис. 3.1. Контур интегрирования для выражения (3.34)

следует деформировать таким образом, чтобы он обходил полюсы и разрез $\text{Im}\sqrt{1-p^2} = 0$ так, как показано на рис. 3.1 для области $z > 0$ (для области $z < 0$ контур интегрирования необходимо отобразить в верхнюю полуплоскость). Интеграл по берегам разреза, даёт, очевидно, вклад волн непрерывной части спектра в полное поле, возбуждаемое источником.

С учётом того, что интеграл по дуге бесконечного радиуса C_R не даёт вклада в результат интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \left\{ \sum_n (-ik_0) \left(\frac{d\Delta}{dp} \Big|_{p=p_n} \right)^{-1} \mathbf{E}^{(\Delta)}(\rho, p_n) \exp(-ik_0 p_n z) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_0}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{E}(\rho, p) \exp(-ik_0 p z) dp \right\}, \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \left\{ \sum_n (-ik_0) \left(\frac{d\Delta}{dp} \Big|_{p=p_n} \right)^{-1} \mathbf{H}^{(\Delta)}(\rho, p_n) \exp(-ik_0 p_n z) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_0}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{H}(\rho, p) \exp(-ik_0 p z) dp \right\}, \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

здесь

$$\mathbf{E}^{(\Delta)}(\rho, p) = \Delta(p) \mathbf{E}(\rho, p), \quad \mathbf{H}^{(\Delta)}(\rho, p) = \Delta(p) \mathbf{H}(\rho, p). \tag{3.35}$$

Для области $\rho > a$ выпишем продольные компоненты возбуждаемого поля $E_z(\rho, p)$, $E_z(\rho, p)$ в этом представлении:

$$\begin{aligned} E_z(\rho, p) &= -F_+^{(2)}(p)q(p)H_0^{(2)}(k_0q(p)\rho), \\ H_z(\rho, p) &= -iF_+^{(1)}(p)q(p)H_0^{(2)}(k_0q(p)\rho), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где $q = -is$. Остальные компоненты поля, как отмечалось во втором разделе данной главы, могут быть выражены через эти составляющие. Коэффициенты $F_+^{(1)}$ и $F_+^{(2)}$ в общем случае имеют весьма громоздкий вид, но для однородного столба, радиус которого равен радиусу источника, записываются в сравнительно компактном виде:

$$\begin{aligned} F_+^{(1)}(p) &= \frac{i}{\Delta(p)} \frac{4\pi}{c} (k_0a)^2 I_0 \left\{ H_1^{(2)}(k_0qa) [n_1 J_1(Q_2) J_0(Q_1) q_1 - \right. \\ &\quad \left. - n_2 J_1(Q_1) J_0(Q_2) q_2] + \eta H_0^{(2)}(k_0qp) q (n_2 - n_1) J_1(Q_1) J_1(Q_2) \right\} / \eta, \\ F_+^{(2)}(p) &= \frac{i}{\Delta(p)} \frac{4\pi}{c} (k_0a)^2 I_0 H_1^{(2)}(k_0qa) [n_1 n_2 J_1(Q_2) q_1 J_0(Q_1) - \\ &\quad - n_2 n_1 J_1(Q_1) J_0(Q_2) q_2] / \eta. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Здесь величины Q_1 и Q_2 даются формулами (2.9).

Можно убедиться (переходя под знаком интеграла по берегам разреза к действительной переменной q), что представление (3.34) совпадает с разложением по собственным волнам (3.29). Несомненно, что оба представления приводят в конечном счёте к одинаковым результатам. Однако при конкретных расчётах и для конкретных целей одному из них может быть отдано методическое предпочтение.

3.3. Поле и сопротивление излучения кольцевого электрического тока

Перейдем теперь к исследованию поля, возбуждаемого заданным источником в виде кольцевого электрического тока радиуса b с плотностью

$$\mathbf{J}(\rho, z) = \phi_0 I_0 \delta(\rho - b) \delta(z), \quad (3.38)$$

где I_0 — полный ток источника. Подставляя (3.38) в формулы (3.30) и (3.31), приходим к следующим выражениям для коэффициентов возбуждения:

$$a_{s,n} = I_0 2\pi b N_n^{-1} E_{\phi; -s,n}^{(T)}(b), \quad (3.39)$$

$$a_s(q) = I_0 2\pi b N^{-1}(q) E_{\phi; -s}^{(T)}(b, q). \quad (3.40)$$

С учётом этих формул азимутальная компонента электрического поля, которая потребуется нам для вычисления сопротивления излучения источника (3.38), представляется в виде

$$E_{\phi}(\mathbf{r}) = \sum_n a_{s,n} E_{\phi;s,n}(\rho) e^{-ik_0 p_{s,n} z} + E_{\phi;s}(\rho, z), \quad (3.41)$$

где

$$E_{\phi;s}(\rho, z) = \int_0^{\infty} a_s(q) E_{\phi;s}(\rho, q) e^{-ik_0 p_s(q) z} dq. \quad (3.42)$$

В выражении (3.41) слагаемые под знаком суммы, описывают вклады собственных мод в азимутальную компоненту полного поля, а слагаемые $E_{\phi;s}(\rho, z)$ — вклад волн непрерывной части спектра в эту компоненту. Получим выражения для полного сопротивления излучения и парциальных сопротивлений излучения источника (3.38) в отдельные собственные моды и волны непрерывной части спектра. Напомним, что полное сопротивление излучения тока \mathbf{J} даётся формулой

$$R_{\Sigma} = -\frac{2}{|I_0|^2} \operatorname{Re} \int \mathbf{J}^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.43)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ полное поле источника, символ «*» обозначает операцию комплексного сопряжения. Полное сопротивление излучения складывается, очевидно, из отдельных парциальных сопротивлений, отвечающих собственным модам (R_n) и волнам непрерывной части спектра (R_{cs}):

$$R_{\Sigma} = \sum_n R_n + R_{cs}, \quad (3.44)$$

где

$$R_n = -2\pi b \operatorname{Re} (I_0^{-1} a_{s,n} E_{\phi;s,n}(b)), \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} R_{cs} &= -2\pi b \operatorname{Re} (I_0^{-1} E_{\phi;cs}(b, 0)) = \\ &= -2\pi b \operatorname{Re} \left(I_0^{-1} \int_0^{\infty} a_s(q) E_{\phi;s}(b, q) dq \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

В рассматриваемом здесь случае кольцевого витка с током выражения для парциальных сопротивлений излучения в отдельные моды волновода приобретают сравнительно простой вид

$$R_n = \operatorname{Re} \int_V \frac{2\pi^2 b^2}{N_n} \left(\sum_{k=1}^2 B^k \left[J_1(k_0 q^{(k)} b) \right] \right)^2 \rho d\rho. \quad (3.47)$$

При получении формулы (3.47) учтено соотношение $B_s^{(1,2)} = (B_s^{(1,2)})^{(T)}$.

Заметим, что при отсутствии соударений мощность излучения $P_{\text{cs}} = R_{\text{cs}}|I_0|^2/2$ в волны непрерывного спектра совпадает с мощностью P_{rad} , излучаемой из столба в окружающую среду ($P_{\text{cs}} = P_{\text{rad}}$). Последняя может быть получена по формуле

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} \text{Re} [E_\phi(\mathbf{r})H_z^*(\mathbf{r}) - E_z(\mathbf{r})H_\phi^*(\mathbf{r})] \Big|_{\rho=\rho_a} \rho d\phi, \quad (3.48)$$

где $\rho_a = \text{const}$, причём $\rho_a \geq a$.

С учётом азимутально-симметричного характера распределения формула (3.48) поля при отсутствии столкновительных потерь упрощается к виду

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{\pi} \int_{-P}^P \left(|F_+^{(1)}|^2 + |F_+^{(2)}|^2 \right) dp.$$

Напомним, что здесь $P = (\varepsilon - g)^{1/2}$ — постоянная распространения вистлеров вдоль внешнего магнитного поля.

3.4. Результаты численных расчётов сопротивления излучения кольцевого электрического тока при отсутствии и наличии столкновительных потерь в плазменном столбе

На рис. 3.2 приведены зависимости полного сопротивления излучения R_Σ кольцевого электрического тока от радиуса источника b при отсутствии ($\nu_e = 0$) и наличии столкновительных потерь ($\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$) в плазме (сплошная и штриховая линии соответственно) для $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,79$, $\omega_H a/c = 2,26$, $\omega_{\text{LH}}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$. Указанные значения параметров могут быть реализованы, например, для частоты $\omega/2\pi = 27,12$ МГц, соответствующей промышленной частоте геликонных разрядов, при радиусе трубки $a = 5$ см, плотности плазмы $N_0 = 10^{13}$ см $^{-3}$ и внешнем магнитном поле $B_0 = 800$ Гс. На этом же рисунке штрих-пунктирной линией показано полное сопротивление излучения кольцевого источника в однородной плазме ($\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$). Как видно из представленных данных, наличие столкновительных потерь в плазме сопровождается незначительным изменением

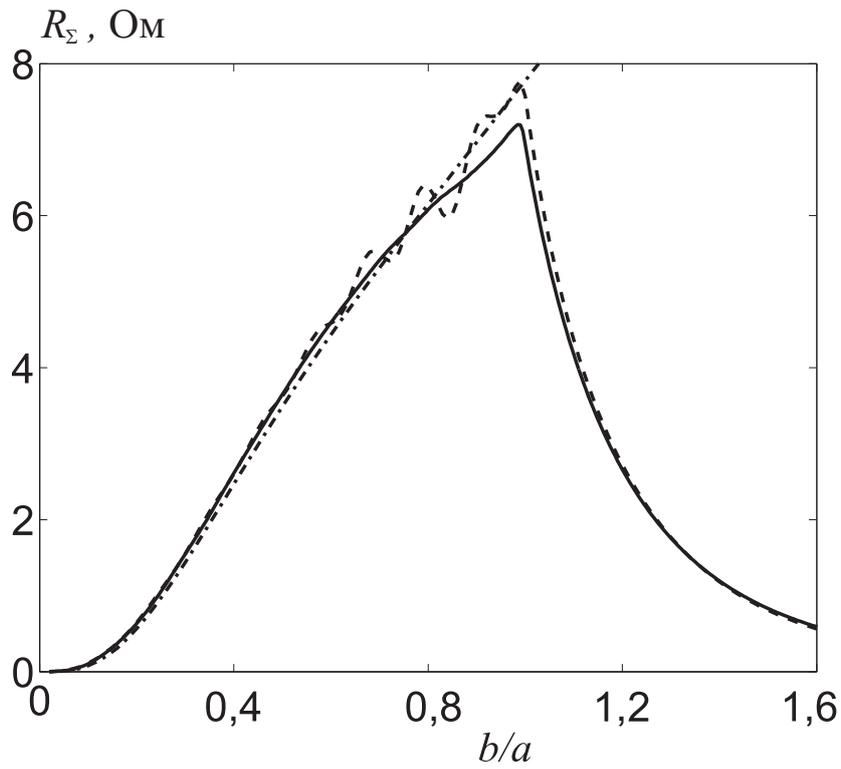


Рис. 3.2. Зависимости полного сопротивления излучения R_Σ кольцевого электрического тока от радиуса источника b при отсутствии ($\nu_e = 0$) и наличии столкновительных потерь ($\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$) в плазме (сплошная и штриховая линии соответственно) для $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,79$, $\omega_H a/c = 2,26$, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$. Штрих-пунктирной линией показано полное сопротивление излучения кольцевого источника в однородной плазме ($\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$)

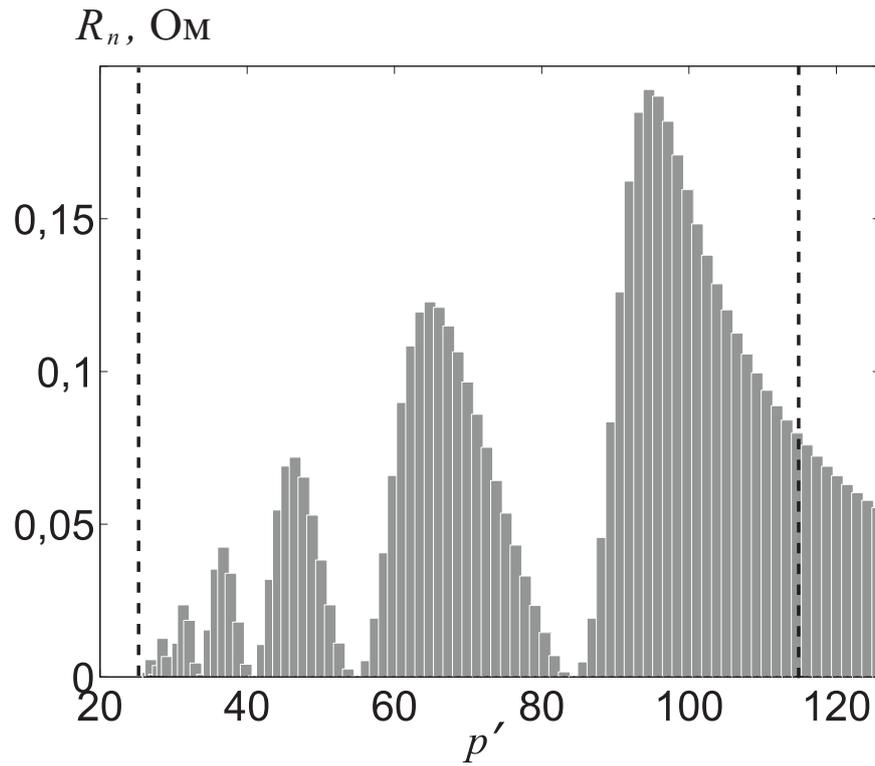


Рис. 3.3. Парциальные сопротивления излучения в отдельные моды при отсутствии столкновительных потерь в плазменном столбе при $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,79$, $\omega_H a/c = 2,26$, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$. Левая и правая вертикальные штриховые линии отмечают значения $p' = P_c$ и $p' = P$ соответственно

величины R_{Σ} по сравнению со случаем отсутствия соударений и мало отличается от сопротивления излучения кольцевого тока в однородной плазме (при $b \leq a$).

Результаты численных расчётов парциальных сопротивлений излучений в собственные моды в случае бесстолкновительной плазмы представлены на рис. 3.3 для тех же значений параметров, что и на рис. 3.2. На рис. 3.2 показаны парциальные сопротивления излучения в отдельные моды плазменного столба, для постоянных распространения которых выполняется условие $p > P_c$. Как видно из данного рисунка, парциальные сопротивления для близких мод незначительно отличаются друг от друга, и основная часть энергии, идущая в волны дискретной части спектра, излучается в моды, нормированные постоянные распространения которых лежат в интервале $P_c < p < P$ ($P \approx 114$). Модуляция огибающей парциальных сопротивлений излучения на рис. 3.3 связана с особенностями поведения пространственного спектра источника. Мы не приводим сопротивление излучения в поверхностную моду с постоянной распространения, лежащей в интервале $1 < p < P_c$, ввиду его весьма малого значения по сравнению с парциальными сопротивлениями излучения в объёмные моды.

Кроме того, следует отметить, что сопротивление излучения источника в волны непрерывного спектра при выбранных значениях параметров на несколько порядков меньше суммарного сопротивления излучения в волны дискретной части спектра. Это позволяет далее ограничиться анализом поведения лишь величин R_n .

Как было показано выше (см. раздел 1.2), при превышении определенного значения частоты электронных соударений происходит селекция мод, направляемых плазменным столбом в свистовом диапазоне частот, по постоянным затухания. Собственные волны разделяются на слабозатухающие, с преобладанием в структуре их полей крупномасштабной геликонной составляющей, и сильнозатухающие, в поля которых основной вклад даёт мелко-масштабная квазиэлектростатическая составляющая. Подобное разделение наблюдается и для парциальных сопротивлений излучения мод. В качестве иллюстрации на рисунке 3.4 представлены зависимости парциальных сопротивлений излучения R_n в отдельные моды, поддерживаемых плазменным столбом, от частоты электронных соударений (параметры те же, что и на рис. 3.3). Для демонстрации отмеченного влияния потерь на парциальные сопротивления излучения и дисперсионные свойства мод мы приводим также рис. 3.5, на котором построены зависимости постоянных распространения p' и постоянные затухания p'' тех же мод от частоты электронных соударений (параметры те же, что и на рис. 3.4). Как видно из графиков, при $\nu_e/\omega \geq 0,075$

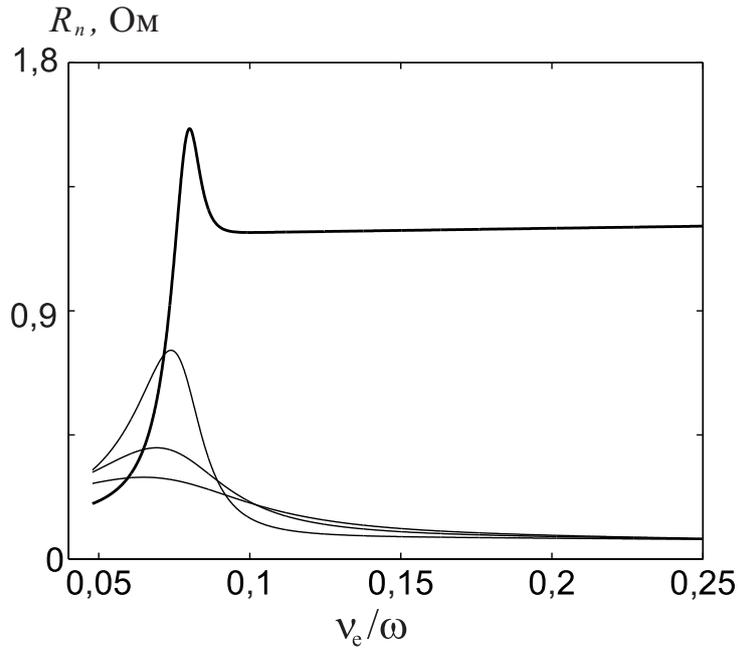


Рис. 3.4. Зависимости парциальных сопротивлений излучения в отдельные моды от эффективной частоты электронных соударений при $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,7886$, $\omega_H a/c = 2,26$, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$

одновременно с разделением по постоянным затухания происходит разделение мод и по эффективности их возбуждения. При этом наиболее эффективно возбуждается слабозатухающая мода, кривые для которой выделены на рис. 3.5 и 3.4 жирной линией.

Распределение величин R_n в зависимости от постоянной распространения мод p' показано на верхней панели рис. 3.6 для $\nu_e/\omega_H = 0.006$ (параметры те же, что и для рис. 3.3). На нижней панели того же рисунка показано расположение постоянных распространения мод плазменного столба в виде точек на плоскости p', p'' . На рисунке выделяются две группы моды — сильнозатухающие с постоянными затухания $p''/p' \approx \nu_e/\omega$, которые незначительно различаются по эффективности возбуждения, и слабозатухающие моды ($p'/p'' \ll \nu_e/\omega$), эффективность возбуждения которых значительно выше, чем у близких им по постоянной распространения p' сильнозатухающих мод.

Выполненные расчёты показывают, что эффективность возбуждения волн непрерывного спектра при учёте столкновительных потерь несколько больше, чем эффективность возбуждения в бесстолкновительном случае. Для иллюстрации сказанного приведём таблицу 1.1, данные которой получены при различных значениях отношения ν_e/ω и следующих значениях остальных параметров $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,79$, $\omega_H a/c = 2,26$, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$. В первом столбце таблицы указано отношение частоты электронных соуда-

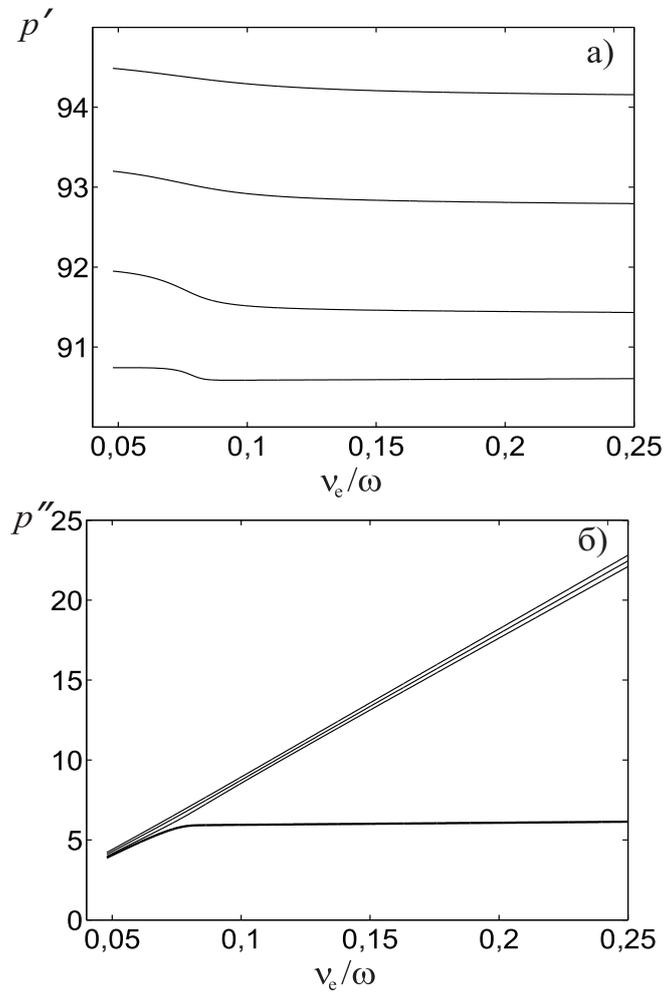


Рис. 3.5. Зависимости постоянных распространения p' и постоянных затухания p'' мод, парциальные сопротивления излучения в которые показаны на рис. 3.4, от эффективной частоты электронных соударений при $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,7886$, $\omega_H a/c = 2,26$, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$

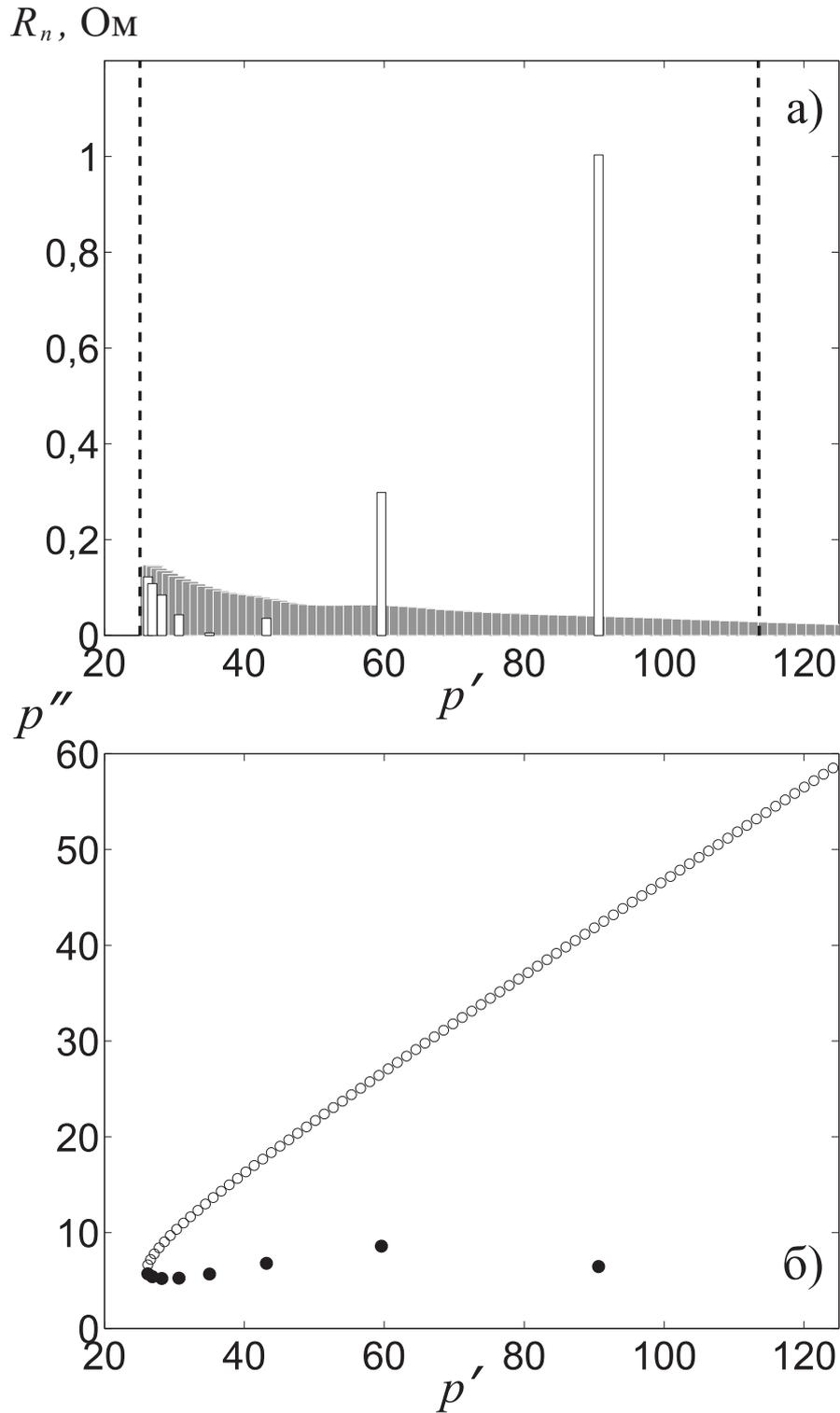


Рис. 3.6. Парциальные сопротивления излучения в отдельные моды (а) и расположение комплексных постоянных распространения моды на плоскости p', p'' (б) при $\nu_e = 6 \cdot 10^{-3} \omega_H$, $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,79$, $\omega_H a/c = 2,26$, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$

рений к гирочастоте электронов. Во втором и третьем столбцах приведены сопротивления излучения в собственные моды (R_{mod}) и в слабозатухающие моды (R_{wd}), соответственно. В четвёртом столбце приведено сопротивление излучения (R_{cs}) в волны непрерывной части спектра. Как видно из представленных данных, мощность, идущая в слабозатухающие волны составляет при выбранных значениях параметров примерно четвертую часть полной мощности, расходуемой источником.

Таблица 1.1

ν_e/ω_H	R_{mod} (Ом)	R_{wd} (Ом)	R_{cs} (Ом)
$2 \cdot 10^{-3}$	7.09	0,95	$7,14 \cdot 10^{-7}$
$4 \cdot 10^{-3}$	7,49	1,02	$7,35 \cdot 10^{-7}$
$6 \cdot 10^{-3}$	7,57	1,70	$7,68 \cdot 10^{-7}$

Благодаря малым потерям и сравнительно высокой относительной эффективности возбуждения слабозатухающих волн именно они определяют поле излучения вдали от источника. Для иллюстрации этого факта на рис. 3.7 приведено распределение полного поля по поперечной координате ρ в сечении $z = 100$ см при тех же значениях параметров, что и для рис. 3.3. Приведённое на рисунке 3.7 поле с большой точностью соответствует полю, создаваемому лишь слабозатухающими модами. Рисунок 3.8 показывает распределение полного поля по ρ в сечении $z = 0$. Видно, что в этом случае в поле имеется хорошо выраженная мелкомасштабная составляющая. Поэтому вблизи источника наряду со слабозатухающими модами необходимо учитывать и моды, обладающие большими потерями. Таким образом, полное поле вблизи источника содержит мелкомасштабную составляющую, вклад которой в поле постепенно уменьшается с ростом координаты z вследствие сильного затухания мод, содержащих эту компоненту.

3.5. Распределение мощности джоулевых потерь в плазменном столбе

Рассмотрим теперь распределение объёмной плотности мощности джоулевых потерь Q при наличии столкновительных потерь в плазме столбе. При проведении соответствующих расчётов следует учитывать, что для кольцевого источника с бесконечно тонким проводом объёмная плотность мощности джоулевых потерь в месте нахождения источника стремиться к бесконечности. Для избежания данной сингулярности необходимо заменить функцию Дирака $\delta(z)$ в формуле (3.38) на некоторое модельное распределение тока $f_d(z)$. В качестве такого распределения возьмём $f_d(z) = (2d)^{-1}$ для $|z| < d$

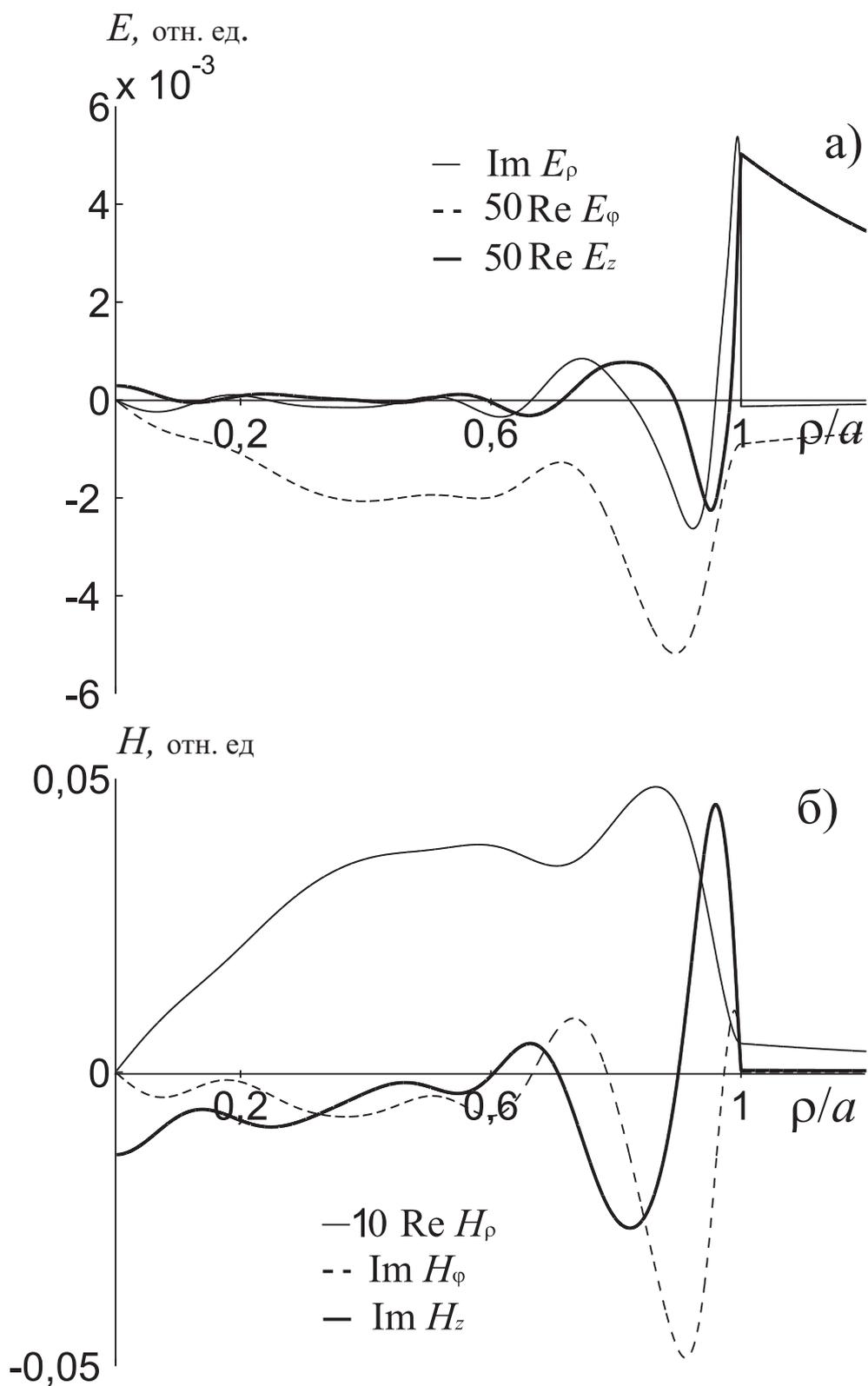


Рис. 3.7. Распределение полного поля кольцевого тока по поперечной координате ρ в сечении $z = 100$ см при $\omega = 27,12$ МГц, $\nu_e = 6 \cdot 10^{-3} \omega_H$, $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,7886$, $a = 5$ см, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$

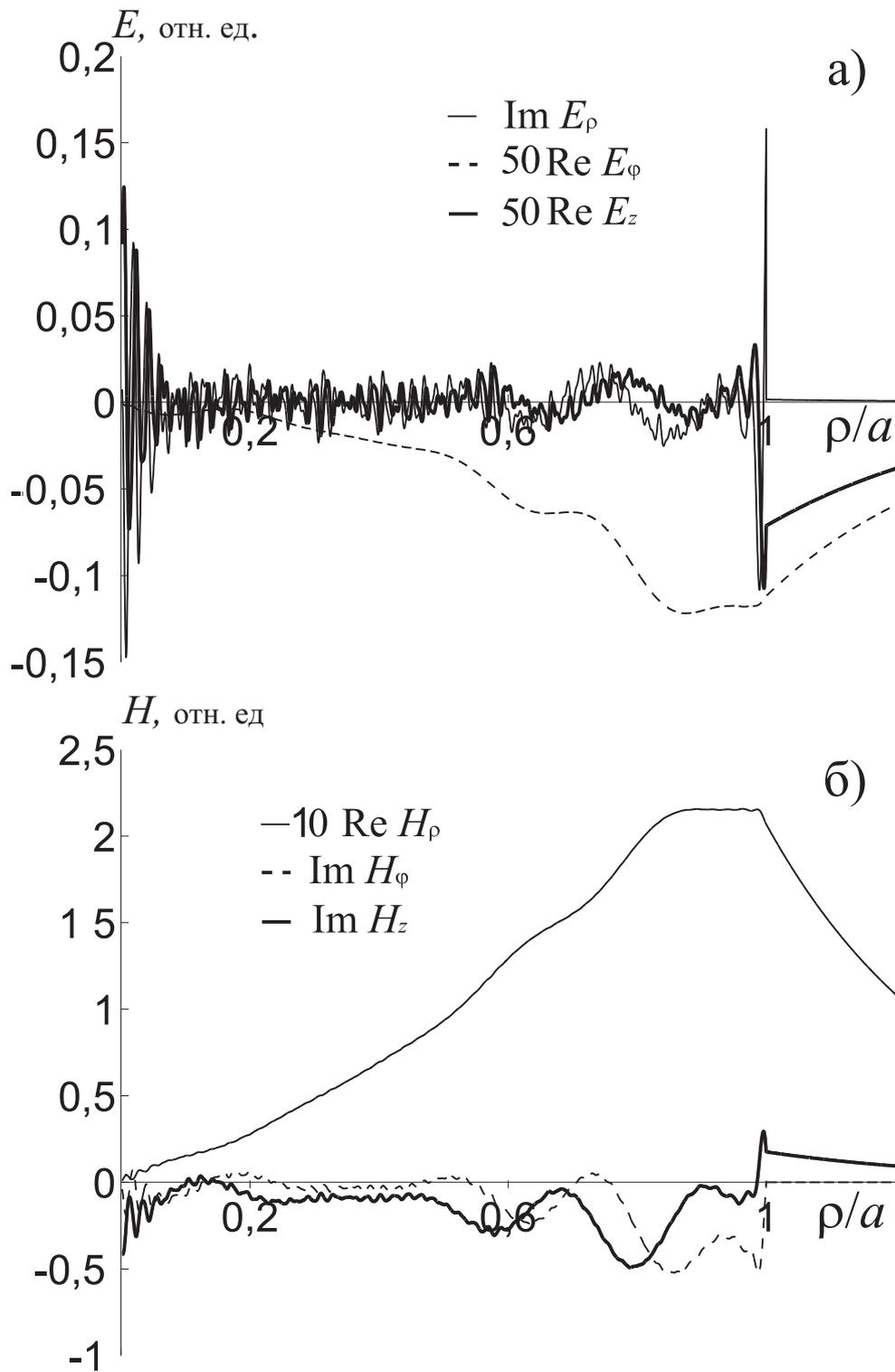


Рис. 3.8. Распределение полного поля кольцевого тока по поперечной координате ρ в сечении $z = 0$ см, при $\omega = 27,12$ МГц, $\nu_e = 6 \cdot 10^{-3} \omega_H$, $\omega/\omega_H = 0,0125$, $\omega_p/\omega_H = 12,7886$, $a = 5$ см, $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$

и $f_d(z) = 0$ для $|z| > d$, где $d \ll b$. Для проведения расчётов примем $d/a = 2 \cdot 10^{-2}$ и $0,2 \leq b/a \leq 1$.

Рисунки 3.9 и 3.10, построенные в логарифмическом масштабе, показывают распределения объёмной плотности мощности джоулевых потерь, нормированной на квадрат абсолютного значения тока антенны, при $\nu_e/\omega_c = 2 \cdot 10^{-3}$ и $\nu_e/\omega_c = 6 \cdot 10^{-3}$ соответственно, в случае однородного плазменного столба с прежними значениями остальных параметров. Представленные распределения приведены для трёх различных значения радиуса антенны $b/a = 0,2$, $b/a = 0,5$, $b/a = 1$. Как видно из рисунка, в случае $b \ll a$ основная доля мощности поглощается вблизи провода источника (рис. 3.9а и 3.10а). Интересно отметить возрастание поглощения вблизи границы плазменного столба, которое оказывается несколько меньшим, чем максимум Q вблизи $\rho = b$. Это наиболее отчётливо видно из рисунков 3.9б и 3.10б. При приближении радиуса источника к радиусу столба максимумы Q вблизи источника и у границы плазмы становятся близкими по величине. Наконец когда радиус источника становится равным радиусу столба, поглощаемая мощность у границы плазмы становится максимальной, как можно видеть из рис. 3.9в и 3.10в. Из сравнения рис. 3.9 и 3.10 следует, что с возрастанием ν_e увеличивается скорость спадания величины Q по z , а распределение Q по радиусу становится более однородным. Заметим, что параметры, соответствующие рис. 3.10, выбраны таким образом, чтобы характерная длина поглощения слабозатухающих мод, приблизительно равная $(k_0 p_n'')^{-1} \simeq 3$ см, была короче, чем интервал $0 < z < 30$ см, изображённый на рисунке. Эта длина поглощения хорошо видна на всех графиках рис. 3.10. При бóльших значениях z , когда наблюдается более плавное спадание Q с ростом z , потери определяются поглощением слабозатухающих мод.

Ранее в работах [3, 4, 7] отмечалось, что поглощаемая мощность принимает максимальное значение на границе плазмы. Однако этот вывод связан с принятым в этих работах расположением антенны – в свободном пространстве вблизи поверхности плазменного столба.

Таким образом, можно заключить, что поглощаемая мощность в плазменном столбе определяется, в основном, сильнозатухающими модами и главный максимум этой мощности расположен в области расположения антенны.

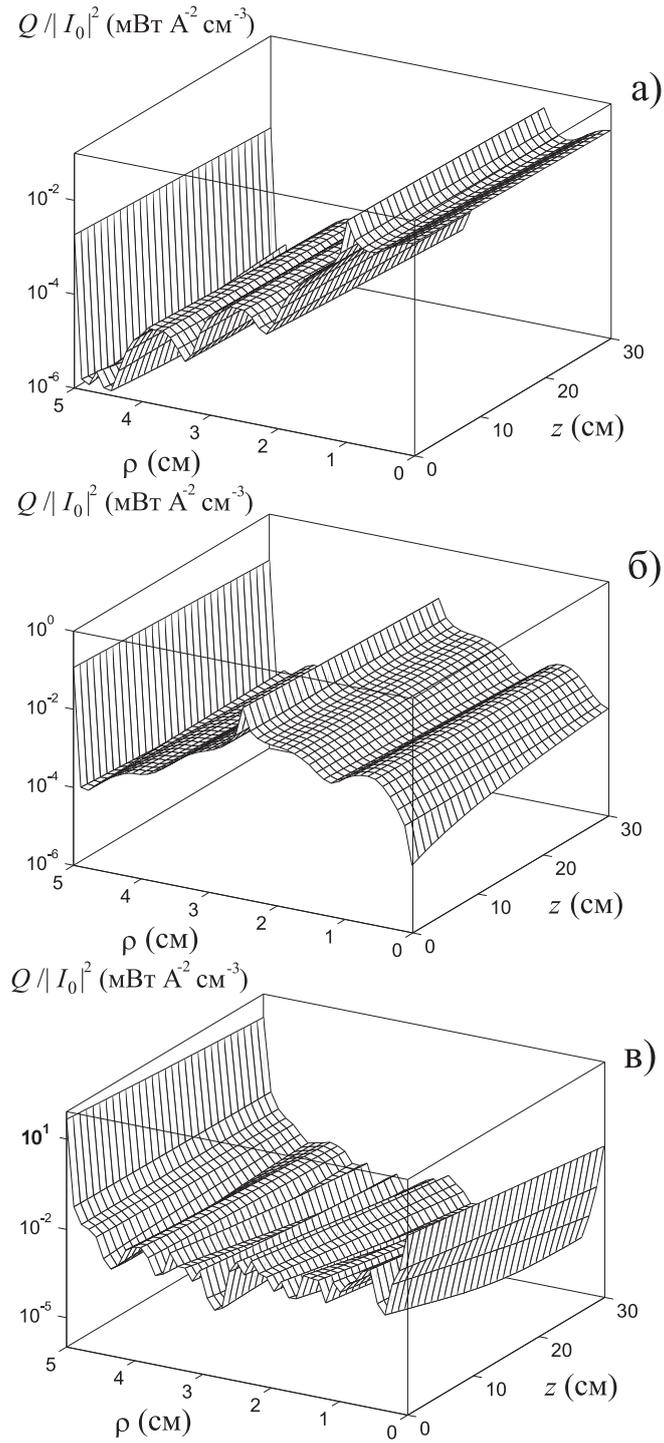


Рис. 3.9. Распределение объёмной плотности мощности джоулевых потерь $Q/|I_0|^2$ в плазменном столбе для $b/a = 0,2$ (а), $b/a = 0,5$ (б), $b/a = 1$ (в) при $a = 5$ см, $d/a = 2 \cdot 10^{-2}$, $\nu_e/\omega_H = 2 \cdot 10^{-3}$ и значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.1

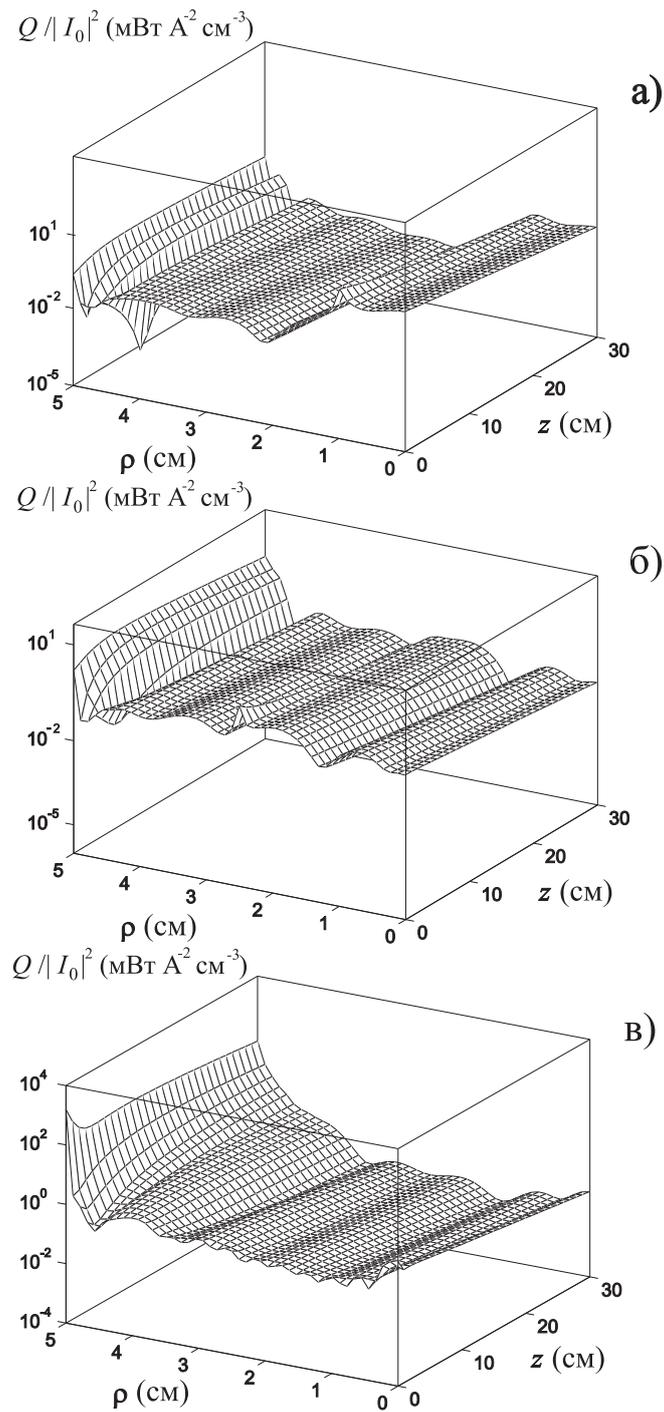


Рис. 3.10. Распределение объёмной плотности мощности джоулевых потерь $Q/|I_0|^2$ в плазменном столбе для $b/a = 0,2$ (а), $b/a = 0,5$ (б), $b/a = 1$ (в) при $a = 5$ см, $d/a = 2 \cdot 10^{-2}$, $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$ и значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.1

Заключение

В настоящем учебном пособии рассмотрены особенности возбуждения и распространения электромагнитных волн в открытых плазменных волноводах, расположенных в свободном пространстве. Приведённые сведения дают основу для более глубокого понимания направляющих свойств открытых замагниченных плазменных структур и особенностей излучения источников при наличии подобных волноведущих систем.

Проведён подробный анализ влияния столкновительных и бесстолкновительных потерь в плазменной среде на свойства направляемых такими волноводами мод и характеристики их возбуждения. В частности, показано, что наличие сравнительно малых столкновительных потерь может иметь принципиальное значение и приводить к заметным изменениям дисперсионных характеристик и структуры полей объёмных мод свистового диапазона, направляемых такими плазменными образованиями по сравнению со случаем бесстолкновительной плазмы. При этом моды разделяются на слабозатухающие с преимущественно крупномасштабной геликонной структурой поля и сильнозатухающие, в отдельные компоненты полей которых основной вклад даёт мелкомасштабная квазиэлектростатическая составляющая. В тоже время, наличие сравнительно малых столкновительных потерь не сказывается существенно на свойствах поверхностных мод, направляемых рассмотренными плазменными волноводами в свистовом диапазоне частот. Определены условия, при которых учёт бесстолкновительного затухания не приводит к принципиальным изменениям дисперсионных характеристик и структуры полей мод изученных направляющих систем по сравнению со случаем наличия лишь столкновительных потерь в плазме. Показано, что при возникновении разделения мод на слабо- и сильнозатухающие имеет место их селекция по эффективности возбуждения, проявляющаяся в том, что амплитуды слабозатухающих мод значительно превышают амплитуды сильнозатухающих мод. Показано, что перечисленные особенности возбуждения и распространения мод свистового диапазона имеют место как для однородных, так и неоднородных плазменных направляющих структур в свободном пространстве. Определены условия, характерные для так называемых «геликонных» источников плазмы, при которых основная доля мощности, теряемая источником в виде кольцевого электрического тока, идет в сильнозатухающие моды, поля которых определяются квазиэлектростатической, а не геликонной составляющей.

Приведены примеры анализа влияния неоднородности распределения плазмы поперёк внешнего магнитного поля на свойства направляемых мод.

Показано, что при определённых условиях такая неоднородность не сказывается существенно на свойствах свистовых мод, направляемых цилиндрическими плазменными структурами, расположенными в свободном пространстве или фоновой магнитоактивной плазме.

Описаны численные методы отыскания дисперсионных характеристик и структур полей мод в однородных и неоднородных цилиндрических плазменных волноводах во внешнем магнитном поле. Приведён пакет программ для поиска указанных характеристик волн в таких направляющих структурах.

Материалы данного пособия могут представлять интерес для анализа работы высокочастотных индукционных источников плазмы при наличии внешнего постоянного магнитного поля и могут быть использованы для интерпретации результатов учебных и научных экспериментов по возбуждению и распространению свистовых волн при наличии замагниченных плазменных каналов. Кроме того, представленные теоретические разработки могут найти применение не только для изучения особенностей распространения электромагнитных волн в магнитоактивных плазменных волноводах, но и для анализа электромагнитных волн, направляемых открытыми волноводами с более сложными вариациями гиротропного заполнения (например, систем с бигиротропным заполнением).

В заключении автор выражает благодарность А. В. Кудрину за многочисленные обсуждения затронутых в данном пособии вопросов.

Замечания по содержанию пособия следует направлять на электронный адрес: vasiliy.eskin@gmail.com

Список литературы

1. Boswell R. W., Chen F. F. Helicons—The early years // IEEE Trans. Plasma Sci. 1997. V. 25, No. 6. P. 1229–1244.
2. Chen F. F., Boswell R. W. Helicons—The past decade // IEEE Trans. Plasma Sci. 1997. V. 25, No. 6. P. 1245–1257.
3. Shinohara S., Shamrai K. P. Direct comparison of experimental and theoretical results on the antenna loading and density jumps in a high pressure helicon source // Plasma Phys. Control. Fusion. 2000. V. 42, No. 4. P. 865–880.
4. Shamrai K. P., Taranov V. B. Volume and surface rf power absorption in a helicon plasma source // Plasma Sources Sci. Technol. 1996. V. 5, No. 5. P. 474–491.
5. Shamrai K. P., Shinohara S. Spectral and spatial characterization of a radio frequency power absorption in high pressure helicon plasmas // Phys. Plasmas. 2001. V. 8, No. 10. P. 4659–4674.
6. Carter M. D., Baity F. W. Jr., Barber G. C., Mori Y., Sparks D. O., White K. F., Jaeger E. F., Chang-Diaz F. R., Squire J. P. Comparing experiments with modeling for light ion helicon plasma sources // Phys. Plasmas. 2002. V. 9, No. 12. P. 5097–5110.
7. Arnush D., Chen F. F. Generalized theory of helicon waves. II. Excitation and absorption // Phys. Plasmas. 1998. V. 5, No. 5. P. 1239–1253.
8. Miljak D. G., Chen F. F. Density limit in helicon discharges // Plasma Sources Sci. Technol. 1998. V. 7, No. 4. P. 537–549.
9. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. Electrodynamics of density ducts in magnetized plasmas. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. 288 p.
10. Kostrov A. V., Kudrin A. V., Kurina L. E., Luchinin G. A., Shaykin A. A., Zaboronkova T. M. Whistlers in thermally generated ducts with enhanced plasma density: Excitation and propagation // Phys. Scripta. 2000. V. 62, No. 1. P. 51–65.
11. Kondrat'ev I. G., Zaboronkova T. M., Kudrin A. V. Excitation and propagation of electromagnetic waves in nonuniform density ducts // Phys. Scripta. 1996. V. 54, No. 10. P. 96–112.

12. Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Лях М. Ю., Попова Л. Л. Несимметричные свистовые волны, направляемые цилиндрическими дактами с повышенной плотностью плазмы // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 10. С. 835–857.
13. Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Лях М. Ю. Возбуждение несимметричных волн заданными источниками в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 5–6. С. 452–471.
14. Helliwell R. A. 40 years of whistler // Modern radio science 1993 / Ed. H. Matsumoto. New York: Oxford University Press, 1993. P. 189.
15. Sazhin S., Hayakawa M., Bullough K. Whistler diagnostics of magnetospheric parameters: a review // Ann. Geophys. 1992. V. 10, No. 5. P. 293–308.
16. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Москва: Наука, 1967. 684 с.
17. Helliwell R. A. Whistlers and related ionospheric phenomena. New York: Dover, 2006. 368 p.
18. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. Москва: Наука, 1970. 208 с.
19. Фелсен Л., Маркувиц М. Излучение и рассеяние волн. Москва: Мир, 1978. 547 с.
20. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. Москва: Наука, 1984. 392 с.
21. Беллюстин Н. С., Докучаев В. П., Поляков С. В., Тамойкин В. В. Возбуждение волновода Земля–ионосфера ионосферными источниками низкочастотного диапазона // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 9. С. 1323–1332.
22. Zhu P., Boswell R. W. Ar II laser generated by Landau damping of whistler waves at the lower hybrid frequency // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63, No. 26. P. 2805–2807.
23. Lieberman M. A., Gottscho R. A. Design of high density plasma sources for materials processing // Physics of thin films / Ed. M. Francombe and J. Vossen. New York: Academic Press, 1994. P. 1–119.

24. Charles C., Giroult-Matlakowski G., Boswell R. W., Goulet A., Turban G., Cardinaud C. Characterization of silicon dioxide films deposited at low pressure and temperature in a helicon diffusion reactor // *J. Vac. Sci. Technol. A*. 1993. V. 11, No. 6. P. 2954–2963.
25. Bridges W. B., Chester A. N., Halsted A. S., Parker J. V. Ion laser plasmas // *Proc. IEEE*. 1971. V. 59, No. 5. P. 724–737.
26. Zhu P., Boswell R. W. A new argon-ion laser based on an electrodeless plasma // *J. Appl. Phys.* 1990. V. 68, No. 5. P. 1981–1984.
27. Chang-Diaz F. R., Squire J. P., Bengston R. D., Breizmann B. N., Baity F. W., Carter M. D. // *Proc. 36th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conf.* 2000. No. 2000-3756.
28. Virko V. F., Virko Yu. V., Slobodyan V. M., Shamrai K. P. The effect of magnetic configuration on ion acceleration from a compact helicon source with permanent magnets // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2010. V. 19, No. 1. P. 015004-1–015004-7.
29. Choueiri E. Y., Polzin K. Faraday acceleration with radio-frequency assisted discharge // *Journal of Propulsion and Power*. 2006. V. 22, No. 3. P. 611–619.
30. Longmier B. W., Squire J. P., Carter M. D., Cassady L. D., Glover T. W., Chancery W. J., Olsen C. S., Ilin A. V., McCaskill G. E., Chang Diaz F. R., Bering E. A. Ambipolar ion acceleration in the expanding magnetic nozzle of the VASIMR VX-200i // *Proc. 45th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conf.* 2009. V. 1, No. 2009–5359. P. 1–10.
31. Gilland J. Helicon wave physics impacts on electrodeless thruster design // *Spacecraft propulsion and power*. IEPC-0150. Toulouse: 2003. P. 10.
32. Ferencz Cs., Ferencz O. E., Hamar D., Lichtenberger J. Whistler phenomena: short impulse prolinebreak pagation. Dordrecht: Kluwer, 2001. 260 p.
33. Kudrin A. V., Lyakh M. Yu., Zaboronkova T. M. Wave emission from an open-ended cylindrical channel in a cold magnetoplasma // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 2001. V. 49, No. 12. P. 1645–1648.
34. Chugunov Yu. V., Markov G. A. Active plasma antenna in the Earth's ionosphere // *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2001. V. 63, No. 17. P. 1775–1787.

35. Fischer B., Krämer M., Enk Th. Helicon wave coupling to a finite plasma column // Plasma Phys. Control. Fusion. 1994. V. 36, No. 12. P. 2003–2020.
36. Фролов В. Л., Рапопорт В. О., Комраков Г. П., Белов А. С., Марков Г. А., Парро М., Рош Ж. Л., Мишин Е. В. Создание дактов плотности при нагреве ионосферы Земли мощным коротковолновым радиоизлучением // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88, № 12. С. 908–913.
37. Белов А. С., Марков Г. А. Вынужденное ионизационное рассеяние волнового пучка, формирующего разрядный канал в пробочной магнитной ловушке // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 3. С. 252–256.
38. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Нижний Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. 232 с.
39. Марков Г. А. Наблюдение резонансной автонастройки магнитных антенн плазмой ВЧ-разряда // Физика плазмы. 1988. Т. 14, № 9. С. 1094–1098.
40. Кауфман Р. Н., Рябова Н. А. Распространение свистовых волн в цилиндрическом плазменном волноводе, граничащем с вакуумом // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 5. С. 1027–1035.
41. Воробьев Н. Ф., Рухадзе А. А. О возбуждении геликона в плазменном цилиндре поверхностным источником тока // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 12. С. 1065–1068.
42. Chen F. F. Evidence for Trivelpiece-Gould modes in a helicon discharge // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88, No. 14. P. 145002-1–145002-4.
43. Krämer M., Aliev Yu. M., Altukhov A. B., Gurchenko A. D., Gusakov E. Z., Niemi K. Anomalous helicon wave absorption and parametric excitation of electrostatic fluctuations in a helicon-produced plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49, No. 5A. P. A167–A175.
44. Shamrai. K. P., Taranov V. B. Resonance wave discharge and collisional energy absorption in helicon plasma source // Plasma Phys. Control. Fusion. 1994. V. 36, No. 11. P. 1719–1737.
45. Шамрай К. П. Коллективные механизмы поглощения ВЧ-мощности в геликонных источниках плазмы // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 11. С. 934–940.

46. Cho S., Lieberman M. A. Self-consistent discharge characteristics of collisional helicon plasmas // *Phys. Plasmas*. 2003. V. 10, No. 3. P. 882–890.
47. Arnush D. The role of Trivelpiece–Gould waves in antenna coupling to helicon waves // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7, No. 7. P. 3042–3050.
48. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. Москва: Наука, 1969. 192 с.
49. Marcuse D. Theory of dielectric optical waveguides. New York: Academic Press, 1974. 267 p.
50. Kudrin A. V., Es'kin V. A. Whistler wave propagation in a bounded collisional magnetoplasma // *Phys. Scripta*. 2006. V. 74, No. 4. P. 425–438.
51. Kudrin A. V., Es'kin V. A., Krafft C., Zaboronkova T. M. Whistler wave excitation by a loop antenna in a bounded collisional magnetoplasma // *Phys. Scripta*. 2008. V. 77, No. 5. P. 055501-1–055501-11.
52. Harrington R. F., Villeneuve A. T. Reciprocity relationships for gyrotropic media // *IRE Trans. Microwave Theory Tech.* 1958. V. MTT-2, No. 7. P. 308–310.
53. Кондратьев И. Г., Таланов В. И. Применение леммы Лоренца к расчёту полей излучения заданных источников в безграничных средах // *ЖТФ*. 1965. V. 35, No. 3. P. 571–573.
54. Таланов В. И. Избранные труды. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2008. С. 61–64.
55. Бареев Б. Б., Гавриленко В. Г. О лемме Лоренца для сред с пространственной дисперсией и её применение к расчёту излучения заданных источников // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2009. Т. 53, № 10. С. 817–821.
56. Manenkov A. B. Orthogonality relations for the eigenmodes of lossy anisotropic waveguides (fibres) // *IEE Proc.* 1993. V. 140, No. 3. P. 206–212.
57. Marcuse D. Radiation losses of the dominant mode in a round dielectric waveguides // *Bell System Tech. J.* 1970. V. 49, No. 8. P. 1665–1693.
58. Маненков А. Б. Распространение волн в открытых волноводах с анизотропным диэлектриком // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1981. Т. 24, № 1. С. 60–69.

59. Manenkov A. B. Irregular magneto-optical waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1981. V. MTT-29, No. 9. P. 906–910.

Приложение А

ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с единичными векторами $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ квадрат элемента длины записывается в виде

$$dl^2 = h_1^2 d\xi_1^2 + h_2^2 d\xi_2^2 + h_3^2 d\xi_3^2, \quad (\text{A.1})$$

где h_i — коэффициенты Ламэ. Эти коэффициенты могут быть вычислены по следующей формуле:

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_i} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.2})$$

Элемент объёма в этих координатах

$$dV = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (\text{A.3})$$

Основные дифференциальные векторные операции со скалярной u и векторной \mathbf{A} функциями в выбранной криволинейной системе координат записываются в виде

$$\text{grad}u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \mathbf{e}_3, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 A_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 A_3) \right\}, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Василий Алексеевич **Еськин**

**ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В
ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ
ВОЛНОВОДАХ**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.