Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций

Михаил Александрович Солдатов
Светлана Серафимовна Круглова
Евгений Валентинович Круглов

Кратные интегралы и ряды
Часть 3
Ряды Фурье. Интеграл Фурье

Учебное пособие

Предназначено для студентов физического и радиофизического факультетов

Рекомендовано Методической комиссией
механико-математического факультета

Нижний Новгород, 2014

В различных разделах физики и других наук, в технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями, с колебательными процессами. Они описываются с помощью периодических функций. Эффективным аппаратом для их представления и изучения являются тригонометрические ряды (ряды Фурье). Они оказываются полезными и при исследовании функций, заданных лишь в конечном промежутке и вовсе не порождённых никакими колебательными явлениями.[1]

§ 1. Ряд Фурье. Поточечная сходимость

1. Начальные понятия. Постановка задачи.

Функция $f(x)$ называется *периодической* периода $T \neq 0$, если $f(x \pm T) = f(x)$ для всех значений x из области определения. График её достаточно построить на любом промежутке величины T и потом смещать по горизонтали параллельно самому себе (рис.3.1).

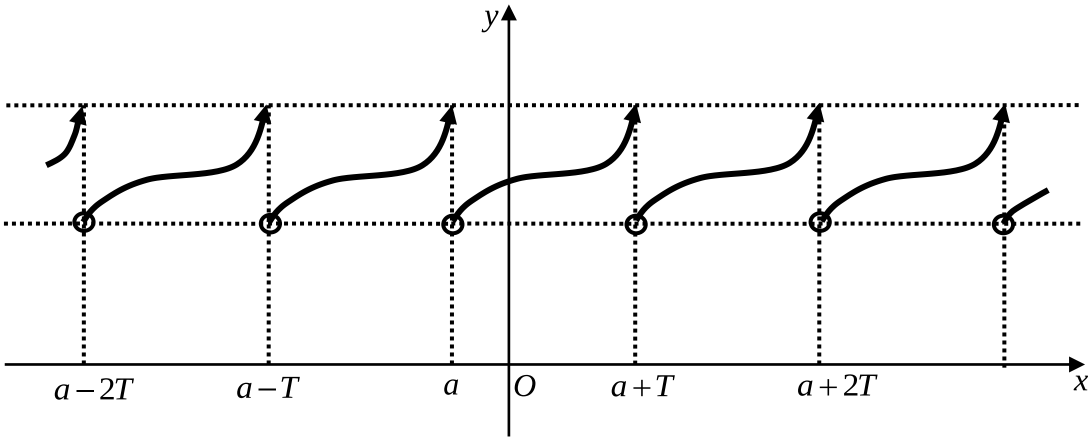

Рис. 3.1

Понятно, что если T – период, то числа $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm nT$,... – тоже периоды. Наименьший положительный период называется *основным периодом*. Простейшие периодические функции: $\sin nx$, $\cos nx$ и более сложная – *синусоидальная величина* $A\sin(nx+\varphi)$. У них общий период $T = 2\pi$. (Рис. 3.2)

Определение 1. Функциональный ряд вида

$$S(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\varphi_n)$$

называется *тригонометрическим рядом*. Так как члены ряда – периодические функции с общим периодом 2π, то и его сумма $S(x)$, если ряд сходится, есть тоже функция периода 2π: $S(x+2\pi) = S(x)$. Говорят: $S(x)$ получается путём

[1] Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) – французский математик и физик; применял тригонометрические ряды для решения задач математической физики. Результаты изложены в его сочинении «Аналитическая теория тепла» (опубликована в 1822 г.).

наложения или суперпозиции ряда синусоид. Общий член ряда называется *n-ой гармоникой* функции $S(x)$, φ_n – фаза, A_n – амплитуда гармоники. Его записывают в виде $A_n \sin(nx+\varphi_n) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$; $a_n = A_n \sin\varphi_n$, $b_n = A_n \cos\varphi_n$, так что $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ (если $b_n \neq 0$).

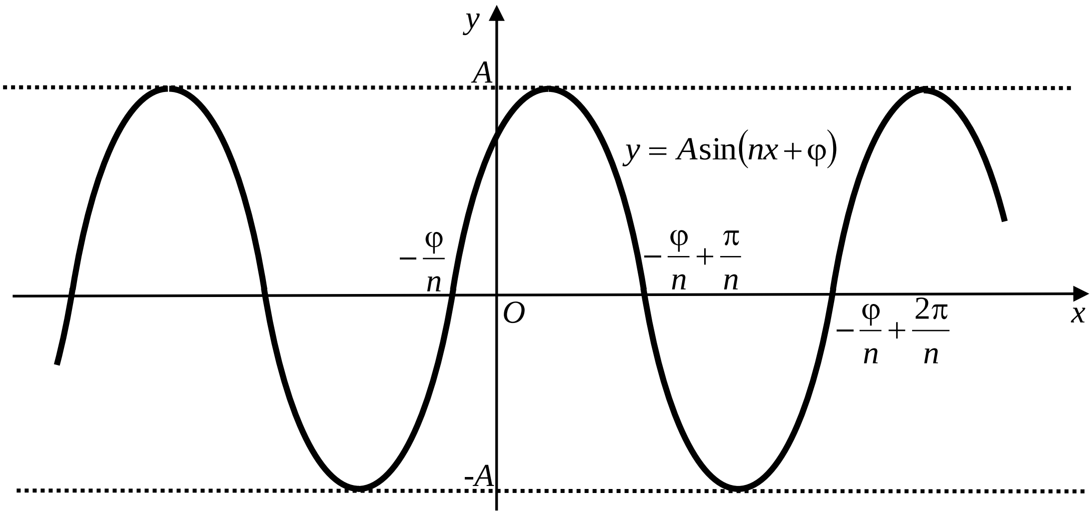

Рис. 3.2

Нас будет интересовать задача представления функции тригонометрическим рядом. Здесь возможны две постановки вопроса:

Задача 1. Пусть дана функция $f(x)$ периода 2π. Можно ли её представить как сумму ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{3.1}$$

т.е. *разложить* на гармоники (говорят: сложное колебание разложить на суперпозицию простейших), и если можно, то как найти коэффициенты a_n, b_n? Другими словами, нельзя ли приближённо заменить функцию $f(x)$ периода 2π *тригонометрическим многочленом*

$$f(x) \approx S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{3.2}$$

когда *n* достаточно велико.

Задача 2. Пусть функция $f(x)$ не периодическая, а задана только на промежутке длины 2π, именно на $[-\pi, \pi]$ или вообще на $[a, a+2\pi]$. Нельзя ли её *на этом промежутке* представить в виде ряда (3.1)? Эта задача автоматически сводится к Задаче 1, если функцию $f(x)$ периодически продолжить на всю ось $(-\infty, +\infty)$ с периодом 2π, т.е. если рассмотреть функцию

$$S(x)=\begin{cases} f(x),\ a<x<a+2\pi \\ f(x-2\pi k),\ a+2\pi k<x<a+2\pi+2\pi k\ (k=\pm1,\pm2,\ldots) \end{cases}. \qquad (3.3)$$

На концах интервалов значение $S(x)$ можно выбрать произвольно, но как увидим далее, естественно считать

$$S(a+2\pi k)=\frac{f(a+0)+f((a+2\pi)-0)}{2}. \qquad (3.4)$$

2. Ортогональные системы функций. Понятие ряда Фурье.

Предварительно установим некоторые понятия.

Определение 2. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными на отрезке* $[a,b]$, если

$$(\varphi,\psi)\equiv\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=0,$$

и пишут $\varphi\perp\psi$ на $[a,b]$; а интеграл называется *скалярным произведением функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Определение 3. Система функций

$$\{\varphi_n(x)\}\ (n=0,1,2,\ldots) \qquad (3.5)$$

называется *ортогональной* на $[a,b]$, если любые две функции этой системы *ортогональны* на $[a,b]$, т.е.

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx=0, n\neq k\text{, и если числа }\lambda_n\equiv\int_a^b\varphi_n^2(x)dx>0.$$

Число $\sqrt{\lambda_n}$ называют *нормой* или *длиной* функции $\varphi_n(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают: $\sqrt{\lambda_n}=\|\varphi_n(x)\|$.

Если дополнительно все $\lambda_n=1$, то система (3.5) называется *нормальной* или *ортонормальной* на $[a,b]$. Из ортогональной системы легко получить нормальную – это есть система $\left\{\dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$.

Упражнение. Доказать: функции ортогональной системы, взятые в любом конечном числе, линейно независимы, т.е. тождество

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)\equiv0$$

возможно лишь когда все постоянные $c_k=0$ ($k=0,1,\ldots,m$; $m-$любое); или: никакую из них нельзя представить как *линейную комбинацию* других, именно в виде

$$\varphi_\nu(x)=E_0\varphi_0(x)+E_1\varphi_1(x)+\ldots+E_{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(x)+E_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}(x)+\ldots+E_m\varphi_m(x),$$
$$E_\nu=const,\ 0\le\nu\le m.$$

Теорема 3.1. *Пусть система (3.5) ортогональна на* $[a,b]$ *и функцию* $f(x)$ *можно разложить в ряд по функциям* $\varphi_n(x)$ *(или: по системе функций (3.5)):*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x). \qquad (3.6)$$

Тогда

$$c_n=\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx,\ (n=0,1,2,...). \qquad (3.7)$$

Δ Дополнительно предположим, что функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и ряд (3.6) можно почленно интегрировать (например, ряд сходится равномерно на $[a,b]$). Умножим ряд (3.6) на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем почленно по $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx=c_k\int_a^b\varphi_k^2(x)dx=c_k\lambda_k;$$

под знаком суммы остаётся только одно слагаемое, т.к. при $n\neq k$ интегралы равны нулю. Отсюда и следует (3.7). ▲

Определение 4. Пусть на промежутке $[a,b]$ задана *некоторая* интегрируемая функция $f(x)$. Поставим ей в соответствие ряд

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x) \qquad (3.8)$$

с коэффициентами (3.7). Он называется *обобщённым рядом Фурье* функции $f(x)$, а числа c_n – её *обобщёнными коэффициентами Фурье* относительно ортогональной системы (3.5). Вопрос о сходимости ряда (3.8) и его сумме $S(x)$ является сложным и может быть решён лишь для конкретных систем функций (вполне определённым образом организованных). Мы его рассмотрим для *тригонометрической системы функций*.

Теорема 3.2 (ортогональность тригонометрической системы функций). *Система тригонометрических функций*

$$1,\cos x,\sin x,\ \cos 2x,\sin 2x,...,\cos nx,\sin nx,... \qquad (3.9)$$

ортогональна на промежутке $[-\pi,\pi]$.

Δ 1) Докажем ортогональность 1 с $\cos nx$ и $\sin nx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\ \ (n=1,2,...).$$

2) Докажем, что $\cos nx\perp\cos kx,\ n\neq k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n+k)x+\cos(n-k)x}{2}dx=0$$ по п. 1), т.к. $n-k\neq 0$.

3) Аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin kx dx=0,\ n\neq k;\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin kx dx=0,$$ n и k – любые. ▲

Вычислим квадраты *норм* функций (3.9):

$$\lambda_0 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \cdot dx = 2\pi,\ \lambda_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi\ \ (n = 1,2,\ldots).$$

Допустим, что имеет место разложение функции $f(x)$ в *тригонометрический ряд* (3.1) и его можно почленно интегрировать на отрезке $[-\pi, \pi]$. Найдём коэффициенты a_n и b_n. В соответствии с теоремами 3.1, 3.2, имеем:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\lambda_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \cdot dx,\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

при $n = 1,2,\ldots$: $a_n = \dfrac{1}{\lambda_n} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = \dfrac{1}{\lambda_n} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$.

Итак,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx\ \ (n = 0,1,2,\ldots),\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx\ \ (n = 1,2,\ldots). \quad (3.10)$$

Запись первого слагаемого в (3.1) в форме $\dfrac{a_0}{2}$ оправдана общностью записи всех коэффициентов a_n, включая $n = 0$. Однако при решении примеров коэффициент a_0 приходится вычислять отдельно.

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на промежутке $[-\pi, \pi]$ (или периодическая с периодом 2π). Числа a_n и b_n, определяемые формулами (3.10), называются *коэффициентами Фурье* (или Фурье – Эйлера) функции $f(x)$, а ряд с этими коэффициентами

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.11)$$

называется *классическим или тригонометрическим рядом Фурье* функции $f(x)$ (ряд *порождён* функцией $f(x)$); при этом тригонометрический многочлен (3.2) называется *многочленом Фурье* порядка n функции $f(x)$.

Понятно, что функции $f(x)$ соответствует только один ряд Фурье. А согласно теореме 3.1 сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье для своей суммы.

Возникают вопросы: 1) Сходится ли ряд Фурье (3.11)? 2) Если сходится, то какова его сумма $S(x)$, будет ли $S(x) = f(x)$, т.е. можно ли значок соответствия заменить знаком равенства? Оказывается, что такой ряд может расходиться (хотя бы в некоторых точках) даже для непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, см. [12, с. 107] или [7, с. 440]. Учение о разложении функций в тригонометрические ряды называется гармоническим анализом.

3. Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной в промежутке* $[a, b]$, если она непрерывна в нём, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва *первого рода* (в них функция имеет *конечные скачки*) (рис. 3.3).

Непрерывная функция – это частный случай кусочно-непрерывной. Таким образом, если c – точка разрыва, то должны существовать пределы слева и справа: $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=f(c-0)$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=f(c+0)$. Если c – точка непрерывности, то $f(c-0)=f(c+0)=f(c)$. Для точки c устранимого разрыва значение функции в ней можно дополнить или изменить, положив $f(c)=f(c-0)\equiv f(c+0)$, – так что функция станет также непрерывной в этой точке.

Определение 7. Функция $f(x)$ называется *кусочно-гладкой* на промежутке $[a,b]$, если 1) она является кусочно-непрерывной и 2) производная $f'(x)$ непрерывна, кроме, может быть, конечного числа точек разрыва, в которых, однако, существуют конечные левое и правое предельные значения: $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)=f'(c-0)$, $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)=f'(c+0)$ (в концах a и b соответственно правое и левое). В частности, если $f'(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x)$ называется *гладкой* функцией.

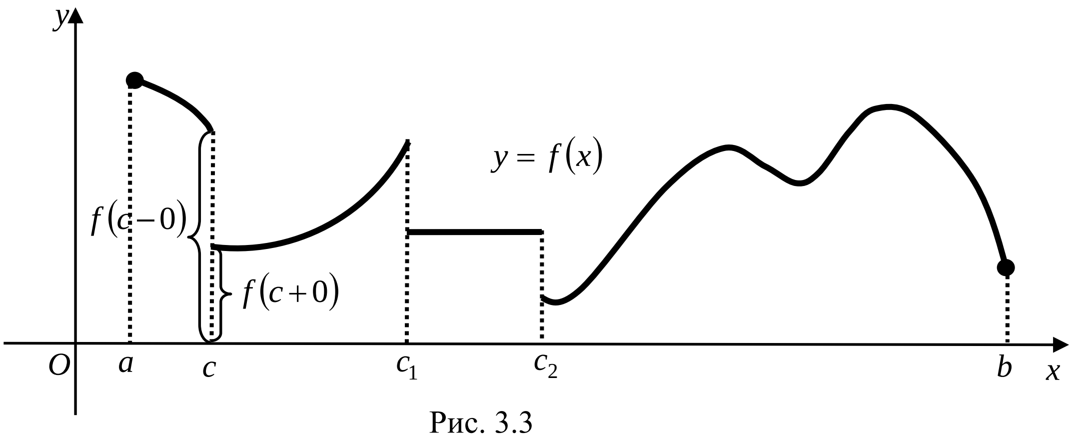

Рис. 3.3

Определение 8. Говорят, что функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ удовлетворяет *условиям Дирихле*, если 1) она кусочно-непрерывна в нём и 2) имеет конечное число *строгих* экстремумов.

Понятно, что для такой функции промежуток $[a,b]$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых функция непрерывна и монотонна.

Теорема 3.3. (Теорема Дирихле – основная теорема о разложимости функции в ряд Фурье.) *Если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π и удовлетворяет на промежутке $[-\pi,\pi]$ условиям Дирихле, то 1) её ряд Фурье сходится во всех точках x, причём 2) в точках непрерывности его сумма равна значению функции, а в точках разрыва – среднему арифметическому её пределов слева и справа.*

Условимся всегда под значением функции f в точке x считать среднее арифметическое:

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}; \qquad (3.12)$$

для непрерывной в точке x функции это есть её значение в точке x. Тогда для всех x будет справедливо разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\ -\infty<x<\infty. \qquad (3.13)$$

Теорема 3.4. *Утверждения теоремы 3.3 справедливы и для периодических кусочно-гладких функций* (они могут иметь на промежутке $[-\pi,\pi]$ бесконечно много строгих экстремумов).

Теоремы эти принимаем без доказательства, хотя доказательство интересно и в процессе его получается ряд важных свойств и фактов.[2]

Теорема 3.5. *Любую функцию* $f(x)$, *заданную только на промежутке* $[-\pi,\pi]$ *и удовлетворяющую на нём условиям Дирихле (или кусочно-гладкую), можно на этом промежутке разложить в ряд Фурье (3.13), где наряду с соглашением (3.12) следует считать*

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \qquad (3.14)$$

Δ Для доказательства надо функцию $f(x)$ периодически, с периодом 2π, продолжить на всю ось и к полученной функции $S(x)$ применить теорему 3.3 (или теорему 3.4). (Рис.3.4). ▲

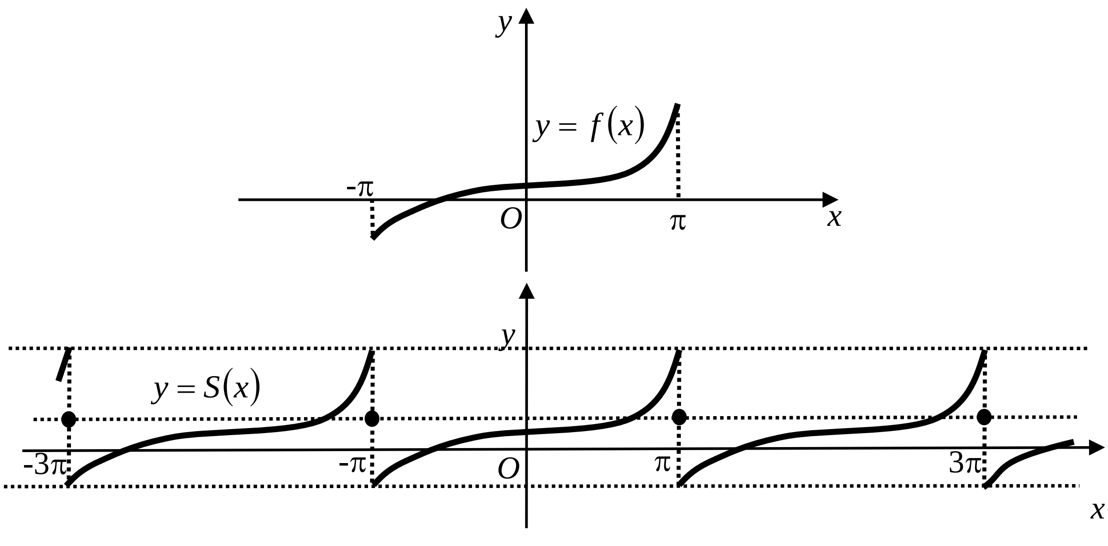

Рис. 3.4

<u>Замечание 1</u>. Если функция $f(x)$ периода T, то её интеграл по любому промежутку длины T имеет постоянное значение:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

---

[2] При иных условиях доказательство теоремы разложения дал также Н.И. Лобачевский (в 1834-1835 г.).

Δ По свойству аддитивности

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx.$$

В последнем интеграле произведём замену переменной $x=t+T$ и, учитывая, что $f(t+T)=f(t)$, получим $\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t)dt$. Откуда и следует требуемое равенство. ▲

На основании этого замечания в формулах (3.10) для периодической функции промежуток $[-\pi,\pi]$ можно заменить на $[0,2\pi]$ и вообще любым промежутком $[a,a+2\pi]$. Соответственно сохраняется для этого промежутка теорема 3.5.

<u>Пример 1</u>. Функцию $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ разложить в ряд Фурье на промежутке $[0,2\pi]$. Условиям Дирихле функция удовлетворяет (она также кусочно-гладкая), поэтому разложить можно. Сумма $S(x)$ этого ряда в интервале $(0,2\pi)$будет равна $f(x)$, в концах $S(0)=S(2\pi)=\dfrac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=0$, а за пределами промежутка $[0,2\pi]$ новым аналитическим выражениям (см.(3.3) и (3.4)) – рис.3.5.

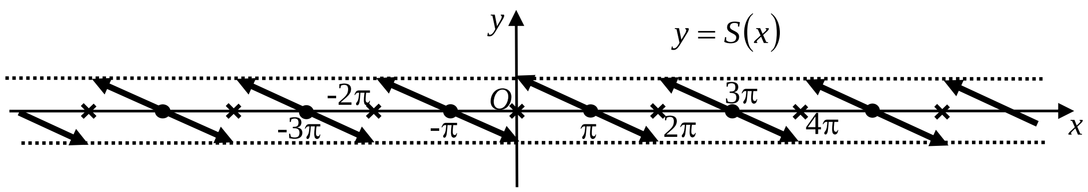

Рис. 3.5

Вычислим коэффициенты Фурье, используя замечание 1:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}[\pi x-\frac{1}{2}x^2]_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\left[(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right]=0.$$

(Интеграл берём по частям: $u=\pi-x, dv=\cos nxdx, v=\dfrac{\sin nx}{n}$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\left[-(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right]=\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \ 0 < x < 2\pi. \qquad (3.15)$$

Отсюда и в самом деле видим непосредственно, что в концах 0 и 2π сумма ряда равна нулю. При $x = \frac{\pi}{2}$ находим $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ (это получали и из разложения функции $y = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена). Отметим, что коэффициенты имеют порядок $\frac{1}{n}$ – это вызвано разрывностью суммы $S(x)$ (объяснение будет дано далее). Тот факт, что $a_n = 0$ объясняется тем, что периодическое продолжение $S(x)$ является функцией нечётной. Это видно из рисунка 3.5 (см. далее п.4).

Вопрос: верно ли равенство (3.15) в точках $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = 5\pi$? Чему в этих точках равна сумма ряда?

Пример 2. $f(x) = x^2, \ 0 < x < 2\pi.$ Вычисляя коэффициенты a_n и b_n по формулам (3.10) от функции $f(x) = x^2$ по промежутку $[0, 2\pi]$, можно получить разложение

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \ 0 < x < 2\pi. \qquad (3.16)$$

В концах $x = 0$ и 2π сумма $S(x)$ этого ряда равна $S(0) = S(2\pi) = \frac{f(+0) + f(2\pi - 0)}{2} = \frac{0 + 4\pi^2}{2} = 2\pi^2$. Поэтому при $x = 0$ получим $2\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (3.17)$$

Это знаменитый ряд Эйлера.

При $x = \pi$ из (3.16) найдём $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Складывая эти ряды, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \qquad (3.18)$$

Замечание. Эти и другие примеры показывают, что ряды Фурье являются хорошим средством для суммирования (нахождения сумм) различных числовых рядов.

4. Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.

Далее предполагаем, что рассматриваемые функции удовлетворяют условию разложимости в ряд Фурье, а в приводимых примерах это легко прослеживается.

Легко доказать (это было ранее):

если функция $f(x)$ чётная: $f(-x)= f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$;

если функция $f(x)$ нечётная: $f(-x)=- f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

1) Пусть $f(x)$ чётная функция, то из (3.10) имеем

$$b_n = 0,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

<u>Вывод</u>. Чётная функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx\ (n = 0,1,2,\ldots). \qquad (3.19)$$

2) Аналогично, нечётная функция разлагается в ряд Фурье только по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx\ (n = 1,2,\ldots). \qquad (3.20)$$

<u>Пример 3</u>. $f(x) = |x|,\ -\pi \le x \le \pi$. Функция чётная. Чтобы получить сумму $S(x)$ её ряда Фурье, продолжаем её по закону периодичности. Получится функция непрерывная всюду (график - пила, рис.3.6), ряд будет сходиться к $f(x)$ на всём промежутке $[-\pi, \pi]$.

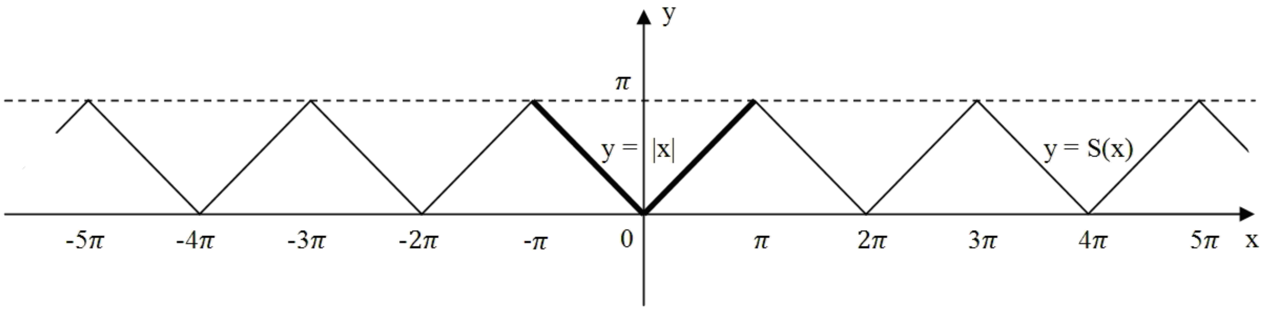

Рис. 3.6

Находим

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx = \pi,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx dx = [u = x, dv = \cos nx dx, v = \frac{\sin nx}{n}] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx` \right) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, n = 2k+1 \end{cases}. \qquad (3.21)$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \ldots \right),\ -\pi \le x \le \pi.$$

Отсюда при $x=0$: $\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\ldots$. Такой же результат был получен в примере 2 – см. (3.18).

Отметим, что коэффициенты в (3.21) имеют порядок $\frac{1}{n^2}$ $(n=2k+1)$ – это объясняется тем, что сумма ряда $S(x)$ непрерывна всюду, а её производная $S'(x)$ имеет разрывы.

Пример 4. $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi<x<0\\ \quad 0, x=0\\ +1, 0<x<\pi\end{cases}$, т.е. $f(x)=\operatorname{sign} x$ на интервале $(-\pi,\pi)$.

Функция нечётная. По формулам (3.20) находим

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx dx=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, n=2k-\textit{чётное}\\ \frac{4}{\pi n}, n=2k+1-\textit{нечётное}\end{cases};$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+\ldots\right),\ -\pi<x<\pi.$$

График суммы $S(x)$ и многочленов Фурье $S_1(x)$, $S_3(x)$ изображены на рис. 3.7.

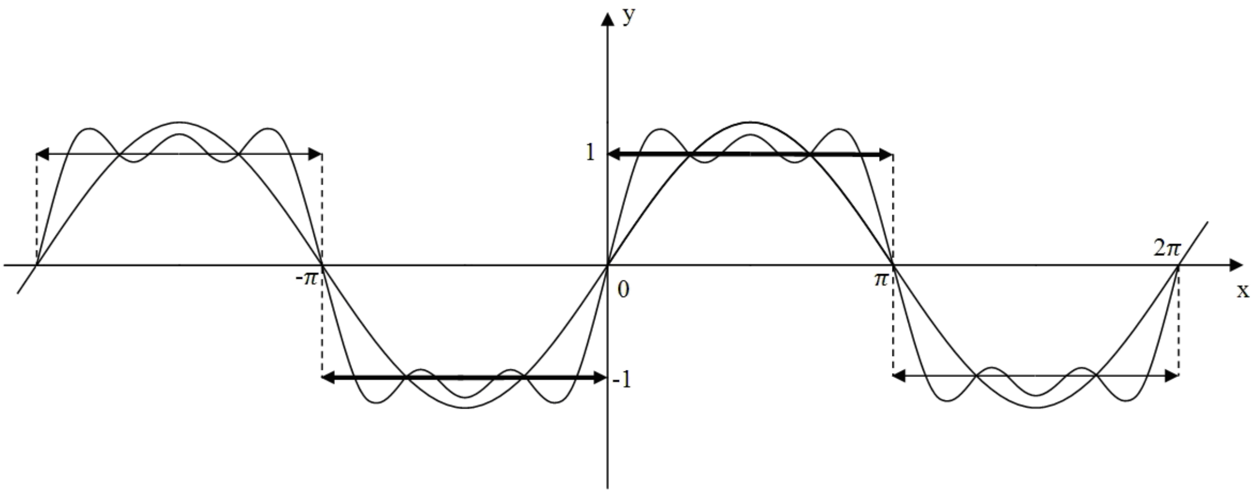

Рис. 3.7

Данный пример, приведённый Жозефом Фурье, произвёл сильное впечатление на его современников: разрывная, к тому же кусочно-постоянная функция представляется единым аналитическим выражением – получается путём суперпозиции (наложения) бесконечного множества простейших непрерывных функций. Этот ряд способствовал расширению общего понятия вещественной функции и «аналитического выражения», которые в начале XIX в. ещё не окончательно сформировались. Сказанное относится также к «разрывному множителю Дирихле» и интегральному представлению функции $\operatorname{sign} x$ (см. (1.53), (1.53′)).

5. <u>Разложение функции на интервале $(0,\pi)$ в ряд по косинусам и по синусам</u>.

Пусть функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0,\pi]$. Требуется разложить её *на этом промежутке* в ряд Фурье (3.13) – по функциям периода 2π. Для этого доопределим её на промежутке $[-\pi,0)$ любым способом и новую функцию $f^*(x)$ ($f^*(x)=f(x)$ при $x\in[0,\pi]$) на промежутке $[-\pi,\pi]$ разложим в ряд Фурье. Таким путём можем получить бесчисленное множество рядов Фурье, сходящихся к $f(x)$ на $(0,\pi)$. (Рис. 3.8, *а*)).

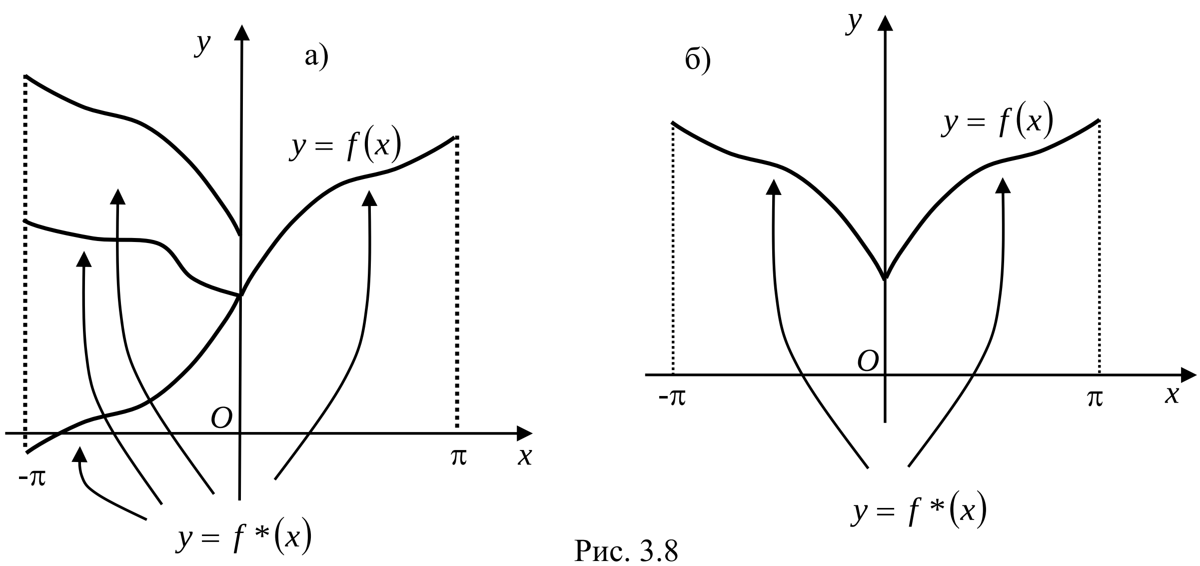

Рис. 3.8

Однако если продолжить функцию $f(x)$ чётным образом, так что $f^*(-x)=f^*(x)=f(x),\ \ x\in[0,\pi]$ (рис. 3.8,б)), то получим единственный ряд только по косинусам, сходящийся к $f(x)$ на промежутке $[0,\pi]$. Итак, имеем для $f^*(x)$ ряд

$$f^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ -\pi\le x\le\pi,\text{ где}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^*(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx\ \ (n=0,1,2,\ldots).$$

<u>Вывод</u>. Функцию $f(x)$, заданную на промежутке $0\le x\le\pi$, можно разложить *на этом промежутке* в единственный ряд (3.19) только по косинусам.

Равенство в концах $x=0$ и $x=\pi$ сохраняется.

Аналогично, если продолжить функцию $f(x)$ на интервал $[-\pi,0)$ нечётным образом (рис. 3.9), то получим, что $f(x)$ *на интервале* $0<x<\pi$ *можно* *разложить в единственный ряд* (3.20) *только по синусам*. В концах $x=0$ и $x=\pi$ равенство, вообще говоря, нарушается – в них сумма ряда (3.20) равна нулю. Для справедливости равенства в этих концах надо потребовать: $f(0)=f(\pi)=0$.

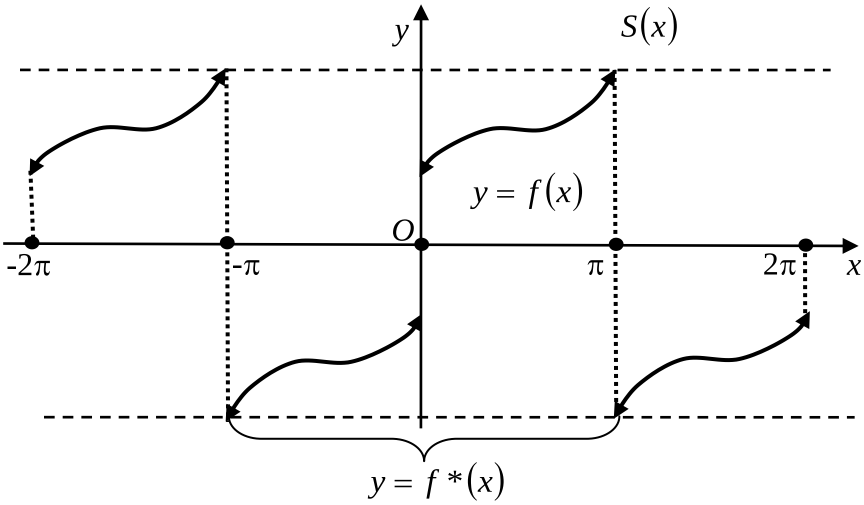

Рис. 3.9

<u>Пример 5</u>. Функцию $f(x)=x$ на промежутке $0\le x\le\pi$ разложить в ряд Фурье по косинусам. Продолжая её на $[-\pi,0)$ чётным образом, получим функцию $|x|$, поэтому (см. пример 3) имеем разложение (3.21), но равенство справедливо лишь на промежутке $0\le x\le\pi$:

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},\ 0\le x\le\pi.$$

В концах $x=0$ и $x=\pi$ равенство сохраняется, и при этом снова получим равенство (3.18).

<u>Упражнение</u>. Функцию $f(x)=x$ в интервале $0<x<\pi$ разложить в ряд по синусам.

<u>Пример 6</u>. Функцию $f(x)\equiv 1$ на интервале $0<x<\pi$ разложить в ряд синусов. Продолжив эту функцию на $(-\pi,0)$ нечётным образом, получим функцию примера 4, откуда

$$f(x)\equiv 1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},\ 0<x<\pi.$$

Концы исключаются, в них сумма ряда равна нулю.

Вопрос: каким будет ряд по косинусам для функции $f(x)\equiv 1$ на промежутке $0\le x\le\pi$?

6. <u>Разложение в ряд Фурье периодической функции любого периода</u> $T=2l$ (<u>или функции, заданной на любом промежутке</u> $[a,b]$, $b-a=2l$).

Пусть $f(x)$ – функция произвольного периода $T=2l>0$ (удовлетворяющая, как условились ранее, условиям Дирихле или кусочно–гладкая). Сведём её к функции периода 2π. Для этого произведём замену $x=\frac{l}{\pi}t$, или $t=\frac{\pi}{l}x$, так, чтобы изменению x на $2l$ соответствовало изменение t на 2π. Имеем $f(x)=f(\frac{l}{\pi}t)\equiv\varphi(t)$ - это функция от переменной t периода 2π. Действительно: $\varphi(t+2\pi)=f(\frac{l}{\pi}(t+2\pi))=f(\frac{l}{\pi}t+2l)=f(\frac{l}{\pi}t)=\varphi(t)$. Следовательно, её можно разложить в ряд Фурье:

$$\varphi(t)\equiv f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos ntdt,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin ntdt.$$

В ряде и в интегралах вернёмся к старому переменному x по формуле $t=\frac{\pi}{l}x$; получим:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x), \tag{3.22}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=0,1,2,\ldots),\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,(n=1,2,\ldots). \tag{3.23}$$

Вывод. Функция $f(x)$ периодическая периода $2l$, или заданная только на промежутке $[-l,l]$ (и удовлетворяющая на нём условиям Дирихле или кусочно-гладкая) может быть разложена в ряд Фурье (3.22), с коэффициентами (3.23), по основной системе тригонометрических функций с общим периодом $2l$:

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ldots. \tag{3.24}$$

Эта система ортогональна на отрезке $[-l,l]$ (и вообще на любом отрезке длины $2l$: $[a,a+2l]$), причём *нормы* суть:

$$\sqrt{\lambda_0}=\|1\|=\sqrt{2l},\ \sqrt{\lambda_n}=\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}.$$

В частности, при $l=\pi$ получаем систему (3.9).

Подобно изложенному в п.4 и 5, чётная функция разлагается в ряд только по косинусам, нечётная – только по синусам, а функцию, заданную на $[0,l]$, можно разложить в ряд как по косинусам, так и по синусам. Соответственно, интегралы (3.23) сводятся к интегралам по промежутку $[0,l]$.

Аналогично, если функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b]$, $b-a=2l$, то её *на этом промежутке* можно разложить в ряд Фурье (3.22), при этом в равенствах (3.23) интегралы следует брать по $[a,b]$.

Пример 6.

Функцию $f(x)=\begin{cases}0, 0\le x<1\\ 1, 1\le x<2\end{cases}$, разложить в ряд по синусам периода $2l=4$. Продолжая её на $[-2,0)$ нечётным образом, а за пределы промежутка $[-2,2]$ периодически с периодом $2l=4$, получим сумму $S(x)$ искомого ряда. В точках разрыва, как обычно, значения суммы равны среднему арифметическому пределов $f(x-0)$ и $f(x+0)$. (Рис. 3.10). Найдём коэффициенты: $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int\limits_1^2 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=\frac{2}{n\pi}(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi)$. Таким образом,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{n\pi}{2}-(-1)^n)\sin\frac{n\pi x}{2},\ 0\le x<2,\ x\ne1.$$

Упражнение. Что даст это равенство при $x=1$?

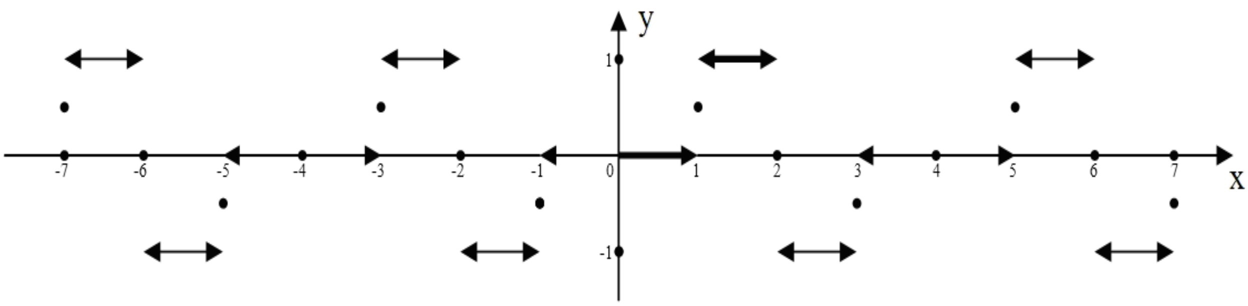

Рис. 3.10

7. Ряд Фурье в комплексной форме. Применяя формулы Эйлера

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha,$$

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},\ \left(\frac{1}{i}=-i\right),$$

преобразуем общий член ряда (3.22):

$$a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=$$

$$=a_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2}-b_n\cdot i\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2}=\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}},$$

$$c_n\equiv\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,(\cos\frac{n\pi x}{l}-i\sin\frac{n\pi x}{l})dx=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,$$

$$c_{-n} \equiv \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l})dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{i\frac{n\pi x}{l}}\,dx,$$

$$c_0 \equiv \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{i\frac{0\pi x}{l}}\,dx.$$

<u>Вывод</u>. Ряд Фурье функции $f(x)$ периодической периода $2l$ или заданной только на промежутке $[-l,l]$ можно записать в следующей комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi x}{l}},\ c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\frac{n\pi t}{l}}\,dt,\ (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots), \tag{3.25}$$

где, как обычно, $f(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. В ряде (3.25) индекс суммирования n принимает также и отрицательные значения.

<u>Упражнение</u>. Переписать (3.25)для случая $l = \pi$.

8. <u>О различии в аппроксимации (приближении) с помощью рядов Тейлора и Фурье</u>. Пусть $S_n(x)$ – многочлен Фурье (3.2), $\delta_n(x)$ – следующий за ним остаток ряда Фурье (3.13), так что

$$f(x) = S_n(x) + \delta_n(x),\ -\pi \le x \le \pi,$$

а $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ - многочлен Тейлора порядка n функции $f(x)$ и $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора (или вместо него остаток $r_n(x)$ ряда Тейлора), т.е. (см. (2.63))

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ |x-a| < R.$$

Для $f(x)$ и $T_n(x)$ *выполняются равенства* $f^{(\nu)}(a) = T_n^{(\nu)}(a)$, $\nu = 0,1,..n$ ($f(x)$ и $T_n(x)$ имеют касание порядка n в точке $x = a$) и *приближённые равенства* $f(x) \approx T_n(x)$, $f^{(\nu)}(x) \approx T_n^{(\nu)}(x)$, но только *вблизи* точки a. При удалении x от a расхождение ординат увеличивается – это хорошо видно на графике функции $y = \sin x$ и её многочленов Тейлора $T_1(x) = x$, $T_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$, $T_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ ($|\sin x| \le 1$, а $T_n(x) \to \infty$ при $x \to \pm\infty$, $n \ge 1$) (рис. 3.11).

В случае с рядами Фурье приближённое равенство $f(x) \approx S_n(x)$ имеет место на всём интервале $-\pi < x < \pi$, исключая окрестности точек разрыва функции $f(x)$. Здесь близки ординаты, однако, производные могут существенно отличаться, они могут и не существовать в каких-то точках (т.е. для производных, даже первого порядка, приближённое равенство не выполняется). Говорят: ряд Фурье (или аппроксимация с помощью ряда Фурье) имеет осциллирующий характер, а ряд Тейлора (или аппроксимация с помощью ряда Тейлора) – оскулирующий характер. (Оскулирующий – касающийся, соприкасающийся.)

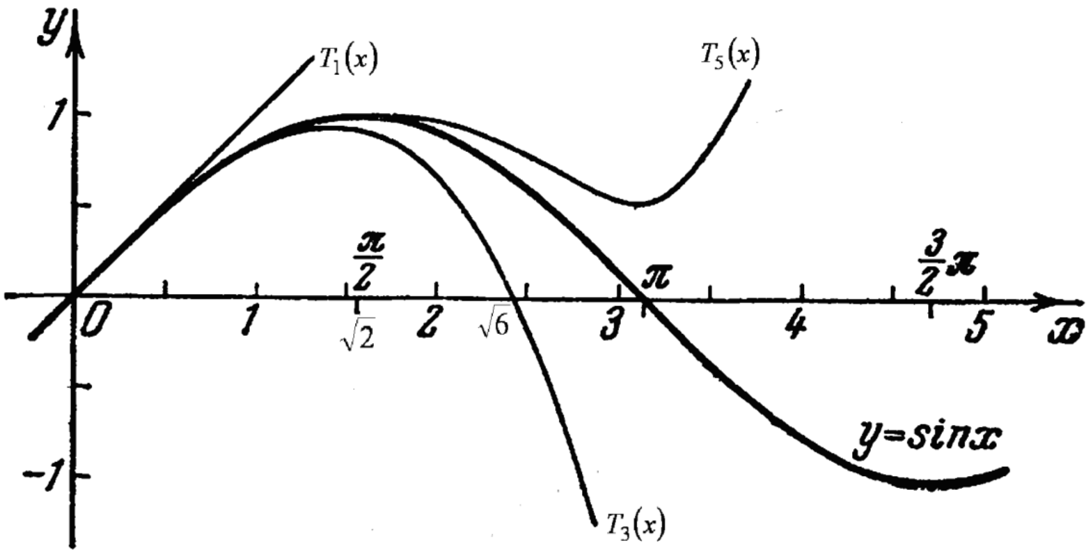

Рис. 3.11

§ 2. Сходимость рядов Фурье «в среднем». Полнота и замкнутость

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана функция $f(x)$ (она может быть определена как *кривая наблюдений* – в результате обработки табличных данных, полученных после большого числа измерений). Эту функцию требуется заменить (приблизить, аппроксимировать) другой функцией $\varphi(x)$. Как оценить *погрешность* этой замены, что брать за *меру близости* функций $f(x)$ и $\varphi(x)$? *Расстояние* между функциями, или *метрику*, можно понимать по-разному; в основу, естественно, кладётся модуль разности $|f(x)-\varphi(x)|$. Если требуется оценить отклонение одной функции от другой во всех отдельно взятых точках, то за меру близости принимают их *максимальное отклонение*

$$\rho(f,\varphi)=\max_{a\le x\le b}|f(x)-\varphi(x)| \text{ (или } \sup_{a\le x\le b}|f(x)-\varphi(x)|). \qquad (3.26)$$

Если в качестве функции $\varphi(x)$ брать члены некоторой последовательности $\{S_n(x)\}$, то $\forall\varepsilon>0$ для каждой отдельной точки $x\in[a,b]$ требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N(\varepsilon,x).$$

Номер $N(\varepsilon,x)$ зависит не только от ε, но и от точек x, и меняется вместе с ними.

Здесь имеем *локальное* (точечное) отклонение. Не всегда можно добиться, чтобы эта разность была мала сразу для всех $x\in[a,b]$, т.е. чтобы

$$\rho(f,\varphi)\equiv\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon,\ \forall n>N(\varepsilon), \tag{3.27}$$

где номер $N(\varepsilon)$ один и тот же сразу для всех $x\in[a,b]$.

Эта оценка погрешности удобна для непрерывных функций, когда оценивают «равномерную» близость функций во всех точках. Если функция $f(x)$ разрывна хотя бы в одной точке (а функция $\varphi(x)=S_n(x)$ непрерывна на всём промежутке), то такая оценка может оказаться невозможной (см рис. 3.12). Поэтому часто оперируют со «средними значениями». Важно знать, насколько мало отличаются функции «в среднем» на всём промежутке $[a,b]$, т.е. оценить площадь между кривыми, именно, величину интеграла

$$\int_a^b\left|f(x)-\varphi(x)\right|dx\ .$$

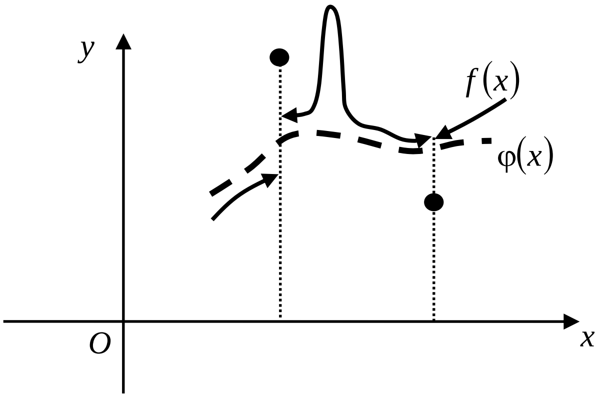

Рис. 3.12

Однако с модулем трудно оперировать, поэтому удобнее рассматривать более простую величину – *квадратичное уклонение* (или *флюктуацию*)[3]:

$$\rho^2(f,\varphi)\equiv\|f-\varphi\|^2=\int_a^b(f(x)-\varphi(x))^2\,dx. \tag{3.28}$$

На ошибках вида (3.28) не сказываются случайные «всплески» и разрывы функции $f(x)$, в то время как для величины (3.26) существен вклад каждой отдельной точки x.

Величину (3.28) в свою очередь усредняют, рассматривают *среднее квадратичное отклонение* функции $f(x)$ от функции $\varphi(x)$ на промежутке $[a,b]$ (или: *среднеарифметическое*):

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b(f(x)-\varphi(x))^2dx}\,. \tag{3.29}$$

[3] Такую меру близости (ошибка, погрешность) ввёл Гаусс в своей книге «Метод наименьших квадратов».

Изучим сходимость рядов в смысле метрики (3.28), т.е. сходимость «в среднем». При этом можно значительно расширить класс рассматриваемых функций $f(x)$.

Определение 9. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой с квадратом* на отрезке $[a,b]$, если существует интеграл $\int_a^b f^2(x)dx$ (он может быть и несобственным).

Совокупность (класс, пространство, множество) $\{f(x)\}$ всех таких функций обозначается $L_2[a,b]$ или L_2, и пишут $f(x) \in L_2$. Говорят: (3.28) есть метрика в L_2, а (3.27) – метрика Чебышёва, или метрика в пространстве $\mathbf{C}[a,b]$ непрерывных функций.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы с квадратом, то абсолютно сходится интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ и в частности интеграл $\int_a^b f(x)dx$ (при $g(x) \equiv 1$). Действительно, из неравенства $(f-g)^2 \geq 0$ имеем $|f \cdot g| \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)$. Следовательно, интегрируемые с квадратом функции также и абсолютно интегрируемы. Очевидно, что если функция удовлетворяет условиям Дирихле или кусочно-гладкая (или вообще ограничена и интегрируема), то она тем более интегрируема с квадратом. Однако неограниченная интегрируемая функция может и не быть интегрируемой с квадратом, например, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \in L_2[0;1]$, а $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L_2[0;1]$.

2. Минимальное свойство отрезков ряда Фурье (многочленов Фурье). Неравенство Бесселя.

Пусть дана ортогональная на промежутке $[a,b]$ система функций $\{\varphi_k(x)\}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ (см. (3.5). Будем предполагать, что функции $\varphi_k(x)$ и все рассматриваемые далее функции $f(x)$ интегрируемы с квадратом на $[a,b]$. Функции $f(x)$ поставим в соответствие её обобщённый ряд Фурье (3.8) – его коэффициенты определяются формулами (3.7).

Теорема 3.6. *Из всех многочленов вида*

$$\sigma_n(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x) \qquad (3.30)$$

наилучшее приближение «в среднем» к функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ даёт соответствующий отрезок (обобщённого) ряда Фурье функции $f(x)$, а именно – ***обобщённый многочлен Фурье***

$$S_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x). \qquad (3.31)$$

Δ Рассмотрим квадратичное уклонение $\sigma_n(x)$ от $f(x)$ на $[a,b]$:

$$\rho^2(f,\sigma_n)=\int_a^b (f(x)-\sigma_n(x))^2\,dx. \qquad (3.32)$$

Докажем, что оно будет наименьшим, когда $A_k=c_k\ (k=0,1,\dots,n)$. Преобразуем подынтегральную функцию в (3.32), используя при этом формулу для квадрата суммы чисел:

$$(f(x)-\sigma_n(x))^2 = f^2(x)-2f(x)\cdot\sigma_n(x)+\left(\sum_{k=0}^{n}A_k\varphi_k(x)\right)^2 =$$

$$= f^2(x)-2\sum_{k=0}^{n}A_k f(x)\varphi_k(x)+\left[\sum_{k=0}^{n}A_k^2\varphi_k^2(x)+2\sum_{k<m}A_kA_m\varphi_k(x)\varphi_m(x)\right].$$

Это тождество интегрируем по промежутку $[a,b]$:

$$\rho^2(f,\sigma_n)=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=0}^{n}A_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx+\sum_{k=0}^{n}A_k^2\int_a^b\varphi_k^2(x)dx+$$

$$+2\sum_{k<m}A_kA_m\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_m(x)dx.$$

Последняя сумма равна нулю в силу ортогональности функций φ_k и φ_m, и учтём, что $\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx=c_k\cdot\lambda_k$. Таким образом,

$$\rho^2(f,\sigma_n)=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=0}^{n}A_kc_k\lambda_k+\sum_{k=0}^{n}A_k^2\lambda_k.$$

Чтобы получить полные квадраты, добавим и вычтем сумму $\sum_{k=0}^{n}c_k^2\lambda_k$. Тогда

$$\rho^2(f,\sigma_n)=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n}c_k^2\lambda_k+\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(A_k-c_k)^2.$$

Отсюда видно, что $\rho^2(f,\sigma_n)$ имеет наименьшее значение, когда $A_k=c_k$. ▲ (Применённый метод отыскания, в данном случае среди функций $\sigma_n(x)$, лучшей функции (это $S_n(x)$) часто называют «методом наименьших квадратов».)

Замечание 1. Мы доказали, что коэффициенты Фурье – «лучшие из всех возможных». При этом важно, что с увеличением *n* эти лучшие коэффициенты не меняются, только к ним добавляются новые коэффициенты Фурье. Такой факт очень важен для практики. В силу отмеченного говорят: из ортогональности системы $\{\varphi_k(x)\}$ вытекает *окончательная определённость коэффициентов Фурье*.

Замечание 2. Было доказано, что

$$\delta_n\equiv\min_{A_k}\rho^2(f,\sigma_n)=\rho^2(f,S_n)\equiv\int_a^b(f(x)-S_n(x))^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n}c_k^2\lambda_k. \qquad (3.33)$$

Равенство

$$\int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \lambda_k \qquad (3.33')$$

называется *тождеством Бесселя*.[4]

Так как $\delta_n \geq 0$, то из (3.33) получаем неравенство $\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \lambda_k \leq \int_a^b f^2(x)dx$. Оно выполняется для любых *n*, а поскольку $\lambda_k c_k^2 \geq 0$, то с увеличением *n* эта сумма растёт, а значит, последовательность $\{\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \lambda_k\}$ возрастает, кроме того, она ограничена, поэтому получающийся при $n \to \infty$ ряд сходится, причём,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \leq \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (3.34)$$

Это есть *неравенство Бесселя*. Из сходимости ряда (3.34) следует, что $\lambda_k c_k^2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Из тождества (3.33) видно, что с увеличением *n* отклонение δ_n убывает, т.е. последовательность $S_n(x)$ «в среднем» всё лучше приближается к $f(x)$. Возникает вопрос: не будет ли $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$?

Определение 10. Последовательность $\{S_n(x)\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ называется *сходящейся в среднем* к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если квадратичное уклонение $S_n(x)$ от $f(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0. \qquad (3.35)$$

Ряд называется *сходящимся в среднем* к $f(x)$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится в среднем к этой функции $f(x)$.

Сходимость в среднем не обязательно влечёт за собой сходимость в каждой точке к той же функции и наоборот. Убедимся в этом на примерах.

Примеры. 1) Последовательность $F_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1+(nx)^2}}$ сходится в среднем к нулю на отрезке $[-1,1]$, ибо

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (F_n(x) - 0)^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(nx)^2} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} nx \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Однако поточечная сходимость к нулю *на всём промежутке* $[-1,1]$ отсутствует, т.к. $F_n(0) = 1$.

---

[4] Фридрих Вильгельм Бессель (1784-1846) – немецкий математик и астроном, ученик К.Ф. Гаусса.

2) Последовательность $F_n(x)=n\sqrt{nxe^{-nx}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ в каждой точке x отрезка $[0,1]$, однако не сходится в среднем к нулю, т.к.

$$\rho^2(F_n,0)=\int_0^1 n^3xe^{-nx}dx\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty.$$

Это легко проверить, проинтегрировав интеграл по частям. (Оказывается, $F_n(x)$ не сходится в среднем ни к какой функции).

3) Последовательность $F_n(x)=\sqrt[4]{n}\cdot e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}$ сходится в среднем к нулю на отрезке $[-1,1]$: $\rho^2(F_n,0)=\sqrt{n}\int_{-1}^{1}e^{-n^2x^2}dx<\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-n^2x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, но $F_n(0)=\sqrt[4]{n}\to\infty$, т.е. поточечной сходимости *на всём промежутке* нет. Более того, последовательность $\{F_n(x)\}$ может сходиться в среднем на отрезке и расходиться в каждой его точке, см. [12, с. 115].

Определение 11. Ортогональная на промежутке $[a,b]$ система (3.5) называется *полной в классе* $L_2[a,b]$ (полной в среднем), если ряд Фурье (3.8) функции $f(x)$ сходится в среднем к этой функции, т.е. $\rho^2(f,S_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Говорят также, что в таком случае система (3.5) образует *базис* в пространстве L_2.

Из тождества Бесселя (3.33) непосредственно следует

Теорема 3.7. *Сходимость в среднем ряда Фурье* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ *к породившей его функции* $f(x)$ *равносильна выполнению для* $f(x)$ *равенства*

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\lambda_k=\int_a^b f^2(x)dx. \tag{3.36}$$

Равенство (3.36) называется обобщённым тождеством (равенством) Парсеваля (Парсеваля-Ляпунова), или *уравнением замкнутости*, или *критерием полноты*.

Определение 12. Ортогональная на промежутке $[a,b]$ система (3.5) называется *замкнутой*, если *для любой функции* $f(x)\in L_2[a,b]$ выполняется уравнение замкнутости (3.36).

Замечание. По теореме 3.7 *понятия полноты и замкнутости равносильны*. Происхождение этих терминов можно объяснить следующим. Допустим система (3.5) замкнута (полна). Выбросим из неё хотя бы одну функцию, пусть $\varphi_m(x)$, и возьмём функцию $f(x)$, для которой $c_m\neq 0$, например, $f(x)=\varphi_m(x)$. Тогда равенство (3.36) нарушится, т.е. оставшаяся система не будет замкнутой (полной). И наоборот, нельзя и добавлять: не существует других функций $\varphi(x)$, таких, что $\|\varphi\|^2=\int_a^b\varphi^2(x)dx>0$, ортогональных ко всем функциям

$\varphi_k(x)\,(k=0,1,2,\ldots)$ полной системы.[5]

Вопрос о полноте – очень сложный, тонкий, и может быть решён только для конкретных систем функций. Рассмотрим его для тригонометрической системы.

3. Квадратичное приближение тригонометрическими многочленами. Свойства коэффициентов Фурье.

Всё выше изложенное перенесём на тригонометрическую систему (3.9):

$$1, \cos x, \sin x,\ \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots. \tag{3.37}$$

Она ортогональна на любом промежутке $[a, a+2\pi]$ длины $T=2\pi$ (в частности, на $[-\pi,\pi]$), при этом $\lambda_0 = 2\pi$, $\lambda_k = \pi$, $k=0,1,2,\ldots$.

Пусть функция $f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$. Для неё существуют коэффициенты Фурье (3.10), и ей поставим в соответствие её ряд Фурье (3.1):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{3.38}$$

Для системы (3.37) теорема 3.6 принимает вид:

Теорема 3.8. *Из всех тригонометрических многочленов порядка* n:

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

наилучшее приближение «в среднем» к функции $f(x)$, *т.е. наименьшее значение величине*

$$\rho^2(f,\sigma_n) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_n(x))^2\, dx,$$

доставляет соответствующий многочлен Фурье (3.2) функции $f(x)$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{3.37$'$}$$

Это наименьшее значение есть

$$\delta_n \equiv \min_{\alpha_k,\beta_k} \rho^2(f,\sigma_n) = \rho^2(f,S_n) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right\}. \tag{3.39}$$

Последнее равенство в (3.39) – это *тождество Бесселя для тригонометрической системы*. Из него вытекает *неравенство Бесселя*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{3.40}$$

Отсюда следует

---

[5] Особенно много общей теорией замкнутости ортогональных систем функций и её приложениями занимался первый вице-президент АН СССР академик Владимир Андреевич Стеклов (1863-1926). Он ввёл термин «уравнение замкнутости». Его именем назван Математический институт РАН в Москве.

Теорема 3.9. 1) *Коэффициенты Фурье всякой функции* $f(x)\in L_2[-\pi,\pi]$ *стремятся к нулю при* $n\to\infty$*:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=0,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=0. \quad (3.41)$$

2) Ряды $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n}$ *и* $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n}$ *сходятся абсолютно.*

Δ 1) Так как ряд в (3.40) сходится, то общий член $a_k^2+b_k^2\to 0$ при $k\to\infty$, отсюда $a_k\to 0$ и $b_k\to 0$.

2) Из сходимости ряда (3.40) следует сходимость обоих рядов $\sum_1^\infty a_k^2$ и $\sum_1^\infty b_k^2$. Применим неравенство $AB\le\frac{1}{2}(A^2+B^2)$, где положим $A=|a_n|$, $B=\frac{1}{n}$. Тогда $\frac{|a_n|}{n}\le\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$, а ряды $\sum_1^\infty a_n^2$ и $\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}$ сходятся, поэтому сходится абсолютно и ряд $\sum_1^\infty\frac{a_n}{n}$. Аналогично, сходится абсолютно ряд $\sum_1^\infty\frac{b_n}{n}$. ▲

(Заметим, что в (3.41) знак предела внести под знак интеграла нельзя.)

Упражнение. Доказать равенства (3.41) непосредственно с помощью интегрирования по частям, при условии, что функция $f(x)$ гладкая.

4. Порядок коэффициентов Фурье.

Теорема 3.10 (о связи скорости сходимости ряда Фурье со степенью гладкости функции_ $f(x)$). *Если непрерывная в промежутке* $[-\pi,\pi]$ *функция* $f(x)$ *имеет в нём производные* $f'(x),....,\ f^{(p-1)}(x)$, *причём, их значения в концах совпадают:*

$$f(-\pi)=f(\pi),\ f'(-\pi)=f'(\pi),\ldots,f^{(p-1)}(-\pi)=f^{(p-1)}(\pi), \qquad (3.42)$$

а производная $f^{(p)}(x)$ *интегрируема с квадратом, то коэффициенты Фурье* a_n *и* b_n *функции* $f(x)$ *при* $n\to\infty$ *суть бесконечно малые выше p-ого порядка относительно* $\frac{1}{n}$, *т.е.*

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}=n^p\cdot a_n\to 0,\frac{b_n}{\frac{1}{n^p}}=n^p\cdot b_n\to 0. \qquad (3.43)$$

(Равенства (3.42) в концах обеспечивают непрерывность производных и при периодическом продолжении функции $f(x)$ на всю ось.)

Δ Обозначим $a_n^{(\nu)}$ и $b_n^{(\nu)}$ коэффициенты производной $f^{(\nu)}(x)$ и проинтегрируем по частям интегралы, определяющие коэффициенты a_n и b_n (учитывая при этом равенства (3.42)):

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\frac{f(x)\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx dx=-\frac{b_n'}{n},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=-\frac{1}{\pi}\frac{f(x)\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx dx=\frac{a_n'}{n}.$$

Применим эти равенства к a_n' и b_n'; тогда $a_n'=-\frac{b_n''}{n}$, $b_n'=\frac{a_n''}{n}$, так что $a_n=-\frac{a_n''}{n^2}$, $b_n=-\frac{b_n''}{n^2}$. Продолжая таким образом далее p раз, получим, что a_n и b_n равны либо $\pm\frac{a_n^{(p)}}{n^p}$, либо $\pm\frac{b_n^{(p)}}{n^p}$. Но т.к. $f^{(p)}(x)\in L_2$, то по теореме 3.9 коэффициенты $a_n^{(p)}$ и $b_n^{(p)}\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда и следует утверждение (3.43). ▲

Дополнительно отметим, что если $f^{(p)}(x)$ имеет хотя бы одну точку неустранимого разрыва или $f^{(p)}(-\pi)\neq f^{(p)}(\pi)$, то $|a_n|+|b_n|\neq o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

5. Полнота (и замкнутость) тригонометрической системы функций.

Теорема 3.11 (о равномерной сходимости ряда Фурье). *Если* ***непрерывная*** *и* ***кусочно-гладкая*** *на промежутке* $[-\pi,\pi]$ *функция* $f(x)$ *имеет равные значения в концах:* $f(-\pi)=f(\pi)$, *то её ряд Фурье сходится равномерно, причём к* $f(x)$, *на всём промежутке* $[-\pi,\pi]$.

Δ По теореме 3.4 ряд Фурье (3.38), составленный для функции $f(x)$, сходится к самой $f(x)$ (т.к. в силу условия $f(-\pi)=f(\pi)$ её периодическое продолжение на всю ось даёт непрерывную функцию). Поскольку $a_n=-\frac{b_n'}{n}$, $b_n=\frac{a_n'}{n}$, а ряды $\sum_1^{\infty}\frac{|b_n'|}{n}$ и $\sum_1^{\infty}\frac{|a_n'|}{n}$ сходятся по теореме 3.9, тогда сходится и ряд $\sum_1^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$. Однако для всех x имеем $|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (3.38) сходится равномерно. ▲

Из равномерной сходимости какой-либо последовательности $S_n(x)$ *к функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a,b]$ *непосредственно следует и сходимость её в среднем к той же функции*. Убедимся в этом: т.к. по условию неравенство (3.27) выполняется для всех $x\in[a,b]$, то $\forall n>N(\varepsilon)$

$$\rho^2(f,S_n)=\int_a^b(f(x)-S_n(x))^2dx<\int_a^b\varepsilon^2dx=\varepsilon^2(b-a)\equiv\varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1>0$ может быть сколь угодно малым, вместе с ε. Это и означает, что последовательность сходится в среднем к $f(x)$. Поэтому при условиях теоремы

3.11 ряд Фурье (теперь $S_n(x)$ - многочлен Фурье) тем более сходится в среднем к $f(x)$. Однако справедлива более общая, можно сказать центральная для изучаемых ситуаций

Теорема Парсеваля – Ляпунова. (Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций). *Для всякой функции $f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$ её ряд Фурье сходится к ней в среднем, т.е. система тригонометрических функций (3.37) полна (а следовательно, и замкнута) в классе функций $L_2[-\pi,\pi]$, так что справедливо* ***равенство Парсеваля***

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \qquad (3.44)$$

(Без доказательства.)

В силу этой теоремы можно доказать, что справедлива

Теорема 3.12 (о почленном интегрировании ряда Фурье). *Для всякой функции $f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$ её ряд Фурье (3.38) можно почленно интегрировать по любому промежутку $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$, независимо от того, сходится ли этот ряд поточечно или нет. Сумма получающегося ряда будет равна $\int_a^b f(x)dx$. При этом для функции $\int_0^x f(t)dt$ полученный ряд также будет её рядом Фурье, если $a_0 = 0$.*

В случае равномерной сходимости (как это имеет место при условиях теоремы 3.11) теорема очевидна (см. теорему 2.11).

Замечание. В конце пункта 2 обсуждался термин «полнота». «Правда, для такой закономерно построенной системы, как система тригонометрических функций, никому не пришла бы в голову мысль нарушить её естественную закономерность. Однако в общих случаях подобная точка зрения математической эстетики не является обязательной.» [13, с. 15]

Пример. $f(x) = \{1,\ \text{если } |x| \le \alpha; 0, \text{если } \alpha < |x| \le \pi\}$.Запишем для этой функции равенство Парсеваля (3.44). Функция чётная, значит $b_n = 0$. Вычисляем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} 1\cdot dx = \frac{2\alpha}{\pi},\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} 1\cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\alpha} = \frac{2}{\pi n}\sin n\alpha;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 2\int_0^{\alpha} 1\cdot dx = 2\alpha.$$

Равенство (3.44) примет вид:

$\dfrac{2\alpha^2}{\pi^2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sin n\alpha)^2}{n^2}=\dfrac{1}{\pi}\cdot 2\alpha$; отсюда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\dfrac{\alpha}{2}(\pi-\alpha)$; полагая $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, получаем $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$ (см. также (3.18)).

§ 3. Интеграл Фурье

1. Пусть функция $f(x)$ определена на всей оси $(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условиям Дирихле (или кусочно-гладкая) на любом конечном промежутке $[-l,l]$. Как обычно полагаем

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Тогда справедливо разложение (3.22). Подставляя в него значения (3.23), получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,[\cos\frac{n\pi t}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{n\pi t}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}]dt,$$

так что ряд Фурье запишется в виде

$$f(x)\ =\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,\cos\left(\frac{n\pi}{l}(t-x)\right)dt. \qquad (3.45)$$

Пусть $l\to\infty$. Тогда этот ряд преобразуется в *интеграл Фурье*. Проследим это формально, эвристически. Предположим, что сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$, понимаемый в смысле главного значения Коши. Получим $a_0=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\,dt\to 0$ при $l\to\infty$.

Обозначим $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{l}(n=1,2,\ldots)$ и эти числа будем рассматривать как дискретные значения некоторой переменной α, непрерывно изменяющейся в интервале $(0,+\infty)$. Приращение величины α на интервале $[\alpha_n,\alpha_{n+1}]$ есть $\Delta\alpha_n=\alpha_{n+1}-\alpha_n=\dfrac{\pi}{l}$, $\Delta\alpha_n\xrightarrow[l\to\infty]{}0$. Учитывая, что $\dfrac{1}{l}=\dfrac{\Delta\alpha_n}{\pi}$, перепишем ряд (3.45) в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha_n\int_{-l}^{l}f(t)\,\cos\alpha_n(t-x)dt=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}F(\alpha_n)\Delta\alpha_n\,.$$

Эта сумма по форме напоминает интегральную сумму функции $F(\alpha)$, определяемой присутствующим здесь интегралом при замене в нём α_n на α. Поэтому естественно ожидать, что ряд (3.45) в пределе при $l\to\infty$ перейдёт в интегральную формулу

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt,\ -\infty<x<\infty. \qquad (3.46)$$

Теорема 3.13. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на всей оси* $(-\infty,\infty)$, *абсолютно интегрируема, т.е.* $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$, *и удовлетворяет условиям Дирихле (или кусочно-гладкая) на любом конечном промежутке. Тогда эта функция может быть представлена интегралом Фурье, или, как говорят, «разложена» в интеграл Фурье (3.46).* (Без доказательства).

Замечание 1. Указанные в теореме 3.13 условия являются лишь достаточными: функция может быть представлена интегралом (3.46) и при других условиях.

Если раскрыть $\cos\alpha(t-x)$ по формуле для косинуса разности, то интеграл (3.46) перепишется в виде

$$f(x)=\int_0^{\infty}[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha,\ -\infty<x<+\infty, \qquad (3.47)$$

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\ b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt. \qquad (3.48)$$

Можно сказать, что интеграл Фурье есть непрерывный аналог ряда Фурье.[6]

2. Интеграл Фурье для чётных и нечётных функций и для функций, заданных на промежутке $[0,+\infty)$.

1) Пусть $f(x)$ – чётная функция, тогда $b(\alpha)=0$, и она (как это следует из (3.47) и (3.48), разлагается в интеграл Фурье, содержащий лишь косинусы:

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\alpha)\cos\alpha x d\alpha,\ a(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt, \qquad (3.49)$$

или

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\{\cos\alpha x\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\}d\alpha,\ -\infty<x<+\infty. \qquad (3.50)$$

2) Аналогично, нечётная функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье, содержащий лишь синусы:

$$f(x)=\int_0^{\infty}b(\alpha)\sin\alpha x d\alpha,\ b(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt, \qquad (3.51)$$

---

[6] Если ряд Фурье (3.22) определяет колебательный процесс, то говорят, что набор частот $\left\{\frac{n}{2l}\right\}$ $(n=1,2,...)$ образует дискретный спектр, первая гармоника $(n=1)$ даёт *основной тон*, а другие $(n\geq 2)$ - *обертоны*; в результате их наложения получаем *тембр*. В случае интеграла Фурье говорят о *непрерывном спектре*, который распространён на все частоты: от $\alpha=0$ до $\alpha=\infty$.

или

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\{\sin\alpha x\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\}d\alpha\,,\ -\infty<x<+\infty. \qquad (3.52)$$

3) Если функция $f(x)$ задана только на промежутке $0\le x<+\infty$, то доопределяя её на интервале $(-\infty,0)$ чётным или нечётным образом, обнаружим, что эту функцию *на промежутке* $0\le x<+\infty$ можно представить как интегралом (3.50), так и интегралом (3.52).

3. Преобразования Фурье. Пусть функция $f(x)$ определена при $x\ge 0$. Запишем для неё формулы (3.50) и (3.52). Представляя $\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, можем переписать эти выражения в симметричной форме

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha \\ F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t dt \end{array}\right|, \qquad (3.53)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\alpha)\sin\alpha x d\alpha \\ F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t dt \end{array}\right|. \qquad (3.54)$$

Здесь $0\le x<+\infty$, $0\le\alpha<+\infty$. Функция $F_c(\alpha)$ называется *косинус-преобразованием*, а $F_s(\alpha)$ – *синус-преобразованием* Фурье функции $f(x)$ (это – *формулы обращения*). Из симметрии этих формул следует, что функция $f(x)$ является косинус-преобразованием для $F_c(\alpha)$ и синус-преобразованием для $F_s(\alpha)$. Каждое из равенств (3.53) и (3.54) можно рассматривать как интегральное уравнение, в котором искомая функция находится под знаком интеграла. Решение даётся другим равенством.

4. Вычисление интегралов при помощи формул обращения.
Пусть $f(x)=e^{-ax}$, $a>0$, $x\ge 0$. Эта функция абсолютно интегрируема на $[0,+\infty)$.

1) Её косинус-преобразование есть $F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-at}\cos\alpha t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\alpha^2}$.

В силу симметрии формул (3.53), находим $e^{-ax}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\alpha^2}\cos\alpha x d\alpha$, откуда $\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2a}e^{-ax}$, $x\ge 0$.

2) Найдём синус-преобразование $F_s(\alpha)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-at}\sin\alpha t dt=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\alpha}{a^2+\alpha^2}$, и наоборот: $e^{-ax}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\alpha}{a^2+\alpha^2}\sin\alpha x d\alpha$, откуда $\int\limits_0^\infty\dfrac{\alpha\sin\alpha x}{a^2+\alpha^2}d\alpha=\dfrac{\pi}{2}e^{-ax}$, $x>0$.

5. Интеграл Фурье в комплексной форме. Рассмотрим интеграл Фурье (3.46). Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt$ есть чётная функция от α, то можем переписать

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt.$$

С другой стороны

$$0=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)dt,$$

– т.к. внутренний интеграл (понимаемый хотя бы в смысле главного значения) есть нечётная функция от α. Складывая эти формулы, получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\alpha(t-x)}dt,\ -\infty<x<+\infty, \tag{3.55}$$

– это есть *интеграл Фурье в комплексной форме*. Его можно переписать в симметричной форме, учитывая, что $2\pi=\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}$. Именно, обозначим

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}dt,\ -\infty<\alpha<+\infty, \tag{3.56}$$

тогда

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha,-\infty<x<+\infty. \tag{3.57}$$

Каждая из этих функций называется *преобразованием* или *трансформантой* Фурье по отношению к другой функции.

Примеры. 1) Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}1,|x|<1\\0,|x|>1\end{cases}$.

Функция чётная; применим формулы (3.49):

$$a(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 1\cdot\cos\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha t\Big|_0^1=\frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha,\ \text{если}\ \alpha\neq 0.$$

Отметим, что функция $a(\alpha)$, как интеграл, зависящий от параметра, непрерывна для всех значений α, и потому её значение в точке $\alpha=0$, а именно $a(0)=\dfrac{2}{\pi}$, можно восстановить с помощью предела

$$a(0)=\lim_{\alpha\to 0}a(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{2}{\pi}.$$

По первой из формул (3.49) находим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\cos\alpha x\,d\alpha,\ x\neq\pm 1. \tag{3.58}$$

Равенство сохранится и в точках разрыва $x=\pm 1$, если доопределить $f(\pm 1)=\dfrac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=\dfrac{1}{2}$ – так будет найден интеграл (3.58) и при значениях $x=\pm 1$. При $x=0$ получаем знакомый интеграл $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. Это же даёт равенство (3.58) при $x=1$ и $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

2) Показать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является своим синус-преобразованием Фурье. В соответствии с (3.54), надо установить равенство:

$$A\equiv\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha}}d\alpha=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Для этого в интеграле A произведём замену переменной интегрирования: $\alpha x=z, d\alpha=\dfrac{1}{x}dz$, а затем $z=y^2, dz=2ydy$. Получим

$$A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}2\int_0^{\infty}\sin y^2dy=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

т.к. известно, что $\int_0^{\infty}\sin y^2dy=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (см. § 1.4, п.3 – интегралы Френеля). Хотя функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ не интегрируема на интервале $(0,+\infty)$, однако присутствующие здесь интегралы сходятся и функция $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ интегралом Фурье представима (сравнить с Замечанием 1).

Замечание 2. Если с помощью рядов Фурье удаётся суммировать ряды, то интеграл Фурье позволяет вычислять интегралы (обычно несобственные), когда соответствующие неопределённые интегралы являются «неберущимися». Задачу о представлении функции $f(x)$ интегралом Фурье можно сформулировать так: «используя преобразования Фурье, вычислить заданный интеграл». Например, интеграл (3.58) (правая часть) равен 1, если $|x|<1$; равен нулю, если $|x|>1$; равен $\dfrac{1}{2}$, если $x=\pm 1$.

Замечание 3. Общие положения рядов Фурье и интеграла Фурье, разбор разнообразных примеров содержатся в учебно-методическом пособии [9].

Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 20-е, стереотипное. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985. – 384 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Часть 2. М., ГИТТЛ, 1959. – 358 с.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука. ГРФМЛ, 1965. – 608 с.
4. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М., Физматлит, 2002. – 464 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М, Наука, ГРФМЛ, 1970. – 420 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 560 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. Изд-е 21-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 656 с.
8. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного. Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2013. – 310 с.
9. Солдатов М.А., Круглова С.С., Левина Т.М. Интеграл Фурье. Ряды Фурье: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет, 2011. – 59 с.
10. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.2. Издание 2-е, стереотипное. – М., Наука. ГРФМЛ, 1974. – 472 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. СПб., Лань, 2005. – 464 с.
12. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. Том 2. Издание 3-е, перераб. – М.-Л., ГИТТЛ, 1957. – 498 с.
13. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950. – 456 с.