

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского

**Е.З. Грибова**

**ВОЛНЫ  
В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом радиофизического факультета  
для аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки  
03.06.01 - «Физика и астрономия»,  
и магистрантов, обучающихся по направлениям подготовки  
02.04.02 - «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,  
03.04.03 - «Радиофизика»

Нижегород  
2019

УДК 530.13+530.162  
ББК 22.336  
Г-82

Рецензенты:

зав. каф. РРВ и РА ННГУ, проф. **В.Г. Гавриленко**  
д.ф.-м.н., зав. лаб. акустики гетерогенных сред ИПФ РАН **А.В. Лебедев**

Г-82 Грибова Е.З. ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ:  
Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. –  
97 с.

В пособии рассматриваются физические закономерности распространения волн различной природы в случайно-неоднородных средах. Изложены основные методы теории распространения волн в подобных средах, приводятся примеры применения изложенных методов к вычислению статистических характеристик волновых полей.

Для аспирантов и магистрантов радиофизического факультета ННГУ, изучающих теорию волновых процессов в различных средах.

Ответственный за выпуск:

председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,  
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**

УДК 530.13+530.162  
ББК 22.336

©Е.З. Грибова, 2019  
© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2019

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Основные понятия теории случайных полей.....</b>	<b>11</b>
<b>Глава 2. Микроструктура турбулентности атмосферы.....</b>	<b>15</b>
<b>Глава 3. Классические методы теории распространения оптических волн в случайно-неоднородных средах.....</b>	<b>21</b>
3.1. Уравнение распространения волн в случайно-неоднородных средах.....	21
3.2. Метод малых возмущений.....	22
3.2.1. Первое (Борновское) приближение.....	22
3.2.2. Пределы применимости метода.....	24
3.2.3. Вычисление средней интенсивности рассеянного поля.....	25
3.3. Рассеяние на крупномасштабных неоднородностях.....	29
3.3.1. Метод плавных возмущений.....	31
3.3.2. Пределы применимости МПВ.....	33
3.3.3. Флуктуации уровня и фазы плоской волны (вычисление в рамках МПВ).....	34
3.3.4. Метод параболического уравнения.....	38
3.3.5. Применение параболического уравнения к моделированию среды методом фазовых экранов.....	38
<b>Глава 4. Понятие о марковском приближении. Уравнения для статистических моментов поля.....</b>	<b>44</b>
4.1. Уравнение для среднего поля.....	44
4.2. Уравнения для высших статистических моментов.....	46
4.3. Применение функции взаимной когерентности к анализу распространения излучения в турбулентной атмосфере.....	48
4.4. Оптические методы измерения структурной характеристики показателя преломления в турбулентной атмосфере.....	54
<b>Глава 5. Дифракция случайных полей в простейших оптических системах.....</b>	<b>59</b>
<b>Глава 6. Современные методы анализа волновых полей.....</b>	<b>65</b>
6.1. Метод геометрической оптики: классический подход и современные модификации.....	65
6.2. Условия применимости метода ГО.....	67
6.3. Вероятностное описание распределения интенсивности в случайной среде.....	68
6.3.1. Геометрооптические и механические аналогии.....	68
6.3.2. Связь эйлеровой и лагранжевой статистик.....	69
6.3.3. Пример: статистика углов прихода волны.....	71
6.3.4. Статистические свойства интенсивности волны.....	74
6.4. Корреляционные свойства флуктуаций интенсивности.....	75
6.4.1. Флуктуации плотности гидродинамического потока частиц.....	75
6.4.2. Дифракционное сглаживание каустических особенностей в поле интенсивности волны.....	80
6.4.3. Флуктуации интенсивности в турбулентной атмосфере.....	88

6.5. Распространение волн в статистически анизотропной среде.....	89
6.5.1. Уравнение для среднего поля.....	89
6.5.2. Анализ ракурсной чувствительности.....	92
<b>Список литературы.....</b>	<b>96</b>

## Введение

Анализ волновых процессов – одна из наиболее важных проблем не только радиофизики, но и оптики и акустики. Волны могут случайно излучаться, распространяться в случайной среде; могут возникать случайные помехи и в самом приемнике. Мы остановимся только на одной стороне всех этих проблем, а именно на распространении излучения в случайно-неоднородных средах.

С одной стороны, знание закономерностей распространения волн в случайной среде позволяет использовать их для изучения свойств различных сред. Этот принцип реализуется в большинстве радиофизических методов исследования океана, земной коры, атмосферы, ионосферы, околосолнечной и космической плазмы, в метеорологии. В частности, если говорить об ионосфере, основным источником информации о ее структуре является изучение свойств электромагнитного поля, регистрируемого на Земле. С другой стороны, развитие современных систем дальней связи, зондирования и локации атмосферы и океана, систем наведения в военной технике (вспомним лазерный оптический прицел) привело к тому, что искажения волн при их распространении стали одной из существенных причин, ограничивающих технические характеристики таких систем.

Видимо первым, кто обратил внимание на то, что атмосфера, через которую проходит свет от звезд, находится в непрерывном случайном движении, был Ньютон. Его наблюдения верны абсолютно: дело в том, что атмосфера всегда находится в движении. Воздух нагревается от Земли, существует конвекция, а из-за ветра – еще и адвекция в атмосфере. Поэтому атмосфера всегда турбулентна. Этот вывод достаточно легко получить, оценив число Рейнольдса. Очевидно, что такие случайно расположенные неоднородности действуют как линзы, и эффект может быть самым, на первый взгляд, неожиданным. Но современная теория распространения волн в случайных средах начала формироваться только на рубеже 40-х – 50-х годов XX века. Огромная практическая значимость теории распространения волн в случайной среде стимулировала быстрое развитие теоретических и экспериментальных исследований в этой области. Примечательно, что наиболее признаны во всем мире теоретические работы именно советских авторов – до сих пор на Западе принято ссылаться на монографии Л.А. Чернова «Волны в случайно-неоднородных средах» (1975) и В.И. Татарского «Распространение волн в турбулентной атмосфере» (1957 г.).

Задачи, рассматриваемые этой теорией, очень разнообразны. Они охватывают множество физических объектов и часто носят подчеркнуто прикладной характер. При первоначальном ознакомлении с ними может сложиться впечатление, что это множество различных задач. Это впечатление усиливается еще и тем, что при решении этих задач используется множество разных методов и приближений. Однако в действительности, если классифицировать статистические проблемы по их физической постановке, а не по математическим методам и не по их принадлежности к традиционным разделам физики (оптика,

акустика, радиофизика и т.д.), то картина окажется уже не такой пестрой. Поэтому, несмотря на специфику волновых процессов в различных областях физики, методы решения задач о распространении излучения в случайно-неоднородной среде во многих случаях оказываются аналогичными.

Круг задач, относящихся к данному вопросу, огромен. И к настоящему времени накоплено большое число результатов исследований волн различной природы в различных случайных средах. Они опубликованы в многочисленных монографиях и обзорах.

Попробуем более конкретно очертить тот круг задач, которыми мы собираемся заниматься. Для этого сначала постараемся классифицировать статистические явления вообще. Естественно начать при этом с напоминания о *динамических* задачах в теории дифракции. Довольно широкий класс таких задач можно сформулировать следующим образом.

Пусть тело (система тел), ограниченное заданной поверхностью  $S$ , помещено в среду (однородную или неоднородную (но *регулярно*-неоднородную!), в которой могут распространяться волны какой-либо физической природы (электромагнитные, звуковые, спиновые и т.д.). Соответствующий линейный волновой оператор (обычно дифференциальный, реже – интегро-дифференциальный) обозначим через  $L$ . Тогда в области, свободной от источников, волновое уравнение имеет вид

$$Lu=0,$$

где  $u$  – волновое поле, которое может быть как скалярным, так и векторным (в этом случае  $L$  – тензорный оператор).

Первичная волна, которая облучает тело  $S$ , создается либо заданными и, следовательно, реальными источниками, либо возбуждается виртуальными источниками, когда заданным считается поле первичной волны  $u_0$  (чаще всего это плоская волна). Искомым является рассеянное дифракционное поле. Кроме источников, волнового уравнения и формы тела  $S$  должны быть заданы еще определенные граничные условия и условия излучения.

Таким же по структуре уравнением и такими же граничными условиями ставится и статистическая задача, но теперь это уравнение *стохастическое*, т.е. уравнение, которому удовлетворяют *различные реализации*. Иными словами, входящие в уравнение операторы, функции и параметры (все или часть из них) теперь будут *случайными*, т.е. они будут задаваться своими *вероятностными распределениями*. Например, если в динамической задаче задается первичное поле  $u_0$  на поверхности  $S_0$  (виртуальные источники), то в соответствующей статистической задаче задается *статистика* этого поля. В частности, может быть задан второй момент этого поля

$$\Gamma_u^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle u_0(\vec{r}_1) u_0^*(\vec{r}_2) \rangle,$$

который в оптике принято называть функцией когерентности второго порядка или просто *функцией когерентности*. Могут быть заданы и высшие моменты (высшие функции когерентности) первичного поля  $u_0$ . Полное статистическое описание поля  $u_0$  дается совокупностью  $n$ -мерных ( $n=1,2, \dots$ ) плотностей вероятностей. Если исходить из рассмотренной постановки динамической задачи, то случайными могут быть:

- источники (реальные или виртуальные);
- форма или положение границы тела;
- свойства среды, т.е. сам оператор  $L$ .

В соответствии с этим можно ввести различные статистические схемы. В этом курсе нас будут интересовать только два вида задач – дифракция случайных полей (равносильный термин – частично когерентные поля) и дифракция и распространение волн в случайно-неоднородной среде. Обрисуем кратко их математическое оформление.

а) **Дифракция случайных (частично когерентных) полей.** Этот класс задач описывается *однородным* волновым уравнением

$$L\tilde{u} = 0,$$

(тильдой будем обозначать случайные величины), но с неоднородными случайными граничными условиями типа  $\tilde{u}_0|_S$ , которые отражают случайность первичной волны.

Типичная постановка задач этого класса состоит в том, чтобы, зная статистику первичного поля, выяснить статистику поля по мере удаления от входной плоскости, если на пути поле подвергается тем или иным преобразованиям (волна проходит через линзы, диафрагмы и т.п.).

Формально это очень простая задача: если известно, как преобразуется детерминированная (полностью когерентная) волна, то достаточно усреднить детерминированное решение по ансамблю реализаций входного поля. Это естественный путь, но зачастую непреодолимый даже при использовании самой современной вычислительной техники. Дело в том, что задача при таком подходе сводится к трудно вычисляемым многократным интегралам. Расчет не удастся провести даже для предельно упрощенной модельной задачи о флуктуациях интенсивности волны за хаотическим фазовым экраном. (Фазовым экраном называется слой, который модулирует только фазу волны. «Система», которая «преобразует» вышедшее из экрана поле – просто свободное пространство.) Из-за дифракции волна, прошедшая случайный фазовый экран, испытывает флуктуации, хотя на самом экране интенсивность постоянна. К счастью, часто достаточно простые физические соображения позволяют все же решать такие задачи и без громоздких вычислений.

Такая задача, несмотря на кажущуюся искусственность постановки, на самом деле встречается очень часто. Дело в том, что фазовый экран – это модель (не всегда, к сожалению, вполне адекватная) ионосферы или атмосферы. Проходя через случайно-неоднородную среду, волна приобретает случайную фазовую модуляцию, а это приводит к флуктуациям интенсивности в приемнике. Анализируя эти флуктуации, можно судить о параметрах неоднородностей в среде. Этот метод используется, например, в метеорологии при оптических измерениях скорости ветра.

Вообще, оптика как раз и является основным «потребителем» теории дифракции частично когерентных волн. Собственно, в оптике и возникло понятие когерентности около ста лет назад. Но только в 50-х годах XX века была построена соответствующая количественная теория (однако еще не решившая до

конца всех проблем). Можно упомянуть хотя бы некоторые наиболее типичные прикладные задачи, которые возникают в статистической оптике.

1. Оптическая интерферометрия. Интерферометры позволяют не только измерять, но в ряде случаев и непосредственно *видеть* функцию когерентности оптического поля. Для временной функции когерентности это дает возможность измерять форму линий излучения, и такая возможность реализуется в интерферометрах, предназначенных для спектрального анализа. Что касается пространственной функции когерентности, то здесь приложения еще интереснее: для самосветящихся объектов эта функция дает возможность восстановить форму или, по крайней мере, определить угловые размеры светящегося объекта. О том, почему это происходит и где используется, я собираюсь подробно рассказать в этом курсе.
2. Формирование оптического изображения. Совершенно очевидно, что степень временной и пространственной когерентности поля, облучающего объект, должна как-то сказываться на характере изображения в оптических приборах. В действительности, однако, изображение в большинстве случаев слабо зависит от характера освещения объекта. Возникает естественный вопрос: а почему это так? Является ли это просто счастливой случайностью? Что ставит предел информативности фотоизображения? Какие требования надо предъявлять к степени монохроматичности света для получения качественного голографического изображения? Статистическая дифракционная теория как раз помогает определить предельно достижимые характеристики голограммы, а, кроме того, дать оценку влияния неоднородностей показателя преломления и других случайных дефектов самих оптических систем.
3. Существуют приложения и в других разделах физики. Это рентгеноструктурный анализ, радиоастрономия, собственно радиофизика («физика для радио»), где сходные с перечисленными проблемы возникают в методе синтезированных апертур. Не останавливаясь на деталях, скажу лишь, что предельная точность картографирования местности определяется прежде всего флуктуациями фазы. Это полный аналог случайных фазовых искажений в оптике.

б) Распространение волн в случайно-неоднородной среде. Здесь случайным станет сам оператор  $L$ , описывающий распространение волн в среде. Случайными могут быть коэффициенты при производных, если это линейный дифференциальный оператор, или входящие в него ядра, если оператор – интегро-дифференциальный. Для того, чтобы построить сам случайный оператор, надо знать свойства среды. Их обычно берут из опыта. Есть только один случай, когда свойства среды получены теоретически – это турбулентная атмосфера (закон Колмогорова–Обухова, степенной характер спектра неоднородностей с показателем  $11/3$ ). К сожалению, этот закон не универсален – даже в атмосфере он несправедлив при наличии перемежаемости, а в океане и в ионосфере другие показатели степени.

Часто задачи второго типа удобно решать сведением к первому, что мы позднее постараемся обсудить и использовать. Но это не единственный способ



решения задач такого типа. Классическими как раз являются совсем другие методы. Они здесь, как правило, приближенные. Эти методы достаточно разнообразны, но суть практически всегда в том, что неоднородности оказываются большими или малыми (разумеется, в каком-то характерном масштабе), плавными и медленными или, наоборот, резкими и быстрыми, корреляции могут быть сильными или слабыми и т.д. Эти различия влекут за собой и разные приближенные подходы к проблеме. Обычно удается выделить какой-то параметр, по которому строится решение в виде ряда. Несколько особняком стоит здесь метод геометрической оптики, точнее, его современные модификации. Как ни удивительно, этим методом удастся проанализировать не только геометрические характеристики волн (например, рассчитать флуктуации углов прихода, что уже само по себе очень важно), но и выяснить некоторые свойства интенсивности, что другими (на первый взгляд, более приспособленными к этому методами) сделать практически не удастся. Поэтому в дальнейшем этому методу мы уделим чуть больше внимания, и многие очень интересные и важные для приложений вопросы рассмотрим именно с его помощью.

При помощи этих методов (всех – как классических, так и относительно новых) к настоящему времени решено очень много конкретных задач атмосферной оптики, гидролокации, радиолокации и астрономии.

Например, исследование флуктуаций интенсивности света на приземных трассах стало в настоящее время эффективным методом изучения структуры турбулентных потоков в атмосфере. Подобный же метод, примененный к СВЧ волнам, используется в исследованиях турбулентности плазмы. В гидроакустике те же методы можно использовать для обнаружения случайных объектов – подводных лодок. Именно развитие локационной техники (лазерные локаторы в атмосфере, гидролокаторы) как раз и стимулировали исследования флуктуаций света в атмосфере и звука в океане. Здесь интерес вызывают и уширение пучка и флуктуации направления луча на трассе. Вообще количество задач здесь огромно, и накоплен огромный опыт их решения. Но есть и простейшие, на первый взгляд, и весьма актуальные задачи, которые еще далеки от окончательного решения.

Мы постараемся рассмотреть постановку некоторых задач, интересных для приложений (например, в метеорологии или в дальней связи через атмосферу или океан), но прежде нам придется хотя бы кратко ознакомиться с наиболее часто применяемыми методами решения, как классическими, так и активно развиваемыми в настоящее время (как правило, это комбинированные численно-аналитические методы).

Разумеется, в жизни приходится чаще сталкиваться не с такими модельными задачами, а с комбинированными. Например, можно поставить задачу *о тепловом излучении случайно-неоднородного слоя*. Такая задача оказывается актуальной в связи с анализом экспериментальных данных о тепловом излучении арктических льдов. Другой пример – *изучение дифракции в случайно-неоднородной среде при наличии дискретных вкраплений*. Область приложения этой теории – перенос излучения в турбулентной атмосфере при наличии аэрозоля (частицы копоти из дымящих труб). Кроме этого, *дифракция частично*

*когерентных полей в случайно-неоднородной среде* представляет интерес для многих приложений: прохождение волн от источника конечных угловых размеров через ионосферу, уширение частично когерентного (в поперечном сечении) лазерного пучка в атмосфере и т.д.

# Глава 1. Основные понятия теории случайных полей

Прежде всего, введем понятия, которые понадобятся для описания свойств случайных процессов, т.е. случайных функций, зависящих от одного аргумента – времени, и случайных полей, т.е. случайных функций нескольких аргументов. Ниже будем исследовать их статистические свойства.

Введем основные понятия, связанные со случайными полями, так, как это сделано в книге [3]. Сразу же ограничимся случаем, когда параметров всего четыре: время  $t$  и координаты  $\vec{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$  точки в трехмерном пространстве. Например, можно рассматривать случайное поле показателя преломления среды (это скалярное поле) или случайное поле скоростей турбулентной среды (векторное поле).

Будем интересоваться свойствами поля в один момент времени  $t$ . В этом случае полное задание статистических свойств случайного поля  $\tilde{Q}$  означает, что известны все его  $n$ -точечные ( $n = 1, 2, \dots$ ) плотности вероятностей, т.е. для любого числа  $n$  произвольно выбранных точек  $\vec{r}_i$  известны функции

$$W_n(Q_1, \dots, Q_n) dQ_1 \dots dQ_n = P\{Q_i \leq \tilde{Q}(\vec{r}_i, t) < Q_i + dQ_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $P\{Q_i \leq \tilde{Q}(\vec{r}_i, t) < Q_i + dQ_i\}$  – вероятность того, что случайная величина  $\tilde{Q}(\vec{r}_i, t)$  приняла значение, лежащее в интервале  $(Q_i, Q_i + dQ_i)$ .

Случайное поле называется *однородным* (в узком смысле), т.е. стационарным по времени  $t$  и однородным по координатам  $\vec{r}$ , если все его  $n$ -точечные плотности вероятностей инвариантны относительно преобразования трансляции  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ ,  $t \rightarrow t + dt$ :

$$P\{Q_i \leq \tilde{Q}(\vec{r}_i + d\vec{r}, t + dt) < Q_i + dQ_i\} = P\{Q_i \leq \tilde{Q}(\vec{r}_i, t) < Q_i + dQ_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Понятие *пространственной однородности* для случайных полей (инвариантность  $n$ -точечных плотностей вероятностей  $W_n$  по отношению к пространственному сдвигу  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ ) является естественным обобщением понятия стационарности для случайных функций времени (случайных процессов). Заметим, что поле может быть пространственно однородным, но нестационарным, или же, наоборот, стационарным, но пространственно неоднородным.

Зная многоточечные плотности вероятностей, можно вычислять моменты случайного поля любого порядка. В общем случае эти моменты являются функциями координат. Во многих задачах наибольший интерес представляют низшие моменты (первого и второго порядка). Основные определения те же, что и в корреляционной теории случайных процессов.

Среднее значение случайного поля  $\langle \tilde{Q}(\vec{r}, t) \rangle$  (момент первого порядка) вычисляется при помощи одноточечной плотности вероятностей  $W_1(Q)$ :

$$\langle \tilde{Q}(\vec{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Q W_1 dQ.$$

Корреляционная функция (момент второго порядка) вычисляется при помощи двухточечной плотности вероятностей  $W_2(Q_1, Q_2)$ :

$$B_Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \equiv \langle \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1 Q_2 W_2(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2. \quad (1.1)$$

Здесь для краткости принято обозначение

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}(\vec{r}_1, t_1), \quad \tilde{Q}_2 = \tilde{Q}(\vec{r}_2, t_2).$$

Через ту же плотность вероятностей выражается и ковариационная функция

$$K_Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \equiv \langle (\tilde{Q}_1 - \langle \tilde{Q}_1 \rangle) (\tilde{Q}_2 - \langle \tilde{Q}_2 \rangle) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{Q}_1 - \langle \tilde{Q}_1 \rangle) (\tilde{Q}_2 - \langle \tilde{Q}_2 \rangle) W_2(Q_1, Q_2) dQ_1 dQ_2. \quad (1.3)$$

Из определений корреляционной и ковариационной функций видно, что последнюю легко записать в удобной для вычислений форме:

$$K_Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = B_Q(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) - \langle \tilde{Q}_1 \rangle \langle \tilde{Q}_2 \rangle.$$

Для однородных полей оба вторых момента зависят только от разности координат  $\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

В приложениях встречаются и комплексные случайные поля

$$\tilde{Q}(\vec{r}, t) = \tilde{\chi}(\vec{r}, t) + i\tilde{\eta}(\vec{r}, t).$$

Примером может служить случайное поле показателя преломления атмосферы при учете поглощения. В рамках корреляционной теории для описания таких полей наряду с  $\tilde{Q}(\vec{r}, t)$  рассматривают комплексно сопряженное поле  $\tilde{Q}^*(\vec{r}, t)$  и вводят две ковариационные функции

$$K_{1Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \equiv \langle \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2 \rangle - \langle \tilde{Q}_1 \rangle \langle \tilde{Q}_2 \rangle,$$

$$K_{2Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \equiv \langle \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2^* \rangle - \langle \tilde{Q}_1 \rangle \langle \tilde{Q}_2^* \rangle.$$

Через них выражаются ковариационные функции действительной и мнимой части случайного поля  $\tilde{Q}$ :

$$K_\chi(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [K_{1Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + K_{2Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)],$$

$$K_\eta(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [K_{1Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) - K_{2Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)],$$

а также взаимные ковариационные функции

$$K_{\chi\eta}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [K_{1Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) - K_{2Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)],$$

$$K_{\eta\chi}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [K_{1Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) + K_{2Q}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)].$$

Случайные процессы и случайные поля, с которыми приходится иметь дело в практических приложениях, часто можно с достаточной точностью описывать с помощью стационарных или однородных случайных функций. Однако такое описание оказывается справедливым только в ограниченных временных или пространственных интервалах. При увеличении таких интервалов средние

значения могут изменяться, что приводит к нестационарности или неоднородности. Примером может служить средняя скорость ветра в турбулентной атмосфере: ее можно считать постоянной лишь в пределах ограниченного промежутка времени и пространства.

Изучая турбулентность, А.Н. Колмогоров предложил ввести новый важный класс функций, обобщающий класс стационарных или однородных случайных функций. Проще всего обсудить это обобщение на таком примере: поле скоростей в турбулентной среде неоднородно, поскольку его средние значения на различных участках турбулентной среды не совпадают друг с другом. Однако если найти скорости в двух разных точках и составить их разность, то она оказывается практически однородной в широком диапазоне пространственных масштабов. Если подобное статистически неоднородное поле обозначить через  $\tilde{f}(\vec{r})$ , то поле

$$\tilde{f}(\vec{r} + \vec{s}) - \tilde{f}(\vec{r})$$

будет однородным, даже если поле  $\tilde{f}(\vec{r})$  само по себе неоднородно.

В математике такие случайные функции называют случайными процессами со стационарными приращениями, если речь идет о функциях времени, и локально однородными случайными полями, если говорят о функциях пространственных координат. Их статистические свойства удобнее всего задавать с помощью структурных функций, которые мы сейчас введем.

Рассмотрим случайный процесс  $\tilde{f}(t)$ , которым может быть, например, проекция скорости броуновской частицы. Сам процесс  $\tilde{f}(t)$  нестационарен, но разность

$$\tilde{f}(t + \tau) - \tilde{f}(t)$$

будет стационарной, если выполнены следующие два условия:

1. Среднее по статистическому ансамблю от разности

$\tilde{f}(t + \tau) - \tilde{f}(t)$  не зависит от  $t$ , а зависит лишь от  $\tau$ , и прямо пропорционально  $\tau$ :

$$\langle \tilde{f}(t + \tau) - \tilde{f}(t) \rangle = \alpha \tau \quad (\alpha = \text{const}).$$

2. Статистическое среднее квадрата разности  $\tilde{f}(t + \tau) - \tilde{f}(t)$  зависит лишь от сдвига по времени  $\tau$ :

$$D_f(\tau) = \left\langle \left[ \tilde{f}(t + \tau) - \tilde{f}(t) \right]^2 \right\rangle. \quad (1.2)$$

Функцию  $D_f(\tau)$  называют *структурной функцией*, а случайный процесс, удовлетворяющий двум этим условиям, – *процессом со стационарными приращениями*. Примером такого процесса может служить одномерное броуновское движение свободной частицы. Смещение  $\tilde{x}(t)$  частицы не стационарно, но разность смещений  $\tilde{x}(t + \tau) - \tilde{x}(t)$  – стационарная функция аргумента  $\tau$ .

Из определения структурной функции видно, что она содержит меньше информации о случайном процессе, чем второй момент. Действительно, если

известна корреляционная функция процесса  $\tilde{f}(\tau)$  (который, для общности, считаем комплексным)

$$B_f(t_1, t_2) = \langle \tilde{f}(t_1) \tilde{f}^*(t_2) \rangle$$

то всегда можно найти структурную функцию

$$D_f(\tau) = B_f(t + \tau, t + \tau) + B_f(t, \tau) - B_f(t + \tau, t) - B_f(t, t + \tau),$$

но, зная структурную функцию, нельзя, вообще говоря, получить выражение для корреляционной функции  $B_f$ .

Стационарный процесс можно рассматривать как частный случай процесса со стационарными приращениями. В этом случае имеется взаимнооднозначное соответствие между структурной функцией и корреляционной функцией:

$$D_f(\tau) = 2B_f(0) - B_f(\tau) - B_f^*(\tau),$$

$$D_f(\infty) = 2B_f(0),$$

$$\operatorname{Re} B_f(\tau) = \frac{1}{2} [D_f(\infty) - D_f(\tau)].$$

Очевидно, для вещественного случайного процесса из последних двух формул следует

$$D_f(\tau) = 2[B_f(0) - B_f(\tau)],$$

$$B_f(\tau) = \frac{1}{2} [D_f(\infty) - D_f(\tau)].$$

Структурная функция потребуется далее для описания статистических свойств показателя преломления атмосферы. Заодно обсудим, почему в турбулентной атмосфере используется именно структурная, а не корреляционная функция.

## Глава 2. Микроструктура турбулентности атмосферы

Оптические свойства атмосферы определяются многими факторами: как наличием примесей (газовых и аэрозольных), так и турбулентными неоднородностями воздуха. Нас будут интересовать именно эти неоднородности. Они создают случайную пространственно-временную структуру показателя преломления. Такая структура подвержена динамичным локальным возмущениям погодной ситуации, особенно в радиационно-активный период дневного времени. Поэтому прежде всего нам необходима модель турбулентности в атмосфере.

Поскольку всякое движение воздуха в атмосфере происходит со скоростями меньшими, чем скорость звука, его можно рассматривать на основе модели несжимаемой жидкости. Это значит, что можно не учитывать изменение давления при изменении скорости потока.

Вспомним физический смысл числа Рейнольдса:

$$Re = (\text{изменение импульса за } 1\text{ с}) / (\text{сила вязкого трения}).$$

Пользуясь, например, теорией размерностей, отсюда можно получить выражение для числа Рейнольдса в виде безразмерной комбинации экспериментально измеримых величин: относительной скорости  $v$  движения потока жидкости или газа, характерного масштаба  $L$  и кинематической вязкости  $\nu_k$ :

$$Re = vL / \nu_k.$$

Согласно законам гидродинамики, движение потока жидкости или газа становится турбулентным, когда значение числа Рейнольдса становится больше критического  $\sim 2500 \dots 5000$ . Для воздуха характерно  $\nu_k = 0.15 \text{ см}^2/\text{с}$ . Поэтому уже на высоте порядка 10 м получим  $Re \sim 10^4 v$ . Это значит, что атмосфера всегда является турбулентной средой, поскольку уже при скоростях 1–5 м/с число Рейнольдса значительно больше критического. Относительная роль термических и динамических факторов в развитии атмосферной турбулентности характеризуется с помощью числа Ричардсона

$$Ri = \frac{g}{\langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle / \partial h}{(\partial \langle v \rangle / \partial h)^2},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\langle T \rangle$ ,  $\langle v \rangle$  – средние значения температуры и скорости ветра. Величина  $Ri$  может интерпретироваться как отношение архимедовых сил плавучести к силам инерции. Из определения видно, что знак  $Ri$  определяется знаком производной  $\partial \langle T \rangle / \partial h$ . Для воздуха характерно уменьшение плотности с ростом температуры, поэтому при положительных значениях числа Ричардсона (это называют устойчивой термической стратификацией) силы плавучести противодействуют развитию турбулентности, часть энергии турбулентности расходуется на преодоление этих сил. При отрицательных значениях  $Ri$  (неустойчивая термическая стратификация) силы плавучести способствуют возникновению и развитию турбулентности. Если значения

числа Ричардсона близки к нулю (безразличная стратификация), то архимедовы силы не влияют на режим турбулентности.

Турбулентное движение воздуха можно представить следующим образом. Атмосферные процессы, например, трение воздушного потока о поверхность земли и образование вследствие этого профиля скорости ветра с большими вертикальными градиентами, или термическая конвекция, связанная с неодинаковым нагреванием различных участков подстилающей поверхности, или изменение поля температуры и скорости ветра в результате облакообразования, и т.д. приводят к образованию крупномасштабных вихрей. Характерный масштаб этих вихрей  $L_0$  называется внешним масштабом турбулентности. Введем еще величину  $\Delta V$  – разницу скоростей на масштабе  $L_0$ . Если число Рейнольдса  $\Delta V L_0 / \nu$  велико, то такие вихри оказываются неустойчивыми и под влиянием сил инерции распадаются на более мелкие, передавая им свою энергию. Процесс дробления вихрей продолжается до тех пор, пока их размеры не приблизятся к критическому  $l_0$ , называемому внутренним масштабом, при котором число Рейнольдса  $\Delta V l_0 / \nu$  будет порядка единицы (здесь  $\Delta V$  – изменение скорости именно на  $l_0$ ). Начиная с этого момента силы трения играют определяющую роль по сравнению с силами инерции, и кинетическая энергия вихрей диссипирует в тепло. Интервал масштабов между  $l_0$  и  $L_0$  называется **инерционным**, вихри с масштабами  $l < l_0$  относятся к **интервалу диссипации (вязкому интервалу)**.

Для характеристики турбулентности используют величины:

- $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии, рассчитанная на единицу массы (иными словами, энергия переходящая в тепло за единицу времени в единице массы),  $\text{см}^2/\text{с}^3$ ;
- $T$  – кинетическая энергия единицы массы в системе координат, движущейся со средней скоростью потока. Эту величину принято записывать с помощью пространственного спектра:

$$T = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa, \quad \kappa = 2\pi / l.$$

Обычно на практике как раз измеряют и строят график  $E(\kappa)$ . Из экспериментов известно, что основная энергия сосредоточена на низких частотах (в крупных вихрях). В связи с этим интервал масштабов  $L > L_0$  называется **энергетическим**.

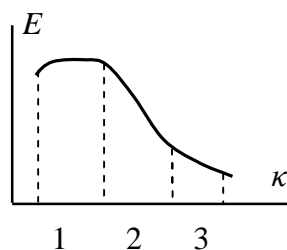


Рис. 1. Зависимость пространственного спектра энергии от пространственной частоты.  
1 – энергетический интервал, 2 – инерционный интервал, 3 – вязкий интервал



Вообще свойства среды (зависимость  $E(\kappa)$ ) обычно берут из опыта. Атмосфера в этом смысле уникальна: это единственный случай, когда свойства среды получены теоретически. Это **закон Колмогорова–Обухова**. Гипотезы Колмогорова состоят в следующем.

1. Структура турбулентности в вязком интервале определяется скоростью диссипации кинетической энергии  $\varepsilon$  и кинематической вязкостью  $\nu_k$ .
2. В инерционном интервале все определяется только величиной  $\varepsilon$ .

Пользуясь этими гипотезами, получим явное выражение для структурной функции скорости в инерционном интервале (поскольку это простейший пример). Из определения структурной функции (1.2) следует

$$D_v = \langle (v_1 - v_2)^2 \rangle$$

(здесь  $v_1$  и  $v_2$  – скорости в двух точках пространства, расстояние между которыми равно  $r$ , средняя скорость предполагается равной нулю). Согласно теории размерностей тогда имеем:

$$[D] = [V^2] = [\varepsilon^x r^y]$$

Учтем, что  $\varepsilon$  – энергия, уходящая из единицы массы в единицу времени, тогда, записывая размерности слева и справа

$$L^2 T^{-2} = L^{2x} T^{-3x} L^y$$

получим систему уравнений:

$$2 = 2x + y, \quad -2 = -3x.$$

Отсюда  $x=2/3$ ,  $y=2/3$ , т.е.

$$D_v = C_v^2 \varepsilon^{2/3} r^{2/3},$$

где  $C$  – структурная постоянная. Это “закон двух третей”. Еще раз заметим: он справедлив только в инерционном интервале!

Второй случай – вязкий интервал ( $r \ll l_0$ ). При этом течение ламинарное, и в первом приближении можно считать, что скорость с расстоянием меняется линейно, т.е.  $V^2 \sim r^2$ . Снова пользуясь теорией размерностей, теперь получим:

$$D_v = C_v^2 r^2 \varepsilon^x \nu^y$$

или  $L^2 T^{-2} = L^2 L^{2x} T^{-3x} L^{2y} T^{-y}$ , откуда  $x=1$ ,  $y=-1$ , и

$$D_v = C_v^2 r^2 \varepsilon \nu^{-1}.$$

Аналогично можно получить структурную функцию поля температур – изменятся только структурные постоянные (они будут зависеть от молекулярной теплопроводности). Суть в том, что *не меняется сам вид зависимости от основных параметров*. Микропульсации поля температур являются основной причиной пространственно-временных изменений диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ . Полагая среднее значение диэлектрической проницаемости в атмосфере равным единице, запишем:

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = 1 + \varepsilon_1(\vec{r}, t).$$

Флуктуационная часть имеет амплитуду пульсаций  $10^{-5}$ – $10^{-6}$  и прямо пропорциональна пульсациям поля температуры (коэффициент пропорциональности – постоянная величина при заданных средних значениях давления и температу-

ры). Поэтому структурная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(r) &= C_\varepsilon^2 l_0^{-4/3} r^2, & r \ll l_0, \\ D_\varepsilon(r) &= C_\varepsilon^2 r^{2/3}, & l_0 \ll r \ll L_0, \\ D_\varepsilon(r) &= C_\varepsilon^2 L_0^{2/3}, & r \gg L_0. \end{aligned}$$

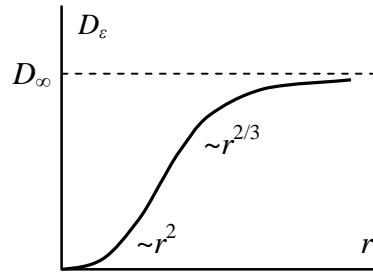


Рис. 2. Качественный вид структурной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости

Поясним, почему в атмосферной турбулентности пользуются структурной функцией, а не корреляционной (ковариационной). Для этого рассмотрим некий произвольный параметр среды  $P$  (это может быть температура, показатель преломления и т.д.). В общем случае он зависит от координат и времени. Будем рассматривать только случайную среду, т.е. зависимость  $P(\vec{r})$ , нас будут интересовать флуктуации  $P(\vec{r}) - \langle P(\vec{r}) \rangle$ . Корреляционная функция этих флуктуаций по определению (1.1) равна

$$B_P = \langle (P(\vec{r}_1) - \langle P(\vec{r}_1) \rangle) (P(\vec{r}_2) - \langle P(\vec{r}_2) \rangle) \rangle.$$

Корреляция характеризует статистическую связь значений параметра  $P$  в двух точках среды. Многочисленные экспериментальные данные позволяют считать атмосферу статистически однородной средой. Это значит, что в среде не существует выделенных точек:

- а)  $\langle P(\vec{r}) \rangle = \langle P \rangle = \text{const}$  ;
- б)  $P(\vec{r}_1) - P(\vec{r}_2) = P(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ .

Кроме того, справедливо и предположение о статистической изотропности. Это, помимо однородности, подразумевает еще и зависимость только от модуля расстояния между точками:

$$B_P = B(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

В этом случае

$$B = \langle P_1 P_2 \rangle - \langle P_1 \rangle \langle P_2 \rangle.$$

Для статистически независимых величин последнее равенство обратится в нуль, поэтому корреляционная функция и характеризует статистическую связь величин.

Для статистически однородного поля можно ввести спектр по Фурье:

$$B(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\vec{\rho})\Phi(\vec{k})d\vec{k}, \quad \Phi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\vec{k}\vec{\rho})B(\vec{\rho})d\vec{\rho}.$$

Для изотропного поля выражение упрощается, т.к. можно перейти к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\vartheta \exp(-i\kappa\rho \cos\vartheta) B(\rho) d\vartheta = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \rho^2 B(\rho) d\rho \int_1^{-1} \exp(-i\kappa\rho\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi^2\kappa} \int_0^{\infty} \rho B(\rho) \sin(\kappa\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Спектр корреляционной функции  $\Phi(\kappa)$  может иметь особенность в нуле:  $\Phi(\kappa) \sim 1/\kappa^\alpha$ , и для сходимости интеграла для  $B(\rho)$  необходимо  $\alpha < 3$ . Но “закон двух третей” дает  $\Phi(\kappa) \sim 1/\kappa^{-11/3}$ , и этот показатель больше трех (по модулю), поэтому корреляционная функция в нуле расходится. Этим и объясняется, что для описания атмосферной турбулентности пользуются не корреляционной, а структурной функцией, по строгому определению равной:

$$D_p = \left\langle \left[ (P_1 - \langle P_1 \rangle) - (P_2 - \langle P_2 \rangle) \right]^2 \right\rangle.$$

На малых по сравнению с масштабом неоднородностей расстояниях среднее значение можно считать постоянной величиной. Это значит, что на структурную функцию влияют только мелкие неоднородности. Итак, мы считаем, что

$$а) \langle P \rangle = \text{const};$$

$$б) D(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Кроме того, будем еще пользоваться понятием локальной изотропности:

$$D(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = D(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

В этом случае справедлива связь

$$D(\rho) = 8\pi \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin \kappa \rho}{\kappa \rho} \right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

Здесь уже необходимо выполнение условия  $\alpha < 5$ , т.е. область применения расширяется.

Теперь найдем спектр, соответствующий структурной функции вида  $D \sim \rho^{2/3}$ . Воспользуемся табличным результатом для функции  $D(\rho) = C^2 \rho^\mu$ :

$$\Phi(\kappa) = \frac{\Gamma(\mu + 2)}{4\pi^2} \sin \frac{\pi\mu}{2} C^2 \kappa^{-(\mu+3)}.$$

В частном случае  $\mu = 2/3$  отсюда имеем

$$\Phi(\kappa) = 0.33 C^2 \kappa^{-11/3}.$$

Однако из экспериментов известно, что это выражение годится не для всех частот, а только для средних (т.е. для инерционного интервала). Сама ширина инерционного интервала существенно зависит от метеорологических условий и от высоты точки наблюдения над землей. Граничной считается частота  $\kappa_{\max} = 2\pi/l_0$ . Оценки величины  $l_0$ , которые проводят на основе данных о скорости диссипации кинетической энергии и кинематической вязкости воздуха на разных высотах, оказываются следующими: 0,5...9 мм на высоте 1...2 м и

5,5...55 мм на высоте 10 км. На частотах выше этой спектр приходится срезать. Для этого вводят множитель  $\exp(-\kappa^2/\kappa_{\max}^2)$ .

Со стороны низких частот в качестве границы инерционного интервала принимается частота, начиная с которой спектр отклоняется от степенной зависимости в сторону меньших значений. Определяя эту частоту из измерения спектров флуктуаций скорости ветра или температуры, можно найти значение внешнего масштаба турбулентности в приземном слое атмосферы. При расчетах же обычно полагают, что этот масштаб связан с высотой точки наблюдения:

$$L_0 = \eta_K h,$$

где  $\eta_K=0.4$  – постоянная Кармана. На частотах ниже  $\kappa_{\min} = 2\pi/L_0$  чаще всего используют кармановскую модель, т.е. срезают так: вместо  $\kappa^{-11/3}$  пишут  $(\kappa^2 + \kappa_{\min}^2)^{-11/6}$ . В этом случае расходимости не будет никогда.

Таким образом, в широком интервале пространственных частот флуктуаций диэлектрической проницаемости единственной характеристикой этого процесса является параметр  $C_\varepsilon^2$ . Поскольку диэлектрическая проницаемость и показатель преломления связаны соотношением

$$n = \sqrt{\varepsilon},$$

то в случае малых флуктуаций справедливо

$$\varepsilon_1 = 2n_1,$$

откуда следует связь  $C_\varepsilon^2$  со структурной характеристикой флуктуаций показателя преломления:  $C_\varepsilon^2 = 4C_n^2$ .

В приземном слое атмосферы (до высоты нескольких десятков метров) величину  $C_n^2$  определяют из измерений высотных градиентов средней температуры и скорости ветра. Как показывают экспериментальные данные, значения  $C_n^2$  изменяются в зависимости от метеоусловий в пределах трех и более порядков:  $10^{-14}$ – $10^{-17}$  см<sup>-2/3</sup>. С увеличением высоты над землей в приземном слое происходит уменьшение  $C_n^2$  по степенному закону. В случае неустойчивого термического состояния атмосферы характерной является зависимость  $C_n^2 \sim h^{-4/3}$ , а при безразличной стратификации  $C_n^2$  убывает с высотой более медленно:  $C_n^2 \sim h^{-2/3}$ .

В отличие от хорошо изученного приземного слоя (до 10 м) сведения о турбулентности в свободной атмосфере (до высот порядка 20 км) в настоящее время представлены сравнительно немногочисленными экспериментальными данными. Обобщением этих данных являются полуэмпирические модели, главная особенность которых – экспоненциальное убывание  $C_n^2$  с высотой.

Флуктуации показателя преломления, вызываемые турбулентным перемешиванием атмосферного воздуха, оказывают существенное влияние на амплитуду и фазу распространяющегося в атмосфере излучения. Именно это влияние мы и будем изучать в дальнейшем.

## Глава 3. Классические методы теории распространения оптических волн в случайно-неоднородных средах

### 3.1. Уравнение распространения волн в случайно-неоднородных средах

Распространение электромагнитных волн в средах описывается уравнениями Максвелла для векторов напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей (тильда означает полное поле, т.е. амплитуду и фазу). При исследовании распространения волн в атмосфере среда считается непроводящей, без сторонних зарядов, с магнитной проницаемостью, равной единице.

Относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\vec{r}, t)$  и показатель преломления  $n(\vec{r}, t)$  турбулентной среды меняются в пространстве и во времени случайным образом. Но характерные частоты флуктуаций диэлектрической проницаемости во времени обычно малы по сравнению с частотой электромагнитного поля  $\omega$ . Поэтому в уравнениях Максвелла от полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удобно перейти к медленно меняющимся комплексным амплитудам  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{E} = \vec{E} \exp(-i\omega t), \quad \vec{H} = \vec{H} \exp(-i\omega t).$$

При этом из уравнений Максвелла получаем:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = -k^2 \varepsilon_1 \vec{E} - \nabla(\vec{E} \nabla \varepsilon_1) - \frac{2ik}{c} \frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon \vec{E}}{\partial t^2},$$

где диэлектрическая проницаемость представлена в виде  $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon_1$ ,  $\langle \varepsilon \rangle = 1$ , а  $\varepsilon_1$  – флуктуирующая часть (и ее среднее равно нулю, т.к. иначе можно просто переопределить волновое число).

В атмосфере флуктуации  $\varepsilon_1$  имеют порядок  $\langle |\varepsilon_1| \rangle = 10^{-5} \dots 10^{-6}$ . Поэтому с хорошей точностью они малы по сравнению со средним значением  $\varepsilon$ .

Кроме того, для атмосферной турбулентности справедливо условие

$$v/c \ll \langle |\varepsilon_1| \rangle$$

( $v$  – характерная скорость перемещения неоднородностей среды). Это условие позволяет пренебречь последними двумя слагаемыми в исходном уравнении. Пренебрежем также деполяризацией волны под действием атмосферной турбулентности. Тогда в векторном уравнении исчезает слагаемое  $\nabla(\vec{E} \nabla \varepsilon_1)$ , и оно распадается на три одинаковых по структуре скалярных уравнения для компонент вектора  $\vec{E}$ :

$$\Delta u(\vec{r}, t) + k^2 u(\vec{r}, t) = -k^2 \varepsilon_1(\vec{r}, t) u(\vec{r}, t). \quad (3.1)$$

В это уравнение время входит как параметр, поэтому всюду в дальнейшем мы будем опускать зависимость от времени, считая, что при необходимости временной множитель всегда можно восстановить.

Трудность решения полученного уравнения связана с тем, что оно параметрическое: содержит в качестве коэффициента при искомой функции  $\varepsilon_1$ , а

этот множитель является случайной функцией. Строгие решения таких уравнений неизвестны. Однако существуют различные методы решения подобных уравнений в виде степенных рядов по малому параметру. К изучению этих методов мы сейчас и обратимся.

## 3.2. Метод малых возмущений

### 3.2.1. Первое (Борновское) приближение

Прежде всего исследуем случай достаточно малых возмущений диэлектрической проницаемости. Необходимо решать уравнение (3.1), но сначала рассмотрим вспомогательное по отношению к нему уравнение

$$\Delta u(\vec{r}, t) + k^2 u(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, t). \quad (3.2)$$

Здесь в правой части стоит источник, возбуждающий монохроматическую волну. Такое уравнение легко решается методом функции Грина, а любая волна будет суперпозицией (т.е. интегралом) функций Грина. Представим источник в таком виде:

$$F(\vec{r}) = \int_V F(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}'.$$

Интеграл в этом выражении берется по *объему*, занятому случайными неоднородностями. Заметим, что мы рассматриваем сплошную среду, в которой неоднородности могут занимать *все* пространство. Но излучающая и приемная антенны имеют диаграммы направленности, как правило, достаточно узкие. В область пересечения лепестков той и другой диаграмм как раз и попадает *конечный рассеивающий объем*.

Используемое представление источника означает, что мы рассматриваем суперпозицию дельта-источников с весом  $F(\vec{r}')$ . Это значит, что надо знать решение уравнения

$$\Delta G + k^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

+ условие излучения на бесконечности.

При решении учтем, что дельта-функция сферически симметрична, поэтому и искомая функция Грина  $G$  должна обладать сферической симметрией, т.е. зависеть только от модуля  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ . В результате (если соответственно расписать лапласиан) получим линейное дифференциальное уравнение *второго* порядка, оно имеет *два* линейно независимых решения. Нам нужно то из них, которое удовлетворяет условию излучения. Оно таково:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|) / 4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Легко понять структуру этого выражения. Действительно, знаменатель здесь просто соответствует сферической волне. Установим еще смысл осциллирующего множителя, для этого домножим  $G$  на  $\exp(-i\omega t)$ . В результате (выпишем только интересующий нас числитель)

$$\exp(-i\omega t + ik|\vec{r} - \vec{r}'|) = \exp\left(-i\omega t + i\omega/c|\vec{r} - \vec{r}'|\right) = \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right],$$

т.е. волна идет от источника с конечной скоростью  $c$ , и из-за этого существует запаздывание фазы в точке  $\vec{r}'$  по сравнению с точкой  $\vec{r}$ . Таким образом, остается только множитель  $1/4\pi$ . Но и его можно “угадать” (из соображений нормировки на площадь сферы).

Итак, с помощью функции Грина решение уравнения (3.2) записывается так:

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + \int_V F(\vec{r}')G(\vec{r}, \vec{r}')d\vec{r}'. \quad (3.3)$$

Первое слагаемое  $u_0(\vec{r})$  – это решение однородного уравнения (первичное поле, оно было бы в среде в отсутствие флуктуаций), второе – вынужденное решение, причем  $G$  – это отклик на дельта-источник. Теперь применим это решение к исходному уравнению (3.1). Тогда

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) - k^2 \int_V \varepsilon_1(\vec{r}')u(\vec{r}')G(\vec{r}, \vec{r}')d\vec{r}'. \quad (3.4)$$

Т.о., вместо *дифференциального* уравнения мы получили эквивалентное ему *интегральное*. Интегральное уравнение (3.4) решается итерационным методом, при этом получается *ряд теории возмущений*:

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) - k^2 \int G(\vec{r}, \vec{r}_1)\varepsilon_1(\vec{r}_1)u_0(\vec{r}_1)d^3\vec{r}_1 + \\ + k^4 \iint G(\vec{r}, \vec{r}_1)G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\varepsilon_1(\vec{r}_1)\varepsilon_1(\vec{r}_2)u_0(\vec{r}_2)d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2 - \dots$$

Это бесконечный ряд, и  $u(\vec{r})$  в нем стоит в “последнем”, бесконечнократном, интеграле. Смысл слагаемых этого ряда следующий:  $n$ -й член этого ряда описывает  $n$ -кратное рассеяние и содержит под  $n$ -кратным интегралом произведение  $\varepsilon_1(\vec{r}_1)\varepsilon_1(\vec{r}_2)\dots\varepsilon_1(\vec{r}_n)$ . Поэтому для вычисления среднего поля надо знать моменты  $\langle \varepsilon_1(\vec{r}_1)\varepsilon_1(\vec{r}_2)\dots\varepsilon_1(\vec{r}_n) \rangle$  любого порядка, от первого до  $n$ -го включительно.

Весь этот ряд называется *борновским разложением*. Его первый после  $u_0(\vec{r})$  член дает однократное рассеяние (в квантовой механике называется борновским приближением, в оптике – приближением Рэлея). Второй член дает двукратное рассеяние, и т.д. Но очевидно, что двукратно рассеянная волна намного слабее однократно рассеянной, а та много меньше падающей. Поэтому часто бывает достаточно ограничиться только борновским приближением. В этом приближении поле  $u_0(\vec{r})$  по мере углубления в среду не убывает (экстинкция не учитывается), а рассеянное поле линейно зависит от  $\varepsilon_1$ . Выпишем поле в этом приближении:

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) - k^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{r}')G(\vec{r}, \vec{r}')\varepsilon_1(\vec{r}')u_0(\vec{r}')d^3\vec{r}'.$$

Обратим внимание: мы перешли от интеграла по *конечному* объему к интегралу в *бесконечных* пределах, но взамен ввели “апертурный множитель”  $M$ , он равен единице внутри рассеивающего объема и нулю вне его. Часто рассеянную волну обозначают  $u_s$  от английского scattering – рассеяние, т.о.  $u_s \equiv u_1$ .

### 3.2.2. Пределы применимости метода

Оценим, когда борновское приближение допустимо. Энергия, рассеянная некоторым объемом среды  $L^3$ , должна быть много меньше падающей на него энергии первичной волны. Например, при гауссовой функции корреляции

$$B_\varepsilon(\rho) = \langle \varepsilon_1^2 \rangle \exp(-\rho^2/l^2)$$

( $l$  – средний масштаб неоднородностей среды) имеем спектральную плотность

$$\Phi_\varepsilon(q) = \frac{\langle \varepsilon_1^2 \rangle}{8\pi^{3/2}} l_\varepsilon^3 \exp\left(-\frac{q^2 l_\varepsilon^2}{4}\right),$$

что дает условие

$$\langle \varepsilon_1^2 \rangle kL \ll 1/k l (1 - \exp(-2k^2 l^2)) \equiv F(kl). \quad (3.5)$$

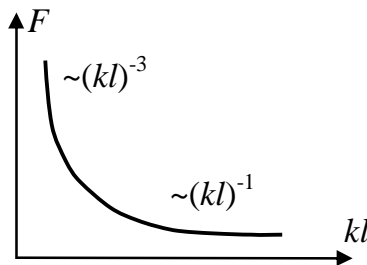


Рис. 3. Схематичный вид функции (3.5)

Условие (3.5) означает, что ограничиваются сверху интенсивность флуктуаций диэлектрической проницаемости и путь  $L$  волны в среде: необходимо, чтобы  $L \ll d \equiv F(kl)/k \langle \varepsilon_1^2 \rangle$ . Из графика функции  $F(kl)$  видно, что это условие тем жестче, чем больше  $kl$ , т.е. чем больше размер неоднородностей по сравнению с длиной волны. Физическая причина этого заключается в том, что с ростом  $kl$  диаграмма направленности все больше вытягивается вперед, в направлении распространения, и все большее значение приобретает переизлучение на многих неоднородностях, т.е. многократное рассеяние.

В турбулентной атмосфере флуктуации характеризуются непрерывным набором масштабов. Однако существует интервал, в котором турбулентное поле можно считать локально однородным и изотропным. Напомним, что это инерционный интервал, он лежит между  $l_0$  и  $L_0$ , и в нем структурная функция имеет вид  $D_\varepsilon(\rho) = C_\varepsilon^2 \rho^{2/3}$ . При этом автоматически отсекается влияние слишком больших неоднородностей. Однако проблема остается: рассеяние на крупномасштабных неоднородностях тоже надо как-то описывать. Для этого приспособлены другие методы.



### 3.2.3. Вычисление средней интенсивности рассеянного поля

Любой прибор, в том числе и наш глаз, регистрирует не само поле, а интенсивность (причем обычно сразу *среднюю*):  $\langle I_s \rangle = \langle |u_s|^2 \rangle$ . Найдем ее в борновском приближении:

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = k^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{r}') M(\vec{r}'') G(\vec{r}, \vec{r}') G^*(\vec{r}, \vec{r}'') u_0(\vec{r}') u_0^*(\vec{r}'') \langle \varepsilon_1(\vec{r}') \varepsilon_1(\vec{r}'') \rangle d\vec{r}' d\vec{r}''$$

(как всегда звездочка означает комплексное сопряжение). Видно, что для вычисления этой величины достаточно знать *только* корреляционную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$B_\varepsilon(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \varepsilon_1(\vec{r}_1) \varepsilon_1(\vec{r}_2) \rangle.$$

Будем, как обычно, предполагать, что флуктуации диэлектрической проницаемости статистически однородны, т.е.  $B_\varepsilon(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  зависит только от разности координат.

Обычно в радиолокации рассеивающий объем лежит достаточно далеко от излучателя – в зоне Фраунгофера. Тогда будем считать падающую волну чисто сферической, т.е. пренебрежем диаграммой направленности. С учетом этого и с использованием обозначения  $A$  для амплитуды падающей волны, запишем

$$u_0(\vec{r}) = \frac{A}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \exp[ik|\vec{r} - \vec{r}_0|].$$

Здесь  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор точки источника, а  $\vec{r}$  – точки наблюдения (по отношению к произвольно выбранному началу координат).

В результате подстановки первичного поля и функции Грина имеем тогда

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = \frac{k^4 A^2}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{r}') M(\vec{r}'') B_\varepsilon(\vec{r}' - \vec{r}'') \times \\ \times \frac{\exp[ik(|\vec{r} - \vec{r}'| - |\vec{r} - \vec{r}''| + |\vec{r}_0 - \vec{r}'| - |\vec{r}_0 - \vec{r}''|)]}{|\vec{r} - \vec{r}'| \cdot |\vec{r} - \vec{r}''| \cdot |\vec{r}_0 - \vec{r}'| \cdot |\vec{r}_0 - \vec{r}''|} d\vec{r}' d\vec{r}''.$$

Для вычислений здесь удобно перейти к разностной координате  $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$  и координате центра тяжести  $\vec{R} = (\vec{r}' + \vec{r}'')/2$ . Это дает

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = \frac{k^4 A^2}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}) M(\vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}) B_\varepsilon(\vec{\rho}) \times \\ \times \frac{\exp\left[ik\left(\left|\vec{r} - \vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}\right| - \left|\vec{r} - \vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}\right| + \left|\vec{r}_0 - \vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}\right| - \left|\vec{r}_0 - \vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}\right|\right)\right]}{\left|\vec{r} - \vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}\right| \cdot \left|\vec{r} - \vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}\right| \cdot \left|\vec{r}_0 - \vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}\right| \cdot \left|\vec{r}_0 - \vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}\right|} d\vec{R} d\vec{\rho}.$$

Упростим полученное выражение. Обратим внимание на то, какие характерные масштабы присутствуют в задаче. Это длина волны  $\lambda$ , радиус корреляции неоднородностей среды  $l_\varepsilon$ , характерный размер рассеивающего объема  $L$ , расстояние от источника до рассеивающего объема  $R_i$  и расстояние от рассеи-

вающего объема до точки наблюдения  $R_s$ . Обычно выполнены неравенства  $\lambda, l_\varepsilon \ll L \ll R_i, R_s$ . Используем это для оценок:

$$|\vec{r} - \vec{R}| \sim |\vec{R}_s|, \quad \left| \frac{\vec{\rho}}{2} \right| \sim l_\varepsilon$$

(последнее особенно важно, т.к. мы считаем, что корреляционная функция  $B_\varepsilon$  стремится к нулю при  $\rho < l_\varepsilon$ ) и разложим в ряд Тейлора:

$$\left| \vec{r} - \vec{R} \pm \frac{\vec{\rho}}{2} \right| = |\vec{r} - \vec{R}| \pm \frac{1}{2}(\vec{n}_s, \vec{\rho}) + O\left(\frac{l_\varepsilon^2}{R_s^2}\right).$$

Здесь первое слагаемое имеет порядок  $R_s$ , второе  $-l_\varepsilon$ , а  $\vec{n}_s = \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|}$  — единичный

вектор в направлении на точку наблюдения. Аналогично

$$\left| \vec{r}_0 - \vec{R} \mp \frac{\vec{\rho}}{2} \right| = |\vec{r}_0 - \vec{R}| \pm \frac{1}{2}(\vec{n}_i, \vec{\rho}) + O\left(\frac{l_\varepsilon^2}{R_i^2}\right),$$

где  $\vec{n}_i = \frac{\vec{R} - \vec{r}_0}{|\vec{R} - \vec{r}_0|}$  — единичный вектор в направлении источника.

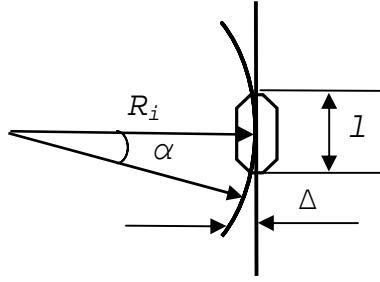


Рис. 4. Отклонение сферического волнового фронта от плоского

Это приближение используем в знаменателе. В экспоненте разложение необходимо сделать более аккуратно: там необходимо выполнение условия  $l_\varepsilon \ll \lambda$  (т.к. набег фазы сравнивается с  $\pi$ ), а мы пока рассматриваем более общий случай. Но пусть выполнено условие  $\frac{kl_\varepsilon^2}{R_{i,s}} \ll 1$ . Это значит, что мы рассматриваем

точки в зоне Фраунгофера, т.е. пренебрегаем сферичностью волны (см. рис. 4, при такой аппроксимации набег фазы в зазоре  $\Delta$  между плоским и сферическим фронтом должен быть много меньше  $\pi$ ). Оценим из рисунка:

$$\Delta = R_i - R_i \cos \alpha = R_i(1 - \cos \alpha) \approx R_i \alpha^2,$$

где  $\alpha = l_\varepsilon/R_i$  — угловой размер неоднородностей, он должен быть много меньше 1, этим мы и воспользовались. Набег фазы равен  $k\Delta$ . Тогда требуем  $kR_i \alpha^2 \ll 1$ , следовательно,  $\frac{kl_\varepsilon^2}{R_i} \ll 1$ . Учтем еще, что волновой вектор рассеянного поля

имеет ту же величину, но направление его меняется. Поэтому введем вектор рассеяния

$$\vec{q} = k(\vec{n}_s - \vec{n}_i)$$

(см. рис. 5) и все упростим. В результате

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = \frac{k^4 A^2}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{2}) M(\vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{2}) B_\varepsilon(\vec{\rho}) \frac{\exp[-i(\vec{q}, \vec{\rho})]}{(\vec{r} - \vec{R})^2 (\vec{r}_0 - \vec{R})^2} d\vec{\rho} d\vec{R}.$$

Еще одно приближение:

$$M(\vec{R} + \vec{\rho}/2) M(\vec{R} - \vec{\rho}/2) \approx M(\vec{R}) \cdot M(\vec{R}) = M(\vec{R}),$$

последний переход сделан потому, что эта функция равна либо единице, либо нулю.

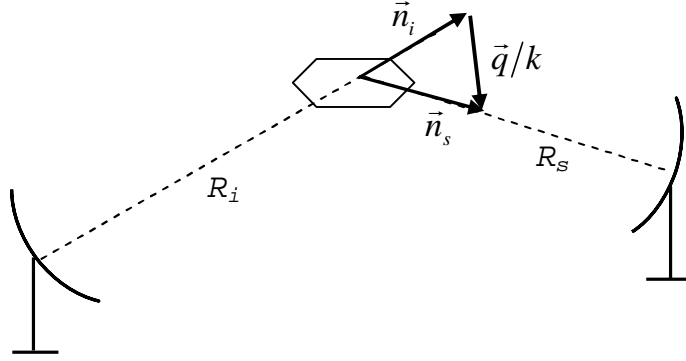


Рис. 5. К определению вектора рассеяния

Вообще величиной  $\rho/2$  по сравнению с  $R$  можно пренебречь всегда, кроме того случая, когда  $l_g/L \geq 1$ . Т.о., мы делаем ошибку порядка

$$l_g L^2 / V \sim l_g L^2 / L^3 = l_g / L,$$

и необходимо  $l_g \ll L$ . Тогда

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = \frac{k^4 A^2}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{R}) B_\varepsilon(\vec{\rho}) \frac{\exp[-i(\vec{q}, \vec{\rho})]}{(\vec{r} - \vec{R})^2 (\vec{r}_0 - \vec{R})^2} d\vec{\rho} d\vec{R}.$$

Теперь интегралы факторизуются, к тому же интеграл по разностной координате – это Фурье-преобразование корреляционной функции. Поэтому удобно дальше пользоваться спектральной плотностью

$$\Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int B_\varepsilon(\vec{\rho}) \exp[-i(\vec{\kappa}, \vec{\rho})] d\vec{\rho},$$

с учетом этого

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = \frac{\pi k^4 A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{R}) \Phi_\varepsilon(\vec{q}) \frac{d\vec{R}}{(\vec{r} - \vec{R})^2 (\vec{r}_0 - \vec{R})^2}.$$

Но обычно еще больше упрощают: поскольку  $R_i, R_s \gg L$ , то делают замену

$$(\vec{r} - \vec{R})^2 \approx R_s^2, \quad (\vec{r}_0 - \vec{R})^2 \approx R_i^2.$$

Кстати, именно эти расстояния –  $R_i, R_s$  – обычно удается определить на практике. К тому же обычно считают вектор рассеяния постоянным, и спектральную плотность тоже выносят из-под интеграла:

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = \frac{\pi k^4 A^2}{2R_i^2 R_s^2} \Phi_\varepsilon(\vec{q}) \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{R}) d\vec{R}.$$

Видно, что этот интеграл дает просто объем  $V$ , занятый случайными неоднородностями. Множитель перед интегралом тоже можно чуть упростить: входящее туда отношение  $A^2/R_i^2 = I_0$  – интенсивность падающей волны. В результате

$$\langle I_s(\vec{r}) \rangle = \frac{\pi k^4}{2} I_0 V \frac{1}{R_s^2} \Phi_\varepsilon(\vec{q}).$$

Сюда входит коэффициент

$$\sigma_s = \frac{\pi k^4}{2} \Phi_\varepsilon(\vec{q}),$$

который называется сечением рассеяния. По смыслу это поток энергии в единицу телесного угла, поделенный на интенсивность падающего излучения. Основная особенность полученного выражения – это селективный характер рассеяния (зависимость от угла  $\theta$  между векторами  $\vec{n}_i, \vec{n}_s$ ).

Будем считать неоднородности среды *изотропными*, тогда спектральная плотность зависит только от *модуля* пространственной частоты. Для *модуля* вектора рассеяния получаем из рис. 4:

$$q \equiv |\vec{q}| = 2k \sin(\theta/2).$$

Тогда

$$\sigma_s = \frac{\pi k^4}{2} \Phi_\varepsilon(2k \sin(\theta/2)).$$

Обсудим полученный результат.

1. Мелкомасштабные (по сравнению с длиной волны) неоднородности:

$$1/l_\varepsilon = 1/q = 2k \sin(\theta/2) \gg 2k$$

(синус оценили по максимуму). Это значит, что функция корреляции и спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости имеют следующий вид (см. рис. б): корреляционная функция очень быстро спадает на характерном масштабе неоднородностей  $l_\varepsilon$ , а спектральная плотность, соответственно, медленно спадает на масштабе  $q \sim 1/l_\varepsilon$ , поэтому можно считать, что  $\Phi_\varepsilon(q) \cong \Phi_\varepsilon(0)$ , т.е. рассеяние по любому направлению почти одинаково (изотропно).

2. Крупномасштабные неоднородности.

Здесь будет выполнено обратное неравенство:  $1/l_\varepsilon \ll k$ . Тогда спектральная плотность быстро спадает – она существенно не равна нулю только в пределах радиуса корреляции (масштаба неоднородностей). Иными словами, можно считать ее равной нулю, когда

$$1/l_\varepsilon = 2k \sin(\theta/2),$$

т.е. когда

$$\sin(\theta/2) \sim 1/l_\varepsilon k \sim \lambda/l_\varepsilon \ll 1.$$

Это неравенство означает, что  $\theta \ll 1$ , и синус можно заменить значением угла:

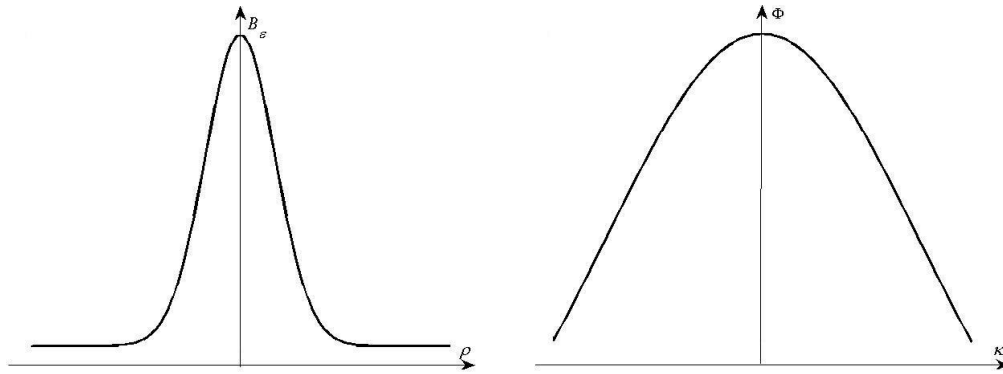


Рис. 6. Корреляционная функция и спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости в случае мелкомасштабных неоднородностей

$$\sigma_s = \frac{\pi k^4}{2} \Phi_\varepsilon(k\theta).$$

В направлении падающей волны ( $\theta = 0$ ) волна, рассеянная на крупномасштабных неоднородностях примерно такая же, как и рассеянная на мелкомасштабных.

Сделаем оценку предельного угла  $\theta^*$ , при котором рассеяние пропадает, т.е. при котором  $\Phi_\varepsilon(\kappa) \sim 0$ . Этот угол имеет порядок

$$\theta^* \sim 1/l_\varepsilon k \sim \lambda/l_\varepsilon \ll 1.$$

Значит, рассеянная волна идет только в некий малый конус. Чем больше масштаб неоднородностей, тем этот конус уже.

### 3.3. Рассеяние на крупномасштабных неоднородностях

Итак, с ростом  $kl$  необходимо учитывать следующие слагаемые ряда теории возмущений, либо пользоваться другими методами, учитывающими многократное рассеяние и использующими малый параметр  $1/kl$ . Это метод плавных возмущений (метод Рытова) и метод параболического уравнения.

Пусть в (3.1) поле  $u$  представимо в виде  $u = U(\vec{r}) \exp(-ikx)$ , где  $x$  – направление распространения первичной волны. Тогда от уравнения (3.1) перейдем к следующему:

$$-2ik \frac{\partial U}{\partial x} + \Delta U = -k^2 \varepsilon_1 U.$$

Если  $x \gg l_\varepsilon \gg \lambda$ , то выполнено неравенство  $\left| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|$ . В этом случае можно от полного лапласиана перейти к лапласиану по поперечным координатам, в результате чего получим параболическое уравнение

$$-2ik \frac{\partial U}{\partial x} + \Delta_\perp U = -k^2 \varepsilon_1 U.$$

По-другому это называется диффузионным приближением (хотя коэффициент диффузии тут мнимый). Физический смысл состоит в медленной на масштабе длины волны поперечной диффузии энергии волнового поля с ростом  $x$ .

**Метод плавных возмущений** (МПВ) отличается тем, что в качестве  $U$  вводится комплексная фаза  $\Psi = \chi + iS$  (где  $\chi$  – уровень амплитуды, по определению  $\chi = \ln(A/A_0)$ ,  $S$  – собственно фаза). Подстановка  $U = \exp(\Psi)$  в параболическое уравнение дает уравнение МПВ:

$$2ik \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Delta_{\perp} \Psi + (\nabla_{\perp} \Psi)^2 = -k^2 \varepsilon_1.$$

Это уравнение уже не параметрическое, зато оно стало нелинейным. Важно, что функция Грина левых частей (т.е. в регулярной среде – при  $\varepsilon_1=0$ ) параболического уравнения и линеаризованного уравнения МПВ (т.е. при отбрасывании квадратичного слагаемого  $(\nabla_{\perp} \Psi)^2$ ) одна и та же:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = - \frac{\exp\left\{ik \left[|x-x'| + (y-y')^2 + (z-z')^2\right] / [2|x-x'|]\right\}}{4\pi|x-x'|}.$$

Легко понять такую структуру функции Грина (говорят, что она отвечает параболическому, или френелевскому приближению). В разд. 3.1 была использована функция Грина, отвечающая волновому уравнению. Здесь мы перешли от полного лапласиана к лапласиану по поперечным координатам, и функция Грина упрощается. Дело в том, что нас интересует рассеяние на крупномасштабных неоднородностях:  $kl \sim (l/\lambda) \gg 1$ . Это означает, что существенный вклад в рассеянное поле дают только неоднородности в пределах конуса с полураствором  $1/kl$  (т.е. происходит рассеяние *вперед*). Поэтому от точного выражения обычно переходят к параболическому (френелевскому) приближению: учитывают

$$\rho_{\perp}^2 \ll (x-x')^2,$$

и вместо точного множителя (он входил в функцию Грина, отвечающую исходному уравнению (3.1))

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \equiv \sqrt{(x-x')^2 + \rho_{\perp}^2}$$

берут два первых слагаемых разложения в ряд Тейлора

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |x-x'| \left[ 1 + \rho_{\perp}^2 / 2(x-x')^2 \right].$$

После этого в амплитуде оставляют только первое слагаемое, а в фазе – оба. В результате

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = - \frac{\exp\left[ ik \left( |x-x'| + \rho_{\perp}^2 / 2(x-x')^2 \right) \right]}{4\pi|x-x'|}.$$

Тогда при падении плоской волны  $u(\vec{r}, x) = U(\vec{r}) \exp[-ik(x-x')]$  получим

$$U(\vec{r}) = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^x dx' \iint \varepsilon_1(\vec{r}') U(\vec{r}') \frac{\exp\left[ ik \rho_{\perp}^2 / (x-x') \right]}{(x-x')} d\rho'_{\perp}.$$

При этом мы пренебрегаем отражением (рассеяние только вперед) – это видно из пределов интегрирования по  $x$ .

Оценим длины трассы в среде, для которых годится сделанное приближение. Для того, чтобы в разложении функции  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  для фазы можно было отбросить 3-е слагаемое, необходимо

$$k \frac{|x - x'| \rho_{\perp}^4}{8(x - x')^4} \ll \pi.$$

Поскольку излучение идет в узкий конус с полураствором  $1/kl \ll 1$ , то справедлива оценка

$$\rho_{\perp}^4 = (x - x')^4 \operatorname{tg}^4(1/kl) \sim \frac{(x - x')^4}{(kl)^4}.$$

Положив  $x' = 0$ , мы только усилим неравенство:

$$\frac{kx^4}{8k^4 l^4 x^3} \ll \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda^3 x}{l^4} \ll 1.$$

Последнему равенству можно придать совершенно очевидный смысл, если переписать его в виде

$$\lambda x/l^2 \ll l^2/\lambda^2.$$

Это неравенство означает, что приближение годится для таких длин трасс  $x$  в среде, для которых отношение площади зоны Френеля  $\lambda x$  к площади неоднородностей  $l^2$  мало по сравнению с  $l^2/\lambda^2$ . Заметим, что ввиду малости длины волны (оптика) справа стоит очень большое число, т.е. ограничение на длину трассы не очень сильное.

Итак, при крупномасштабных неоднородностях ( $l/\lambda \gg 1$ , это наиболее типичный случай в оптике) оба уравнения охватывают области дифракции Фраунгофера ( $1 \ll \lambda x/l^2 \ll l^2/\lambda^2$ ), Френеля ( $\lambda x/l^2 \sim 1$ ) и геометрической оптики ( $\lambda x/l^2 \ll 1$ ). В геометрической оптике, поскольку  $\lambda \ll l$ , допустимо  $x \gg l$ , т.е. на пути луча может быть много отдельных неоднородностей.

Области применимости МПВ и МПУ различны: 1-е приближение МПВ ограничено условием малости флуктуаций уровня ( $\langle \chi^2 \rangle \leq 1$ ), а МПУ пригодно и в области сильных флуктуаций амплитуды. Если надо знать поведение фазы  $S$ , то удобнее МПВ, а для вычисления моментов поля лучше использовать МПУ.

### 3.3.1. Метод плавных возмущений

На практике обычно надо решать точные, а не приближенные (линеаризованные) уравнения. Для этого приходится переходить к разложению, учитывая малость флуктуаций диэлектрической проницаемости. Комплексная фаза  $\Psi$  раскладывается в ряд

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n,$$

$n$ -й член ряда  $\Psi_n$  пропорционален  $\langle \varepsilon_1^2 \rangle^{n/2}$ . Полагая  $U = \exp(\Psi)$ , при подстановке этого разложения в волновое уравнение получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \Psi_0 + (\nabla_{\perp} \Psi_0)^2 + k^2 &= 0, \\ \Delta_{\perp} \Psi_1 + 2\nabla_{\perp} \Psi_0 \nabla_{\perp} \Psi_1 + k^2 \varepsilon_1 &= 0, \end{aligned}$$





рейти к приближению Френеля (учесть, что излучение идет только в узкий конус).

Итак, мы знаем в общем случае  $\Psi_1$ . Это значит, что фазу  $\Psi_1$  можно найти и для плоской, и для сферической волн, и для пространственно-ограниченных пучков, а с помощью  $\Psi_1$  можно находить корреляционные функции фазы и уровня (пространственные, временные, частотные).

### 3.3.2. Пределы применимости МПВ

Остановимся на условиях, при которых можно оставить только *первое* приближение. Из сравнений 2-го приближения с 1-м следует, что необходимо

$$|\langle \chi_2 \rangle| \ll 1, \quad \langle \chi_2^2 \rangle - \langle \chi_2 \rangle^2 \ll \langle \chi_1^2 \rangle.$$

Известно, что в плоской и сферической волнах

$$\langle \chi_2 \rangle = -\langle \chi_1^2 \rangle, \quad \langle \chi_2^2 \rangle = a \langle \chi_1^2 \rangle^2$$

(коэффициент  $a \sim 1$ ). Поэтому в среде с одномасштабными флуктуациями условия для  $\chi_1$  (аналогично и для  $S_1$ ) оказываются достаточно жесткими:

$$\langle \chi_1^2 \rangle \ll 1, \quad \langle S_1^2 \rangle \ll 1,$$

а это эквивалентно борновскому приближению. Однако необходимость таких жестких условий неочевидна. Обычно на практике нужен не полный набег фазы  $S$ , а разность  $S(\vec{r}_1) - S(\vec{r}_2)$  при не слишком большой базе  $\rho = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Тогда оказывается достаточно  $D_{S_2}(\rho) \ll D_{S_1}(\rho)$ . Смысл состоит в том, что фаза должна *плавно* меняться – медленно на длине волны, хотя сами изменения по величине могут быть и большими. Для локально однородной турбулентности оказывается

$$\langle \chi_2^2 \rangle = a \langle \chi_1^2 \rangle^2, \quad D_{S_2}(\rho) = b [D_{S_1}(\rho)]^2$$

(множители  $a, b \sim 1$ ). Отсюда следуют ограничения на флуктуации уровня и фазы

$$\langle \chi_1^2 \rangle \ll 1, \quad D_{S_1}(\rho) \ll 1.$$

В турбулентной атмосфере (закон “2/3”) отсюда следует для уровня

$$\langle \chi_1^2 \rangle \sim C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} \ll 1,$$

а второе условие в инерционном интервале дает

$$C_\epsilon^2 k^2 x \rho^{5/3} \ll 1,$$

т.е. при малой базе ( $\rho \ll x$ ) ограничение на флуктуации разности фаз намного слабее, чем ограничение на дисперсию уровня, хотя из экспериментов известно, что 1-е приближение работает вплоть до  $\langle \chi_1^2 \rangle \sim 1$ .

### 3.3.3. Флуктуации уровня и фазы плоской волны (вычисление в рамках МПВ)

Применим метод плавных возмущений к анализу флуктуаций амплитуды (или уровня) и фазы в простейшем случае – при распространении плоской волны. Нам нужно решать уравнение хотя бы для первого порядка. Это уравнение в частных производных. Для его решения перейдем в спектральную (по пространству) область, причем спектры *введем* двумерные:

$$\Psi_1(x, y, z) \equiv \Psi_1(x, \vec{\rho}_\perp) = \iint \Theta(x, \vec{k}_\perp) \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d\vec{k}_\perp,$$

$$\varepsilon_1(x, \vec{\rho}_\perp) = \iint f_\varepsilon(x, \vec{k}_\perp) \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d\vec{k}_\perp,$$

где  $\vec{k}_\perp = \{\kappa_x, \kappa_y\}$ . Тогда, учитывая, что

$$\Delta_\perp \Psi_1 = -(\kappa_y^2 + \kappa_z^2) \Psi_1,$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(\kappa_y^2 + \kappa_z^2) \Theta + 2ik \frac{d\Theta}{dx} + k^2 f_\varepsilon = 0.$$

Легко записать решение:

$$\Theta(x, \vec{k}_\perp) = \frac{ik}{2} \int_0^x \exp[-i\kappa_\perp^2(x-x')/2k] f_\varepsilon(x', \vec{k}_\perp) dx'.$$

Пользуясь этим, найдем в первом приближении уровень:

$$\chi_1 = \text{Re} \Psi_1 = (\Psi_1 + \Psi_1^*)/2.$$

Здесь для вычислений нам потребуется выражение для спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости:

$$f_\varepsilon(x, \vec{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \varepsilon_1(x, \vec{\rho}_\perp) \exp(-i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d\vec{\rho}_\perp$$

и комплексно сопряженное

$$f_\varepsilon^*(x, \vec{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \varepsilon_1(x, \vec{\rho}_\perp) \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d\vec{\rho}_\perp,$$

а поскольку поглощения мы не учитываем, то  $\varepsilon_1$  – вещественная величина, и поэтому

$$f_\varepsilon^*(x, -\vec{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \varepsilon_1(x, \vec{\rho}_\perp) \exp(-i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d\vec{\rho}_\perp = f_\varepsilon(x, \vec{k}_\perp).$$

Тогда, записывая  $\chi_1$  через  $\Psi_1$ , а  $\Psi_1$  – через  $\Theta$ , находим

$$\begin{aligned} \chi_1(\vec{r}) = \frac{ik}{2 \cdot 2} \iint d\vec{k}_\perp \int_0^x \left\{ f_\varepsilon(x', \vec{k}_\perp) \exp \left[ i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp - i\kappa_\perp^2 \frac{(x-x')}{2k} \right] - \right. \\ \left. - f_\varepsilon^*(x', \vec{k}_\perp) \exp \left[ -i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp + i\kappa_\perp^2 \frac{(x-x')}{2k} \right] \right\} dx'. \end{aligned}$$

В фигурных скобках перед вторым слагаемым минус соответствует комплексному сопряжению. В этом слагаемом сделаем замену  $\vec{k}_\perp$  на  $(-\vec{k}_\perp)$  и воспользуемся полученными соотношениями для  $f_\varepsilon$ . Тогда после вынесения общего множителя и элементарных преобразований получаем

$$\chi_1(\vec{r}) = \frac{k}{2} \iint d\vec{k}_\perp \int_0^x f_\varepsilon(x', \vec{k}_\perp) \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) \sin \frac{\kappa_\perp^2(x-x')}{2k} dx'.$$

Но более информативной, в частности, в экспериментах, величиной является функция корреляции. Выпишем поперечную корреляционную функцию (в сечении  $x = \text{const}$ ):

$$B_\chi(x, \vec{\rho}'_\perp, \vec{\rho}''_\perp) = \frac{k^2}{4} \iiint d\vec{k}'_\perp d\vec{k}''_\perp \exp(i\vec{k}'_\perp \vec{\rho}'_\perp + i\vec{k}''_\perp \vec{\rho}''_\perp) \int_0^x \int_0^x \langle f_\varepsilon(x', \vec{k}'_\perp) f_\varepsilon(x'', \vec{k}''_\perp) \rangle \times \\ \times \sin \frac{\kappa'^2_\perp(x-x')}{2k} \sin \frac{\kappa''^2_\perp(x-x'')}{2k} dx' dx''.$$

Отдельно разберемся со средним под интегралом. По смыслу это *спектр* функции корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости. Мы рассматриваем только статистически однородное поле. Поэтому это среднее должно зависеть только от разности пространственной координаты и имеет поэтому вид

$$\langle f(x', \vec{k}'_\perp) f(x'', \vec{k}''_\perp) \rangle = F(x' - x'', \vec{k}'_\perp) \delta(\vec{k}'_\perp + \vec{k}''_\perp).$$

Учитывая выкалывающее свойство дельта-функции и вводя поперечную разностную координату

$$\vec{\rho}_\perp = \vec{\rho}'_\perp - \vec{\rho}''_\perp,$$

получаем

$$B_\chi(x, \vec{\rho}_\perp) = \frac{k^2}{4} \iint d\vec{k}_\perp \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) \int_0^x \int_0^x F_\varepsilon(x' - x'', \vec{k}_\perp) \sin \frac{\kappa_\perp^2(x-x')}{2k} \sin \frac{\kappa_\perp^2(x-x'')}{2k} dx' dx''.$$

На это выражение можно посмотреть еще с одной стороны: экспоненциальный множитель и интеграл по пространственной частоте показывают, что это выражение – не что иное, как двумерный *спектр* флуктуаций уровня, т.е.

$$F_\chi(x, \vec{k}_\perp) = \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x F_\varepsilon(x' - x'', \vec{k}_\perp) \sin \frac{\kappa_\perp^2(x-x')}{2k} \sin \frac{\kappa_\perp^2(x-x'')}{2k} dx' dx''.$$

Это выражение можно немного упростить, если преобразовать произведение синусов, а потом перейти к интегрированию по разностной координате и координате центра тяжести

$$\rho_x = x' - x'', \quad x_0 = (x' + x'')/2.$$

При этом пределы в интеграле по координате центра тяжести остаются теми же, что были в исходном интеграле, а при интегрировании по разностной учтем, что длины трасс в среде обычно намного больше радиуса корреляции неоднородностей. Это позволяет пределы интегрирования расширить до бесконечности, и в результате

$$F_\chi(x, \vec{k}_\perp) \approx \frac{k^2 x}{8} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\rho_x, \vec{k}_\perp) \left( 1 - \frac{k}{\kappa_\perp^2 x} \sin \frac{\kappa_\perp^2 x}{k} \right) d\rho_x.$$

Еще немного преобразуем. Вспомним, что мы использовали пока *двумерный* спектр

$$K_\varepsilon(x, \vec{\rho}_\perp) = \iint F_\varepsilon(\vec{k}_\perp, \rho_x) \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d\vec{k}_\perp.$$

Но можно ввести и *трехмерный* спектр той же функции:

$$K_\varepsilon(\vec{r}) = \iiint \Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}) \exp(i\vec{\kappa}\vec{r}) d\vec{\kappa}.$$

Из сравнения выражений для двух- и трехмерного спектра получаем полезные соотношения:

$$F_\varepsilon(x, \vec{\kappa}_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}) \exp(ik_x x) d\kappa_x,$$

$$\Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(x, \vec{\kappa}_\perp) \exp(-ik_x x) dx.$$

С их помощью можно переписать выражение для спектра флуктуаций уровня: поскольку скобка в подынтегральном выражении не зависит от переменной интегрирования, то

$$F_\chi(x, \vec{\kappa}_\perp) \approx \frac{\pi k^2 x}{4} \left( 1 - \frac{k}{\kappa_\perp^2 x} \sin \frac{\kappa_\perp^2 x}{k} \right) \Phi_\varepsilon(0, \vec{\kappa}_\perp). \quad (3.6)$$

Для спектра флуктуаций *фазы* выражение *почти такое же*: отличие только в знаке перед вторым слагаемым в скобках. С помощью полученной функции корреляции можно, например, найти *дисперсию* флуктуаций фазы:

$$\langle \varphi_1^2 \rangle = \iint F_\varphi(x, \vec{\kappa}_\perp) d\vec{\kappa}_\perp.$$

Рассмотрим **частные случаи**.

1. Область геометрической оптики. Выполнено неравенство

$$\lambda x / l^2 \ll 1.$$

В частотной области этому соответствует  $\kappa^2 x / k \ll 1$ . Такое неравенство тем более выполнено для крупномасштабных неоднородностей. Это значит, что аргумент у синуса много меньше единицы, и можно разложить в ряд:

$$\sin \alpha \approx \alpha - \alpha^3 / 3!$$

Для спектра флуктуаций фазы можно оставить только первый член разложения, для уровня нужно два (т.к. иначе останется ноль). Это дает:

$$F_\varphi(x, \vec{\kappa}_\perp) = \frac{\pi k^2 x}{2} \Phi_\varepsilon(0, \vec{\kappa}_\perp), \quad F_\chi(x, \vec{\kappa}_\perp) = \frac{\pi x^3 \kappa^4}{8} \Phi_\varepsilon(0, \vec{\kappa}_\perp).$$

Сюда входит спектр функции корреляции (или структурной функции в случае атмосферной турбулентности) диэлектрической проницаемости.

Обсуждение:

а) Первое, что видно из этих выражений, – что с ростом расстояния флуктуации уровня растут быстрее, т.к. они пропорциональны  $x^3$ , а для фазы зависимость просто от  $x$ .

б) Флуктуации уровня определяются двумя множителями, из которых первый растет ( $\kappa^4$ ), а второй –  $\Phi(\kappa)$  спадает, имея максимум в нуле. Это значит, что флуктуации уровня зависят от *мелких* неоднородностей (определяются большими  $\kappa$ ). В то же время флуктуации фазы зависят, наоборот, от крупных неоднородностей (максимум этой функции при  $\kappa=0$ ).

2. Зона Фраунгофера. Выполнено *обратное* по отношению к предыдущему случаю неравенство  $\lambda x / l^2 \gg 1$ . Тогда в частотной области

$$\kappa^2 x / k \gg 1.$$

Поскольку синус – ограниченная функция, а входящий перед ним в (3.6) множитель стремится к нулю, то

$$F_x(x, \vec{k}_\perp) \approx F_\varphi(x, \vec{k}_\perp) = \frac{\pi k^2 x}{4} \Phi_\varepsilon(0, \vec{k}_\perp).$$

Обсуждение:

а) Видно, что в *ближней* и *дальней* зоне флуктуации фазы отличаются в два раза.

б) Флуктуации уровня зависят от квадрата волнового числа  $k$ , т.е. от длины волны. Значит, разные длины волн дают разные спектры флуктуаций фазы. Этим объясняется *хроматическое* – с изменением цвета – *мерцание звезд*.

в) Обсудим *поперечную* корреляцию. Нас будет интересовать масштаб спада этой функции. Мы уже получили, что в зоне геометрической оптики корреляция существенна на расстояниях порядка наименьшего масштаба неоднородностей. Теперь нам надо проанализировать функцию

$$K_{\perp x}(x, \vec{\rho}_\perp) = \iint F_x(x, \vec{k}_\perp) \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d\vec{k}_\perp.$$

В *изотропном* случае зависимость будет только от *модуля* пространственной частоты  $k$ , поэтому можно перейти к сферическим координатам. В результате (первый множитель – функция Бесселя нулевого порядка)

$$K_{\perp x}(x, \vec{\rho}_\perp) = J_0(k\rho_\perp) \iint F_x(x, k_\perp) k_\perp dk_\perp.$$

Отдельно рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Для модельной среды, в которой характерна гауссова корреляционная функция (ионосферы)

$$B_\varepsilon(\rho) = \langle \varepsilon_1^2 \rangle \exp(-\rho^2/l^2),$$

имеем

$$\Phi_\varepsilon(k) = \langle \varepsilon_1^2 \rangle l^3 / 8\pi^{3/2} \exp(-l^2 k^2 / 4).$$

Будем интересоваться *средним квадратом* флуктуаций уровня и фазы – это значение функции корреляции при  $\rho_\perp = 0$ . Нужная нам функция Бесселя в нуле равна единице. Окончательный результат при этом такой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \chi_1^2 \rangle \\ \langle \varphi_1^2 \rangle \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \langle \varepsilon_1^2 \rangle k^2 l x \left( 1 \mp \frac{1}{p} \operatorname{arctg}(p) \right).$$

В этом выражении использован волновой параметр  $p = 4x/kl^2$ .

Удобнее не функция корреляции, а нормированная величина – коэффициент корреляции. Из результатов вычисления этого коэффициента следует, что при больших  $p$  корреляция существенна при  $\rho/l \leq 1$ . В противоположном случае ( $p \ll 1$ , область геометрической оптики) у коэффициента корреляции флуктуаций уровня есть область отрицательных корреляций, но характерный масштаб спада остается прежним.

2. Для турбулентной атмосферы используем закон Колмогорова

$$\Phi_\varepsilon = 0.33 C_\varepsilon^2 k^{-11/3}.$$

Здесь из результатов численного расчета следует, что спадание происходит на расстоянии порядка размера зоны Френеля. Корреляция *растет* с ростом рас-

стояния как зона Френеля. Но этот результат годится *только* в инерционном интервале, т.е. при  $l_0 < \sqrt{\lambda x} < L$ .

### 3.3.4. Метод параболического уравнения

Найденное выражение для первого приближения МПВ с точки зрения математической физики является *строгим* решением *параболического* уравнения. Часто параболическое уравнение используется, когда поле на границе случайно, а масштаб неоднородностей поля много больше длины волны. К задачам со случайными граничными условиями относится модель *фазового* (в общем случае – амплитудно-фазового) *экрана*. Таким экраном заменяют *слой* среды с объемными неоднородностями. Самый сложный вопрос здесь – об *эквивалентности* экрана. Обычно слой разбивают на множество более тонких слоев – экранов, и к каждому применяют параболическое уравнение и его решение (поле пересчитывается со слоя на слой). В частности, таким численно-аналитическим методом было проанализировано распространение волны в среде со степенным спектром неоднородностей (частный случай – атмосфера) в работе [14]. На приведенных в этой работе иллюстрациях хорошо показано формирование *каустических структур* по мере того, как растет масштаб неоднородностей.

Итак, основные свойства метода параболического уравнения:

1. Параболическое уравнение учитывает *многократное* рассеяние вперед.
2. *Не учитывается* обратное рассеяние.
3. Дифракция учитывается в приближении Френеля.
4. Это уравнение *первого порядка* по продольной координате, поэтому во входной плоскости достаточно *одного* граничного условия.

### 3.3.5. Применение параболического уравнения к моделированию среды методом фазовых экранов

Пусть плоская немодулированная волна распространяется через слой случайно-неоднородной среды. У такой волны, прежде всего, будут наблюдаться случайные возмущения фазы, обусловленные вариациями фазовой скорости волны в среде. Фазовые вариации фронта распространяющейся волны будут в свою очередь приводить к небольшим случайным изменениям направления распространения волны, в результате чего различные участки первоначально плоского волнового фронта будут распространяться по разным направлениям. Т.о., угловое рассеяние приводит к появлению усиливающей или ослабляющей интерференции, что является причиной флуктуаций амплитуды и фазы волны. Эти нестационарные флуктуации амплитуды и фазы приводят к сложной модуляции несущей частоты. Такие флуктуации удобно анализировать численно-аналитическим методом фазовых экранов.

**1. Формулировка проблемы.** В параболическом приближении электрическое поле волны может быть записано в виде

$$E(y, x, \omega) = U(y, x, \omega) \exp(-ikx). \quad (3.7)$$

При этом параболическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial U}{\partial x} + 2k^2 n_1(y, x, \omega) U = 0. \quad (3.8)$$

Здесь  $n_1$  – флуктуирующая часть показателя преломления, волна распространяется вдоль оси  $x$ , а  $y$  – единственная поперечная координата. Это значит, что слои или неоднородности имеют бесконечную протяженность в направлении второй поперечной оси  $z$ . Обобщение метода на трехмерный случай особых затруднений не вызывает, но требует значительного увеличения машинного времени на численный расчет.

Случайная среда разбивается на ряд тонких слоев, перпендикулярных направлению распространения. Затем неоднородности каждого слоя заменяются тонким фазовым экраном, который с точки зрения геометрической оптики рассматривается просто как изменение фазы волны в результате ее прохождения через этот слой. Уравнение, описывающее прохождение волны через слой толщины  $\Delta x$ , получается из (3.8), если в нем пренебречь первым членом:

$$U\left(y, \frac{\Delta x}{2}\right) = U\left(y, -\frac{\Delta x}{2}\right) \exp\left[-ik \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} n_1(y, x') dx'\right] \equiv U\left(y, -\frac{\Delta x}{2}\right) \exp[i\Phi(y)], \quad (3.9)$$

где функция  $\Phi$  описывает фазовый экран.

Распространение волны в свободном пространстве между фазовыми экранами описывается уравнением (3.8), в котором опущен последний член. Следовательно, распространение волны между точками  $x_1$  и  $x_2$  описывается уравнением

$$E(y, x_2) = \exp[-ik(x_2 - x_1)] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\kappa, x_1) \exp\left[\frac{i\kappa^2(x_2 - x_1)}{2k} + i\kappa y\right] d\kappa, \quad (3.10)$$

где

$$\hat{E} = \hat{U} \exp(-ikx),$$

$\hat{U}$  – двумерное преобразование Фурье от  $U$  в плоскости  $x$ :

$$\hat{U}(\kappa, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(y, x) \exp(-i\kappa y) dy. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.9), (3.10) используются для описания распространения электромагнитной волны от передатчика к приемнику следующим образом. Пусть исходная волна до момента достижения первого экрана была плоской. Непосредственно после прохождения этого экрана изменяется лишь фаза волны в соответствии с (3.9). Для определения  $\hat{E}(\kappa, x)$  при выходе из первого экрана вычисляется Фурье-образ для измененного в результате прохождения через экран поля. Затем с помощью уравнения (3.10) рассчитывается распространение волны в свободном пространстве до второго экрана, расположенного в точке  $x_2$ . Численное решение уравнения (3.8) осуществляется в два этапа: сначала все члены

умножаются на  $\exp[i\kappa^2(x_2 - x_1)/2k]$ , затем берется Фурье-преобразование. Процесс позволяет вычислить характеристики волны на следующем экране и продолжается до тех пор, пока не будет достигнута плоскость приемника. Такой процесс позволяет эффективно находить численные решения параболического уравнения при наличии флуктуаций амплитуды и фазы в случайной среде.

При моделировании процессов распространения на основе МФЭ используются различные функции пространственной спектральной плотности (ПСП) неоднородностей. Чаще других используются степенные ПСП, входными параметрами которых служат дисперсия фазы и внутренний и внешний масштабы неоднородностей. Удобная аналитическая форма спектра, которая имеет степенной характер в интервале между внутренним  $l_i$  и внешним  $L_0$  масштабами неоднородностей и обладает экспоненциальным спадом в области масштабов, меньших  $l_i$ , задается в виде функции Бесселя. При этом одномерная ПСП имеет вид

$$S_{\Phi}(\kappa_y) = \frac{\sigma_{\Phi}^2 (2\pi)^{-1/2} l_i (l_i/L_0)^{m-1} K_{m/2}(l_i \sqrt{\kappa_y^2 + 1/L_0^2})}{K_{(m-1)/2}(l_i/L_0) (l_i \sqrt{\kappa_y^2 + 1/L_0^2})^{m/2}}. \quad (3.12)$$

Для ионосферы обычно ПСП пропорциональна  $\kappa^{-3}$ , поэтому  $m=3$ . Часто используется также ПСП гауссовой формы

$$S_{\Phi}(\kappa_y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} L_0 \sigma_{\Phi}^2 \exp\left(-\frac{\kappa_y^2 L_0^2}{4}\right), \quad (3.13)$$

автокорреляционная функция которой имеет вид

$$B_{\Phi}(y) = \sigma_{\Phi}^2 \exp(-y^2/L_0^2).$$

**2. Построение фазового экрана.** Цель состоит в том, чтобы построить стационарную случайную функцию  $\Phi(n\Delta y)$ , которая бы описывала фазу волны в узлах сетки разбиения, построенного по методу фазовых экранов. Здесь  $\Delta y$  – шаг разбиения,  $n$  – целое число (номер узла). Ось  $y$ , как раньше договорились, направлена перпендикулярно оси распространения волны, т.е. вдоль экрана. Если добавочная фаза на экране записывается в виде непрерывной функции, то ее можно представить преобразованием Фурье

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}(\kappa) \exp(i\kappa y) d\kappa.$$

В дискретном случае, используемом в МФЭ, запишем:

$$\Phi(n\Delta y) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{\Phi}(m\Delta\kappa) \exp(i2\pi mn/N) \Delta\kappa, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Будем рассматривать величину

$$\hat{\Phi}(m\Delta\kappa) = r_m [S(m\Delta\kappa) L/2\pi]^{1/2}$$

в качестве Фурье-образа фазы. Здесь  $S(m\Delta\kappa)$  характеризует дискретные значения заданной пространственной спектральной плотности (ПСП),  $\Delta\kappa=2\pi/L$ ,  $L$  – длина интервала, покрываемого сеткой разбиения. Т.к.  $\Delta y=L/N$ , то

$$\Delta y \Delta\kappa = 2\pi/N.$$



Комплексное число  $r_m$  равно сумме двух независимых гауссовых переменных с нулевым средним и единичной дисперсией:

$$r_m = \sqrt{1/2} (g_{1m} + ig_{2m}).$$

Последовательные значения  $g_{1m}$ ,  $g_{2m}$  получаются численно посредством выборки из последовательности псевдослучайных чисел с гауссовым распределением. Множитель  $\sqrt{1/2}$  вводится для выполнения равенства

$$\langle r_m r_n^* \rangle = \delta_{mn}.$$

При таком выборе значений  $r_m$  функция  $\Phi(n\Delta y)$  представляет сумму случайных гауссовых переменных, поэтому ее вещественная и мнимая части имеют нормальное распределение вероятности. Поскольку фаза каждого экрана вещественна (поглощения нет!), то при расчете можно пользоваться либо реальной, либо мнимой частью построенной функции  $\Phi$ , а т.к. действительная и мнимая части взаимонезависимы, то результаты каждого дискретного преобразования Фурье могут быть использованы для построения двух фазовых экранов, что сокращает время счета. Можно показать, что при таком выборе  $\hat{\Phi}$  фаза  $\Phi$  представляет собой стационарный случайный процесс, ПСП которого есть в точности  $S(k)$ . Следует, однако, заметить, что ПСП для каждой конкретной реализации фазового экрана не обязательно совпадает с требуемым видом ПСП, но среднее значение ПСП по множеству таких реализаций всегда идентично  $S(k)$ .

**3. Критерии применимости МФЭ.** При выборе числа узлов и расстояния между ними следует руководствоваться следующими критериями:

1. Распределение фазы на ФЭ должно быть адекватным реальной фазе.
2. Распространение волны должно происходить без наложения по углу.
3. Краевые эффекты (угловое рассеяние волны на краях сетки разбиения) должно быть минимальным.

Рассмотрим каждый из этих пунктов подробнее.

#### 1. Представление фазы.

Адекватное представление фазы гарантируется в тех случаях, когда длины экрана  $L$  по крайней мере в 5–10 раз больше длины декорреляции фазы, или

$$L > 5L_0,$$

где  $L_0$  – внешний масштаб неоднородностей.

Расстояние между узлами сетки должно быть в несколько раз меньше внутреннего масштаба неоднородностей, т.е.

$$\Delta y < l_i/3.$$

Для выполнения условия теоремы отсчетов Найквиста изменение фазы между соседними узлами сетки должно быть меньше  $\pi$ , т.е.

$$\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y) < \pi.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\Delta y \left| \frac{d\Phi}{dy} \right| < \pi.$$

Известно, что дисперсия производной фазы и автокорреляционная функция связаны соотношением

$$\left\langle \left( \frac{d\Phi}{dy} \right)^2 \right\rangle = - \frac{d^2 B_\Phi(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0}.$$

Из последних двух формул получаем

$$\Delta y < \pi \left( - \frac{d^2 B_\Phi(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \right)^{-1/2}.$$

Например, для гауссовой ПСП тогда получим

$$\Delta y < \frac{\pi L_0}{\sqrt{2}\sigma_\Phi}.$$

## 2. Распространение волны.

Чтобы адекватно описать распространение волны в свободном пространстве между экранами, необходима и достаточно точная дискретизация входящих в уравнение (3.10) функций. Для выполнения критерия отсчетов Найквиста приращение фазы в свободном пространстве при переходе от одного значения  $k$  к соседнему должно удовлетворять неравенству

$$\Delta \left( \frac{\kappa^2 \Delta z}{2k} \right) < \pi.$$

Поскольку

$$\kappa_{\max} = \pi N/L,$$

где  $N$  – число узлов сетки разбиения,  $L$  – длина области разбиения (длина экрана), то предыдущее условие дает

$$\frac{\pi^2 N^2 \Delta z}{2kL^2} - \frac{\pi^2 (N-1)^2 \Delta z}{2kL^2} < \pi$$

или  $\Delta z < 2L\Delta y/\lambda$ . На практике это условие может быть ослаблено, если ПСП фазы мала при больших значениях  $k$ . В этом случае влияние области больших значений  $k$  резается благодаря степенному характеру спектра фазы.

## 3. Краевые эффекты.

В силу дискретности используемых в МФЭ разбиений энергия, покидающая один из краев сетки разбиения, должна полностью приходиться на противоположный край. Важность этого эффекта возрастает по мере увеличения длины трассы. Чтобы полученное решение уравнения распространения волны было справедливым, необходимо выполнение этого условия. Угол  $\theta$  рассеяния волны и фаза  $\Phi$  на фазовом экране связаны соотношением

$$\theta = \frac{1}{k} \frac{d\Phi}{dy},$$

поэтому энергия волны, прошедшей в направлении распространения расстояние  $z$ , пройдет расстояние  $z\theta$  в перпендикулярном направлении. Чтобы можно было пренебречь влиянием краевых эффектов, должно быть выполнено неравенство

$$L > z\theta \quad \text{или} \quad L > \frac{z}{k} \left| \frac{d\Phi}{dy} \right|.$$

Можно еще переписать последнее неравенство:

$$L > \frac{z}{k} \left( -\frac{d^2 B_\Phi(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \right)^{1/2}.$$

В случае гауссовой ПСП это условие дает

$$L > \frac{\sigma_\Phi \lambda z}{\sqrt{2\pi} L_0}.$$

**4. Точность моделирования процесса распространения методом фазовых экранов.** В силу природы метода фазовых экранов точность моделирования на его основе зависит от точности аппроксимации неоднородностей в толстом слое тонкими экранами. В общем случае, когда показатель степени спектра, а также внутренний и внешний масштабы неоднородностей могут меняться на протяжении области распространения, расчет с помощью МФЭ является единственным способом определения поля распространяющейся волны. МФЭ следует применять также в тех случаях, когда наблюдатель находится в непосредственной близости или в самой рассеивающей среде, т.к. точность аппроксимации с помощью фазовых экранов зависит от расстояния между экраном и наблюдателем.

## Глава 4. Понятие о марковском приближении. Уравнения для статистических моментов поля

Методы решения волнового уравнения, которые были рассмотрены выше, применимы только при условии малости флуктуаций амплитуды поля. Попытки распространить их на случай сильных флуктуаций были безуспешными. Прогресс в этом направлении был достигнут с помощью методов, основанных на получении уравнений для статистических моментов комплексной амплитуды поля  $u(x, \vec{\rho})$ :

$$M_{n,m}(x, \vec{\rho}_n, \vec{\rho}'_m) = \langle u(x, \vec{\rho}_1) \dots u(x, \vec{\rho}_n) u^*(x, \vec{\rho}'_1) \dots u(x, \vec{\rho}'_m) \rangle$$

и на последующем их решении. Усреднение здесь надо проводить по ансамблю реализаций случайной диэлектрической проницаемости.

Уравнения для статистических моментов выводятся на основе параболического уравнения, при этом возможны разные способы. В частности, существует способ, основанный на марковском приближении, который мы сейчас обсудим.

Мы уже понимаем, что флуктуации какого-либо параметра волны связаны с неоднородностями определенного масштаба. Например, флуктуации интенсивности обусловлены в основном неоднородностями, поперечный размер которых порядка радиуса зоны Френеля  $\sqrt{\lambda x}$ , флуктуации разности фаз на базе  $\rho$  – неоднородностями с поперечным масштабом порядка  $\rho$ . Но если среда *статистически изотропна*, то это значит, что *продольный* радиус корреляции имеет тот же порядок, что и *поперечный*. Если длина трассы  $x$  много больше размера неоднородностей, то выделяются малые параметры  $\rho/x$  и  $\sqrt{\lambda x}/x$ , по которым и можно строить ряд. Первый член такого ряда можно получить, заменяя формально продольный радиус корреляции флуктуаций  $\varepsilon_1$  нулем, т.е. заменяя *истинную* корреляционную функцию  $B_\varepsilon(x - x', \vec{\rho} - \vec{\rho}')$  на *эффективную*

$$B_\varepsilon^{eff}(x - x', \vec{\rho} - \vec{\rho}') = \delta(x - x') A(\vec{\rho} - \vec{\rho}').$$

Здесь  $A$  определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon dx = \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon^{eff} dx = A(\vec{\rho} - \vec{\rho}').$$

Вот для такой эффективной ковариационной функции распространение волны можно рассматривать как марковский случайный процесс и для моментов поля получать замкнутые уравнения.

### 4.1. Уравнение для среднего поля

В качестве примера получим уравнение для среднего поля  $\langle U \rangle$ . Для этого снова взглянем на параболическое уравнение:

$$\Delta_\perp U - 2ik \frac{\partial U}{\partial x} + k^2 \varepsilon_1 U = 0.$$

Непосредственно усреднить его мешает произведение  $\varepsilon_1 U$  в последнем слагаемом. Т.о., задача в том, чтобы как-то расщепить среднее  $\langle \varepsilon_1 U \rangle$ . Чтобы сделать это, воспользуемся тождеством, которое проверяется справа налево:

$$-2ik \frac{\partial U}{\partial x} + k^2 \varepsilon_1 U \equiv 2ik \exp \left[ -\frac{k^2}{2ik} \int_0^x \varepsilon_1(\vec{\rho}_\perp, x') dx' \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \exp \left( \frac{k^2}{2ik} \int_0^x \varepsilon_1(\vec{\rho}_\perp, x') dx' U(\vec{\rho}_\perp, x) \right) \right]$$

Это позволяет от параболического уравнения перейти к интегродифференциальному:

$$U(x, \vec{\rho}) = U(0, \vec{\rho}) \exp \left[ -\frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, \vec{\rho}) d\xi \right] - \frac{i}{2k} \int_0^x \exp \left( -\frac{ik}{2} \int_\eta^x \varepsilon_1(\xi, \vec{\rho}) d\xi \right) \Delta_\perp U(\eta, \vec{\rho}) d\eta.$$

Усредним это равенство:

$$\begin{aligned} \langle U(x, \vec{\rho}) \rangle &= U(0, \vec{\rho}) \left\langle \exp \left[ -\frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, \vec{\rho}) d\xi \right] \right\rangle - \\ &- \frac{i}{2k} \int_0^x \left\langle \exp \left( -\frac{ik}{2} \int_\eta^x \varepsilon_1(\xi, \vec{\rho}) d\xi \right) \Delta_\perp U(\eta, \vec{\rho}) \right\rangle d\eta. \end{aligned}$$

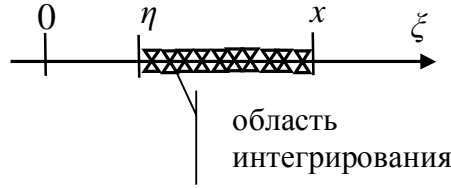


Рис. 7. Пояснение принципа динамической причинности

Воспользуемся принципом динамической причинности. Для этого заметим, что граничное условие для поля  $U$  ставится при  $x=0$ . Поэтому, в силу дельта-коррелированности случайного поля  $\varepsilon_1(\xi, \vec{\rho})$ , поле  $U(\eta, \vec{\rho})$  функционально зависит только от  $\varepsilon_1(\xi, \vec{\rho})$  при  $\xi < \eta$ . А в показателе экспоненты под интегралом по  $\eta$  значения  $\varepsilon_1(\xi, \vec{\rho})$  берутся при  $\xi > \eta$ . Значит, поперечный лапласиан от  $U$  и экспонента под интегралом по  $\eta$  статистически независимы (вот здесь и помогает марковость процесса  $\varepsilon_1$ ). Это дает

$$\begin{aligned} \langle U(x, \vec{\rho}) \rangle &= U(0, \vec{\rho}) \left\langle \exp \left[ -\frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, \vec{\rho}) d\xi \right] \right\rangle - \\ &- \frac{i}{2k} \int_0^x \Delta_\perp \langle U(\eta, \vec{\rho}) \rangle \left\langle \exp \left( -\frac{ik}{2} \int_\eta^x \varepsilon_1(\xi, \vec{\rho}) d\xi \right) \right\rangle d\eta. \end{aligned}$$

Дальнейшее упрощение будет связано с тем, что мы рассмотрим гауссов процесс  $\varepsilon_1(\xi, \vec{\rho})$  с нулевым средним. Введем временное обозначение:

$$\int_\eta^x \varepsilon_1(\xi, \vec{\rho}) d\xi = a.$$

Очевидно, что  $a(x)$  – тоже гауссово случайное поле с нулевым средним, и усредняя по гауссовой плотности вероятностей

$$W(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle a^2 \rangle}} \exp \left[ -\frac{(a - \langle a \rangle)^2}{2 \langle a^2 \rangle} \right],$$

имеем

$$\left\langle \exp \left( \frac{ik}{2} a \right) \right\rangle = \exp \left( -\frac{k^2 \langle a^2 \rangle}{8} \right).$$

Осталось выяснить, что такое  $\langle a^2 \rangle$  в нашем случае. Запишем это среднее исходя из того, как мы определили  $a$ :

$$\begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= \int_{\eta}^x \int_{\eta}^x \langle \varepsilon_1(x', \vec{\rho}) \varepsilon_1(x'', \vec{\rho}) \rangle dx' dx'' = \int_{\eta}^x \int_{\eta}^x B_{\varepsilon}^{\text{eff}}(0, x' - x'') dx' dx'' = \\ &= \int_{\eta}^x \int_{\eta}^x A(0) \delta(x' - x'') dx' dx'' = A(0)(x - \eta). \end{aligned}$$

Если теперь два последних равенства подставить в интегро-дифференциальное уравнение для среднего поля  $U$ , то после некоторых преобразований получается достаточно простое по форме уравнение

$$\Delta_{\perp} \langle U \rangle - 2ik \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} - \frac{ik^3 A(0)}{4} \langle U \rangle = 0.$$

Заметим, что теперь все свойства среды “сидят” в  $A(0)$ . Решение этого уравнения записывается в виде

$$\langle U(x, \vec{\rho}) \rangle = U_0(x, \vec{\rho}) \exp(-x/2d),$$

где  $U_0(x, \vec{\rho})$  – решение этого уравнения при том же граничном условии, но в регулярной среде,  $d = 4/[k^2 A(0)]$  – характерное расстояние, на котором происходит затухание. Причина этого затухания в рассеянии.

## 4.2. Уравнения для высших статистических моментов

Аналогично (или несколько другими методами) можно получать уравнения для любых моментов поля. Все методы приводят к одному и тому же результату. Например, для второго момента (функции когерентности второго порядка)

$$\Gamma_2(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \equiv B_U(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \langle U(x, \vec{\rho}_1) U^*(x, \vec{\rho}_2) \rangle$$

получается уравнение

$$-2ik \frac{\partial B_U}{\partial x} + (\Delta_1 - \Delta_2)_{\perp} B_U - \frac{ik^3}{2} [A(0) - A(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)] B_U = 0, \quad (4.1)$$

а для момента произвольного  $(n+m)$ -го порядка

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} M_{n,m} + (\Delta_{\rho_1} + \dots + \Delta_{\rho_n} - \Delta'_{\rho_1} - \dots - \Delta'_{\rho_m}) M_{n,m} + \frac{ik^3}{4} Q_{n,m} M_{n,m} = 0, \quad (4.2)$$

где

$$F_\varepsilon(x, \vec{\rho}) = 2\pi \int \Phi_\varepsilon(x, \kappa) \cos(\vec{\kappa}\vec{\rho}) d\vec{\kappa},$$

$$Q_{n,m}(x, \vec{\rho}_n, \vec{\rho}'_m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_\varepsilon(x, \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j) - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n F_\varepsilon(x, \vec{\rho}'_k - \vec{\rho}_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m F_\varepsilon(x, \vec{\rho}_i - \vec{\rho}'_l) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m F_\varepsilon(x, \vec{\rho}'_k - \vec{\rho}'_l).$$

Отличительной особенностью этих уравнений является то, что область их применимости не ограничивается условием малости относительной дисперсии флуктуаций интенсивности.

Для полного статистического описания волн в случайно-неоднородной среде надо знать соответствующие вероятностные распределения, т.е. всю совокупность статистических моментов поля. Вообще говоря, это невыполнимая задача. К счастью, на практике достаточно знать *нижние* статистические моменты. Наибольший практический интерес представляют *первые четные* моменты  $M_{1,1} = \Gamma_2(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)$  и  $M_{2,2} = \Gamma_4(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3, \vec{\rho}_4)$ . Они используются для расчета средней интенсивности

$$\langle I(x, \vec{\rho}) \rangle = \langle u(x, \vec{\rho}) u^*(x, \vec{\rho}) \rangle = \Gamma_2(x, \vec{\rho}, \vec{\rho}),$$

степени когерентности

$$\gamma(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \Gamma_2(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) / [\Gamma_2(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_1) \Gamma_2(x, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_2)]^{1/2},$$

относительной дисперсии интенсивности

$$\sigma_I^2(x, \vec{\rho}) = \Gamma_4(x, \vec{\rho}, \vec{\rho}, \vec{\rho}, \vec{\rho}) / \Gamma_2^2(x, \vec{\rho}, \vec{\rho}) - 1,$$

коэффициента пространственной корреляции флуктуаций интенсивности, а также для характеристик случайных смещений оптических пучков и изображений.

Заметим, что уравнение для  $B_U$  имеет *точное* общее решение, но уже уравнение для *четвертого* момента (а оно имеет непосредственный практический интерес) до сих пор привлекает внимание исследователей. Дело в том, что уравнение для  $\Gamma_4$  точно не решается, и  $\Gamma_4$  не является суммой произведений  $B_U$ . Это означает, что распределение поля  $U$  негауссово. Но существуют интегралы уравнения для  $\Gamma_4$ . Например, для плоской волны

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Gamma_4(x; \vec{R}, \vec{r}, 0, \vec{\rho}) - |B_U(x, \vec{R}, 0)|^2 \right] d\vec{r} = 0,$$

где  $\vec{R}, \vec{\rho}$  – координата центра тяжести и разностная координата точек наблюдения. Для ограниченного пучка

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Gamma_4(x; \vec{R}, \vec{r}, 0, \vec{\rho}) - |B_U(x, \vec{R}, 0)|^2 \right] d\vec{r} = 0.$$

Это следствие закона сохранения энергии, по которому флуктуации интенсивности связаны с перераспределением энергии внутри пучка.

Ограничения, связанные с использованием параболического уравнения и марковского приближения, одинаковы:

- неоднородности среды мало меняются на длине волны;
- можно пренебречь обратным рассеянием;

- от функции Грина волнового уравнения можно перейти к функции Грина параболического уравнения, т.е. отношение площади зоны Френеля ( $x\lambda$ ) к площади неоднородности  $l^2$  мало по сравнению с  $l^2/\lambda^2$ ;

а, кроме того

- поперечное расстояние между точками много меньше *наибольшего* масштаба неоднородностей;

- радиус когерентности поля всегда должен оставаться много больше длины волны.

Особо отметим, что марковское приближение справедливо при  $x \gg l$ : в области  $x \sim l$  происходит “процесс установления” режима распространения.

### 4.3. Применение функции взаимной когерентности к анализу распространения излучения в турбулентной атмосфере

Функция взаимной когерентности  $\Gamma_2(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \equiv B_U$  позволяет характеризовать энергетические и когерентные свойства волн в случайной среде. В соответствии с (4.2) уравнение для этой функции часто записывают в виде

$$2ik \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} + (\Delta_{\rho_1} - \Delta_{\rho_2}) \Gamma_2 + \frac{i\pi k^3}{2} H(x, \vec{\rho}) \Gamma_2 = 0,$$

(эквивалентная форма записи – уравнение (4.1)), где

$$H(x, \vec{\rho}) = 2 \int \Phi_\varepsilon(x, \vec{k}) [1 - \cos(\vec{k}\vec{\rho})] d\vec{k}.$$

Данное уравнение (в отличие от уравнений для высших порядков, *строгие* решения которых до сих пор неизвестны) имеет *точное* решение, которое достаточно сложным интегральным способом выражается через функцию когерентности поля в начальной плоскости. Мы не будем выписывать это общее решение, а рассмотрим только два частных случая, когда результат существенно упрощается. Часто на практике можно считать, что источник работает в режиме плоской ( $u(\vec{\rho}) = u_0$ ) или сферической ( $u(\vec{\rho}) = 2\pi u_0 \delta(k\vec{\rho})$ ) волны. Результаты в этих случаях таковы: для плоской волны

$$\Gamma_2(x, \vec{\rho}) = |u_0|^2 \exp \left[ -\frac{\pi k^2}{4} \int_{x_0}^x H(\xi, \vec{\rho}) d\xi \right],$$

для сферической волны

$$\Gamma_2(x, \vec{\rho}) = |u_0|^2 \left( \frac{k}{2\pi(x-x_0)} \right)^2 \exp \left[ -\frac{\pi k^2}{4} \int_{x_0}^x H(\xi, \vec{\rho}(1-\xi/x)) d\xi \right]$$

(здесь  $x_0$  – координата источника,  $x$  – координата точки наблюдения).

Попробуем с помощью функции  $\Gamma_2$  проанализировать некоторые эффекты, возникающие при распространении лазерного излучения в турбулентной атмосфере. *Качественно* картину достаточно легко представить. В турбулентной атмосфере происходит уширение пучка и, следовательно, уменьшение интенсивности в приосевой области. Если пучок перехватывается приемной апертурой не полностью, то это приводит к снижению уровня принимаемого сигнала.



ла, которое можно интерпретировать как *кажущееся* понижение прозрачности атмосферы, связанное с турбулентностью.

Основной причиной турбулентного уширения пучка в атмосфере является нарушение пространственной когерентности. Когерентность излучения определяет способность света создавать интерференционную картину и характеризуется комплексной степенью когерентности. Но чем выше когерентность, тем сильнее сказывается искажающее влияние турбулентности среды на его свойства, причем известно из практики, что это влияние сильнее сказывается на пространственной (а не временной) когерентности. Именно поэтому нам и понадобится функция  $\Gamma_2$  – она несет информацию о когерентных свойствах излучения в среде.

**1. Радиус пространственной когерентности** поля определим из условия спада модуля степени когерентности в  $e$  раз. При колмогоровском спектре турбулентности это дает для плоской волны

$$\rho_{nl} = \left[ 1.45k^2L \int_0^1 C_n^2(\xi L) d\xi \right]^{-3/5},$$

где  $L$  – длина трассы. Если трасса однородная, т.е. подынтегральная функция  $C_n^2(\xi L) = \text{const}$ , то

$$\rho_{nl} = (1.45C_n^2k^2L)^{-3/5}.$$

Аналогичные выражения для сферической волны имеют вид

$$\rho_{сф} = \left[ 1.45k^2L \int_0^1 C_n^2(\xi L)(1-\xi)^{5/3} d\xi \right]^{-3/5},$$

а при постоянной вдоль трассы структурной характеристике

$$\rho_{сф} = (0.55C_n^2k^2L)^{-3/5} \approx \sqrt{3}\rho_{nl}.$$

В общем же случае (но именно при колмогоровском спектре!) получить выражение для функции  $\Gamma_2$  удастся только приближенно, но результат достаточно простой:

$$\Gamma_2(x, \vec{R}, \vec{\rho}) = |u_0|^2 \left( \frac{a}{a_{ef}} \right)^2 \exp \left[ -\frac{\rho^2}{4\rho_a^2} - \frac{R^2}{a_{ef}^2} + i \frac{\gamma}{a_{ef}} \vec{R} \vec{\rho} \right],$$

где  $R$ ,  $\rho$  – координата “центра тяжести” и разностная координата точек наблюдения,  $a$  – эффективный радиус гауссова пучка на выходной апертуре,

$$a_{ef}^2 = a^2 \left[ \left( 1 - \frac{L}{F} \right)^2 + \Omega^{-2} \left( 1 + \frac{a^2}{a_k^2} + \frac{4a^2}{3\rho_{nl}^2} \right) \right]$$

– эффективный радиус гауссова пучка в турбулентной атмосфере,  $a_k$  – радиус пространственной когерентности поля на выходной апертуре,

$$\rho_a^2 = a_{ef}^2 \left\{ 1 + \frac{a^2}{a_k^2} + 4 \frac{a^2}{\rho_{nl}^2} \left[ 1 - \frac{L}{F} + \frac{1}{3} \left( \frac{L}{F} \right)^2 + \frac{1}{3} \Omega^{-2} \left( 1 + \frac{a^2}{a_k^2} \right) \right] + \frac{4}{3} \Omega^{-2} \left( \frac{a^2}{\rho_{nl}^2} \right)^4 \right\}^{-1},$$

$L$  – длина трассы,  $F$  – радиус кривизны волнового фронта на выходной апертуре, (характерный параметр  $L/F$  называется параметром фокусировки),

$$\Omega = ka^2/L$$

– число Френеля выходной апертуры,

$$\gamma = \Omega^{-1} \left( 1 + \frac{a^2}{a_k^2} + 2 \frac{a^2}{\rho_{nl}^2} \right) - \frac{ka^2}{F} \left( 1 - \frac{L}{F} \right).$$

Для полностью когерентного ( $a/a_k=0$ ) коллимированного ( $L/F=0$ ) пучка это выражение дает квадрат радиуса пространственной когерентности в виде

$$\rho_k^2 = \rho_{nl}^2 \frac{3(1 + \Omega^{-2}) + 4q\Omega^{-1}}{3 + \Omega^{-2} + q\Omega^{-1}}.$$

Здесь  $q = L/(k\rho_{nl}^2)$ . Эта формула справедлива в области *слабых флуктуаций* интенсивности ( $\sigma_I^2 \ll 1$ ). Из этой формулы следует, что с уменьшением параметра  $\Omega$  радиус когерентности поля монотонно возрастает от значения, соответствующего плоской волне, до соответствующего значения сферической волны. В области *сильных флуктуаций* радиус когерентности поля превышает масштабы пространственной когерентности и плоской, и сферической волн (из-за дифракционного возрастания пространственной когерентности пучка), но оказывается (это результат натуральных измерений), что для пространственно ограниченного пучка радиус когерентности не превосходит удвоенного значения для плоской волны.

Из формулы для радиуса когерентности следует, что с увеличением эффективной турбулентной толщи, проходимой излучением в атмосфере, зависимость радиуса когерентности от размеров выходной апертуры и начальной когерентности поля ослабевает (см. рис. 8). В пределе бесконечно длинной трассы радиус когерентности пучка асимптотически стремится к удвоенному значению радиуса когерентности плоской волны независимо от исходных дифракционных параметров и когерентности источника. Вообще известно, что при распространении частично когерентного излучения в турбулентной атмосфере его пространственная когерентность, с одной стороны, растет вследствие дифракции на выходной апертуре, а с другой – уменьшается из-за рассеяния на турбулентных неоднородностях диэлектрической проницаемости. При этом полная потеря зависимости от начального радиуса когерентности  $a_k$  с увеличением турбулентной толщи наступает тогда, когда масштаб пространственной когерентности частично когерентного пучка в однородной среде (при  $q = 0$ ) достигает значения, соответствующего масштабу когерентности пучка такого же дифракционного размера в турбулентной среде, но полностью когерентного в начальной плоскости.

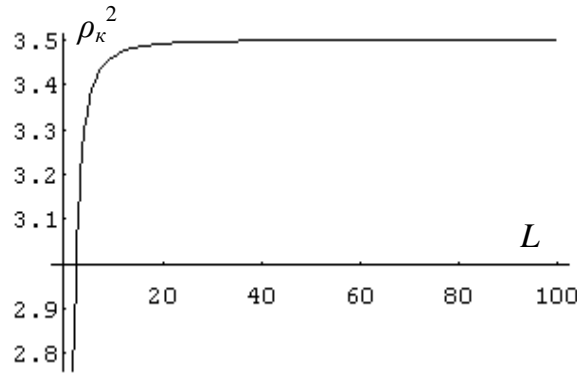


Рис. 8. Зависимость квадрата радиуса когерентности пучка от длины трассы

**2. Средняя интенсивность пучка.** Выражение для средней интенсивности гауссова пучка в турбулентной атмосфере легко получить из общего выражения для функции взаимной когерентности второго порядка, полагая в нем  $\vec{\rho} = 0$ :

$$\langle I(x, \vec{R}) \rangle = \Gamma_2(x, \vec{R}, 0) = |u_0|^2 \left( \frac{a}{a_{ef}} \right)^2 \exp \left( -\frac{R^2}{a_{ef}^2} \right)$$

(напомним, что зависимость от  $x$  “сидит”, фактически, в параметре  $a_{ef}$ , поскольку именно он зависит от длины трассы  $L$ ). Заметим, что входящий сюда средний эффективный радиус пучка  $a_{ef}$  (выражение для него мы выписывали выше) вычисляется как раз из условия  $\langle I(x, a_{ef}) \rangle = e^{-1} I_0$ .

Обсуждение:

1. Из выражения для средней интенсивности видно, на оси пучка (при  $\vec{R} = 0$ ) она монотонно убывает с увеличением расстояния как  $L^{-2}$ , в то время как средний эффективный размер пучка растет.
2. В случае коллимированного пучка ( $L/F=0$ ) функция  $\langle I(x) \rangle$  достигает максимума при значении числа Френеля передающей апертуры  $\Omega \cong 1$ , что соответствует наиболее узкому в дифракционном смысле гауссову пучку. Таким образом, оптимальный размер коллимированного пучка составляет величину порядка радиуса первой зоны Френеля  $a \approx \sqrt{\lambda L}$ .

Кроме этих, теоретически полученных закономерностей, из экспериментов также известны следующие свойства средней интенсивности:

3. В случае фокусировки в плоскость наблюдения первоначально когерентного пучка света предельное значение интенсивности на оси сфокусированного пучка не зависит от его начального размера. Это значит, что, начиная с некоторых размеров, увеличение фокусирующей апертуры не приводит к возрастанию интенсивности в фокусе. Это явление называют “насыщением фокусировки”. К подробному обсуждению механизма этого явления мы еще вернемся, когда будем рассматривать флуктуации интенсивности за случайным фазовым экраном.
4. Если расходимость пучка за счет неполной пространственной когерентности значительно превышает дифракционную ( $a_k^{-1} \gg a^{-1}$ ), то средняя интенсивность не зависит от начальных размеров пучка.

**3. Когерентность и средняя интенсивность искаженного турбулентной атмосферой пучка в приемной оптической системе.** На практике прием оптического излучения осуществляется оптическими системами, всегда включающими в себя как элемент тонкую линзу. Распределение комплексной амплитуды поля  $u(l, \vec{r})$  в произвольной плоскости на расстоянии  $l$  за линзой связано с падающим полем  $u(x, \vec{\rho})$  известным соотношением

$$u(l, \vec{r}) = \frac{k}{2\pi il} \exp \left[ ik l + ik \frac{r^2}{2l} \right] \int T(\vec{\rho}) u(x, \vec{\rho}) \exp \left\{ -i \frac{k}{l} \vec{r} \vec{\rho} + ik \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{F_t} \right) \rho^2 \right\} d\vec{\rho}.$$

Здесь  $F_t$  – фокусное расстояние приемной линзы,  $T(\vec{\rho}) = T_0 \exp(-\rho^2/2a_t^2)$  – амплитудный коэффициент пропускания приемной линзы радиуса  $a_t$ .

Это выражение совместно с выражением для функции когерентности во входной плоскости позволяют найти функцию взаимной когерентности поля после прохождения линзы:

$$\Gamma_2(l, \vec{R}, \vec{r}) = \langle u(l, \vec{r}_1) u^*(l, \vec{r}_2) \rangle = \left( \frac{a_{tef}}{a_{lef}} \right)^2 \exp \left[ -\frac{r^2}{4\rho_l^2} - \frac{R^2}{a_{lef}^2} + iv \vec{R} \vec{r} \right],$$

где  $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ ,  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,

$$a_{lef} = \frac{l}{k} \left[ \frac{4}{\rho_k^2} + \frac{1}{a_{tef}^2} + k^2 a_{tef} \left( \frac{1}{F_{ef}} + \frac{1}{l} - \frac{1}{F_t} \right)^2 \right]^{1/2}$$

характеризует средний радиус освещенного пятна,

$$\rho_l^2 = \left( \frac{k^2}{l^2} - \frac{\alpha}{a_{lef}^2} \right)^{-1} a_{lef}^{-2}$$

определяет средний радиус пространственной когерентности с помощью соотношения  $\rho_{lk} = 2(\rho_l^{-2} - a_{lef}^{-2})^{-1/2}$ ,

$$\alpha = k^2 a_{tef} \left( \frac{1}{F_{ef}} + \frac{1}{l} - \frac{1}{F_t} \right)^2,$$

$$a_{lef}^2 = \left( \frac{1}{a_{ef}^2} + \frac{1}{a_t^2} \right)^{-1}$$

– эффективный радиус пучка в плоскости приемной линзы,

$$v = \frac{k}{l} - \frac{\alpha a_{tef}^2}{a_{lef}^2}$$

характеризует радиус кривизны волнового фронта за линзой,

$$F_{ef} = -k(a_{ef}^2/\gamma)$$

определяет радиус кривизны среднего волнового фронта падающего на линзу излучения (параметр  $\gamma$  был введен раньше).

Из этих выражений видно, что средний масштаб освещенного пятна и радиус когерентности существенно меняются в зависимости от положения плос-

кости наблюдения (расстояния  $l$ ). Вблизи линзы радиус когерентности приблизительно равен удвоенному радиусу когерентности падающей волны. В фокальной плоскости при падении на линзу, например, плоской волны (т.е. при  $\gamma/a_{ef}^2 = 0$ ) и при выполнении условия  $a_t < \rho_{nl}$  радиус пространственной когерентности будет равен масштабу дифракции  $F_t/ka_t$ .

**4. Средний размер изображения источников света.** Если выражение для средней ширины освещенного пятна за линзой  $a_{l\ ef}$  продифференцировать по переменной  $l$ , то находим расстояние  $l^*$ , на котором размер пятна минимален:

$$l^* = \left( \frac{1}{F_t} - \frac{1}{F_{ef}} \right)^{-1} \left[ 1 + \frac{4/\rho_\kappa^2 + 1/a_{tef}^2}{k^2 a_{tef}^2 (F_{ef}^{-1} + F_t^{-1})^2} \right]^{-1/2}.$$

В геометрооптическом приближении ( $k \rightarrow \infty$ ) отсюда следует “формула линзы для пространственно ограниченных пучков в турбулентной атмосфере”

$$\frac{1}{l^*} - \frac{1}{F_t} + \frac{1}{F_{ef}} = 0.$$

Отсюда следует, что в общем случае радиус пучка минимален *не в фокусе* (!) приемной линзы. В частных случаях плоской волны (т.е. при  $1/F_{ef} = 0$ )  $l^* = F_t$ , а для сферической волны (при  $F_{ef} = L$ )

$$\frac{1}{l^*} - \frac{1}{F_t} + \frac{1}{L} = 0.$$

Найдем теперь распределение средней интенсивности в плоскости минимального изображения:

$$\langle I(l^*, \vec{R}) \rangle = \Gamma_2(l^*, \vec{R}, 0) = \frac{a_{tef}^2}{a_{tef,\min}^2} \exp\left(-\frac{R^2}{a_{tef,\min}^2}\right),$$

где использован параметр

$$a_{tef,\min}^2 = 2a_{tef}^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{4/\rho_\kappa^2 + 1/a_{tef}^2}{k^2 a_{tef}^2 (F_{ef}^{-1} - F_t^{-1})^2} \right]^{-1/2} \right\},$$

который определяет *средний размер изображения источника света* в турбулентной атмосфере. Если слагаемое в квадратных скобках немного преобразовать (разложить в ряд Тейлора), то

$$a_{tef,\min} = \left(4/\rho_\kappa^2 + 1/a_{tef}^2\right)^{1/2} \frac{1}{k(F_t^{-1} - F_{ef}^{-1})}.$$

Рассмотрим **частные случаи**.

1. Пусть падает плоская волна. Это значит, что  $\rho_\kappa = \rho_{nl}$ ,  $1/a_{ef} = 0$ ,  $1/F_{ef} = 0$ . Тогда

$$a_{tef,\min} = \frac{F_t}{k} \left( \frac{4}{\rho_{nl}^2} + \frac{1}{a_t^2} \right)^{1/2}.$$

2. Пусть падает сферическая волна. Тогда  $\rho_{обш} = \rho_{сф}$ ,  $1/a_{ef} = 0$ ,  $F_{ef} = L$ , при этом

$$a_{tef,\min} = \frac{1}{k(F_t^{-1} - L^{-1})} \left( \frac{4}{\rho_{nl}^2} + \frac{1}{a_t^2} \right)^{1/2}.$$

Из полученных выражений следует, что в отличие от однородной среды (когда  $1/\rho_k = 0$ ), где размер изображения определяется масштабом дифракции на приемной апертуре, в среде со случайными неоднородностями *ухудшение пространственной когерентности* (т.е. выполнение условия  $1/\rho_k \neq 0$ ) приводит к *увеличению среднего размера изображения* источника. А если распространяется пространственно ограниченный пучок, то средний размер изображения зависит от турбулентных условий распространения еще и через средний эффективный радиус кривизны волнового фронта.

#### 4.4. Оптические методы измерения структурной характеристики показателя преломления в турбулентной атмосфере

Как мы установили ранее, флуктуации диэлектрической проницаемости (и, соответственно, показателя преломления) турбулентной атмосферы характеризуются структурной функцией

$$D_n(r) = \langle [n(\vec{\rho}) - n(\vec{\rho} + \vec{r})]^2 \rangle = C_n^2 r^{2/3}. \quad (4.3)$$

Коэффициент  $C_n^2$  является основной метеорологической характеристикой, определяющей интенсивность флуктуаций параметров световых пучков, распространяющихся в атмосфере. Сведения о  $C_n^2$  позволяют вычислить радиус когерентности и с его помощью оценить искажения характеристик лазерного излучения в реальных атмосферных условиях, т.е. оценить энергетические и информационные потери, возникающие при использовании лазерных пучков в системах связи, локации, и т.д.

Структурная характеристика показателя преломления традиционно определялась по средним вертикальным профилям температуры и скорости ветра. Недостатком этих методов является их сложность и малая оперативность. Кроме того, при метеорологических методах измерения  $C_n^2$  определяется, как правило, в одной или двух точках трассы, а затем эти значения принимаются за величину параметра турбулентности по всей трассе. Такая методика применима для однородных трасс в условиях ровной подстилающей поверхности. Но в реальных условиях это чаще всего не так. Поэтому в последние годы получили распространение оптические методы определения структурной характеристики показателя преломления, которые исходят из связи этой величины с флуктуациями параметров светового излучения, прошедшего через турбулизованый слой воздуха. Одни из этих методов (“когерентные”) основаны на связи величины  $C_n^2$  с пространственной когерентностью лазерного пучка, другие, как, например, методы измерения  $C_n^2$  по размытию изображения детерминированных структур типа миры, используют некогерентное освещение, и их называют некогерентными.

Оптические методы дают возможность найти значение  $C_n^2$ , усредненное вдоль всей трассы. В случае когерентных методов измеряется величина

$$\langle C_n^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L C_n^2(x) dx,$$

где  $L$  – длина трассы. Для некогерентных методов усреднение другое, и измеряется величина

$$\langle C_n^2 \rangle = \frac{8}{3L} \int_0^L C_n^2(x) \left(\frac{x}{L}\right)^{5/3} dx.$$

В этом случае мы имеем дело с совокупностью некогерентных точечных источников света, которыми являются отдельные малые участки миры, и, соответственно, в расчетах используется структурная функция фазы сферической волны.

Оптические методы определения  $C_n^2$  являются более точными, более оперативными и более простыми, чем метеорологические. Кроме того, их можно использовать и в лабораторных условиях.

Здесь рассмотрим только когерентные методы определения структурной постоянной показателя преломления в атмосфере.

При распространении лазерного пучка в атмосфере когерентность излучения ухудшается из-за хаотических неоднородностей показателя преломления. Количественной мерой когерентности обычно служит поперечная функция когерентности второго порядка:

$$\Gamma_2(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \langle u(\vec{\rho}_1) u^*(\vec{\rho}_2) \rangle.$$

Нормированное значение функции когерентности совпадает с оптической передаточной функцией турбулентной атмосферы, характеризующей разрешающую способность оптических приемников, с помощью которых регистрируется изображение объектов через атмосферу. Измерение функции когерентности может обеспечить и решение обратной задачи – нахождения параметров турбулентной атмосферы, к числу которых относится и  $C_n^2$ .

Наиболее общее интегральное представление функции когерентности для волнового пучка с произвольным распределением амплитуды и фазы в приближении марковского случайного процесса таково:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\vec{R}, \vec{\rho}, x) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho}' U_0 \left( \vec{R}' + \frac{1}{2} \vec{\rho}' - \frac{\vec{\rho}x}{2k} \right) U_0^* \left( \vec{R}' - \frac{1}{2} \vec{\rho}' + \frac{\vec{\rho}x}{2k} \right) \times \\ & \times \exp \left[ i\vec{p}(\vec{R} - \vec{R}') - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H \left( x', \vec{\rho}' - \frac{\vec{\rho}}{k}(x - x') \right) dx' \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$H(x, \vec{\rho}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(x, \vec{k}_\perp) (1 - \cos \vec{k}_\perp \vec{\rho}) d\vec{k}_\perp,$$

$U_0$  – начальное значение волнового поля в плоскости  $x=0$ ,  $\vec{p}$  и  $\vec{k}$  – пространственные частоты, появляющиеся при преобразовании Фурье функции  $\Gamma_2$  по координате центра тяжести  $\vec{R}$  и по разностной координате  $\vec{\rho}$ ,  $\Phi_\varepsilon(x, \vec{k}_\perp)$  – двумерный (по поперечным координатам) спектр флуктуаций диэлектрической прони-

цаемости. Это точное решение уравнения для функции когерентности второго порядка.

В случае плоской волны  $U_0 = \text{const}$ , тогда можно интегрировать по координате центра тяжести, это дает дельта-функцию от  $\vec{\rho}$ , и окончательно получается

$$\Gamma_2(L, \vec{\rho}) = U_0^2 \exp\left[-\frac{1}{2}D_\varphi(L, \vec{\rho})\right]. \quad (4.5)$$

Сюда вошла структурная функция флуктуаций фазы плоской волны:

$$D_\varphi(L, \vec{\rho}) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty [1 - J_0(\vec{\kappa}_\perp \vec{\rho})] \Phi_\varepsilon(L, \vec{\kappa}_\perp) \vec{\kappa}_\perp d\vec{\kappa}_\perp. \quad (4.6)$$

Заметим, что данное выражение справедливо для локально изотропной турбулентности при любых по величине флуктуациях интенсивности волны.

Для определения величины  $C_n^2$  используется связь, существующая между функцией  $\Gamma_2$  и средней интенсивностью дифракционной картины, созданной в фокальной плоскости линзы световым пучком, прошедшим через турбулизованный слой воздуха. Зафиксировав фотокамерой двумерную картину распределения средней освещенности в фокальной плоскости линзы, на которую падает параллельный световой пучок, прошедший через слой атмосферы, мы получим двумерный спектр функции когерентности. Если же будем измерять среднюю освещенность в фокальной плоскости линзы с помощью сканирования дифракционной картины щелью с ФЭУ, то измеряемая средняя освещенность является одномерным Фурье-преобразованием функции когерентности. Покажем это.

Распределение средней освещенности в фокальной плоскости линзы, на которую падает плоская волна, прошедшая путь  $L$  в среде, для случая сильных флуктуаций имеет вид

$$\langle I(L, \vec{\rho}') \rangle = \frac{1}{\lambda^2 F_t^2} \int_{-\infty}^\infty \Gamma_2(L, \vec{\rho}) B_R(\vec{\rho}) \exp\left[i \frac{k}{F_t} (y'y + z'z)\right] dydz. \quad (4.7)$$

Здесь  $F_t$  – фокусное расстояние линзы,  $y', z'$  – координаты точки в фокальной плоскости линзы,  $B_R$  – корреляционная функция регулярного распределения освещенности на поверхности линзы:

$$B_R(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^\infty M(\vec{\rho}) M(\vec{\rho} - \vec{\rho}_1) d\vec{\rho}_1,$$

функция  $M$  равна единице на освещенной поверхности и нулю вне ее.

В случае колмогоровского спектра, т.е. при

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = 0,33 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2 / \kappa_{\max}^2)$$

$$C_\varepsilon^2 = 4 C_n^2, \quad \kappa_{\max} = 5,92 / l_0,$$

$l_0$  – внутренний масштаб турбулентности, для случая сильных флуктуаций интенсивности удается получить следующее выражение для функции когерентности:

$$\Gamma_2(x, r_0) = U_0^2 \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot 2,9 k^2 C_n^2 x (2r_0)^{5/3}\right], \quad (4.8)$$



где  $r_0$  – радиус линзы. Из сравнения (4.5) и (4.8) видно, что в (4.8) под экспонентой записана структурная функция флуктуаций фазы. Если она много больше единицы, то в (4.7)  $B_R$  можно вынести из-под интеграла при значении  $\bar{\rho} = 0$ . Тогда правая часть (4.7) пропорциональна спектру функции когерентности.

Если же, дополнительно,  $\Gamma_2$  обладает осевой симметрией, то (4.7) переходит в преобразование Фурье–Бесселя, что дает

$$\langle I(r_0) \rangle = \frac{2\pi^2 r_0^2}{\lambda^2 F_t^2} \int_0^\infty \Gamma_2(L, \bar{\rho}) J_0(\bar{\kappa} \bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho}. \quad (4.9)$$

Поскольку известно, что интенсивность в максимуме идеальной картины

$$I_0 = \frac{\pi^2 r_0^4}{\lambda^2 F^2} U_0^2,$$

то, нормируя (4.9) на эту интенсивность, данное соотношение можно использовать для определения спектра функции когерентности  $\Gamma_2$ . На практике интересующую нас величину  $C_n^2$  определяют, сравнивая интенсивности в фокусе линзы регулярной и возмущенной дифракционной картин и решая уравнение

$$\langle I(0) \rangle / I_0 = \left[ \frac{1}{2} D_\varphi(2r_0) \right]^{-6/5},$$

где

$$D_\varphi(2r_0) = 2,9k^2 LC_n^2 (2r_0)^{5/3}.$$

При этом учитывают, что в случае насыщенных флуктуаций интенсивности средняя интенсивность в фокальной плоскости линзы распределена по нормальному закону:

$$\langle I(r_0) \rangle = \frac{U_0^2 r_0^2}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\alpha^2}\right),$$

где

$$\alpha^2 = 3,86\Gamma(11/6)C_n^2 k^{1/3} L F^2.$$

Для экспериментального определения  $C_n^2$  используется установка, схема которой представлена на рис. 9. Источником света (И) является гелий-неоновый лазер ЛГ, работающий на длине волны 0,63 мкм. Система линз 1 и 2 расширяет пучок в диаметре и дает на выходе коллимированный пучок. Приемник света 3 – коллиматор с фокусным расстоянием  $F_t$  и диаметром  $2r_0$ . Между линзами 2 и 3 пучок проходит сквозь слой турбулентной атмосферы (в этом случае длина трассы  $L$  может составлять несколько десятков или сотен метров) или искусственно созданный в лабораторных условиях турбулизованный слой (длина слоя до нескольких метров, в зависимости от мощности нагревателя). В фокальной плоскости линзы 3 интенсивность фиксируется системой регистрации пучка СР. Перед ней на пути пучка ставятся нейтральные светофильтры 5 и 6 для ослабления падающего света в фиксированное число раз. Применение светофильтров позволяет увеличить динамический диапазон. На одних снимках создаются условия для измерения освещенности в центре картины, на других (с меньшим ослаблением) в центре создается засветка до насыщения, но зато можно измерить освещенность на разных расстояниях от центра. Для получения

средней освещенности выдержка составляет несколько секунд. За это время регистрируемая картина изменится много раз. Для контроля за величиной светового потока, падающего СР, перед ней ставится плоскопараллельная пластинка П, которая направляет часть светового потока (ок. 8%) через дополнительные нейтральные светофильтры и интерференционный светофильтр 8 (на длину волны лазера) на систему контроля светового потока СК.

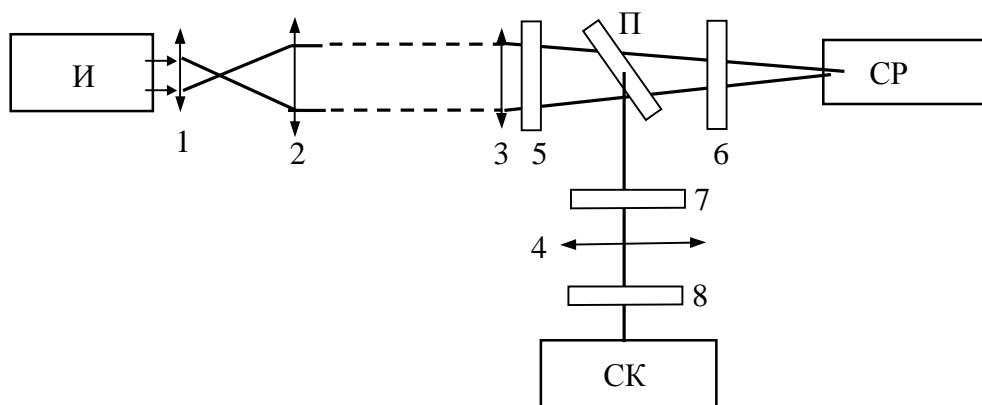


Рис. 9. Схема экспериментальной установки для определения  $C_n^2$

В ходе эксперимента измеряется мощность лазерного излучения, по которой определяется интенсивность главного максимума дифракционной картины. По ширине кривой распределения освещенности (напомним, она гауссова) и находится нужная величина  $C_n^2$ .

Известно, что описанный метод имеет очень высокую точность (ошибка не превышает 20%, что очень хорошо, учитывая статистический характер самой величины  $C_n^2$ ). Платой же за высокую точность является ограничение динамического диапазона флуктуаций, при которых справедливы используемые аналитические зависимости, поскольку они получены только для случая сильных флуктуаций интенсивности.

## Глава 5. Дифракция случайных полей в простейших оптических системах

Выше мы рассмотрели прохождение лазерного (когерентного) излучения через слой случайно-неоднородной среды и начали выяснять свойства такого излучения с учетом элементов приемной системы. Другим простейшим элементом оптической системы является диафрагма. Теперь рассмотрим прохождение случайной волны через отверстие в экране

Пусть  $v(\vec{\rho}) \equiv u(x, \vec{\rho})|_{x=0}$  – амплитуда поля, создаваемого источником в плоскости  $x = 0$ . Если в этой плоскости поместить непрозрачный экран с отверстием  $S$ , вырезающим пучок волн конечного диаметра, то непосредственно за экраном образуется поле “на выходе”  $u_{\text{вых}}(\vec{\rho})$ , которое в приближении Кирхгофа можно записать как

$$u_{\text{вых}}(\vec{\rho}) = \begin{cases} v(\vec{\rho}) & \vec{\rho} \in S, \\ 0, & \vec{\rho} \notin S. \end{cases}$$

Введем, как обычно, функцию пропускания отверстия

$$M(\vec{\rho}) = \begin{cases} 1 & \vec{\rho} \in S, \\ 0, & \vec{\rho} \notin S \end{cases}$$

и запишем с ее помощью поле на выходе:

$$u_{\text{вых}}(\vec{\rho}) = M(\vec{\rho})v(\vec{\rho}).$$

Будем считать, что флуктуации граничного поля  $v(\vec{\rho})$  плавные в масштабе длины волны, тогда поле на расстоянии  $x$  за отверстием можно, как мы знаем, записать в *приближении Френеля*

$$u(x, \vec{\rho}) = \frac{k \exp(ikx)}{2\pi ix} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{\rho}') v(\vec{\rho}') \exp\left[\frac{ik}{2x}(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2\right] d\vec{\rho}'.$$

Считаем, что среднее значение поля  $v(\vec{\rho})$  равно нулю, тогда и

$$\langle u(x, \vec{\rho}) \rangle = 0.$$

Вычислим *поперечную* функцию когерентности дифрагированного поля, т.е. функцию когерентности в плоскости  $x = \text{const}$ . Используя записанное выражение для поля и определение функции когерентности второго порядка, находим

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) &= \langle u(x, \vec{\rho}_1) u^*(x, \vec{\rho}_2) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{\rho}') M(\vec{\rho}'') \Gamma_v(\vec{\rho}' - \vec{\rho}'') \times \\ &\times \exp\left\{\frac{ik}{2x}[(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}')^2 - (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}'')^2]\right\} d\vec{\rho}' d\vec{\rho}''. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь использована функция когерентности граничного поля  $v(\vec{\rho})$ , причем мы сразу предположили, что это поле статистически однородно.

Не конкретизируя вида функции когерентности граничного поля, этот интеграл можно вычислить в двух предельных случаях – при больших или малых

по сравнению с масштабом корреляции  $l_v$ , размерах отверстия  $a$  граничного поля (но всегда при  $a \gg \lambda$ ).

### 1. Малое отверстие ( $a \ll l_v$ ).

В этом случае функция когерентности граничного поля  $\Gamma_v$  практически постоянна в пределах отверстия и ее можно вынести за знак интеграла со значением  $\Gamma_v(0) \equiv \langle I_v \rangle$ . В результате

$$\Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \langle I_v \rangle u_M(x, \vec{\rho}_1) u_M^*(x, \vec{\rho}_2),$$

где поле  $u_M(x, \vec{\rho})$  определяется выражением

$$u(x, \vec{\rho}) = \frac{k \exp(ikx)}{2\pi i x} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{\rho}') \exp\left[\frac{ik}{2x}(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2\right] d\vec{\rho}'$$

и представляет собой дифракционное поле за отверстием при нормальном падении на него плоской волны единичной амплитуды.

Коэффициент корреляции (в оптике он называется степенью когерентности) при дифракции на малом отверстии равен

$$R_{\perp}(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \frac{\Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)}{\sqrt{\Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_1) \Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_2)}} = \frac{u_M^*(x, \vec{\rho}_2)}{|u_M(x, \vec{\rho}_1)| |u_M(x, \vec{\rho}_2)|},$$

откуда видно, что  $|R_{\perp}| = 1$ . Это означает (см. определение радиуса когерентности), что *случайная* волна, прошедшая через *малое отверстие*, порождает пространственно когерентное поле. До создания лазеров пропускание света через малое отверстие (наряду с использованием малых источников света) было практически единственным способом получения пространственно когерентного света. Этим способом пользуются и сейчас, если не требуется высокой интенсивности поля.

### 2. Широкое отверстие ( $a \gg l_v$ ).

Рассмотрим другой предельный случай. Прежде всего заметим, что вблизи отверстия имеется область, в которой функция когерентности будет *такой же*, как и в *отсутствии* непрозрачного экрана. Оценим форму и размеры этой области, используя спектральное представление. Ширина двумерного спектра  $F_v(\vec{k}_{\perp})$  случайного поля  $v$  имеет порядок  $\kappa_v \sim 1/l_v$  или, в пересчете на углы,  $\delta \sim \kappa_v/k \sim \lambda/l_v$ . Следовательно, если точки наблюдения  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  находятся внутри конуса с основанием, равным ширине отверстия  $a$  и углом при вершине  $\delta$  (см. рис. 10), то поле “не почувствует” влияния краев диафрагмы. Для всех точек внутри этого конуса поперечная функция корреляции будет такой же, как у граничного поля:

$$\Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \Gamma_v(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2).$$

Оценим предельное расстояние  $x_{\max}$ , до которого остается справедливо это соотношение. Из рис.10 видно, что

$$x_{\max} \sim a/\delta \sim a l_v / \lambda \sim k a l_v.$$

Мы рассматриваем сейчас случай  $a \gg l_v$ . С учетом этого находим:

$$\frac{x_{\max}}{k l_v^2} \sim \frac{a}{l_v} \gg 1,$$

т.е. дистанция  $x_{\max}$  находится в *дальней* зоне по отношению к размеру неоднородностей  $l_v$ . В то же время по отношению к размеру отверстия  $a$  это расстояние соответствует *ближней* зоне:

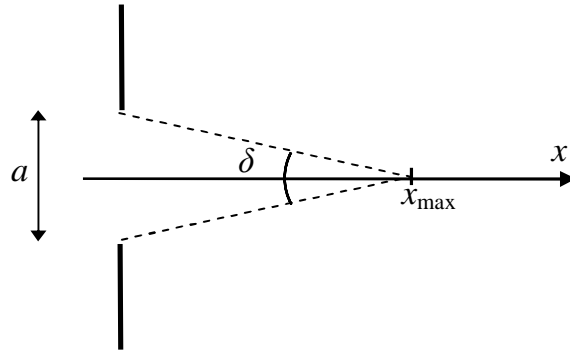


Рис. 10. Геометрия задачи

$$\frac{x_{\max}}{ka_v^2} \sim \frac{l_v}{a} \ll 1.$$

Отсюда, в частности, следует практически важный вывод о том, что распределение флуктуаций поля за отверстием *нормализуется* еще в *ближней* зоне апертуры  $a$ . Можно еще сказать, что поперечная функция когерентности формируется уже в *ближней* зоне по отношению к отверстию.

Вычислим интеграл (5.1) при  $x \gg x_{\max}$ . Для этого сделаем замену переменных в интеграле – используем разностную координату и координату центра тяжести:

$$\vec{\xi} = \vec{\rho}' - \vec{\rho}'', \quad \vec{\eta} = (\vec{\rho}' + \vec{\rho}'')/2,$$

а кроме того, введем новые обозначения:

$$\vec{\rho}_+ = (\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2)/2, \quad \vec{\rho}_- = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2.$$

Тогда интеграл (5.1) примет вид

$$\Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_-, \vec{\rho}_+) = \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \exp\left(\frac{ik\vec{\rho}_-\vec{\rho}_+}{x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{\eta} + \vec{\xi}/2) M(\vec{\eta} - \vec{\xi}/2) \Gamma_v(\vec{\xi}) \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{x} [\vec{\xi}\vec{\eta} - \vec{\eta}\vec{\rho}_- - \vec{\xi}\vec{\rho}_+]\right\} d\vec{\xi} d\vec{\eta}.$$

Пределы интегрирования здесь формально бесконечные, но в действительности область интегрирования по  $\xi$  ограничена неравенством  $\xi \leq l_v \ll a$ , т.к. при  $\xi \geq l_v$  функция корреляции  $\Gamma_v(\xi)$  близка к нулю. В то же время ограничена и другая переменная:  $\eta \leq a$ , поскольку при  $\eta > a$  обращается в нуль произведение

$$M(\vec{\eta} + \vec{\xi}/2) M(\vec{\eta} - \vec{\xi}/2) \approx M^2(\vec{\eta}) = M(\vec{\eta}).$$

Поэтому первое слагаемое в показателе экспоненты под интегралом ограничено сверху неравенством

$$k\xi\eta/x \leq kal_v/x \sim x_{\max}/x.$$

При  $x \gg x_{\max}$  этим слагаемым можно пренебречь, тогда интегралы по  $\xi$  и  $\eta$  факторизуются:

$$\Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_-, \vec{\rho}_+) = \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \exp\left(\frac{ik\vec{\rho}_-\vec{\rho}_+}{x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{\eta}) \exp\left(-\frac{ik\vec{\eta}\vec{\rho}_-}{x}\right) d\vec{\eta} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\vec{\xi}) \exp\left(-\frac{ik\vec{\xi}\vec{\rho}_+}{x}\right) d\vec{\xi}. \quad (5.2)$$

Обсудим полученное выражение. Зависимость функции когерентности (5.2) от поперечных координат  $\vec{\rho}_-, \vec{\rho}_+$  определяется произведением трех сомножителей. Множитель перед интегралом

$$\exp(ik\vec{\rho}_-\vec{\rho}_+/x) = \exp[ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)/x] \approx \exp[ik(r_1 - r_2)]$$

возникает просто из-за того, что сферические волны, уходящие от отверстия, не согласованы с плоской формой поверхности  $x = \text{const}$ , на которой мы рассматриваем корреляцию поля. Если искать корреляцию на сферической поверхности  $r = \text{const}$ , то этот множитель обратится в единицу.

Интеграл по  $\eta$  в (5.2), зависящий только от разности  $\vec{\rho}_- = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$ , характеризует поле *когерентного* источника с амплитудой  $M(\vec{\eta})$ . При размере отверстия  $a$  характерная *угловая* ширина диаграммы направленности этого источника имеет порядок  $\lambda/a$ , соответственно *линейная* ширина в плоскости  $x = \text{const}$  равна  $\Delta\rho \sim x\lambda/a$ . Это означает, что поперечный радиус корреляции имеет порядок

$$l_{\perp} \sim x\lambda/a \sim \lambda/\gamma,$$

где  $\gamma \sim a/x$  – угловой размер отверстия из точки наблюдения. Видно, что поперечный радиус корреляции растет по мере удаления от плоскости  $x = 0$ . Это увеличение радиуса когерентности имеет простое геометрическое объяснение: при удалении от отверстия фазовые фронты всех элементарных сферических волн можно считать (с точностью до  $\lambda$ ) совпадающими на все большей площади.

Второй интеграл в (5.2) определяет пространственное распределение средней интенсивности дифракционного поля. Положим в (5.2)  $\vec{\rho}_- = 0$  и учтем, что интеграл по  $\eta$  дает в этом случае просто площадь отверстия  $S$ . Тогда из (5.2) получаем

$$\langle I_u(x, \vec{\rho}_+) \rangle \equiv \Gamma_{\perp}(x, \vec{\rho}_- = 0, \vec{\rho}_+) = \frac{k^2 S}{(2\pi x)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\vec{\xi}) \exp\left(-\frac{ik\vec{\rho}_+\vec{\xi}}{x}\right) d\vec{\xi}.$$

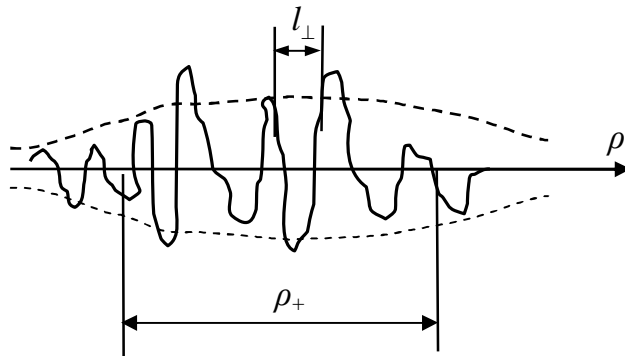


Рис. 11. Пример возможной реализации дифракционного поля за экраном

Напомним: мы рассматриваем случай, когда масштаб  $l_v$  изменения функции  $\Gamma_v$  мал по сравнению с размером отверстия  $a$ . Поэтому ширина распределения средней интенсивности  $\langle I_u \rangle$  в плоскости  $x = \text{const}$ , составляющая  $\rho_+ \sim x\lambda/l_v$  (а угловая ширина имеет, соответственно, порядок  $\rho_+/x \sim \lambda/l_v \sim 1/kl_v$ ), велика по сравнению с поперечным радиусом корреляции  $l_\perp \sim x\lambda/a$ . Таким образом, мы имеем здесь дело с примером *квазиоднородного* (в плоскости  $x = \text{const}$ ) поля. В данном случае все реализации дифракционного поля за отверстием представляют собой быстрые пространственные осцилляции с масштабом  $l_\perp$  и с размахом порядка  $\sqrt{\langle I_u(\rho) \rangle}$  (см. рис. 11).

Если разделить функцию когерентности (5.2) на среднюю интенсивность дифракционного поля, то получим коэффициент поперечной пространственной корреляции поля:

$$R_+(\vec{\rho}_-) = \exp\left(\frac{ik\vec{\rho}_-\vec{\rho}_+}{x}\right) F_M\left(\frac{k\vec{\rho}_-}{x}\right),$$

где использовано обозначение

$$F_M(\vec{k}) = \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{\eta}) \exp(-i\vec{k}\vec{\eta}) d\vec{\eta}.$$

Заметим, что это выражение – нормированное к единице ( $F_M(0) = 1$ ) преобразование Фурье от апертурного множителя и одновременно – диаграмма направленности отверстия при нормальном падении на него плоской монохроматической волны.

Рассмотрим теперь такой предельный случай, когда радиус корреляции граничного поля  $l_v$  мал по сравнению с длиной волны. В этом случае, поскольку  $\xi \leq l_v \ll \lambda$ , имеем

$$\exp\left(\frac{ik\vec{\rho}_+\vec{\xi}}{x}\right) \approx 1,$$

в результате

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\vec{\xi}) \exp\left(-\frac{ik\vec{\rho}_+\vec{\xi}}{x}\right) d\vec{\xi} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \frac{\langle I_v \rangle}{\langle I_v \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \langle I_v \rangle S_v,$$

где через  $S_v$  обозначена *эффективная площадь когерентности* граничного поля:

$$S_v = \frac{1}{\langle I_v \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} K_v(\vec{\xi}) d\vec{\xi},$$

по порядку величины она равна  $l_v^2$ .

Теперь подставим этот результат в интеграл (5.2):

$$\begin{aligned} \Gamma_\perp(x, \vec{\rho}_-, \vec{\rho}_+) &= \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \exp\left(\frac{ik\vec{\rho}_-\vec{\rho}_+}{x}\right) \langle I_v \rangle S_v \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{\eta}) \exp\left(-\frac{ik\vec{\eta}\vec{\rho}_-}{z}\right) d\vec{\eta} = \\ &= \left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \exp\left(\frac{ik\vec{\rho}_-\vec{\rho}_+}{x}\right) \langle I_v \rangle S_v S F_M\left(\frac{k\vec{\rho}_-}{x}\right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Полученный результат (5.3) называется **теоремой Ван-Циттерта–Цернике**. Она связывает корреляционные свойства излучения *короткокоррелированных* источников с задачей о дифракции на излучающей апертуре. Смысл ее состоит в следующем: с увеличением расстояния от излучателя до плоскости наблюдения поле становится все более и более гладким (вначале “дельта-коррелированное”, т.е. очень сильно изрезанное). Убедимся в этом, для чего найдем поперечный радиус когерентности.

Радиус когерентности – это ширина функции  $F_M$  по  $\rho$ . Оценим сначала ширину по пространственной частоте функции  $F_M(\vec{k})$ . Поскольку эта функция является преобразованием Фурье от апертурного множителя, то при размере отверстия  $a$  ширина спектра  $\kappa_0 \sim 1/a$ . Отсюда получаем:

$$kl_{\perp}/x = \kappa_0 \sim 1/a,$$

т.е. *радиус когерентности*  $l_{\perp} = x/(ka)$  *линейно нарастает* с ростом  $x$ .

Обсудим эту теорему.

1. Согласно (5.3) зависимость *модуля* поперечной функции когерентности  $|\Gamma_{\perp}|$  от разностной координаты не связана с формой неоднородностей источников (она входила в  $\Gamma_v$ ) и определяется преобразованием Фурье от *распределения интенсивности* источников. Но точно так же зависит от поперечных координат и поле в зоне дифракции Фраунгофера, создаваемое *полностью когерентным* источником с распределением амплитуды, пропорциональным величине

$$J(\vec{\rho}) = \frac{k^2}{4\pi^2} \langle I_v \rangle S_v M(\vec{\rho}).$$

Поэтому если одну из точек наблюдения ( $\vec{r}_1$  или  $\vec{r}_2$ ) выбрать в плоскости  $x = \text{const}$ , то при перемещении второй точки зависимость модуля функции когерентности от разностной координаты будет повторять зависимость самого дифракционного поля.

2. От обычных дифракционных формул эта теорема отличается в двух отношениях. Во-первых, *квадратичная по полю* величина  $|\Gamma_{\perp}|$  обратно пропорциональна *квадрату* (а не первой степени) расстояния. Во-вторых, это выражение, как и исходное (5.2), хотя и применимо только на дистанциях  $x \gg x_{\max}$ , но в рассматриваемом пределе  $a \gg l_v$  величина  $x_{\max}$  сравнима с  $a$ , тогда как диаграмма когерентного источника с поперечником  $a$  формируется на значительно больших расстояниях  $x \gg ka^2 \gg x_{\max} \sim a$ .

Теорема Ван-Циттерта–Цернике имеет практическое значение. Во-первых, ее результат важен для фотометрии, когда характерные размеры апертуры порядка сантиметра. Здесь условие перехода к зоне Фраунгофера при когерентном освещении  $x \gg ka^2 \sim 10^5$  см = 1 км практически неосуществимо, тогда как при некогерентном (короткокоррелированном) можно работать на расстояниях, сравнимых с  $a$ . Во-вторых, известно, что в акустике эффект объемного звучания возможен, когда оба уха воспринимают некоррелированные колебания. Это значит, что эффект объемного звучания пропадает на расстояниях  $x > kal_v$ .



# Глава 6. Современные методы анализа волновых полей

## 6.1. Метод геометрической оптики: классический подход и современные модификации

Мы уже рассмотрели дифракционные теории, а теперь возвращаемся к геометрооптическому приближению. На первый взгляд, это абсолютно нелогично. Тем не менее, именно *современные модификации* метода геометрической оптики позволяют решить ряд задач, которые не удастся решить другими методами. Но прежде чем переходить к таким задачам, рассмотрим “классический” вариант метода.

Снова обратимся к решению уравнения (3.1). Искомое поле  $u(\vec{r})$  представим в виде

$$u(\vec{r}) = F(\vec{r}) \exp[ik\Theta(\vec{r})].$$

Фактически это означает, что поле в каждой точке является плоской волной. Здесь  $F$  и  $\Theta$  – медленно меняющиеся в масштабе длины волны функции, т.е. их характерные масштабы изменения  $l \gg \lambda$ . Поскольку характерные масштабы этих функций соответствуют масштабам неоднородностей среды, то мы рассматриваем сейчас *крупномасштабные* неоднородности – среда должна быть плавно-неоднородной.

Амплитуду  $F$  разложим в ряд по обратным степеням волнового числа  $k$ :

$$u(\vec{r}) = \exp[ik\Theta(\vec{r})] \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\vec{r})(ik)^{-n},$$

где коэффициенты разложения в общем случае – комплексные. Это разложение подставим в исходное *волновое* уравнение (3.1) и приравняем слагаемые с одинаковой степенью  $k$ . Это дает систему уравнений:

$$\underline{k^2}: \quad (\nabla\Theta)^2 - \varepsilon(\vec{r}) = 0,$$

(обратим внимание: сюда вошла величина  $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon_1 = 1 + \varepsilon_1$ )

$$\underline{k^0}: \quad F_0 \Delta \Theta + 2 \nabla F_0 \nabla \Theta = 0,$$

...

$$\underline{k^{-n}}: \quad F_n \Delta \Theta + 2 \nabla F_n \nabla \Theta = -\Delta F_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим, что, поскольку  $\Theta$  – эйконал (т.е. отношение полной фазы  $\varphi$  к волновому числу  $k$ :  $\Theta = \varphi/k$ ), то первое из этих уравнений называется уравнением эйконала. Далее следуют уравнения переноса для амплитуд с нулевого до  $n$ -го порядка.

Уравнение эйконала решается методом характеристик. Характеристики – это и есть геометрооптические лучи. Введем понятие луча таким образом: луч – это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с волновым вектором  $\vec{k}$  (в свою очередь,  $\vec{k} = -\nabla \varphi(\vec{r})$ , где  $\varphi$  – фаза волны). Уравнения лучей имеют вид

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{2\varepsilon} [\nabla\varepsilon - \vec{t}(\vec{t}\nabla\varepsilon)], \quad (6.1)$$

где  $ds$  – элемент длины луча,  $\vec{t}$  – касательный к лучу единичный вектор (иными словами – нормаль к фазовому фронту  $\varphi = k\Theta = \text{const}$ ). Из определения вектора  $\vec{t}$  следует, что во 2-м уравнении из полного градиента вычитается продольная (вдоль луча) часть, следовательно, изменение касательного вектора  $\vec{t}$  обусловлено только величиной  $\nabla_{\perp}\varepsilon$ . Поэтому, например, в слоисто-неоднородной среде луч всегда остается прямым.

Из уравнения эйконала находим:

$$|\nabla\Theta| = \sqrt{\varepsilon},$$

следовательно,

$$\vec{t} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = \frac{\nabla\Theta}{|\nabla\Theta|} = \frac{\nabla\Theta}{\sqrt{\varepsilon}}$$

(здесь первые два равенства в цепочке соответствуют определению вектора  $\vec{t}$  и эйконала  $\Theta$  соответственно). Если каким-либо способом решены лучевые уравнения (6.1), то уравнения эйконала и переноса можно интегрировать вдоль лучевых траекторий. Например, для эйконала отсюда следует:

$$\Theta(\vec{r}) = \Theta_0 + \int_{s_0}^s \sqrt{\varepsilon(\vec{r}(\xi))} d\xi, \quad (6.2)$$

где  $\Theta_0$  – начальное значение эйконала,  $s_0$  и  $s$  – начальная и конечная точки луча, что позволяет найти фазу волны  $k\Theta$  через интеграл от  $\varepsilon$  вдоль луча  $\vec{r}(\xi)$ . Заметим, что сама функция  $\varepsilon(\vec{r}(\xi))$  определяется уравнением

$$\frac{d}{ds} \sqrt{\varepsilon(\vec{r}(s))} \frac{d}{ds} \vec{r}(s) = \nabla \sqrt{\varepsilon(\vec{r}(s))}.$$

Амплитуда волны находится из условия сохранения интенсивности

$$I = \sqrt{\varepsilon} F_0^2$$

в бесконечно тонкой лучевой трубке сечения  $d\Sigma$ :

$$I d\Sigma = \sqrt{\varepsilon} F_0^2 d\Sigma = \text{const}.$$

Но решить точные уравнения невозможно. Поэтому используют разложение в ряд по малому параметру  $\langle |\varepsilon_1| \rangle$ :

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots,$$

где  $\Theta_n \sim \langle |\varepsilon_1|^n \rangle$ . Обычно ограничиваются первым приближением:  $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$ . Подставим эту сумму в уравнение для эйконала

$$[\nabla(\Theta_0 + \Theta_1)]^2 = \langle \varepsilon \rangle + \langle |\varepsilon_1| \rangle = 1 + \langle |\varepsilon_1| \rangle$$

и разделим порядки малости. Это дает

$$(\nabla\Theta_0)^2 = 1 \quad \text{– нулевой порядок,}$$

$$2(\nabla\Theta_0\nabla\Theta_1) = \varepsilon_1 \quad \text{– первый порядок}$$

(здесь учтено соотношение для нулевого порядка).

Видно, что уравнения стали линейными. Если известны невозмущенный эйконал  $\Theta_0$  и невозмущенные лучи

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(s), \quad \vec{t}_0 = \vec{t}_0(s),$$

где  $\vec{t}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{ds}$ , то существуют решения в квадратурах. Так, в нулевом приближении

$$\nabla\Theta_0 = \sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\vec{t}_0,$$

тогда для первого приближения имеем уравнение

$$2(\nabla\Theta_0\nabla\Theta_1) = 2\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}(\vec{t}_0\nabla\Theta_1) = 2\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\frac{d\Theta_1}{ds} = \varepsilon_1.$$

Решение является интегралом вдоль *невозмущенного* луча:

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{\varepsilon_1}{\langle\varepsilon\rangle} d\xi.$$

Например, для плоской волны, когда лучи – прямые, параллельные оси  $x$  (уравнения лучей:  $x_0(s) = s$ ,  $y_0(s) = \text{const}$ ,  $z_0(s) = \text{const}$ ), и при обычном для нас условии  $\langle\varepsilon\rangle = \text{const}$  вдоль луча, отсюда получаем

$$\Theta_0 = \sqrt{\langle\varepsilon\rangle}x,$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{2\langle\varepsilon\rangle} \int_{x_0}^x \varepsilon_1(x', y, z) dx'.$$

Вообще выражение для  $\Theta_1$  – оптический путь, и его можно было бы записать сразу из определения эйконала. Но здесь есть одна тонкость: здесь записан путь *по прямой*, а на самом деле луч из-за неоднородностей отклоняется от прямолинейного распространения. Первое приближение геометрической оптики в том и состоит, что мы не рассматриваем такого отклонения.

Преимущество метода ГО состоит в следующем. В разложении поля  $u(\vec{r})$  мы выделяем фазовый множитель  $\exp(ik\Theta)$ . Это означает суммирование подпоследовательности

$$\exp(ik\Theta) = 1 + ik\Theta + \dots$$

всего бесконечного ряда теории возмущений, следовательно, метод ГО учитывает многократное рассеяние.

## 6.2. Условия применимости метода ГО

Как и для других методов, сформулируем условия, когда можно пользоваться геометрикооптическим приближением:

- 1) неоднородности должны быть плавными в масштабе длины волны:  $l \gg \lambda$  или  $\lambda|\nabla\varepsilon| \ll \varepsilon$ ;
- 2) радиус первой зоны Френеля мал по сравнению с масштабом неоднородностей:  $\sqrt{\lambda L} \ll l$ ;
- 3) малы флуктуации диэлектрической проницаемости:  $\sigma_\varepsilon \ll \langle|\varepsilon|\rangle$ . Фактически это сводится к требованию малости дисперсии уровня амплитуды:  $\sigma_\chi^2 = \langle(\chi - \langle\chi\rangle)^2\rangle \ll 1$ .

## 6.3. Вероятностное описание распределения интенсивности в случайной среде

### 6.3.1. Геометрооптические и механические аналогии

Поскольку (хотя бы в первом приближении) эйконал найден, дальше можно было бы поступить по уже отработанной схеме: искать функции корреляции (поперечной и продольной) для фазы и уровня. Но мы это уже проделывали другими методами (МПВ), поэтому сейчас сосредоточимся на других задачах. Функция корреляции (функция когерентности второго порядка) – это второй статистический момент. На самом деле *полную* информацию о случайном процессе можно получить, зная *всю* совокупность статистических моментов (с первого до  $n$ -го). Например, существенную информацию о флуктуациях интенсивности несет *четвертый* момент. Более того, известен ряд примеров, когда среднее значение вообще не имеет ничего общего с поведением случайного процесса в отдельных реализациях. Поэтому куда более информативным является вероятностное описание. Во-первых, зная плотность вероятностей, мы можем найти любой статистический момент. Во-вторых, в работах В.И. Кляцкина и А.И. Саичева установлена связь между характерными особенностями реализаций случайных процессов и вероятностными распределениями. Поэтому мы теперь займемся именно вероятностным описанием распределения интенсивности в случайной среде.

Поставим себе задачу – рассмотреть *флуктуации интенсивности* волны в *окрестности фокусировок* (иными словами – в окрестности каустик). На первый взгляд, сделать это методом геометрической оптики невозможно, но здесь мы как раз продемонстрируем огромные возможности, которые дает небольшая модификация традиционного геометрооптического подхода.

К сожалению, рассмотреть прохождение волны через толстый слой атмосферы аналитически не удастся. Дело в том, что для этого необходим анализ корреляционной функции флуктуаций интенсивности. Это означает вычисление четвертого момента поля, а решение уравнения для четвертого момента до сих пор далеко от завершения. Приходится упрощать. Естественный путь здесь – рассмотреть задачу *о дифракции волны за фазовым* (синоним: бесконечно тонким) *экраном*. Слой можно затем рассматривать как систему экранов. Но даже и в такой упрощенной постановке традиционный путь решения дифракционной задачи приводит к трудно вычисляемым интегралам. Выручает здесь неожиданная на первый взгляд аналогия между нужной нам задачей и задачей *о тепловом механизме ограничения флуктуаций плотности потока невзаимодействующих частиц*. Кажется, что такая задача не имеет ничего общего с распространением излучения в случайной среде. На самом деле удастся установить аналогию между флуктуациями плотности потока частиц и интенсивности волны. Видимо, впервые это было показано в книге [8]. В этом смысле особенно впечатляет название английского варианта той же книги:

*Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles.*

Установим сначала эту аналогию. Будем рассматривать распространение в однородной среде. Тогда в *малоугловом* приближении *эйконал* и *интенсивность* волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{1}{2}(\nabla_{\perp} \Theta)^2 = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial x} + \nabla_{\perp} (I \nabla_{\perp} \Theta) = 0$$

(здесь градиент берется по поперечным координатам). Введем вектор

$$\vec{v} = \nabla_{\perp} \Theta,$$

имеющий ясный геометрический смысл:  $\psi = |\vec{v}|$  – угол к оси  $x$ , под которым волна приходит в точку  $(x, \vec{\rho})$ . Назовем тогда  $\vec{v}$  вектором углов прихода волны. Подействуем оператором набла на уравнение для эйконала, при этом получим уравнение

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + (\vec{v} \nabla_{\perp}) \vec{v} = 0.$$

Если вспомнить механику сплошных сред, то легко заметить, что по виду это уравнение полностью совпадает с уравнением поля скорости двумерного гидродинамического потока невзаимодействующих частиц. Более того, записанное с помощью вектора  $\vec{v}$  уравнение для интенсивности примет вид

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \text{div} (I \vec{v}) = 0,$$

а это полностью совпадает с уравнением непрерывности поля плотности. Таким образом, налицо полная аналогия между описанием распространения оптической волны в геометрооптическом приближении и потенциальным ( $\vec{v} = \nabla \Theta$ ) движением двумерного гидродинамического потока невзаимодействующих частиц. Здесь роль траекторий играют лучи.

Установленной аналогией между поведением полей плотности частиц и интенсивности оптической волны мы воспользуемся для анализа поведения поля интенсивности в окрестности *каустика*, т.е. в области сильных флуктуаций интенсивности.

### 6.3.2. Связь эйлеровой и лагранжевой статистик

Вспомним, что в механике сплошных сред широко применяются два взаимно дополняющих друг друга подхода. Один из них соответствует эйлерову, а другой – лагранжеву описанию. Как известно, лагранжевы характеристики измеряют движущиеся зонды и буйки нулевой плавучести, а эйлеровы – неподвижные датчики. *Эйлерова* система координат удобна для описания полей в фиксированных точках пространства, в которые с течением времени попадают разные частицы среды. Типичным примером эйлеровой системы координат служит обычная декартова система  $(x, \vec{\rho})$ . В отличие от эйлеровой, *лагранжева* система координат “вморожена” в сплошную среду, движется вместе с ней и удобна для описания поведения частиц среды в окрестностях фиксированных

частиц. В качестве лагранжевых координат обычно выбирают эйлеровы координаты в начальный момент времени.

Очевидно, с точки зрения экспериментатора, важнее эйлерово описание. Но, как правило, лагранжево намного проще. В самом деле, лагранжевы уравнения выглядят тривиально – каждая частица движется равномерно и для случайного начального поля не составляет труда найти статистику. Все, что требуется при таком подходе – это знание связи эйлеровой и лагранжевой статистик.

Договоримся обозначать эйлеровы переменные маленькими, а лагранжевы – заглавными буквами. Равенства вида

$$\vec{x} = \vec{X}(\vec{y}, t)$$

выражают эйлеровы координаты через лагранжевы (здесь  $\vec{y}$  – начальная координата частицы,  $t$  – время). Разрешив это равенство относительно  $\vec{y}$ , можно выразить лагранжевы координаты через эйлеровы:

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, t).$$

Если откуда-либо известно поле скоростей в эйлеровой системе координат  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , то эйлеровы координаты можно найти из системы уравнений

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{v}[X(\vec{y}, t), t] = \vec{V}(\vec{y}, t), \quad \vec{X}(\vec{y}, t=0) = \vec{y}.$$

Рассмотрим физически бесконечно малую жидкую частицу среды с лагранжевыми координатами  $\vec{y}$ . Ее объем в момент  $t$ , отнесенный к начальному объему, равен якобиану преобразования эйлеровых координат в лагранжевы:

$$J(\vec{y}, t) = \left| \frac{\partial \vec{X}(\vec{y}, t)}{\partial \vec{y}} \right|, \quad J(\vec{y}, 0) = 1.$$

Если  $J < 1$ , то жидкая частица сжалась, если  $J > 1$ , то расширилась. Поэтому логично называть эту величину расходимостью (в англоязычной литературе – *ray tube area*). Введем еще эйлерово поле расходимости

$$j(\vec{x}, t) = J(\vec{y}(\vec{x}, t), t).$$

Заметим, что если поле расходимости всюду положительно, то между эйлеровыми и лагранжевыми координатами имеется взаимно однозначное соответствие, а среда однопотокова. Если же  $J(\vec{y}, t)$  – знакопеременная функция координат, то в некоторых областях движение становится многопотоковым: в одну точку пространства попадает сразу несколько частиц. Пока будем считать движение однопотоковым.

Изменение в пространстве и времени поля расходимости тесно связано с изменением ее плотности. Пусть

$$\rho^n(\vec{y}, t=0) = \rho_0(\vec{y})$$

– плотность в начальный момент, тогда в произвольный момент времени лагранжево поле плотности будет

$$\rho^n(\vec{y}, t) = \rho_0(\vec{y}) / J(\vec{y}, t).$$

Соответствующее эйлерово поле плотности

$$\rho^3(\vec{x}, t) = \rho^n(\vec{y}(\vec{x}, t), t) = \rho_0(\vec{y}(\vec{x}, t), t) / j(\vec{x}, t).$$

Теперь свяжем эйлеровы и лагранжевы плотности вероятностей. Определим совместную лагранжеву плотность вероятностей координат, скоростей и поля расходимости так:

$$W_{X,V,J}^n(\vec{x}, \vec{v}, j; \vec{y}, t) = \left\langle \delta[\vec{X}(\vec{y}, t) - \vec{x}] \delta[\vec{V}(\vec{y}, t) - \vec{v}] \delta[J(\vec{y}, t) - j] \right\rangle_n.$$

Здесь усреднение производится по ансамблю реализаций лагранжевых полей. Используя свойства дельта-функции, при взаимно однозначном соответствии между лагранжевыми и эйлеровыми координатами имеем

$$\delta[\vec{X}(\vec{y}, t) - \vec{x}] = \delta[\vec{y}(\vec{x}, t) - \vec{y}] / j(\vec{x}, t).$$

Отсюда можно получить:

$$W_{X,V,J}^n(\vec{x}, \vec{v}, j; \vec{y}, t) = \left\langle \delta[\vec{y}(\vec{x}, t) - \vec{y}] \delta[\vec{v}(\vec{x}, t) - \vec{v}] \delta[j(\vec{x}, t) - j] \right\rangle_n / j.$$

С другой стороны, естественно определить эйлерову плотность вероятностей так:

$$W_{y,v,j}^3(\vec{y}, \vec{v}, j; \vec{x}, t) = \left\langle \delta[\vec{y}(\vec{x}, t) - \vec{y}] \delta[\vec{v}(\vec{x}, t) - \vec{v}] \delta[j(\vec{x}, t) - j] \right\rangle_n.$$

Тогда формула связи плотностей вероятностей выглядит так:

$$W_{y,v,j}^3(\vec{y}, \vec{v}, j; \vec{x}, t) = j W_{X,V,J}^n(\vec{x}, \vec{v}, j; \vec{y}, t).$$

Еще одно полезное соотношение получаем, заменив расходимость обратной к ней величиной – плотностью среды:

$$\rho W_{y,v,\rho}^3(\vec{y}, \vec{v}, \rho; \vec{x}, t) = \rho_0 W_{X,V,\rho}^n(\vec{x}, \vec{v}, \rho; \vec{y}, t).$$

### 6.3.3. Пример: статистика углов прихода волны

Вернемся теперь к оптическим задачам. Пусть волна распространяется вдоль оси  $t$ , поперечные координаты обозначим  $x_1, x_2$ . Легко сообразить, что если при  $t=0$  интенсивность одинакова во всей поперечной плоскости и равна  $I_0$ , то расходимость (определение аналогично определению через плотность частиц)

$$j(\vec{x}, t) = I_0 / I(\vec{x}, t).$$

Домножив уравнение неразрывности для интенсивности на  $I_0 / I^2$ , после несложных выкладок получаем систему уравнений

$$\frac{\partial j}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) j + 2I = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)l + m = 0,$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)m = 0.$$

Здесь использованы вспомогательные поля

$$l = -\frac{j\Delta\Theta}{2}, \quad m = j \left| \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_p} \right|, \quad k, p = 1, 2,$$

имеющие наглядный физический смысл – это домноженные на расходимость средняя и гауссова кривизны волнового фронта.

Пусть в точке с координатами  $t = -R$ ,  $x_1 = x_2 = 0$  излучается сферическая волна, а в плоскости  $t = 0$  расположен фазовый экран, вносящий в волну случайные фазовые искажения  $k\Theta_0(x)$ . Будем интересоваться статистикой углов прихода волны  $\vec{v}$ . Тогда выписанные уравнения надо решать с начальными условиями

$$j(x, 0) = 1, \quad \vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{v}_0(\vec{x}) = x/R + \nabla\Theta_0,$$

$$l(\vec{x}, 0) = l_0(\vec{x}) = -1/R - \Delta\Theta_0/2,$$

$$m(\vec{x}, 0) = m_0(\vec{x}) = 1/R^2 + \Delta\Theta_0/R + \left| \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x_k \partial x_p} \right|.$$

Эти уравнения достаточно сложные, и здесь легче найти сначала лагранжеву плотность вероятностей. Лагранжевы уравнения проще:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = 0, \quad \frac{dJ}{dt} + 2L = 0, \quad \frac{dL}{dt} + M = 0, \quad \frac{dM}{dt} = 0.$$

Начальное условие для первого из них

$$\vec{X}(\vec{y}, 0) = \vec{y},$$

а остальные получаются из эйлеровых формальной заменой  $x$  на  $y$ . Решения этих уравнений очевидны. Нам понадобятся только выражения для координаты, угла и расходимости:

$$\vec{X}(\vec{y}, t) = \vec{y}(1 + t/R) + t\nabla\Theta_0(\vec{y}),$$

$$\vec{V}(\vec{y}, t) = \vec{y}/R + \nabla\Theta_0(\vec{y}),$$

$$J(\vec{y}, t) = 1 - 2l_0 t + m_0 t^2 = (1 + t/R)^2 + t(1 + t/R)\Delta\Theta_0 + t^2 \left| \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y_k \partial y_p} \right|.$$

Пусть фазовые искажения на экране – гауссово статистически изотропное поле с ковариационной функцией

$$K_\Theta(s) = \sigma_0^2 \exp(-\kappa^2 s^2 / 2) / \kappa^2.$$



При этом случайный вектор  $\nabla\Theta_0(y)$ , определяющий статистику координат и углов прихода луча, статистически не зависит от вторых частных производных  $\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial y_k\partial y_p}$ , определяющих статистику расходимости. В силу этого лагранжева совместная плотность вероятностей этих трех величин распадается на произведение:

$$W_{x,v,j}^n(\vec{x}, \vec{v}, j; \vec{y}, t) = W_{x,v}^n(\vec{x}, \vec{v}; \vec{y}, t)W_j^n(j; t).$$

Мы будем интересоваться вероятностными свойствами случайных углов прихода фиксированного луча, поэтому нам нужен первый сомножитель. Поскольку в данном случае вероятностное распределение вектора  $\nabla\Theta_0(y)$  равно

$$W_0(\vec{p}) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2\sigma_0^2}\right),$$

то, усредняя по этой статистике решения стохастических уравнений, имеем:

$$\begin{aligned} W_{x,v}^n(\vec{x}, \vec{v}; \vec{y}, t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2\sigma_0^2}\right) \delta(\vec{v} - \vec{y}/R - \vec{p}) \delta[\vec{x} - \vec{y}(1+t/R) - t\vec{p}] d\vec{p} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \delta(\vec{x} - \vec{y} - \vec{v}t) \exp\left[-\frac{(\vec{v} - \vec{y}/R)^2}{2\sigma_0^2}\right]. \end{aligned}$$

После некоторых не слишком сложных преобразований удастся найти и статистику расходимости. Мы не будем приводить этого выражения, а выпишем лишь выражение для среднего, которое нам сейчас понадобится:

$$\langle J \rangle_n = (1+t/R)^2.$$

Зная лагранжеву плотность вероятностей, можно определить эйлеровы вероятностные распределения полей координат и углов прихода. В нашем случае из формул связи двух статистик следует:

$$W_{v,j}^3(\vec{v}, j; \vec{x}, t) = jW_j^n(j; t) \int_{-\infty}^{\infty} W_{x,v}^n(\vec{x}, \vec{v}; \vec{y}, t) d^2\vec{y}.$$

Интегрируя это выражение по  $j$ , получаем искомую эйлерову плотность вероятностей углов прихода луча:

$$W_v^3(\vec{v}; \vec{x}, t) = \langle J \rangle_n \int_{-\infty}^{\infty} W_{x,v}^n(\vec{x}, \vec{v}; \vec{y}, t) d^2\vec{y} = (1+t/R)^2 \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left\{-\frac{[\vec{v}(1+t/R) - \vec{x}/R]^2}{2\sigma_0^2}\right\}.$$

Обратим внимание на то, что эволюция статистических характеристик вектора углов прихода с ростом расстояния  $t$  вдоль фиксированного луча и в фиксированной точке  $x$  качественно различна. Если плотность вероятностей вдоль луча не зависит от  $t$ , то эйлерова плотность вероятностей меняется с расстоянием с изменением расстояния  $t$  от экрана. В частности, дисперсия векторов углов прихода

$$\sigma_v^2(t) = \frac{\sigma_0^2}{1+t/R^2}$$

уменьшается с увеличением расстоянием расстояния от экрана. Этому эффекту подавления флуктуаций углов прихода есть аналог в теории волновых процессов: эффект уменьшения дисперсии шума в случайной римановой волне на растягивающемся участке сигнала.

### 6.3.4. Статистические свойства интенсивности волны

Теперь исследуем поведение плотности вероятностей интенсивности

$$W_I^n(I;t) = \langle \delta[I - I(t)] \rangle.$$

Здесь снова удобно будет выразить интенсивность через расходимость и усреднить по плотности вероятностей расходимости. Это дает

$$W_I^n(I;t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(I - I_0/|j|) W_j^n(j;t) dj.$$

С учетом свойств дельта-функции отсюда получаем

$$W_I^n(I;t) = \frac{I_0}{I^2} \left[ W_j^n\left(\frac{I_0}{I^2}; t\right) + W_j^n\left(-\frac{I_0}{I^2}; t\right) \right].$$

Строгий анализ поведения плотности вероятностей расходимости вблизи нуля (т.е. в окрестности каустик, где интенсивность стремится к бесконечности, а расходимость, соответственно, к нулю) показывает, что эта функция положительна:

$$W_j(j \rightarrow 0; t) > 0.$$

Это приводит к степенному закону спадания плотности вероятности интенсивности в окрестности каустик:

$$W_I^n(I \rightarrow \infty; t) = \frac{2I_0}{I^2} W_j(j \rightarrow 0; t).$$

Причина такого медленного (как  $I^{-2}$ ) спадания заключается в бесконечно больших выбросах интенсивности в точках каустик, а физическим следствием является тот факт, что вдоль фиксированного луча даже средняя интенсивность волны оказывается в приближении геометрической оптики бесконечной.

В то же время, если мы интересуемся статистикой в фиксированной точке пространства (эйлеровой статистикой), то используем полученную ранее формулу связи:

$$W_I^o(I;t) = \frac{I_0}{I} W_I^n(I;t).$$

Отсюда видно, что эйлерова плотность вероятностей спадает по более быстрому закону ( $\sim I^3$ ). Этим обеспечивается ограниченность средней интенсивности и выполнение инварианта

$$\langle I \rangle_s = I_0,$$

хотя и в этом случае дисперсия интенсивности оказывается бесконечной.

## 6.4. Корреляционные свойства флуктуаций интенсивности

Рассматривая прохождение лазерного излучения через слой турбулентной атмосферы, мы упоминали экспериментально наблюдаемый факт “насыщения фокусировок”. Здесь мы попробуем дать ему объяснение. Для этого необходимо рассмотреть *флуктуации интенсивности* волны в окрестности фокусировок (иными словами – в окрестности каустик). Однако рассмотреть аналитически прохождение волны через толстый слой атмосферы не удастся из-за непреодолимых математических трудностей. Естественный способ упрощения здесь – рассмотреть задачу *о дифракции волны за фазовым* (синоним: бесконечно тонким) *экраном*. Слой можно затем рассматривать как систему экранов. Заметим, что даже и в такой упрощенной постановке традиционный путь решения дифракционной задачи приводит к трудно вычисляемым интегралам. Но снова выручает уже установленная нами аналогия между задачей о распространении оптической волны и о движении гидродинамического потока невзаимодействующих частиц. Теперь мы используем аналогию между нужной нам *дифракционной* задачей и задачей *о тепловом механизме ограничения флуктуаций плотности потока невзаимодействующих частиц*.

### 6.4.1. Флуктуации плотности гидродинамического потока частиц

Известно, что средний квадрат и дисперсия флуктуаций плотности гидродинамического потока частиц в окрестностях каустик, где происходит обгон одних частиц другими, оказываются бесконечными. Например, в теории процесса группирования электронного потока в трубе дрейфа приборов клистронного типа *в точках фокусировок плотность* объемного заряда пучка в рамках кинематической теории *обращается в бесконечность*. Одним из факторов, *ограничивающих* поле плотности и его флуктуации в реальном газе, является *тепловой разброс скоростей* частиц.

Рассмотрим механизм ограничения флуктуаций плотности за счет теплового разброса скоростей, считая частицы невзаимодействующими. Для простоты будем рассматривать одномерный вариант – частицы движутся вдоль оси  $x$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  в каждой точке  $x$  потока находится *множество* частиц с *различными* скоростями  $v$ , плотность которых в фазовом пространстве “координата – скорость”  $(x, v)$  равна  $\rho_0 f_0(x, v)$ , где  $\rho_0$  – начальная плотность газа, а функция  $f(x, v)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x, v) dv = 1.$$

Эволюция теплого газа невзаимодействующих частиц описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

с начальным условием

$$f(x, v, t = 0) = \rho_0 f_0(x, v).$$

Решение этого уравнения

$$f(x, v, t) = \rho_0 f_0(x - vt, v),$$

а плотность теплого газа  $\rho_T$  в данной точке  $x$  равна

$$\rho_T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv.$$

Рассмотрим случай, когда начальную плотность  $f_0(x, v)$  можно задать в виде

$$f_0(x, v) = f_T[v - v_0(x)],$$

где начальное поле скорости  $v_0(x)$  – случайная функция с известными статистическими свойствами. Тогда плотность теплого газа

$$\rho_T(x, t) = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_T[v - v_0(x - vt)] dv$$

можно выразить через плотность “холодного”  $\rho(x, t)$  в виде

$$\rho_T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(c) \rho(x - ct, t) dc,$$

откуда видно, что тепловой разброс приводит к сглаживанию каустических особенностей реализаций плотности.

Будем интересоваться корреляционной функцией плотности газа в случае *статистически однородного* поля скорости  $v_0(x)$ . Известно, что ее в этом случае можно записать в виде

$$B_\rho^T(s, t) = \frac{\rho_0^2}{t} \int_{-\infty}^{\infty} F(c) w_u \left( \frac{s - s_0}{t} - c, s_0 \right) ds_0 dc,$$

где

$$F(c) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(c' - c/2) f_T(c' + c/2) dc',$$

$s$  – расстояние между частицами, начальное расстояние между которыми равно  $s_0$ ,  $w_u(u, s_0)$  – вероятностное распределение статистически однородного по  $u$  поля разности скоростей частиц

$$u(y, s_0) = v_0(y + s_0) - v_0(y).$$

Рассмотрим поведение корреляционной функции флуктуаций плотности в конкретном случае гауссова поля  $v_0(x)$  с вероятностным распределением

$$w_u(u, s_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi [\sigma_0^2 - K_0(s_0)]}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{4[\sigma_0^2 - K_0(s_0)]} \right\},$$

где  $K_0(s_0)$  и  $\sigma_0^2$  – ковариационная функция и дисперсия поля  $v_0(x)$ . Кроме того, предположим, что

$$f_T(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c_T}} \exp\left(-\frac{c^2}{2c_T^2}\right),$$

где  $c_T$  – характерный масштаб теплового разброса скоростей. Тогда находим функцию  $F(c)$ :

$$F(c) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c_T}} \exp\left(-\frac{c^2}{4c_T^2}\right)$$

и при усреднении этой функции с помощью плотности вероятностей  $w_u(u, s_0)$  получаем

$$B_\rho^T(s, t) = \frac{\rho_0^2}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{1 - b_0(s_0) + c_T^2 / \sigma_0}} \exp\left\{-\frac{(s - s_0)^2}{4t^2 \sigma_0^2 [1 - b_0(s_0) + c_T^2 / \sigma_0]}\right\} ds_0,$$

где  $b_0(s_0) = B_0(s_0) / \sigma_0^2$  – коэффициент корреляции.

От размерных координаты  $s$  и времени  $t$  перейдем к безразмерным

$$y = s/2l, \quad y_0 = s_0/2l, \quad \tau = \sigma_0 t/l.$$

Сюда входит характерный пространственный масштаб  $l$  – длина корреляции гидродинамических флуктуаций скорости. Коэффициент корреляции поля  $v_0(x)$  в безразмерных координатах будет

$$r_0(y_0) = b_0(s_0/2l).$$

Смысл безразмерного времени  $\tau$ , введенного таким способом, состоит в том, что  $\tau = 1$  соответствует времени группирования (фазовой фокусировки) потока частиц, т.е. времени сильных флуктуаций плотности за счет сжатия и разрежения газа. При этом  $\tau \leq 1$  – время, когда поток однопотоков,  $\tau \gg 1$  – многопотоков.

Окончательно (в безразмерных координатах) для корреляционной функции флуктуаций плотности получим

$$B_\rho^T(y, \tau) = \frac{\rho_0^2}{\sqrt{\pi \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - r_0(y_0) + \varepsilon}} \exp\left\{-\frac{(y - y_0)^2}{\tau^2 [1 - r_0(y_0) + \varepsilon]}\right\} dy_0.$$

Обсудим смысл параметра  $\varepsilon = c_T^2 / \sigma_0^2$ , входящего в полученное выражение. Очевидно, что чем меньше тепловой разброс скоростей, тем сильнее флуктуации плотности при сжатии и разрежении газа. С ростом температуры газа растет характерный масштаб теплового разброса скоростей  $c_T$ , что приводит к сглаживанию каустических особенностей флуктуаций плотности. Поэтому величину  $\varepsilon$  будем называть безразмерной эффективной температурой, при этом  $\varepsilon \gg 1$  соответствует горячему газу,  $\varepsilon \ll 1$  – холодному.

Введем ковариационную функцию

$$K_\rho^T(y, \tau) = B_\rho^T(y, \tau) - \rho_0^2$$

и найдем величину

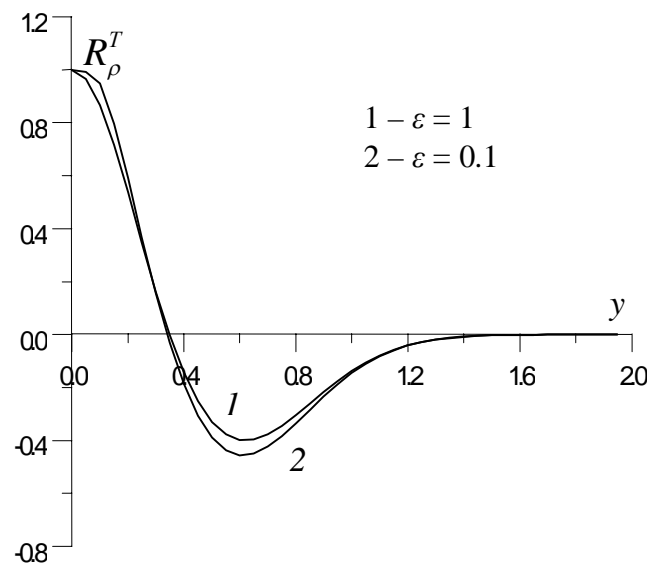
$$S = \int_{-\infty}^{\infty} K_\rho^T(y, \tau) dy,$$

которая численно равна площади под графиком функции  $K_\rho^T(y, \tau)$ . Используя выражения для корреляционной и ковариационной функций плотности, легко получить, что  $S=0$ . Этот инвариант известен как инвариант Чандрасекара. Его смысл состоит в следующем: сгущение среды ( $\rho > \rho_0$ ) сопровождается разрежением ( $\rho < \rho_0$ ) в соседних областях.

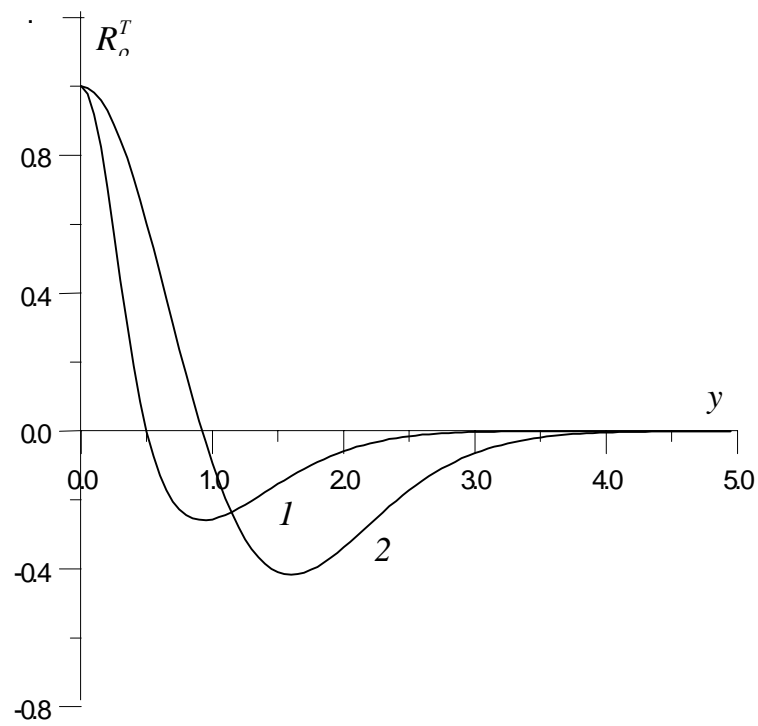
Зависимость коэффициента ковариации

$$R_\rho^T(y, \tau) = K_\rho^T(y, \tau) / \sigma_\rho^2$$

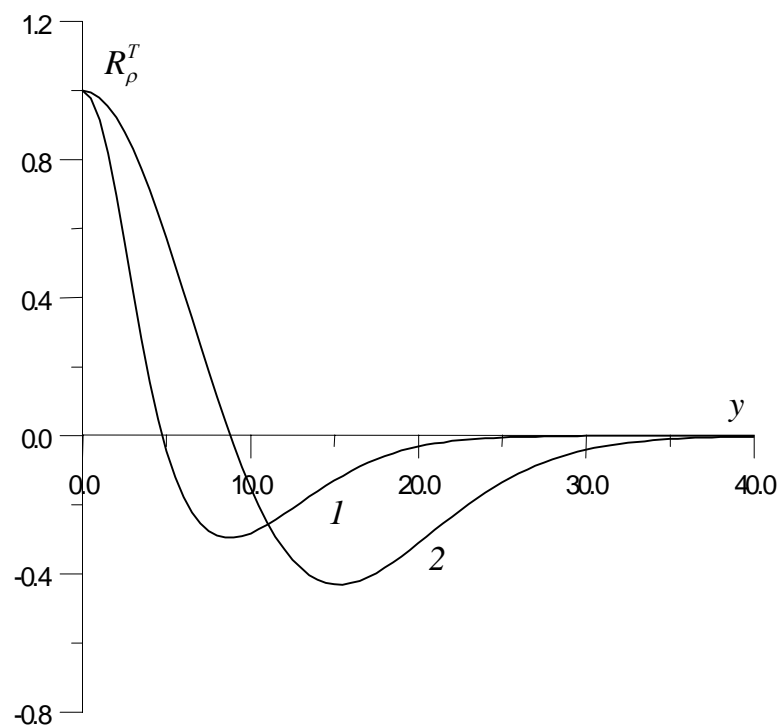
от безразмерной поперечной координаты  $y$  при различных  $\tau$  и  $\varepsilon$  выглядит следующим образом (см. рис. 11). Из приведенных в соответствующей этому рисунку таблице значений  $\sigma_\rho^2$  видно, что дисперсия флуктуаций плотности возрастает по мере уменьшения температуры газа.



a)  $\tau = 0.1$



b)  $\tau = 1$



c)  $\tau = 10$

Рис. 11. Коэффициент ковариации флуктуаций плотности теплого газа частиц  $R_\rho^T(y; \tau)$ .

$\tau$	0.1		1		10	
$\varepsilon$	1	0.1	1	0.1	1	
$\sigma_\rho^2$	0.061	0.074	0.044	0.284	0.003	0.024

Вид функции  $R_\rho^T(y, \tau)$  в зависимости от времени  $\tau$  соответствует тому, что с увеличением  $\tau$  и, следовательно, с ростом числа потоков ( $\tau \gg 1$ ) увеличивается радиус корреляционной связи между точками потока, и наоборот, в однопотоковом режиме такая связь быстро падает с ростом расстояния между точками.

#### 6.4.2. Дифракционное сглаживание каустических особенностей в поле интенсивности волны

Применим полученные сейчас результаты к задаче о дифракции плоской световой волны за случайным фазовым экраном. Для этого прежде всего установим аналогию между поведением гидродинамического потока частиц и дифракцией волн за экраном. С этой целью перейдем от амплитуды волны к лучевой интенсивности. В малоугловом приближении квазиоптики комплексная амплитуда волны  $E(x; z)$  удовлетворяет параболическому уравнению

$$2ik \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0, \quad E(x=0, z) = E_0(z),$$

где  $x, z$  – продольная и поперечная координаты (мы рассматриваем для простоты только одно поперечное направление),  $k$  – волновое число. Введем функцию Вигнера

$$f(x, \nu, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, z + q/2k) E^*(x, z - q/2k) \exp(-i\nu q) dq,$$

которую можно интерпретировать как лучевую интенсивность (лучевую плотность потока энергии) волны, попадающей в точку  $(x, z)$  под углом  $\nu$  к оси  $x$ . Оказывается (это можно проверить непосредственным дифференцированием), эта функция с единственной формальной заменой времени  $t$  на продольную координату  $x$  удовлетворяет тому же уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \nu \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

что и плотность в фазовом пространстве, с граничным условием

$$f(x=0, \nu, z) = I_0 f_0(\nu, z),$$

а полная интенсивность в точке  $(x, z)$ , подобно плотности теплого газа частиц, равна

$$I(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, \nu, x) d\nu.$$

Решение уравнения Лиувилля без учета “теплового разброса” применительно к фазовому экрану соответствует приближению геометрической оптики и дает бесконечные средний квадрат и дисперсию флуктуаций интенсивности волны в области фокусировок.



Оптическим аналогом теплового разброса скоростей частиц является дифракция, сглаживающая каустические особенности волнового поля. Учтем влияние дифракции так же, как учитывали тепловой разброс скоростей, т.е. будем считать, что начальный угол прихода луча  $v_0(z)$  – случайная функция с известными статистическими свойствами. Назовем этот подход моделью “*теплых лучей*” и найдем *оптический аналог* функции  $f_T[v - v_0(z)]$ . Для этого рассмотрим случай, когда плоская волна с интенсивностью  $I_0$  падает на расположенный в плоскости  $x = 0$  фазовый экран, вносящий искажения  $k\Psi(z)$ .

Тогда граничное условие имеет вид

$$f(x = 0, v, z) = f_0(v, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ ik \left[ \Psi \left( z + \frac{q}{2k} \right) - \Psi \left( z - \frac{q}{2k} \right) \right] - ivq \right\} dq.$$

Введем функции

$$v_0(z) = \Psi'(z)$$

и

$$\varphi(z, q, k) = k \int_{z-q/2k}^{z+q/2k} [v_0(a) - v_0(z)] da,$$

тогда выражение для граничной функции  $f_0(v, z)$  можно переписать в виде

$$f_0(v, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\varphi(z, q, k)] \exp\{-i[v - v_0(z)]q\} dq.$$

Отсюда видно, что граничная функция  $f_0(v, z)$  может быть представлена в форме  $f_T[z, v - v_0(z)]$ , где

$$f_T(z, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\varphi(z, q, k) - ivq] dq.$$

Решение уравнения Лиувилля применительно к интенсивности световой волны будет удобно записать в виде

$$f(x, v, z) = I_0 f_T[z - vx, v - v_0(z - vx)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_T[a, v - v_0(a)] \delta(a - z + vx) da.$$

Будем считать, что интенсивность падающей волны  $I_0 = 1$ . При этом интенсивность волны за экраном равна

$$I(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} f_T[a, v - v_0(a)] \delta(a - z + vx) da.$$

После замены переменных  $c = v - v_0(a)$  получим

$$I(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dc \int_{-\infty}^{\infty} f_T[a, c] \delta[z - cx - X(x, a)] da,$$

где  $X(x, a) = a + v_0(a)x$  – уравнение *траектории геометрооптического луча*, выходящего из точки экрана с координатой  $(x = 0, z = a)$ .

Функция  $f_T(a, c)$  учитывает дифракцию и дает дифракционное “оплавление” каустических особенностей. Она случайна и, вообще говоря, статистически взаимосвязана с  $X(x, a)$ . Но для полукачественного учета дифракционных эффектов будем считать  $f_T(a, c)$  статистически независимой от  $X(x, a)$ , т.е. предположим, что можно *статистически расцепить* дифракционные и геометро-

оптические средние. Возможность расщепления может быть обоснована тем, что дифракционное уширение функции распределения имеет не столько статистический, сколько *динамический* характер, поскольку связано не с характером случайных неоднородностей экрана, а с принципиальным эффектом дифракционного расплывания на характерных неоднородностях (учитывает конечность величины  $kl$ , где  $l$  – масштаб неоднородностей). В частности, расчет по приведенной схеме чисто динамической задачи о дифракции волны за синусоидальным фазовым экраном, о котором чуть дальше, дает хорошее согласие с точным результатом.

Согласно этой гипотезе, при расчете корреляционной функции получим выражение

$$B_I(x, s) \equiv \langle I(x, z + s)I(x, z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 dc_2 da_1 da_2 \langle f_T(a_1, c_1) f_T(a_2, c_2) \rangle \times \\ \times \langle \delta[z_1 - c_1 x - X(x_1, a)] \delta[z_2 - c_2 x - X(x_2, a)] \rangle.$$

Будем считать фазовый экран *статистически однородным*. Это означает, что все должно определяться не координатами  $a_1$  и  $a_2$ , а их *разностью*

$$s_0 = a_1 - a_2.$$

Кроме  $s_0$  введем еще новые переменные

$$Q_0 = (a_1 + a_2)/2, \quad s = x_1 - x_2, \quad c = c_1 - c_2$$

и используем обозначение

$$g(s_0, c_1, c_2) \equiv \langle f_T(a_1, c_1) f_T(a_2, c_2) \rangle.$$

Это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} dQ_0 \langle \delta[z_1 - c_1 x - X(x, Q_0 + s_0/2)] \delta[z_2 - c_2 x - X(x, Q_0 - s_0/2)] \rangle = W(s - cx; s_0, x).$$

Здесь обозначено

$$W(s; s_0, x) = \langle \delta[s - X(x, s_0/2) + X(x, -s_0/2)] \rangle = \langle \delta[s - s_0 - u(0, s_0)x] \rangle = \frac{1}{x} w_u\left(\frac{s - s_0}{x}; s_0\right),$$

а поле  $u(a, s_0)$  вводится так же, как в случае теплого газа частиц. При этом корреляционная функция примет вид

$$B_I(s; x) = \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} dc ds_0 F(s_0, c) w_u\left(\frac{s - s_0}{x} - c; s_0\right),$$

где

$$F(s_0, c) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s_0, c_+ + c/2, c_+ - c/2) dc_+,$$

а плотность вероятности  $w_u(u; s_0)$  совпадает с соответствующим вероятностным распределением для газа частиц. Из определения функции  $f_T(a, c)$  получим выражение для  $F(s_0, c)$ :

$$F(s_0, c) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dc_+ dq_1 dq_2 \exp[-ic_+(q_1 - q_2) - ic(q_1 + q_2)/2] \times \\ \times \langle \exp\{i[\varphi(a_1, q_1, k) - \varphi(a_2, q_2, k)]\} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp(-cq) \exp[-D_\varphi(s_0, q, k)/2],$$

где введена *структурная функция* случайного поля  $\varphi(a, q, k)$ :

$$D_\varphi(s_0, q, k) = \langle [\varphi(s_0, q, k) - \varphi(0, q, k)]^2 \rangle.$$

После подстановки функции  $F(s_0, c)$  в выражение для корреляционной функции получим:

$$B_I(s; x) = \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} dc ds_0 dq \exp(-icq) \exp[-D_\varphi(s_0, q, k)/2] w_u\left(\frac{s-s_0}{q} - c; s_0\right).$$

Введем характеристическую функцию – преобразование Фурье от плотности вероятностей:

$$\theta_u(\kappa; s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} w_u(c; s_0) \exp(-ic\kappa) dc.$$

С ее помощью корреляционная функция окончательно примет вид

$$B_I(s; x) = \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} ds_0 dq \exp\left(-i\frac{q(s-s_0)}{x}\right) \exp[-D_\varphi(s_0, q, k)/2] \theta_u(q; s_0).$$

Используя определения функции  $\varphi$  и характеристической функции  $\theta$ , а также выражение для корреляционной функции, найдем интеграл – площадь под ковариационной функцией:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} [B_I(s; z) - 1] ds = 0.$$

Этот инвариант является статистическим следствием динамического инварианта – закона сохранения полного потока энергии волны через любую поперечную к направлению распространения плоскость. Физический смысл его тот же, что и аналогичного инварианта в применении к задаче дифракции световой волны на экране, а именно: усиление флуктуаций интенсивности в области фокусировок сопровождается их ослаблением в соседних областях.

Далее рассмотрим конкретный случай гауссова поля  $v_0(z)$  с ковариационной функцией  $K_0(s)$  и структурной функцией  $D_0(s)$ . Тогда, с учетом стационарности поля  $v_0(z)$ , найдем

$$\theta_u(q; s_0) = \exp\left\{-q^2 [ \sigma_0^2 - K_0(s_0) ]\right\} = \exp[-q^2 D_0(s_0/2)],$$

а из определения функции  $\varphi$  получим выражение для  $D_\varphi(s_0, q, k)$ :

$$\begin{aligned} D_\varphi(s_0, q, k) &= 2qk \int_{-q/2k}^{q/2k} \left[ \frac{K_0(a+s_0) + K_0(a-s_0)}{2} - K_0(a) \right] da - 2q^2 [K_0(s_0) - \sigma_0^2] = \\ &= q^2 D_0(s_0) + qk \int_{-q/2k}^{q/2k} \left[ D_0(a) - \frac{D_0(a+s_0) + D_0(a-s_0)}{2} \right] da. \end{aligned}$$

В случае, когда  $k^{-1}$  много меньше всех характерных масштабов неоднородностей экрана, подынтегральное выражение в последнем интеграле можно разложить в ряд по  $a$ , ограничившись первым не исчезающим членом разложения, тогда

$$D_\phi(s_0, q, k) = \frac{q^4}{24k^2} [D_0''(0) - D_0''(s_0)].$$

В итоге имеем

$$B_I(s; x) = \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{q^2}{2} D_0(s_0) - \frac{q^4}{48k^2} [D_0''(0) - D_0''(s_0)]\right\} \exp\left(-iq \frac{s-s_0}{x}\right) ds_0 dq.$$

Остановимся подробно на вычислении среднего квадрата интенсивности. Из корреляционной функции при  $s=0$  получим

$$\langle I^2(x) \rangle = \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{q^2}{2} D_0(s_0) - \frac{q^4}{48k^2} [D_0''(0) - D_0''(s_0)]\right\} \exp\left(iq \frac{s_0}{x}\right) ds_0 dq,$$

откуда видно, что это выражение можно переписать в виде

$$\langle I^2(x) \rangle = \langle I(x) \rangle^2 + \sigma_I^2(x),$$

где

$$\langle I(x) \rangle^2 = 1, \\ \sigma_I^2(x) = \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} ds_0 dq \left[ \exp\left\{-\frac{q^2}{2} D_0(s_0) - \frac{q^4}{48k^2} [D_0''(0) - D_0''(s_0)]\right\} - 1 \right] \exp\left(iq \frac{s_0}{x}\right).$$

Пусть  $K_0(s)$  – гауссова функция

$$K_0(s) = \sigma_0^2 \exp(-s^2/2l^2),$$

тогда

$$D_0(s) = 2\sigma_0^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{s^2}{2l^2}\right) \right].$$

Подставим это выражение в выражение для дисперсии флуктуаций интенсивности и перейдем к безразмерным координатам

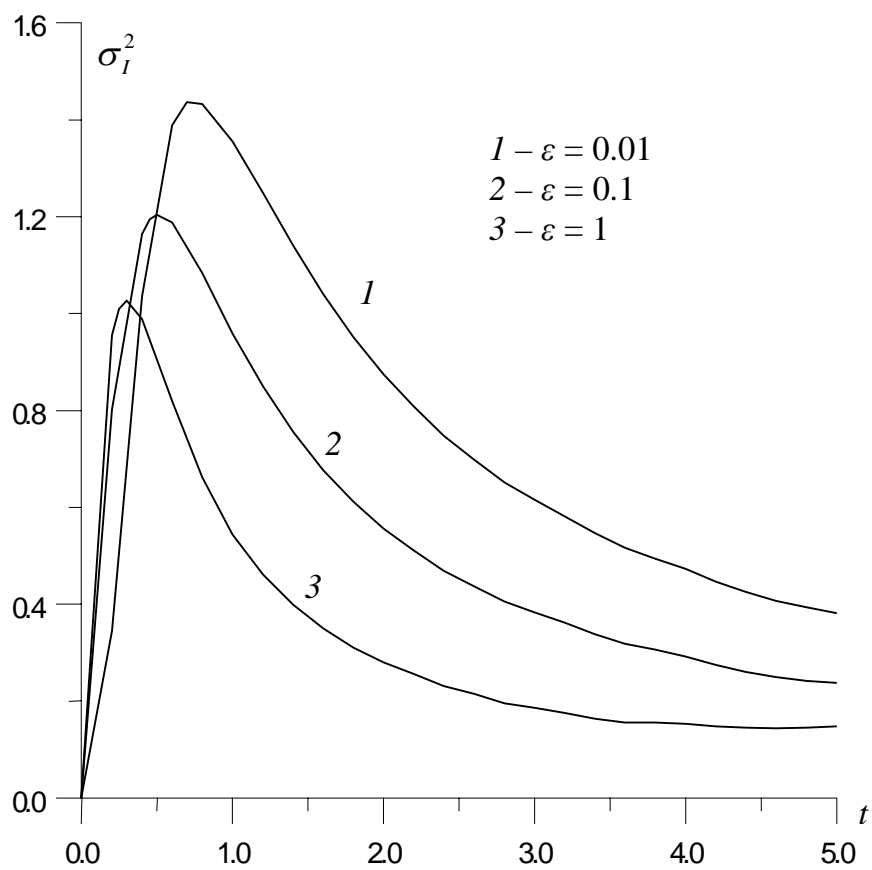
$$y = s/l, \quad t = x\sigma_0/l.$$

При таком определении продольной координаты значение  $t = 1$  соответствует области фокусировок в геометрическом приближении. Окончательно для дисперсии интенсивности получим

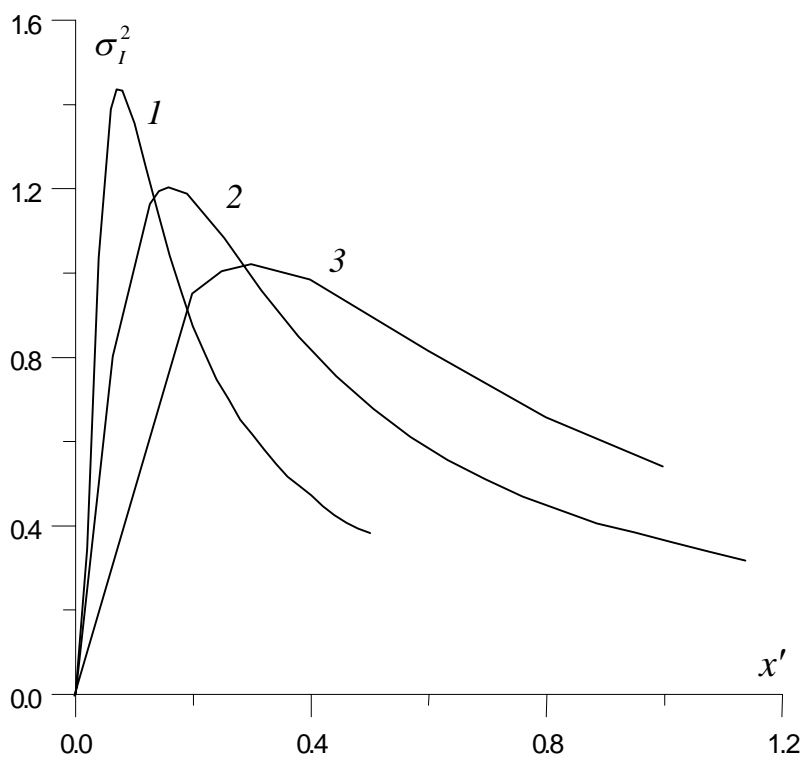
$$\sigma_I^2(t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} dy d\mu \left\{ \exp\left[-\mu^2 f_1(y) - \mu^4 \varepsilon f_2(y)\right] - 1 \right\} \exp(iy\mu/t),$$

где

$$f_1(y) = 1 - \exp(-y^2/2), \quad f_2(y) = 1 - (1 - y^2) \exp(-y^2/2), \\ \varepsilon = \frac{1}{24(kl\sigma_0)^2}.$$



a) зависимость от координаты  $t$ ;



b) зависимость от координаты  $x' \sim t\varepsilon^{1/2}$

Рис. 12. Дисперсия флуктуаций интенсивности  $\sigma_I^2$  за фазовым экраном

Параметр  $\varepsilon$  аналогичен безразмерной эффективной температуре газа. Здесь он характеризует соотношение между действием двух конкурирующих механизмов: фокусировки и дифракции. Чем меньше  $\varepsilon$ , тем более справедливо геометрикооптическое приближение. С ростом  $\varepsilon$  сглаживаются каустические особенности флуктуаций интенсивности, что видно из рис. 12, на котором дисперсия флуктуаций интенсивности построена как функция безразмерных координат  $t$  и  $x'$  (из наших определений  $t$  и  $\varepsilon$  следует, что  $t$  связано с реальной размерной координатой  $x$  соотношением  $x \sim t \varepsilon^{1/2}$ , а координата  $x' = x/x^*$ , где  $x^*$  – любой не зависящий от  $\varepsilon$  параметр размерности длины, сохраняет неизменным масштаб размерной продольной координаты при изменении параметра  $\varepsilon$ ). При  $\varepsilon \leq 1$  эти результаты качественно согласуются с полученными другими авторами (разумеется, другими методами – вычислением строгих интегралов). В частности, выполняется соотношение, аналогичное приведенному в классической книге [3]

$$(\sigma_I^2)_{\max} \sim \lg \varepsilon,$$

что соответствует логарифмическому “насыщению” флуктуаций интенсивности с уменьшением “температуры”  $\varepsilon$ . Кроме того, предлагаемая модель “теплых лучей” легко позволяет объяснить вид полученной зависимости  $\sigma_I^2(t; \varepsilon)$ . Рост  $\varepsilon$  соответствует не только ослаблению флуктуаций фазы, но и более сильному влиянию дифракции. Дифракция сглаживает каустические особенности еще до того, как флуктуации интенсивности достигнут максимального значения. Этим объясняется уменьшение величины максимума  $\sigma_I^2$  и заметное его перемещение от точки  $t=1$  (область сильных фокусировок в приближении геометрической оптики) к  $t=0$ . По этой же причине полученные здесь результаты, видимо, справедливы лишь при  $\varepsilon \leq 1$ , т.к. при их выводе было сделано предположение, что длина волны мала по сравнению с характерным масштабом неоднородностей  $l$ , и между каустиками волна достаточно хорошо описывается приближением геометрической оптики.

Зависимость коэффициента ковариации

$$R_I(y; t) = [B_I(y; t) - 1] / \sigma_I^2$$

от  $t$  и  $\varepsilon$  полностью аналогична соответствующей зависимости для  $R_p^T(y; t)$ .

Мы можем проверить правильность подхода, основанного на аналогии между эволюцией плотности нагретого газа невзаимодействующих частиц и дифракцией монохроматических оптических волн, прошедших случайный фазовый экран. Для этого рассмотрим случай, когда плоская волна единичной амплитуды падает на *динамический* синусоидальный фазовый экран, преобразующий фазу волны как

$$k\Theta(z) = k\theta_0 \sin(\kappa z).$$

Раскладывая фазу в ряд до первого определяющего дифракционное уширение члена

$$k\theta_0 \{ \sin[\kappa(z + q/2k)] - \sin[\kappa(z - q/2k)] \} \approx v_0(z)q + v_0''(z)q^3/24k^2,$$

найдем интенсивность в рамках модели “теплых лучей”

$$I_T(y;t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{y_0}{t} - \cos(y - y_0) \right]^2 \right\}.$$

Здесь введены безразмерные координаты

$$y = \kappa z, \quad t = x/x_0$$

с учетом того, что область сильных фокусировок  $x_0$  определяется условием

$$x_0 = -1/\min v'_0(z) = \theta_0 \kappa^2.$$

Оставляя в разложении фазы только первый член, получим точное геометрооптическое решение

$$I_{GO}(y;t) = \frac{1}{t} \sum_n \frac{1}{|\sin(y - y_{0n}) - 1/t|},$$

где суммирование производится по всем корням уравнения

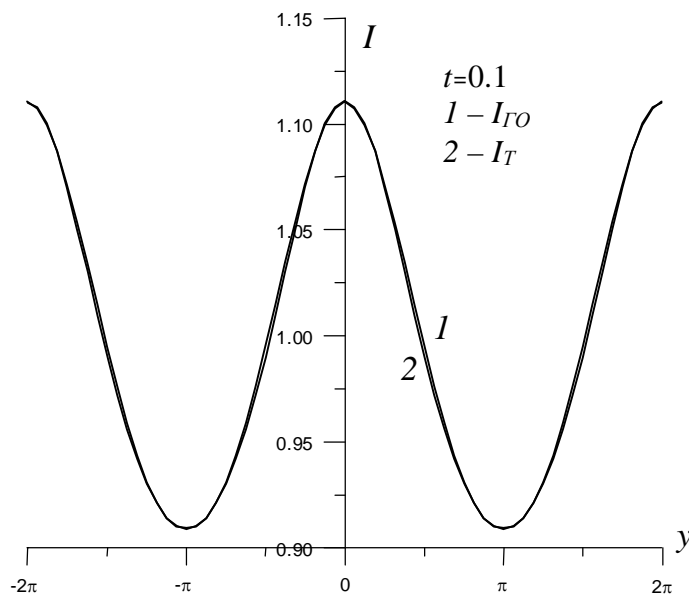
$$\cos(y - y_0) - y_0/t = 0.$$

С другой стороны, наша модель экрана позволяет найти точное решение уравнения квазиоптики

$$I_{KO}(y;t) = \left| -iJ_0(\alpha) - i \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-in^2 t/2\alpha) J_n(\alpha) [\exp(iny) + (-1)^n \exp(-iny)] \right|^2,$$

$$\alpha = (3q_0)^{-1/2} \varepsilon^{-3/4},$$

где  $q_0$  – первый нуль функции Бесселя  $J_0(q)$ .



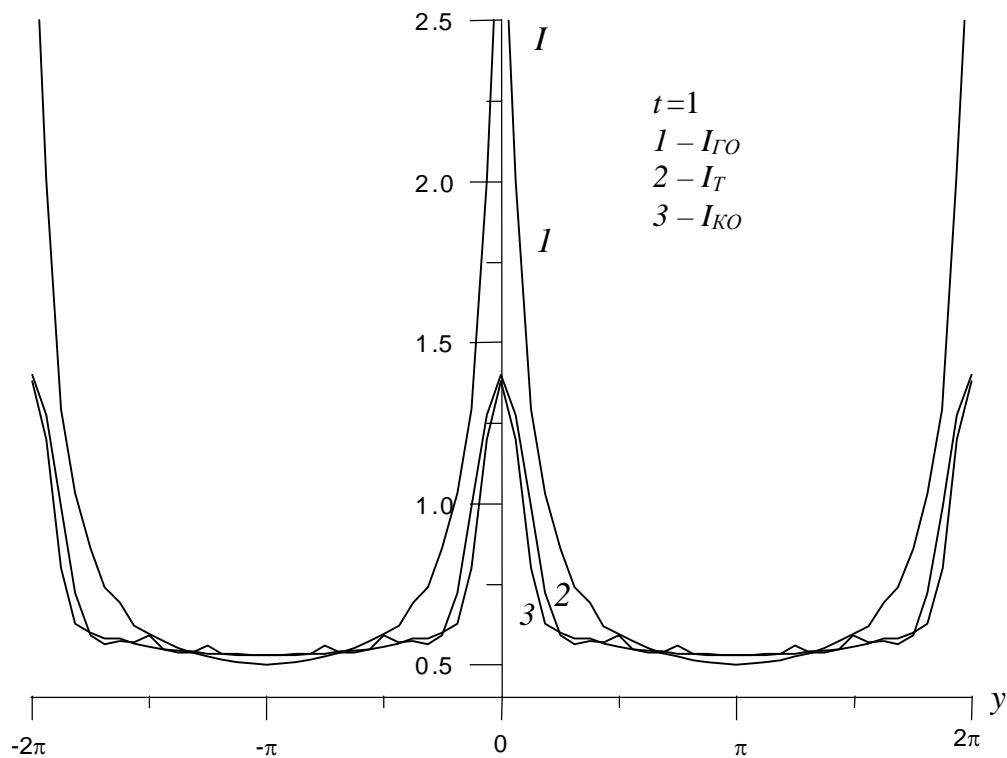


Рис. 13. Интенсивность волны за динамическим синусоидальным фазовым экраном. Параметр  $\varepsilon = 0.1$

Из рис. 13, на котором построен один период интенсивности  $I(y)$  в зависимости от параметра  $t$ , видно, что при однолучевом распространении решение в модели теплых лучей при не очень больших значениях  $\varepsilon$  (на графиках интенсивность приведена при  $\varepsilon = 0.1$ ) полностью совпадает с геометрическим. В области фокусировок ( $t=1$ ) правильно учитывается дифракционное сглаживание каустических особенностей, что видно из сравнения  $I_T$  с  $I_{KO}$ , а в областях вне кустика решение совпадает с геометрическим.

Таким образом, подход, основанный на переходе от параболического уравнения к уравнению Лиувилля для лучевой плотности и на гипотезе статистического расщепления геометрических и дифракционных средних, позволяет вдвое уменьшить кратность интеграла в выражении для корреляционной функции. Полученный результат автоматически переходит в геометрическое приближение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и правильно учитывает сглаживание каустических особенностей с ростом  $\varepsilon$ .

### 6.4.3. Флуктуации интенсивности в турбулентной атмосфере

Найти замкнутое выражение для корреляционной функции флуктуаций интенсивности в случайной среде в общем случае не удастся. Особый интерес представляет *фрактальная* случайно-неоднородная среда, поскольку, как известно, турбулентные неоднородности показателя преломления реальных сред не описываются одним характерным масштабом. Фрактальный характер имеют, например, флуктуации показателя преломления среды, структурная функция



которых подчиняется закону Колмогорова–Обухова. В этом случае с помощью уравнения диффузии лучей можно получить интегральное выражение для корреляционной функции.

Заметим, что решение в этом случае – автомодельное, что является следствием фрактальности. Известно, что такие инвариантные относительно преобразования подобия модели приводят к флуктуациям интенсивности со свойствами, сильно отличающимися от статистических свойств флуктуаций, порождаемых экранами и средами с гладко изменяющейся фазой. Действительно, в этом случае дисперсия флуктуаций интенсивности является константой, не зависящей от продольной координаты. Это означает отсутствие эффектов геометрической оптики: поле не имеет каустических особенностей, которые наблюдаются при дифракции на экране с гауссовой корреляционной функцией флуктуаций фазы. В то же время, здесь остается справедливым инвариант

$$\int_0^{\infty} d\tau [B_I(\tau) - 1] = 0,$$

отражающий специфику флуктуаций интенсивности в *любой* неоднородной среде.

## 6.5. Распространение волн в статистически анизотропной среде

Статистика волн различной природы в крупномасштабных случайно-неоднородных средах исследована к настоящему времени достаточно подробно. Как правило, анализ основывается на уравнениях для моментных функций волн. Такие уравнения, выведенные в малоугловом приближении квазиоптики и марковском приближении, стали классическими и приведены во многих монографиях. Однако они становятся неприменимыми в средах, где случайные неоднородности вытянуты вдоль направления распространения волны, так как не описывают существенное изменение силы рассеяния при малом изменении угла распространения волн, а также ослабления рассеяния при дифракции на неоднородностях среды. Между тем ситуации, когда среда является статистически анизотропной, встречаются достаточно часто. Так, кристаллы льда в облаках имеют форму цилиндров, случайно ориентированных в пространстве. Примером, важным для физики океана, являются случайные внутренние волны, поскольку известно, что горизонтальный масштаб пространственной корреляции флуктуаций скорости звука всегда много больше вертикального.

При выводе уравнений для моментных функций волн в таких средах необходимо отказаться от марковского приближения, не учитывающего конечного продольного масштаба корреляции неоднородностей среды. Уравнения для моментных функций волн в подводных звуковых каналах (случай “блинообразных” неоднородностей) также рассматривались в литературе.

Наша цель – получение и анализ уравнения для среднего поля в среде с вытянутыми вдоль направления распространения волны веретенообразными

неоднородностями. Данная модель соответствует структуре облаков с высокой степенью ледности или ионосферным неоднородностям, вытянутым вдоль магнитного поля Земли, и полученные результаты могут быть использованы при их дистанционном зондировании.

### 6.5.1. Уравнение для среднего поля

В малоугловом приближении распространение волны описывается параболическим уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u = ikn_1(x, \vec{\rho})u, \quad (6.3)$$

где  $u(x, \vec{\rho})$  – комплексная амплитуда волны,  $x$  – продольная,  $\vec{\rho} = \{y, z\}$  – поперечные координаты,  $\Delta_{\perp}$  – лапласиан в поперечной плоскости,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны,  $n_1(x, \vec{\rho})$  – флуктуации показателя преломления среды с заданной функцией корреляции

$$\langle n_1(x, \vec{\rho})n_1(x + \tau_{\parallel}, \vec{\rho} + \tau_{\perp}) \rangle = B_n(\vec{\tau})$$

(угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайных неоднородностей среды).

Получим с помощью (6.3) уравнение для среднего поля  $\langle u(x, \vec{\rho}) \rangle$  волны в случае вытянутых вдоль оси  $x$  неоднородностей среды. Усреднение уравнения (6.3) дает

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle = ik \langle n_1 u \rangle. \quad (6.4)$$

Входящий в (6.4) смешанный момент  $\langle n_1(x, \vec{\rho})u(x, \vec{\rho}) \rangle$  выражается через  $\langle u \rangle$  и  $B_n$  локальным методом малых возмущений Чернова. Следуя этому методу, полагаем, что в слое  $[x-l, x]$ , где  $l \geq l_{\parallel}$ ,  $l_{\parallel}$  – масштаб корреляции  $n_1$  вдоль оси  $x$ , неоднородности среды мало влияют на волну. Поэтому поле в смешанном моменте запишем в борновском приближении:

$$u(x, \vec{\rho}) = u_0(x, \vec{\rho}) + u_1(x, \vec{\rho}), \quad (6.5)$$

где нулевое приближение  $u_0(x, \vec{\rho})$  – комплексная амплитуда волны в случае, когда неоднородности в слое  $[x-l, x]$  отсутствуют,

$$u_1(x, \vec{\rho}) = \frac{k^2}{2\pi} \int_{x-l}^x \frac{dx'}{x-x'} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho}' n_1(x', \vec{\rho}') u_0(x', \vec{\rho}') \exp \left[ \frac{ik(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2}{2(x-x')} \right]. \quad (6.6)$$

Представим  $u_0(x, \vec{\rho})$  в виде разложения по плоским волнам

$$u_0(x, \vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\vartheta} \psi_0(x, \vec{\vartheta}) \exp(ik\vec{\vartheta}\vec{\rho}), \quad \vec{\vartheta} = (\alpha, \beta),$$

(угол  $\alpha$  отсчитывается в горизонтальной плоскости,  $\beta$  – вертикальная компонента). Поскольку в однородной среде комплексные амплитуды плоских волн меняются по закону

$$\psi_0(x, \vec{\vartheta}) = \psi_0(x', \vec{\vartheta}) \exp\left[-(ik\vartheta^2/2)(x - x')\right],$$

то, выразив в (6.6)  $u_0$  через  $\psi_0$  и учтя последнее равенство, получим

$$u_1(x, \vec{\rho}) = ik \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\vartheta} \psi_0(x, \vec{\vartheta}) \exp(ik\vec{\vartheta}\vec{\rho}) \times \quad (6.7)$$

$$\times \int_0^l d\tau_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\tau}_{\perp} n_1(x - \tau_{\parallel}, \vec{\rho} - \vec{\tau}_{\perp} - \vec{\vartheta}\tau_{\parallel}) \frac{k}{2\pi i \tau_{\parallel}} \exp\left(\frac{ik\tau_{\perp}^2}{2\tau_{\parallel}}\right).$$

Пусть  $l_{\perp}$  – наименьший масштаб неоднородностей  $n_1$  по поперечным координатам. Тогда неравенство

$$\sqrt{\tau_{\parallel}\lambda}/l_{\perp} \ll 1, \quad (6.8)$$

соответствует геометрическому приближению: характерный размер “апертуры”  $l_{\perp}$  много больше радиуса первой зоны Френеля  $\sqrt{l_{\parallel}\lambda}$ . В этом случае

$$u_1(x, \vec{\rho}) = ik \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\vartheta} \psi_0(x, \vec{\vartheta}) \exp(ik\vec{\vartheta}\vec{\rho}) \int_0^l d\tau_{\parallel} n_1(x - \tau_{\parallel}, \vec{\rho} - \vec{\vartheta}\tau_{\parallel}). \quad (6.9)$$

Заметим, что условие (6.8) можно переписать в виде

$$kl_{\perp}^2/l_{\parallel} \gg 1 \quad \text{или} \quad \vartheta_a \gg \vartheta_p, \quad (6.10)$$

где величину  $\theta_a = l_{\perp}/l_{\parallel}$  будем называть углом анизотропии, а  $\theta_p = 1/kl_{\perp}$  – углом рассеяния. Введем параметр анизотропии  $m = \theta_p/\theta_a = l_{\parallel}/kl_{\perp}^2$ . Будем говорить о слабой анизотропии, если выполняется условие  $m \ll 1$ . Таким образом, представление поля в виде (6.9) возможно как раз в случае слабой анизотропии. Например, если  $l_{\perp} = l_{\parallel}$ , то условие (6.10) переходит в  $kl_{\parallel} \gg 1$  или  $\vartheta_p \ll 1$  – условие крупномасштабности неоднородности среды. Выполнение этого условия необходимо и для справедливости параболического уравнения (6.3). Поэтому в случае изотропных крупномасштабных неоднородностей, когда справедливо (6.3), справедливо и приближение (6.9). Очевидно, что условие (6.10) и приближение (6.9) тем более выполнено для “сплюснутых” ( $l_{\parallel} < l_{\perp}$ ) вдоль оси  $x$  неоднородностей. Заметим, что если  $\vartheta^*$  – наибольший (по модулю) угол распространения волны, отсчитанный от оси  $x$ , удовлетворяет неравенству

$$\vartheta^* \ll \vartheta_a, \quad (6.11)$$

что эквивалентно условию  $\vartheta\tau_{\parallel} \sim \vartheta^*l_{\parallel} \ll l_{\perp}$ , то приближение (6.9) перейдет в более простое:

$$u_1(x, \vec{\rho}) = iku_0(x, \vec{\rho}) \int_{x-l}^x dx' n_1(x', \vec{\rho}).$$

Подстановка последнего выражения в (6.5) и (6.4) приводит к уравнению для среднего поля в марковском приближении.

Ситуация принципиально иная, если случайные неоднородности вытянуты вдоль направления распространения волны, т.е. если  $l_{\parallel} > l_{\perp}$  и, следовательно, угол анизотропии  $\mathcal{G}_a \ll 1$ . При этом условия (6.10), (6.11) могут быть нарушены, даже если применимо параболическое уравнение (6.3). Поэтому при выводе уравнения для среднего поля в случае вытянутых случайных неоднородностей следует пользоваться не приближением (6.9), а полным выражением (6.7), учитывая дифракцию на неоднородностях и изменение силы рассеяния при малых изменениях углов распространения волны. Тогда при условии, что в слое толщиной  $l \sim l_{\parallel}$  ослабление среднего поля за счет рассеяния мало, получаем замкнутое интегро-дифференциальное уравнение для среднего поля

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle + \frac{k^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho}' \langle u(x, \vec{\rho} - \vec{\rho}') \rangle a(\vec{\rho}') = 0. \quad (6.12)$$

где

$$a(\vec{\rho}) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\mathcal{G}} A(\vec{\mathcal{G}}) \exp(ik\vec{\mathcal{G}}\vec{\rho}),$$

$$A(\vec{\mathcal{G}}) = 8 \int_0^{\infty} d\tau_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{\perp} B_n(\tau_{\parallel}, \tau_{\perp} + \vec{\mathcal{G}}\tau_{\parallel}) \frac{k}{2\pi i \tau_{\parallel}} \exp\left(\frac{ik\tau_{\perp}^2}{2\tau_{\parallel}}\right).$$

### 6.5.2. Анализ ракурсной чувствительности

Вид уравнения (6.12) для среднего поля различен в случаях слабой и сильной анизотропии. Чтобы показать это, рассмотрим в дальнейшем наиболее интересный для практических приложений случай веретенообразных неоднородностей, обладающих масштабом  $l_{\parallel}$  вдоль оси  $x$  и масштабом  $l_{\perp} < l_{\parallel}$  в поперечной плоскости  $yz$ . Для определенности выберем гауссову функцию корреляции неоднородностей

$$B_n(\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}) = \sigma_n^2 \exp\left[-\tau_{\parallel}^2/2l_{\parallel}^2 - \tau_{\perp}^2/2l_{\perp}^2\right].$$

Это дает

$$A(\mathcal{G}) = 8\sigma_n^2 l_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{1+i\mathcal{G}\tau} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\mathcal{G}^2}{\mathcal{G}_a^2 (1+i\mathcal{G}\tau)}\right)\right], \quad (6.13)$$

$$a(\rho) = \frac{k}{2\pi} 8\sigma_n^2 \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{m\tau^2} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\rho^2 (1+i\mathcal{G}\tau)}{l_{\perp}^2 m^2 \tau^4}\right)\right]. \quad (6.14)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение коэффициента  $A(\vartheta)$  в случаях слабой и сильной анизотропии. Как следует из (6.13), при  $m \ll 1$  получим

$$A(\vartheta) = 4\sqrt{2\pi}\sigma_n^2 l_{\parallel} / \sqrt{1 + \vartheta^2/\vartheta_a^2}.$$

Если еще и  $\vartheta/\vartheta_a \ll 1$ , т.е. распространение происходит под малыми углами к оси  $x$ , то коэффициент экстинкции оказывается постоянным:

$$A(\vartheta) = A_0 \approx 4\sqrt{2\pi}\sigma_n^2 l_{\parallel}.$$

Тогда из (6.14) получаем

$$a(\vec{\rho}) = A_0 \delta(\vec{\rho}),$$

в результате уравнение для среднего поля будет таким же, как в марковском приближении:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle + \frac{k^2}{8} A_0 \langle u \rangle = 0. \quad (6.15)$$

В другом предельном случае ( $m \gg 1$ ) из (6.13) находим, что коэффициент  $A$  перестает зависеть от угла рассеяния:

$$A(\vartheta) = A(0) = 8\sigma_n^2 l_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{1 + im\tau} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right),$$

откуда следует, что уравнение для среднего поля по виду похоже на (6.15), однако коэффициент экстинкции будет другим – он уменьшается за счет дифракции на сильно вытянутых неоднородностях среды. Сказанное иллюстрируют графики, построенные на рис. 14 при различных значениях параметра  $m$ .

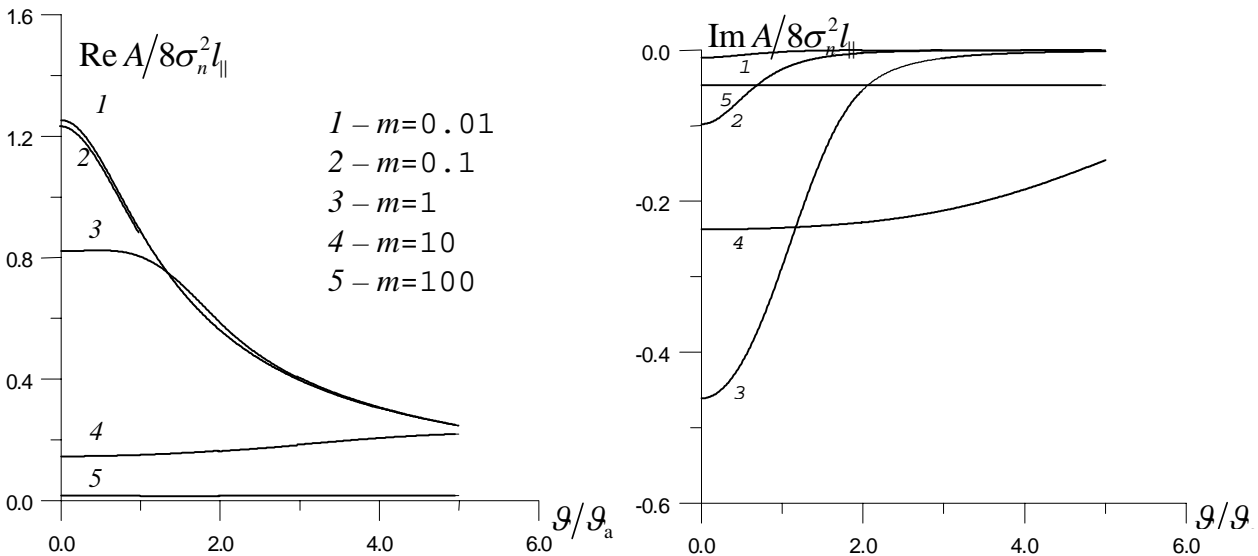


Рис. 14. Зависимость действительной и мнимой части коэффициента экстинкции от угла  $\vartheta$  при различных значениях параметра анизотропии

Проанализируем теперь поведение коэффициента экстинкции  $A$  при  $\vartheta = 0$  в зависимости от параметра анизотропии. Из приведенных на рис. 15 графиков видно, что при сильной анизотропии коэффициент  $A$  в направлении падающего излучения резко уменьшается по модулю, стремясь к нулю. Поскольку данный коэффициент учитывает рассеяние на неоднородностях среды, то это означает, что поле в направлении  $\vartheta = 0$  уменьшается – лучи отклоняются от первоначального направления.

Возникновение локального минимума в угловом распределении лучевой интенсивности в направлении наибольшего радиуса корреляции неоднородностей действительно было обнаружено при статистическом моделировании рассеяния света на вытянутых неоднородностях (заметим, что в случае изотропных или “сплюснутых” неоднородностей эффект не наблюдается). Более детальный анализ, основанный на уравнении переноса для лучевой интенсивности, выходит за рамки данного курса. Однако можно показать, что полученная угловая зависимость коэффициента экстинкции приводит к появлению максимума коэффициента диффузии лучей в направлении  $\vartheta = 0$ , что и дает отклонение лучей от этого направления.

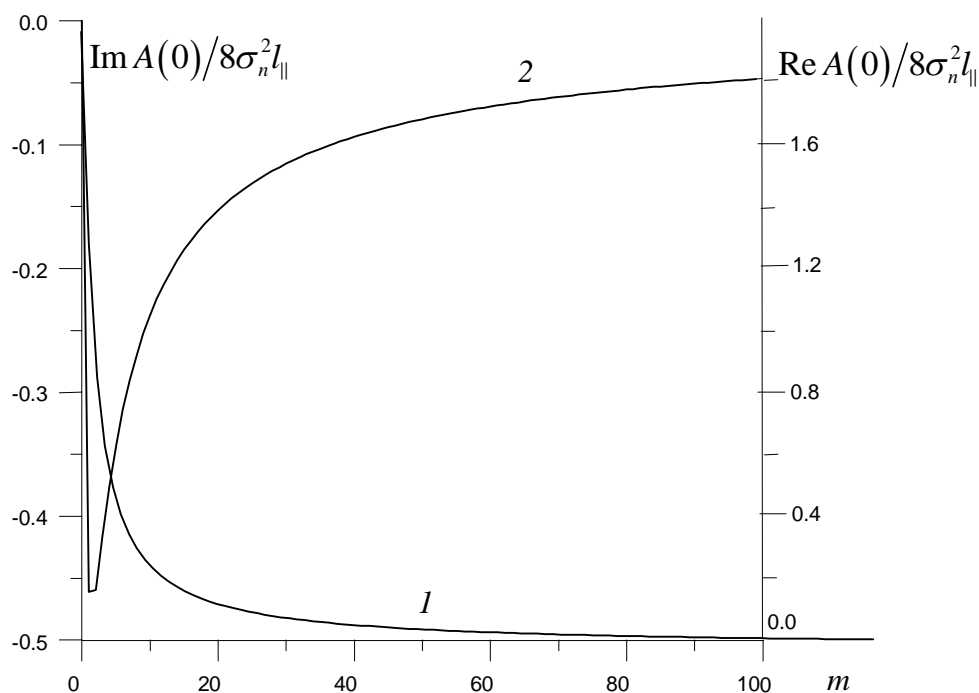


Рис. 15. Зависимость действительной (кривая 1) и мнимой (кривая 2) части коэффициента экстинкции от параметра анизотропии при  $\vartheta = 0$

Наглядную интерпретацию поведения лучей в среде с таким коэффициентом диффузии можно дать, используя известную аналогию между оптическими лучами и частицами среды. Представим броуновские частицы, находящиеся в среде со случайным распределением поля температур. Поскольку при постоянном давлении коэффициент диффузии частиц прямо пропорционален температуре, то частицы выталкиваются из более нагретых областей в менее

нагретые и там остаются на достаточно долгое время. В результате концентрация примеси в среднем минимальна в областях, где коэффициент диффузии больше.

Аналогично этому в рассматриваемой задаче о распространении волны в статистически анизотропной среде, где коэффициент диффузии имеет максимум в направлении падения волны, лучи отклоняются от этого направления, в результате образуется двугорбое распределение лучевой интенсивности.

Поскольку найденная угловая зависимость  $A(\vartheta)$  является следствием вытянутости случайных неоднородностей, то полученный результат можно использовать для анализа данных по рассеянию волн при дистанционном зондировании случайно-неоднородных сред.

## Список литературы

### Основная:

1. В.И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1957.
2. Л.А. Чернов. Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1975.
3. С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978. Ч.2.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 366 с.
5. В.Л. Миронов. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981.
6. Распространение звука во флуктуирующем океане //Под ред. Флатте С. М.: Мир, 1982. 336 с.
7. В.Е. Зуев, В.А. Банах, В.В. Покасов. Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988 г.
8. С.Н. Гурбатов, А.Н. Малахов, А.И. Саичев. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990.

### Дополнительная:

9. Чернов Л.А. Уравнения для статистических моментов поля в случайно неоднородной среде //Акустический журнал. 1969. Т.15. № 4. С.594–603.
10. Ю.Н. Барабаненков, Ю.А. Кравцов, С.М. Рытов, В.И. Татарский. Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде //УФН. 1970. Т.102. № 1. С.3–42.
11. Ю.А. Кравцов, С.М. Рытов, В.И. Татарский. Статистические проблемы в теории дифракции //УФН. 1975. Т.115. № 2. С.239–262.
12. Саичев А.И., Славинский М.М. Уравнения для моментных функций волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах с вытянутыми неоднородностями //Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28. № 1. С.75–83.
13. Аистов А.В., Гавриленко В.Г. Особенности рассеяния света при распространении в хаотической среде вдоль вытянутых неоднородностей //Оптика и спектроскопия. 1997. Т.83. № 3. С.427–432.
14. J.M. Martin, S.M. Flatte. Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media // Appl. Opt. 1998. V.27. No.11. P. 2111–22126.
15. Saichev A.I., Gavrilenko V.G., Gribova E.Z., Aistov A.V. Some features of light propagation in statistically anisotropic random media //Selected Research Papers on Wave Propagation in the Atmosphere and Adaptive Optics, Vladimir P. Lukin, Editor, Proceedings of SPIE. 2000. Vol. 4338. P.17–26.



Евгения Зиновьевна Грибова

**ВОЛНЫ  
В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

*Учебное пособие*

Компьютерная верстка – Е.З. Грибова

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.