

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

М.А. Кройц, О.А. Морозов

МЕТОДЫ ФИЛЬТРАЦИИ И ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Практикум

Рекомендовано методической комиссией физического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Нижний Новгород
2020

УДК 004.942
ББК 22.3
К-82

Рецензент: к.ф.-м.н., с.н.с. **П.Е. Овчинников**

К-82 Кройц М.А., Морозов О.А. Методы фильтрации и линейного предсказания в цифровой обработке сигналов: Практикум – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 26 с.

В пособии рассмотрены подходы к решению ряда учебных задач фильтрации шумов и линейного предсказания данных в цифровой обработке сигналов, представлены постановка задачи, теоретические сведения, замечания по программной реализации и оформлению результатов.

Практикум предназначен для студентов физического факультета ННГУ, его целью является оказание методической помощи при изучении и практическом освоении методов решения обратных задач в области цифровой обработки сигналов и экспериментальных данных при проведении практических занятий по дисциплине «Информационные технологии».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии физического факультета ННГУ
к.ф.-м.н., доцент **А.А. Перов**

УДК 004.942
ББК 22.3

© Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, 2020

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Введение | 4 |
| 1 Фильтрация сигнала от шума на основе преобразования Фурье | 6 |
| 1.1 Цель учебной задачи | 6 |
| 1.2 Теоретические сведения | 6 |
| 1.3 Постановка задачи | 12 |
| 1.4 Замечания по реализации | 17 |
| 1.5 Дополнительные вопросы | 17 |
| 1.6 Пример пользовательского интерфейса | 18 |
| 2 Обнаружение гармонического сигнала методом авторегрессии | 19 |
| 2.1 Цель учебной задачи | 19 |
| 2.2 Теоретические сведения | 19 |
| 2.3 Постановка задачи | 21 |
| 2.4 Замечания по реализации | 23 |
| 2.5 Дополнительные вопросы | 23 |
| 2.6 Пример пользовательского интерфейса | 24 |
| Список литературы | 25 |

Введение

С обработкой сигналов сталкиваются при решении практически любой научной или технической задачи. Зарегистрированную в виде сигналов информацию о процессе можно хранить, передавать, обрабатывать как в виде непрерывных функций, так и в цифровой форме, однако на современном этапе развития информационной техники предпочтение отдаётся методам цифровой обработки сигналов с использованием вычислительной техники и микропроцессорных систем. Методы цифровой обработки сигналов занимают важное место при решении большого класса задач в различных областях науки и техники и в настоящее время являются активно развивающимся направлением информационных технологий. Во многих случаях основными целями обработки сигналов является обнаружение и выделение из зарегистрированного сигнала содержательной (полезной) информации, фильтрация шумов и улучшение качества сигнала, восполнение недостающих данных.

Существенное влияние на качество сигналов, в том числе на результаты измерений, оказывают шумы различного происхождения. Вследствие одновременного воздействия на сигнал большого количества различных источников шума итоговый шумовой процесс часто может быть описан моделью аддитивного белого гауссова шума. Фильтрацию шума можно проводить как во временной, так и в частотной областях, при этом обычно предполагается достаточно существенное различие спектральных характеристик сигналов и шумов. Классические алгоритмы фильтрации сигналов в частотной области наиболее часто строятся на основе применения различных интегральных преобразований сигналов, в частности преобразования Фурье.

Под преобразованием Фурье понимается семейство математических методов обработки непрерывных и дискретных данных, основанных на разложении исходной функции от времени на совокупность базисных гармонических функций (в общем случае – комплексных экспонент), имеющих различные частоты, амплитуды и фазы. Преобразование Фурье является одним из основных линейных методов спектрального анализа сигналов, позволяет охарактеризовать амплитудно-частотный и фазочастотный состав сигнала и перевести обработку сигнала из временной в частотную область. Представление зарегистрированных данных в частотной области активно используется при анализе и обработке сигналов и изображений в различных научных областях и технических приложениях.

Другой распространенной задачей в обработке сигналов и экспериментальных данных является анализ характерного поведения или прогнозирование поведения сигнала. Например, при регистрации данных в ходе проведения эксперимента часто требуется оценка и учёт линейного или

нелинейного тренда, вызванного изменением температуры. В более общем случае часто требуется построение некоторой модели сигнала, позволяющей проводить восполнение случайно пропущенных данных или экстраполяцию отсчетов сигнала. Регрессионные методы могут быть успешно использованы при решении задач прогнозирования состояния объектов и идентификации параметров моделей различных процессов. В качестве примера предлагается к рассмотрению одна из распространённых моделей временных рядов – авторегрессионная модель, в которой значение временного ряда в текущий момент является суперпозицией предыдущих значений этого же ряда. Авторегрессионные модели широко используются для описания стационарных случайных процессов (временных рядов), характерной особенностью которых является постоянство вероятностных свойств во времени.

Практикум предназначен для студентов физического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии». Целью данного пособия является оказание методической помощи при изучении и практическом освоении методов цифровой обработки сигналов и экспериментальных данных (на примере решения задач фильтрации шумов и линейного предсказания данных) при проведении практических занятий по дисциплине «Информационные технологии». В пособии рассмотрены подходы к решению ряда учебных задач цифровой обработки сигналов, представлены постановка задачи, теоретические сведения, замечания по программной реализации и оформлению результатов компьютерного моделирования.

1 Фильтрация сигнала от шума на основе преобразования Фурье

1.1 Цель учебной задачи

Целью данной задачи является закрепление навыков практического применения алгоритма быстрого преобразования Фурье для анализа и обработки экспериментальных данных, в частности, при решении одной из важных задач цифровой обработки, связанной с фильтрацией зашумленных сигналов в частотной области. Поскольку в практических приложениях обычно имеют дело с результатами измерений, которые представляют собой дискретные данные, в цифровой обработке принято, что сигнал представлен в цифровой форме, т.е. является дискретным по времени и квантованным по величине. Для упрощения моделирования в данной задаче будем считать сигнал дискретным по времени и непрерывным по величине (тип «float» или «double»). Такое представление сигнала соответствует выборкам аналогового сигнала $x(t)$ в дискретные равноотстоящие моменты времени $n \cdot T_d$, ($T_d = \frac{1}{f_d}$ – период дискретизации сигнала). При дискретизации сигнала должны выполняться требования теоремы дискретизации (Котельникова – Шеннона). В цифровой обработке обычно принято спектральное представление сигналов в долях частоты дискретизации, при этом полагается $T_d = 1$, а частоты гармонических составляющих сигнала при моделировании задаются в интервале Найквиста $[0, 0.5]$. Если ограничиться дискретными последовательностями данных, длина которых является степенью двух, то может быть применён алгоритм так называемого быстрого преобразования Фурье (БПФ), который имеет значительно меньшую вычислительную сложность по сравнению с прямым вычислением дискретного преобразования Фурье. Выполнение фильтрации сигналов основано на различии спектральных характеристик сигналов и шумов, что необходимо учитывать при моделировании зашумленных сигналов.

1.2 Теоретические сведения

Дискретно-временное преобразование Фурье

Дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) представляет собой численную реализацию алгоритма разложения в ряд функций, заданных дискретными отсчетами, по гармоническим (тригонометрическим) функциям. Данный метод разложения функций в тригонометрический ряд впервые предложил Жан-Батист Жозеф Фурье (1768–1830).

Для существования преобразования Фурье функции достаточно выполнение следующих условий:

1. анализируемая функция ограничена при всех значениях аргумента (времени);
2. анализируемая функция абсолютно интегрируема;
3. число точек разрыва, максимума и минимума функции конечно.

Дискретное преобразование Фурье разделяют на прямое и обратное преобразования. Прямое дискретное преобразование Фурье позволяет рассчитать периодический спектр $X(2\pi k\Delta f)$ по дискретным отсчётам сигнала $x_n = x(n\Delta t)$. Примем $\Delta t = 1$, как это принято в цифровой обработке сигналов. Формально количество отсчётов спектра M и, соответственно, шаг вычисления по частоте Δf можно выбрать произвольными, однако при практической реализации более удобно выбрать количество отсчётов спектра равным количеству отсчётов сигнала $M = N$ и вычислять спектр в интервале Найквиста, тогда $\Delta f = \frac{1}{N}$. Выражение для прямого ДВПФ имеет вид:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi j}{N} kn\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right], \quad (1)$$

где j – мнимая единица и $k = 0, \dots, N-1$. В общем случае спектр X_k является комплексным.

Преобразование Фурье является обратимым. Обратное ДВПФ позволяет получить (восстановить) дискретные отсчеты сигнала x_n по имеющимся отсчетам спектра:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi j}{N} kn\right), \quad (n = 0, \dots, N-1). \quad (2)$$

Можно отметить, что обратное преобразование Фурье имеет практически такую же форму, как и прямое преобразование: обратное преобразование имеет противоположный знак комплексной экспоненты и содержит нормирующий множитель $\frac{1}{N}$. Следует обратить внимание, что спектр сигнала (в приведённых выше выражениях при $\frac{N}{2} < k < N-1$) содержит отрицательные частоты, введённые математически формально.

Дискретное преобразование Фурье является вычислительно трудоёмкой операцией. Широкое распространение в обработке сигналов прямое и обратное ДВПФ получили после разработки алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), среди которых наиболее известным и широко применяемым является алгоритм БПФ Кули–Тьюки (J.W. Cooley,

J.W. Tukey). Для реализации алгоритмов быстрого суммирования рядов Фурье принципиально важным является возможность разбиения числа отсчётов сигнала N на сомножители. Особенностью алгоритма БПФ Кули–Тьюки является необходимость задавать количество отсчётов сигнала как степень двойки $N = 2^p$. На современных компьютерах алгоритмы БПФ позволяют практически в реальном масштабе времени осуществлять спектральную обработку больших массивов данных, что существенно повысило быстродействие в задачах обработки и анализа сигналов и изображений и численного моделирования различных физических процессов.

Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье, в том числе и ДВПФ, является линейным, имеет соответствующую нормировку и обладает рядом важных свойств, широко используемых в практических приложениях. Применение свойств преобразования Фурье позволяет упростить выполнение многих операций при обработке сигналов, часто позволяет выполнить анализ изменений сигнала или спектра без применения непосредственных вычислений. Двойственность преобразования Фурье позволяет формулировать свойства как для временного так и для частотного представления одновременно. Основные свойства преобразования Фурье:

1. Линейность:

$$a \cdot g(t) + b \cdot h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a \cdot G(f) + b \cdot H(f).$$

2. Сдвиг по времени:

$$h(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f) \cdot \exp(-j2\pi f t_0).$$

3. Сдвиг по частоте:

$$h(t) \cdot \exp(j2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f - f_0).$$

4. Масштабирование:

$$\frac{1}{|\alpha|} \cdot h\left(\frac{t}{\alpha}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\alpha f).$$

5. Теорема свёртки:

$$g(t) \otimes h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f) \cdot H(f),$$

$$g(t) \cdot h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f) \otimes H(f).$$

Аддитивный белый гауссов шум

Аддитивный белый гауссов шум (АБГШ) является одной из основных моделей шумов, используемых в обработке сигналов. Данный вид шума характеризуется равномерной спектральной плотностью, нормальным законом распределения значений (амплитуды) отсчетов и аддитивным способом воздействия на сигнал:

1. Шум *белый*, т.е. является реализацией некоррелированного случайного процесса. Это означает, что его автокорреляционная функция – $\delta(\tau)$ (дельта-функция Дирака) и, соответственно, имеет равномерный спектр на всех частотах. Основной характеристикой является дисперсия ρ_ω , определяющая среднюю плотность энергии белозумового процесса.
2. Шум *гауссов*, то есть его значения случайны и имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним значением и заданной дисперсией. Аддитивность означает, что отсчеты шума суммируются с отсчётами сигнала и статистически не зависят от сигнала.
3. Спектральная плотность мощности (СПМ) белозумового процесса равна

$$P_{xx}(f) = \rho_\omega \cdot T, \quad (3)$$

где T – период равномерной дискретизации. Отсюда следует, что спектральная плотность мощности белого шума постоянна. Формально это означает, что полная энергия белозумового процесса равна бесконечности, что указывает на нефизичную природу такого процесса. Однако на практике спектральная полоса анализируемых сигналов всегда ограничена, соответственно, будет ограничена и энергия шума. Кроме того, на практике математическая модель белого гауссова шума также вполне применима для моделирования и анализа сигналов в случае, когда спектральный диапазон шума является ограниченным, но существенно более широким, чем спектральная полоса полезного сигнала.

Свойства спектральной плотности мощности

Спектральная плотность мощности (СПМ) является действительной и неотрицательной функцией, симметричной относительно нуля и определяется как дискретно-временное преобразование Фурье от автокорреляционной последовательности (АКП) r_{xx} :

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{xx}[m] \cdot \exp(-j2\pi f m T), \quad -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T}, \quad (4)$$

где T – период размерной дискретизации.

СПМ непрерывного бесконечного полигармонического сигнала имеет вид пиков (дельта-функций Дирака), находящихся в тех местах на оси частот, которые соответствуют частотам гармоник сигнала. Во всех остальных местах СПМ полигармонического сигнала равна нулю. Для дискретного сигнала Фурье-образ является периодической функцией частоты, т.е. будет периодически повторяться с интервалом, равным частоте дискретизации. В практических приложениях при преобразовании непрерывных (аналоговых) сигналов в дискретные необходимо соблюдать условия теоремы дискретизации Котельникова-Шеннона, нарушение которой приводит к перекрытию периодических продолжений Фурье-образов, их искажению и, соответственно, невозможности восстановить сигнал без потери информации.

Теорема о дискретизации Котельникова-Шеннона

Теорема устанавливает принципиальную возможность полного восстановления детерминированной функции с ограниченным спектром и указывает предельное значение интервала времени между отсчетами (частоты дискретизации), при котором такое восстановление ещё возможно.

Если сигнал с ограниченным спектром дискретизовать с частотой $f_d > 2f_0$, где f_0 – максимальная частота сигнала, то он может быть точно восстановлен по его дискретным значениям, отсчитанным через интервал времени $T = \frac{1}{2f_d}$, путём интерполяции функциями вида $\frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}$ по формуле

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \frac{\sin(\pi [t - nT] / T)}{\pi (t - nT) / T}. \quad (5)$$

Данное выражение можно интерпретировать следующим образом: для восстановления аналогового сигнала по его дискретным отсчетам из спектра дискретного сигнала с помощью идеального прямоугольного частотного фильтра необходимо выделить область, соответствующую спектру аналогового сигнала.

При моделировании сигналов выполнение условий теоремы дискретизации накладывает ограничения на диапазон задаваемых частот гармонических составляющих сигнала.

Псевдослучайные числа с нормальным распределением

Реализация шумового процесса должна иметь равномерную СПМ и нормальное (гауссово) распределение значений временных отсчётов:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6)$$

где μ – математическое ожидание, σ^2 – дисперсия.

Однако не все современные языки программирования имеют встроенные методы генерации псевдослучайных чисел с нормальным распределением. В частности, в языке программирования С (С++) имеется функция `rand()`, позволяющая генерировать псевдослучайные числа в диапазоне значений от 0 до `RAND_MAX` (32767) с равномерным распределением. Генерируемая последовательность случайных чисел имеет достаточно большой период повторяемости, а сами отсчёты можно считать практически некоррелированными между собой, что позволяет с хорошим приближением считать реализацию случайных чисел белым шумом с равномерным распределением. Чтобы получить псевдослучайные числа, распределённые по нормальному закону распределения, можно воспользоваться центральной предельной теоремой теории вероятностей.

Центральная предельная теорема: *Распределение вероятностей средней выборочной случайной величины \bar{X}_n при достаточно большом объёме выборки N близко к распределению гауссовой случайной величины с параметрами $\bar{X}_n \in N\left[\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Иными словами, случайные величины Z_n , представляющие собой сумму большого количества слабо зависимых случайных величин, асимптотически нормальны: $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$.*

Таким образом, для приближения к нормальному распределению можно вычислять среднее нескольких реализаций равномерно распределённой случайной величины. Хотя, согласно теории, сумма должна вычисляться по бесконечному пределу, можно показать, что сумма 12 - 20 случайных чисел с равномерным распределением будет достаточной для получения реализации шумового процесса, для которого с хорошей точностью выполняется приближение к нормальному распределению.

1.3 Постановка задачи

В данной задаче требуется реализовать метод фильтрации в частотной области зашумленного сигнала с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. В качестве полезного сигнала предлагается использовать полигармонический сигнал, который представляет собой сумму синусоид с разными амплитудами и частотами:

$$x[n] = \sum_{i=1}^M A_i \cdot \sin(2\pi f_i n T + \varphi_i), \quad (7)$$

где f_i , A_i , φ_i – частота, амплитуда и начальная фаза i -ой гармоники, соответственно. M – число гармоник, в данной задаче $M = (1...3)$. Поскольку Фурье-фильтрация предполагает различие частотных характеристик полезного сигнала и шума, предполагается, что сигнал является низкочастотным. Для простоты реализации период дискретизации полагаем равной единице: $T = 1$. Поскольку для решения задачи предполагается использовать быстрое преобразование Фурье, необходимо сгенерировать сигналы, длина которых равна степени двух. Полученный сигнал может иметь разный вид в зависимости от количества гармонических составляющих:

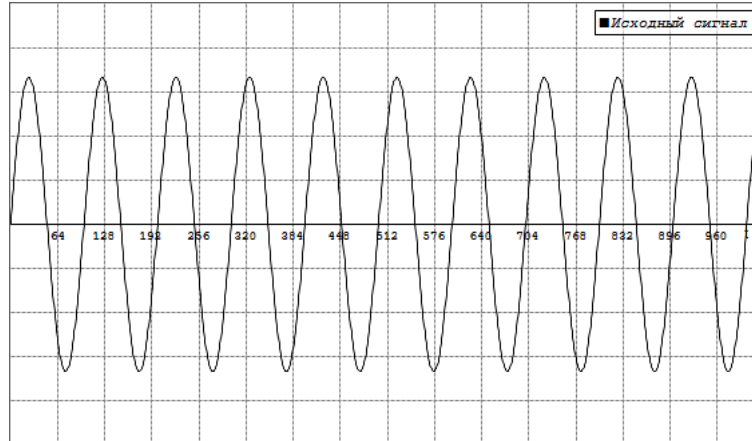


Рис. 1. Вид полигармонического сигнала $x[n]$ с одной гармоникой с частотой $f = 0.01$ и единичной амплитудой

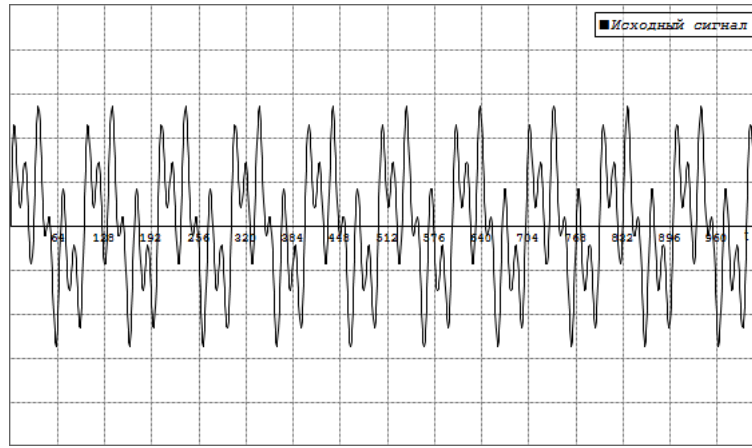


Рис. 2. Вид полигармонического сигнала $x[n]$ с тремя гармониками с частотами $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.03$, $f_3 = 0.06$ и единичными амплитудами

Далее к исходному сигналу необходимо добавить белый гауссов шум так, чтобы полученный зашумлённый сигнал характеризовался заданным отношением сигнал/шум (ОСШ). Значение ОСШ обычно задается в дециБелах (дБ) $20 \lg \left(\frac{\langle U_c \rangle}{\langle U_{ш} \rangle} \right)$ – для среднеквадратичных значений напряжений сигнала и шума или $10 \lg \left(\frac{P_c}{P_{ш}} \right)$ – для мощностей (энергии), однако для простоты в данной задаче уровень шума можно задавать как процентную долю энергии реализации шума по отношению к энергии реализации исходного сигнала. Для этого требуется сгенерировать последовательность нормально распределённых случайных чисел, например в интервале значений $[-1, 1]$. Если язык программирования не поддерживает генерацию таких чисел встроенными функциями, необходимо воспользоваться центральной предельной теоремой. В дальнейшем необходимо провести нормировку полученной последовательности таким образом, чтобы шум обладал заданной энергией:

$$\alpha \cdot E_{ш} = d \cdot E_c, \quad (8)$$

где $E_{ш}$ и E_c – полная энергии шума и сигнала, соответственно, d – заданная как процентная доля от общей энергии сигнала интенсивность шума, α – коэффициент нормировки, который требуется найти. Как известно, энергия сигнала вычисляется как сумма квадратов отсчётов сигнала.

Поскольку шум в данной задаче является аддитивным, он накладывается на исходный сигнал простым сложением:

$$\tilde{x}_i = x_i + \xi_i, \quad (9)$$

где \tilde{x}_i – отсчёты зашумлённого сигнала, x_i – отсчёты исходного сигнала, а ξ_i – отсчёты отнормированной шумовой последовательности.

На рис. 3 представлен характерный вид полученного таким образом гармонического сигнала с уровнем шума 10%.

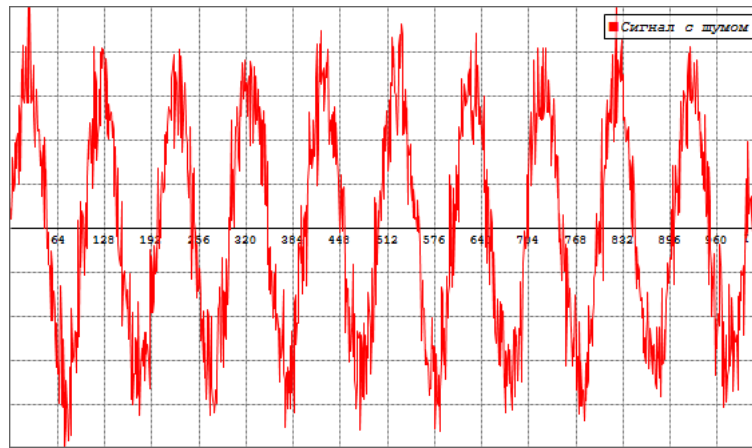


Рис. 3. Вид синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой $f = 0.01$ с наложенным белым гауссовым шумом интенсивностью 10%

Поскольку белый шум является некоррелированным с сигналом случайным процессом и занимает всю полосу частот, а полезный сигнал является низкочастотным, это позволяет достаточно эффективно очистить исходный полигармонический сигнал от шума в частотной области. Чтобы перейти в частотную область, необходимо выполнить преобразование Фурье зашумлённого сигнала, для чего его нужно преобразовать в комплексный сигнал, добавив нулевую мнимую часть. Как уже отмечалось выше, на практике в большинстве случаев для этого используют алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). При реализации алгоритма фильтрации с использованием БПФ необходимо учитывать, что длина входной последовательности N – обязательно должна быть степенью двух. В общем случае применение алгоритма БПФ даёт комплексную выходную последовательность. Для наглядного представления графика спектра зашумлённого сигнала нужно сформировать амплитудный спектр (массив модулей) из комплексной последовательности отсчетов спектра (энергетический спектр представляет собой квадрат модуля отсчетов). Полученный график будет содержать спектральные отсчёты сигнала от нуля до частоты дискретизации, первая половина массива $[0, \frac{N}{2} - 1]$ соответствует положительным частотам, другая половина массива $[\frac{N}{2}, N - 1]$ соответствует отрицательным частотам, расположенным симметрично по отношению к положительным частотам относительно центра массива. При этом все операции, связанные с фильтрацией в частотной области, необходимо выполнять над комплексным спектром. На рис. 4 приведён пример графика спектра зашумлённого полигармонического сигнала с тремя гармониками.

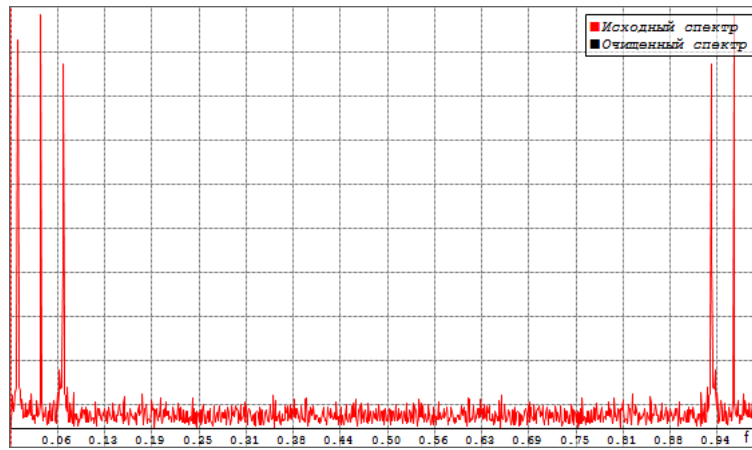


Рис. 4. Спектр полигармонического сигнала с тремя гармониками и наложенным белым гауссовым шумом

Алгоритм фильтрации низкочастотного сигнала состоит в следующем. Задается значение коэффициента (порога), определяющего долю энергии спектра сигнала, которая сохраняется в результате проведения фильтрации. Вычисляется полная энергия спектра зашумлённого сигнала. Далее с обоих концов массива суммируется энергия спектра до достижения заданного порога. По достижении порога все остальные отсчёты комплексного спектра зануляются. Идея заключается в том, чтобы сохранить частотную область, соответствующую спектральным составляющим исходного сигнала и отбросить шумовую составляющую, которую на рис. 4 можно отчётливо видеть в середине спектра между спектральными пиками. Результат такой очистки спектра выглядит как показано на рис. 5.

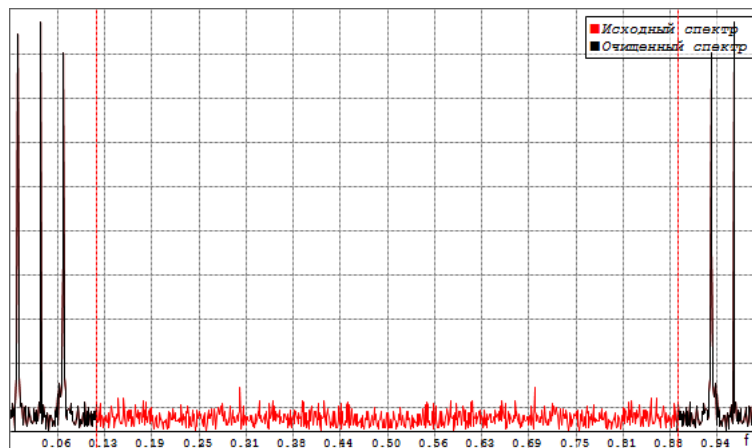


Рис. 5. Спектр полигармонического сигнала с тремя гармониками и наложенным белым гауссовым шумом после применения алгоритма фильтрации в частотной области

При проведении такого способа фильтрации в частотной области необходимо учитывать, что отсчет спектра с нулевым индексом $X[0]$ (для алгоритма БПФ Кули-Тьюки) соответствует постоянной составляющей в сигнале. Однако в нашем случае при моделировании полигармонического сигнала постоянная составляющая в сигнале практически отсутствует.

Заключительным этапом осталось вычислить обратное преобразование Фурье от полученного «очищенного» комплексного спектра и сравнить полученный сигнал во временной области с исходным сигналом. Если все операции по очистке над массивом комплексного спектра производились симметрично в области положительных и отрицательных частот (т.е. с учётом того, что в первой половине массива спектра содержится отчет $X[0]$, соответствующий значению постоянной составляющей сигнала), после выполнения обратного преобразования Фурье должны получить комплексный выходной массив, содержащий отсчёты отфильтрованного сигнала, причём практически вся энергия сигнала будет сосредоточена в реальной части.

В качестве меры отклонения между двумя сигналами одинаковой длины принято использовать среднеквадратичную ошибку (СКО), нормированную на один отсчёт, которая вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\tilde{x}_i - x_i|^2. \quad (10)$$

Удобно также использовать относительную ошибку, определяемую как отношение энергии разности сравниваемых сигналов к энергии исходного (незашумлённого) сигнала.

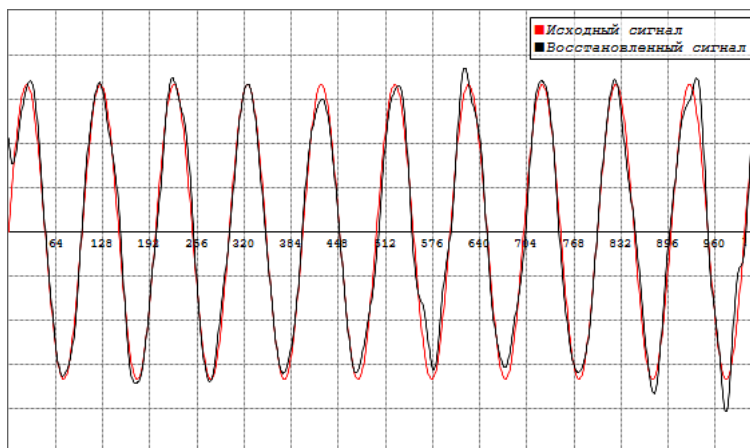


Рис. 6. Сравнение восстановленного и исходного сигналов

Поскольку влияние шума сохраняется в низкочастотной области спектра, не затронутой алгоритмом фильтрации, точность восстановления очищенного сигнала зависит от заданного уровня энергии (порога). Если он слишком большой, то будут присутствовать «лишние» шумовые составляющие в восстановленном сигнале. Если же уровень слишком маленький, спектр полезного сигнала будет искажён, поэтому будет большим отклонение между исходным и восстановленным сигналами.

1.4 Замечания по реализации

В данной задаче необходимо задавать через пользовательский интерфейс:

- Количество гармоник в исходном сигнале от единицы до трёх;
- Длину исходного сигнала как степень двух, рекомендуется выбрать значение в диапазоне от 256 до 2048 отсчётов;
- Интенсивность белого шума – как дисперсию белого шума или процентную долю от полной энергии исходного сигнала;
- Амплитуды, частоты и начальные фазы гармонических составляющих сигнала;
- Процентную долю полной энергии спектра (порог) для фильтрации шумовой составляющей.

Требуется вывести на экран:

- График исходного полигармонического сигнала;
- График исходного сигнала с наложенным белым гауссовым шумом заданной интенсивности;
- График модуля (или квадрата модуля) спектра зашумлённого сигнала, на том же графике разными цветами выделить часть спектра, оставшуюся после очистки от шума;
- График исходного и отфильтрованного сигнала для визуального сравнения (см. рис. 6);
- Среднеквадратичное отклонение между исходным и восстановленным сигналами.

1.5 Дополнительные вопросы

1. Для каких сигналов применим данный алгоритм отчистки от шума? С чем связаны границы применимости алгоритма?
2. Чисто шумовые составляющие полученного спектра сигнала нельзя считать постоянными. Не противоречит ли это теории, согласно которой СПМ белого шума является постоянной величиной?
3. В данной задаче программно вычисляем спектральную оценку с помощью быстрого преобразования Фурье на основе ограниченной дискретной выборки. Объясните, почему при этом не наблюдается появление главного и боковых лепестков.
4. Что будет если обрезать боковые лепестки и попытаться восстановить сигнал? Как это можно объяснить?

1.6 Пример пользовательского интерфейса

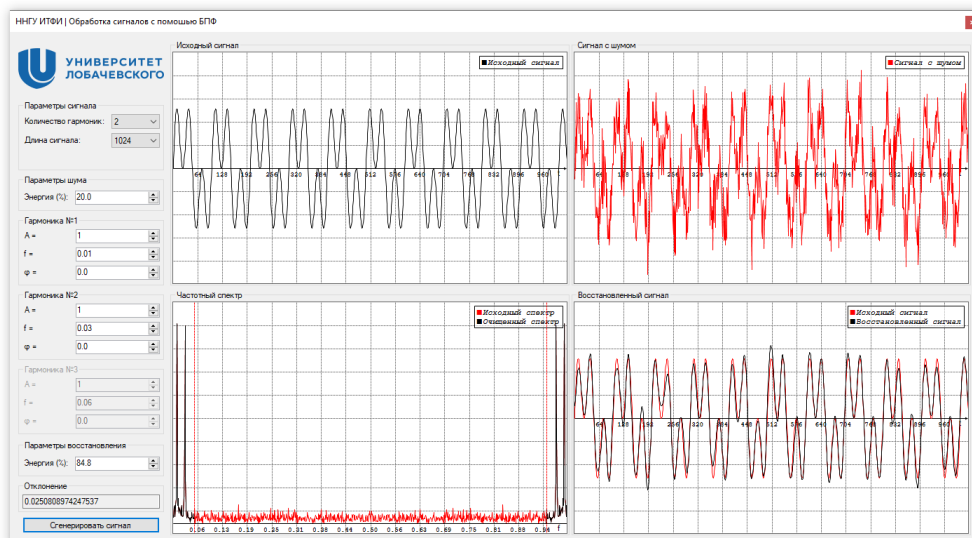


Рис. 7. Пример пользовательского интерфейса

На рисунке 7 приведен пример пользовательского интерфейса моделирующей программы. В верхних окнах программы представлены исходный и зашумлённый сигналы, в нижних окнах представлены квадрат модуля спектра зашумлённого сигнала и очищенный сигнал, соответственно. Меню слева позволяет задавать параметры генерируемого сигналов и управлять процессом очистки.

2 Обнаружение гармонического сигнала методом авторегрессии

2.1 Цель учебной задачи

Авторегрессионная модель сегодня является очень популярной моделью для описания сигналов благодаря её простоте и линейности относительно параметров. Следствием этой модели является то, что можно предсказать сигнал на основе предыдущих его отсчётов. Этим можно пользоваться для обнаружения синусоидального сигнала заданной частоты, что само по себе также является актуальной прикладной задачей, играющей важную роль в теории оптимального приёма сигналов.

2.2 Теоретические сведения

Авторегрессионная (АР) модель

Модель авторегрессии – это математическое выражение, в которое входят параметры модели, которые можно варьировать с целью добиться максимального соответствия статистик второго порядка (АКП во временной области и СПМ в частотной области). Авторегрессионная модель служит для оценки значений временного ряда, например отсчётов некоторого сигнала, на основе предыдущих отсчётов того же самого ряда:

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k]x[n-k], \quad (11)$$

где $a[k]$ – k -ый параметр АР-модели, а $x[n-k]$ – предыдущие отсчёты сигнала, который требуется представить с помощью АР-модели.

АР-модель, по сути, представляет собой взвешенную сумму предыдущих отсчётов сигналов, в качестве весов которых выступают параметры модели.

Система уравнений Юла-Уокера

Для определения параметров АР-модели требуется составить и решить систему уравнений следующего вида, так называемую систему нормальных уравнений Юла-Уокера для АР-процесса:

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \cdots & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}[-p+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_\omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $r_{xx}[m]$ – автокорреляционная последовательность сигнала (аргументом которой является сдвиг временного индекса), $a[i]$ – i -ый параметр АР-модели, ρ_ω – дисперсия белого шума, присутствующего в сигнале, p – порядок АР-модели.

Матрица коэффициентов системой есть известная автокорреляционная матрица R_{xx} (АКМ), являющаяся тѐплицевой (элементы зависят от разницы индексов $i - j$) и эрмитовой матрицей ($R_{xx}^H = R_{xx}$).

Линейное предсказание

Значение текущего отсѐта АР-модели зависит от p предыдущих отсѐтов. Отсюда следует, что можно пользоваться АР-моделью для линейного предсказания отсѐта сигнала (случайного процесса) на основе предыдущих отсѐтов.

$$\hat{x}[i] = - \sum_{k=1}^p a_k \cdot x[i - k], \quad (13)$$

где $\hat{x}[i]$ – i -ый отсѐт предсказания, p – порядок предсказания, a_k – k -ый параметр АР-модели, а $x[i - k]$ – отсѐт сигнала с указанным временным индексом, использующегося для вычисления предсказания. Если параметры АР-модели вычислить для одного («эталонного») сигнала, а предсказание отсчетов на основе этой модели осуществлять по другому («исследуемому») сигналу, то модуль разностей между истинными значениями сигнала и предсказанными значениями можно использовать для обнаружения участков, содержащих фрагменты эталонного сигнала.

2.3 Постановка задачи

В данной задаче требуется оценить границы фрагмента эталонного гармонического сигнала с известной частотой, расположенного внутри массива, содержащего гармонические сигналы с другими частотами. На первом этапе реализации алгоритма обнаружения эталонного сигнала необходимо сгенерировать исследуемый сигнал. Для этого задаются частоты исходного гармонического сигнала для обнаружения и двух других синусоидальных сигналов, между которыми заключён искомый сигнал. Например, частоту искомого сигнала можно задать $f_0 \sim 0.01$, частоты сигналов слева и справа как $f_1 \sim 0.03$ и $f_2 \sim 0.05$. Для простоты рекомендуется использовать единичную амплитуду для всех сигналов. С учётом заданных границ (начала и конца) n_1 и n_2 участка эталонного сигнала исследуемый сигнал будет определяться как:

$$x[t] = \begin{cases} \sin(2\pi f_1 t) & t < n_1 \\ \sin(2\pi f_0 t) & t \geq n_1 \text{ и } t \leq n_2 \\ \sin(2\pi f_2 t) & t > n_2 \end{cases} . \quad (14)$$

Количество отсчётов может быть произвольным, рекомендуется брать $N \sim 1000$ отсчётов. Дополнительно при генерации исследуемого сигнала необходимо обеспечить непрерывность фазы (производить «сшивку» фазы на участках перехода от одного гармонического сигнала к другому), чтобы получился один плавный график трёх сигналов с разными частотами. Результат моделирования исследуемого сигнала представлен на рис. 8.



Рис. 8. Исходный синусоидальный сигнал с параметрами $N = 1024$, $n_1 = 320$, $n_2 = 850$, $f_0 = 0.03$, $f_1 = 0.06$ и $f_2 = 0.09$

В данной задаче используется линейное предсказание для обнаружения сигнала заданной частоты f_0 . Линейное предсказание использует АР-модель.

Из теории известно, что для представления синусоидального сигнала без шума в АР-модели необходим порядок $p = 2$. Это означает, что необходимо составить и аналитически решить систему нормальных уравнений

Юла-Уокера для нахождения двух параметров a_1 и a_2 для гармонического сигнала заданной частоты f_0 . При этом значение ρ_ω в правой части будем полагать равным нулю.

Отсчёты исследуемого сигнала подставляются в формулу АР-модели второго порядка для линейного предсказания. Работа алгоритма предсказания начинается с третьего отсчета, поскольку предсказание зависит от двух предыдущих отсчётов. На основе полученных предсказанных отсчетов и имеющихся истинных отсчетов исследуемого сигнала вычисляется массив квадратичных ошибок предсказания, т.е. график квадратичного отклонения между предсказанием и фактическим отсчётом исходного сигнала. Можно заметить, что качественный вид графика ошибки напоминает вид синусоидального сигнала. Определить границы искомого сигнала можно пороговым методом, для чего нужно сглаживать ошибку предсказания.

В данной задаче для сглаживания данных предлагается использовать алгоритм свёрточной фильтрации во временной области. В скользящем по массиву квадратичных ошибок предсказания прямоугольном окне заданной ширины L производится вычисление среднего значения отсчётов, которые охватывает окно. Таким образом, получается плавный график ошибки, представленный на рис. 9.

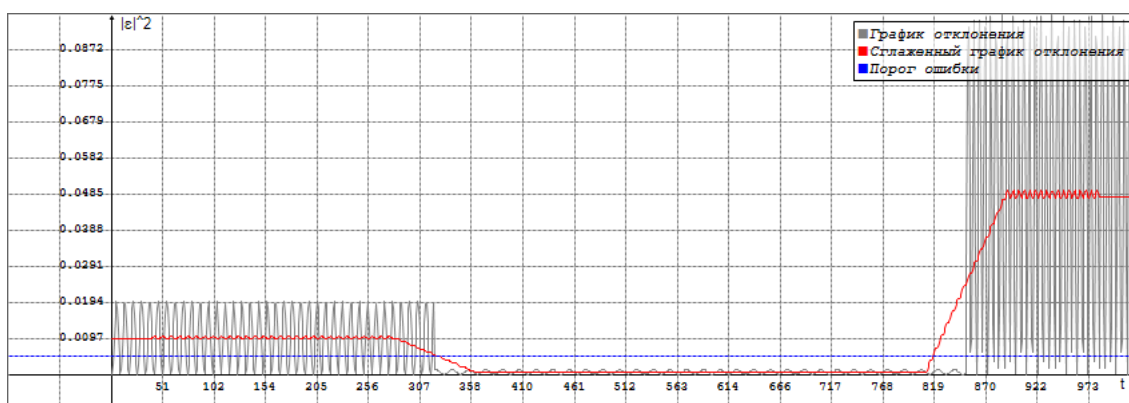


Рис. 9. Вид исходного и сглаженного графиков ошибки для сигнала с параметрами $N = 1024$, $n_1 = 320$ и $n_2 = 850$

Точки пересечения линии заданного порога с графиком сглаженной ошибки будем считать оценкой начала и конца искомого эталонного сигнала, соответственно.

Далее предлагается исследовать устойчивость алгоритма обнаружения границ участка гармонического сигнала с известной частотой к влиянию шума. Для этого предлагается добавить к исследуемому сигналу аддитивный белый гауссов шум, аналогично первой задаче, и выполнить алгоритм обнаружения. Уровень шума рекомендуется задавать не более 10%.

2.4 Замечания по реализации

В данной задаче необходимо задавать через пользовательский интерфейс:

- Частоты сигнальных составляющих;
- Начальный и конечный индексы сигнала для обнаружения;
- Интенсивность белого шума как дисперсию белого шума или процентную долю от полной энергии исходного сигнала;
- Ширину окна для сглаживания ошибки;
- Допустимый уровень ошибки (порог ошибки);
- Уровень шума.

Требуется вывести на экран:

- График сигнала, состоящего из трёх сигнальных составляющих;
- График среднеквадратичного отклонения между исходным сигналом и предсказанием АР-модели, сглаженной ошибки и порога ошибки;
- Найденные начальный и конечный индексы обнаруживаемого сигнала.

2.5 Дополнительные вопросы

1. Алгоритм перестаёт работать при наличии шума, даже если его интенсивность невелика. С чем это связано? Предложите способ, как можно модифицировать алгоритм так, чтобы он работал с шумом. Какие данные априорно должны быть известны?
2. Подходит ли данный алгоритм для обнаружения полигармонического сигнала? Какого порядка должна быть модель для сигнала, состоящего из N гармоник?
3. Можно ли обнаруживать произвольный сигнал с помощью линейного предсказания? Если да, то как можно определить необходимый порядок АР-модели для такого сигнала?

2.6 Пример пользовательского интерфейса

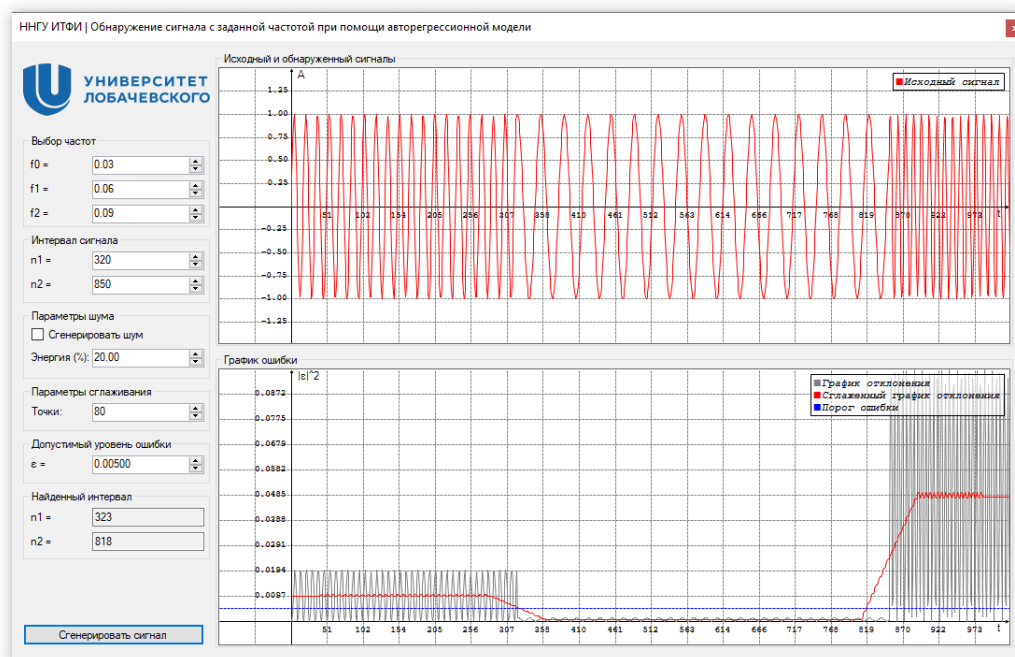


Рис. 10. Пример пользовательского интерфейса

На рис. 10 приведен пример пользовательского интерфейса моделирующей программы. В верхнем окне программы представлен исследуемый сигнал, состоящий из трёх синусоид разной частоты, в нижнем окне представлены квадрат ошибки между исходным сигналом и результатом линейного предсказания, сглаженная ошибка и линия заданного порога. Меню слева позволяет задавать параметры генерируемого сигнала.

Список литературы

- [1] Сергиенко А.Б., Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2007. – 752 с.
- [2] Оппенгейм А., Шафер Р., Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2012. – 1048 с.
- [3] Рабинер Л., Гоулд Б., Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
- [4] Смит С., Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. – М.: Додэка-XXI, 2008. – 720 с.
- [5] С.Л. Марпл-мл., Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
- [6] Бендат Дж., Пирсол А., Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
- [7] Макс Ж., Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Том 1. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
- [8] Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н., Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1990. – 312 с.
- [9] Ершов Р.А., Морозов О.А., Фидельман В.Р., Дискретизация аналоговых сигналов: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 26 с.

Михаэль Александр **Кройц**
Олег Александрович **Морозов**

Методы фильтрации и линейного предсказания в цифровой обработке сигналов

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина 23