МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ». ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2014

УДК 519.6
ББК 22.193
С23

С23 СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ». ЧАСТЬ 1. Авторы: Игумнов Л.А., Котов В.Л., Литвинчук С.Ю., Чекмарев Д.Т. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 77 с.

Рецензент: д.т.н., проф. **Г.А. Маковкин**

Учебно-методическое пособие содержит варианты заданий для самостоятельного выполнения. Изложены основные определения и необходимые теоремы в объеме, достаточном для их успешного применения при выполнении заданий в рамках типовой программы курса «Численные методы». Рассмотрены примеры решения различных вариантов задач.

Предназначено для студентов механико-математического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии механико-математического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.А. Денисова**

УДК 519.6
ББК 22.193

Содержание

1. Приближенные вычисления – задание 1

Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

1.1. Необходимые теоретические сведения из теории погрешностей [4]

Число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее последнее в вычислениях, называется *приближенным числом* a.

Определение 1.1. **Абсолютной погрешностью** Δ приближенного числа a называется абсолютная величина разности между соответствующим точным числом A и числом a, т.е.

$$\Delta = |A - a|.$$

Определение 1.2. Под **предельной абсолютной погрешностью** приближенного числа понимается всякое число, не меньше абсолютной погрешности этого числа.

Таким образом, если Δ_a – *предельная абсолютная погрешность* приближенного числа a, заменяющего точное A, то

$$\Delta = |A - a| \le \Delta_a.$$

Отсюда следует, что точное число A заключено в границах

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a.$$

Для погрешности данные измерений существенна *абсолютная погрешность*, приходящаяся на единицу длины, которая носит название *относительной погрешности.*

Определение 1.3. **Относительной погрешностью** δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A ($A \neq 0$), т.е.

$$\delta = \frac{\Delta}{A}.$$

Отсюда $\quad \Delta = |A|\delta.$

Так же как и для абсолютной погрешности, введем понятие *предельной относительной погрешности*.

Определение 1.4. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа a называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа.

По определению 1.4 имеем:

$$\delta \le \delta_a,$$

т.е. $\dfrac{\Delta}{A} \le \delta_a$, отсюда $\Delta \le |A|\delta_a$.

Следствие. За *предельную абсолютную погрешность* числа a можно принять:

$$\Delta_a = |A|\delta_a.$$

На практике преимущественно приходится иметь дело с приближенными числами, представляющими собой конечные десятичные дроби

$$b = \beta_m 10^m + \beta_{m-1}10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1}10^{m-n+1} \quad (\beta_m \ne 0).$$

Определение 1.5. Все сохраняемые десятичные знаки β_i ($i = m$, m-1,..., m-n+1) называются **значащими цифрами** приближенного числа b, причем возможно, что некоторые из них равны нулю (за исключением β_m).

При позиционном изображении числа b в десятичной системе счисления иногда приходится вводить лишние нули в начале или конце числа. Такие нули не считаются *значащими цифрами* [4].

Определение 1.6. Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда.

Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения десятичных разрядов его, не причисляются к значащим цифрам.

Введем понятие о *верных десятичных знаках* приближенного числа.

Определение 1.7. Говорят, что n первых значащих цифр (десятичных знаков) приближенного числа являются **верными в узком смысле**, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-ой значащей цифрой, считая слева направо.

Таким образом, если для приближенного числа a, заменяющего точное число A, известно, что

$$\Delta = |A - a| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1},$$

то, по определению, первые n цифр $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_{m-n+1}$ этого числа являются верными.

Замечание. В некоторых случаях удобно говорить, что число a является приближением точного числа A с n верными знаками *в широком смысле*, понимая под этим, что абсолютная погрешность $\Delta = |A - a|$ не превышает единицы десятичного разряда, выражаемого n-ой значащей цифрой приближенного числа.

Правило округления (по дополнению). Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры его, стоящие справа от n-й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;
2) если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;
3) если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;
4) если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры).

Иными словами, если при округлении числа отбрасывается меньше половины единицы последнего сохраняемого десятичного разряда, то цифры всех сохраненных разрядов остаются неизменными; если же отброшенная часть числа составляет больше половины единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то цифра этого разряда увеличивается на единицу. В исключительном случае, когда отброшенная часть в точности рана половине единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то для компенсации знаков ошибок округления используется правило честной цифры.

Очевидно, что при применении правила округления погрешность округления не превосходит $\frac{1}{2}$ единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества *верных значащих цифр*. В тех случаях, когда приближенное число содержит излишнее количество неверных значащих цифр, прибегают к *округлению*.

Обычно руководствуются следующим *практическим правилом*:

при выполнении приближенных вычислений число значащих цифр промежуточных результатов не должно превышать числа верных цифр более чем на одну или две единицы.

Окончательный результат может содержать не более чем одну излишнюю значащую цифру, по сравнению с верными. Если при этом абсолютная погрешность результата не превышает двух единиц последнего сохраненного десятичного разряда, то излишняя цифра называется *сомнительной*.

Теорема 1.1. Если положительное приближенное число а имеет n верных десятичных знаков в узком смысле, то относительная погрешность δ этого числа не превосходит $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, деленную на первую значащую цифру данного числа, т.е.

$$\delta \le \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

где α_m - первая значащая цифра числа a.

Замечание 1. Можно получить более точную оценку относительной погрешности δ.

Следствие 1. За предельную относительную погрешность числа a можно принять:

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \tag{1.1}$$

где α_m - первая значащая цифра числа a.

Следствие 2. Если число a имеет больше двух верных знаков, т.е. $n \ge 2$, то практически справедлива формула

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \tag{1.2}$$

Замечание 2. Если приближенное число a имеет n верных десятичных знаков в широком смысле, то оценки (1.1) и (1.2) следует увеличить в два раза.

Теорема 1.2 о погрешности произведения. Относительная погрешность δ произведения нескольких приближенных чисел $x_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел

$$\delta \le \delta_1 + \delta_2 + ..\delta_n \tag{1.3}$$

где δ_i - относительные погрешности чисел $x_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$.

Формула (1.3), очевидно, остается верной также, если сомножители имеют разные знаки.

Следствие. Предельная относительная погрешность δ_u произведения нескольких приближенных чисел $x_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$, отличных от нуля, равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + ..\delta_{x_n} \tag{1.4}$$

где δ_{x_i} - предельные относительные погрешности чисел $x_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$.

1.2. Пример выполнения задания 1

а) Обозначим точные значения чисел большими буквами

$A = 8.9$, $B = 1.1$, $C = A \cdot B$.

Приближенные числа обозначим малыми буквами: a, b, c.

Оценку сверху абсолютной погрешности (предельную абсолютную погрешность) обозначим Δ_C (определение 1.2). Тогда $c = a \cdot b = C \pm \Delta_C$.

Определим C, c и Δ_C.

Запишем десятичные представления чисел A и B

$A = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} = \underline{8} \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1}$,

$B = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1} = \underline{1} \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$,

Старший разряд – единицы, всего разрядов два, следовательно, $m=0$, $n = 2$

Оценим абсолютную погрешность

$\Delta \le \Delta_a \le \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$ (определение 1.7).

Предельная абсолютная погрешность равна половине разряда – десятые или $0.5 10^{-1}$, $\Delta_a = \Delta_b = 0.05 \Rightarrow a = 8.9 \pm 0.05$, $b = 1.1 \pm 0.05$

Оценим относительную погрешность

$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, $\delta_b = \frac{1}{2\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ (следствие 2 из теоремы 1.1)

Значения старших разрядов в десятичном представлении чисел A и B (подчеркнуты) $\alpha_m = 8$, $\beta_m = 1$, $\Rightarrow \delta_a = 0.00625$, $\delta_b = 0.05$.

Относительная погрешность произведения $\delta_c = \delta_a + \delta_b$ (теорема 1.2)

Вычислим точное значение произведения $C = 8.9 \cdot 1.1 = 9.79$,

и его относительную погрешность $\delta_c = \delta_a + \delta_b = 0.00625 + 0.05 = 0.05625$.

Вычислим абсолютную погрешность числа, зная его относительную погрешность

$\Delta_C = \delta_C |C|$ (следствие из определения 1.4) $\Rightarrow$

$\Delta_C = 0.05625 \cdot 9.79 = 0.5506875 \approx 0.55$,

Запишем приближенное число с учетом погрешности, применив правило округления по дополнению

$c = 9.79 \pm 0.55$, $0.5 \cdot 10^0 < \Delta_c \le 0.5 \cdot 10^1 \Rightarrow$ округлим до десятков ($m = 1$)

$m - n + 1 = 1 \Rightarrow n = 1$

$\Delta_{C_1} = \Delta_C + 0.21$, $c_1 = 10 \pm 0.76$, $0.5 \cdot 10^0 < \Delta_{C_1} \le 0.5 \cdot 10^1 \Rightarrow n = 1$,

$c_1 = 1 \cdot 10^1 \pm 0.76$

Результат вычислений содержит только одну верную значащую цифру.

Ответ: $C = A \cdot B = 1 \cdot 10^1 \pm 0.76$.

б) Что нужно изменить, чтобы ответ содержал больше верных значащих цифр? Относительная погрешность δ_b должна быть меньше, т.е., число b необходимо задавать с большим числом верных значащих цифр.

Положим n =3, тогда A = 8.9, B = 1.10,

Δ_a= 0.05, Δ_b= 0.005, δ_a = 0.00625, δ_b = 0.005,

$\delta_c = \delta_a + \delta_b = 0.01125$, $\Delta_C = \delta_C |C| = 0.1101375 \approx 0.11$,

$0.5{\cdot}10^{-1} < \Delta_C \leq 0.5{\cdot}10^{0}$ округлим до единиц

$\Delta_{C_1} = \Delta_C + 0.21$, c = 9.79, $c_1 = 10 \pm 0.32$,

$0.5{\cdot}10^{-1} < \Delta_C \leq 0.5{\cdot}10^{0}$, m-n+1=0, $m = 1 \Rightarrow n = 2$,

Результат вычислений содержит две верные значащие цифры.

Ответ: $C=A{\cdot}B = 10 \pm 0.32$.

2. Интерполяционный полином Лагранжа – задание 2

Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат.

2.1. Необходимые теоретические сведения из теории интерполирования

Постановка задачи интерполирования: пусть для функции $F(x)$, определенной на какой-либо части действительной оси, известны ее значения на некотором конечном множестве точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Обозначим их $F(x_0), F(x_1), \ldots, F(x_n)$. Требуется вычислить, хотя бы приближенно, значения при всех остальных x из области определения [1, 4].

Такой способ приближения называют *интерполяцией* или *интерполированием*. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *узлами интерполяции*. Если точка x, в которой вычисляется $F(x)$ лежит вне отрезка $[y_1, y_2]$, то употребляют термин *экстраполяция*. Здесь $y_1 = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $y_2 = \max(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Наибольшее распространение получило так называемое алгебраическое интерполирование, при котором приближающая функция ищется среди полиномов степени n.

Определение 2.1. Полином $L_n(x)$, удовлетворяющий условиям

$$L_n(x_i) = F(x_i) \quad i = 0,1,\ldots,n$$

называется **интерполяционным полиномом** для функции $F(x)$, построенным по узлам $x_i \;\; i = 0,1,\ldots,n$.

Определение 2.2. Искомый интерполяционный полином $L_n(x)$ может быть записан **в форме Лагранжа** следующим образом:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{2.1}$$

Рассмотрим еще одну форму того же полинома. Введем обозначение $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Очевидно $\omega_n'(x) = \sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)$, $\omega_n'(x_i) = \prod_{j=0}^{n}(x_i - x_j)$.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}.$$

Оценка остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа (2.1) осуществляется следующим образом. Предположим, что функция $F(x)$ имеет непрерывную производную порядка $n+1$.

$$F(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(\bar{x}). \tag{2.2}$$

Заметим, что ξ в этом выражении, вообще говоря, зависит от точки $\bar{x}$ в которой рассматривается разность $F_n(\bar{x}) - L_n(\bar{x})$.

Из (2.2) сразу следует

$$|F_n(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|, \qquad M_{n+1} = \max_{x\in[y_1, y_2]}\left|F^{(n+1)}(x)\right|$$

Определение 2.3. Правую часть (2.2) называют **остаточным членом** полинома Лагранжа ($R_n(x)$ – обозначение), для которого справедлива оценка [1, 4, 5]

$$R_n(x) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x), \qquad |R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)| \tag{2.3}$$

2.2. Пример выполнения задания 2

а) Дана таблица узлов интерполяции для функции $F(x) = x^3$

x	$F(x)$
0	0
1	1
2	8

$a = 0$, $b = 2$, $n=2$

Запишем определение 2.2 интерполяционного полинома в форме Лагранжа

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} F(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Определение 2.2 интерполяционного полинома в форме Лагранжа при n=2

$$L_2 = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_{01})(x_2-x_1)}$$

Вычислим и приведем подобные члены

$$L_2 = 0+1\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}+8\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=-x(x-2)+4x(x-1)=3x^2-2x.$$

Проверка, что полученный полином является интерполяционным (по определению 2.1)

$L_2(0)=0=F(0)$.

$L_2(1)=3\cdot 1^2 - 2\cdot 1=1=F(1)$.

$L_2(2)=3\cdot 2^2 - 2\cdot 2=12-4=8=F(2)$.

Определим погрешность по формуле (2.3) при n = 2

$F(x)-L_2(x) = R_2(x)$, $R_2 = \dfrac{F^{(2+1)}_{\xi\in[a,b]}(\xi)\prod_{j=0}^{2}(x-x_j)}{(2+1)!}$. погрешность или остаточный член.

$$\Delta=|F(x)-L_2(x)|\le\frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|F^{(2+1)}(\xi)\right|}{(2+1)!}|\omega_{2+1}(x)|.$$ оценка погрешности (остаточного члена).

Вычислим погрешность в произвольной точке, удовлетворяющей условиям $x=\bar{x}\notin\{x_i\}_{i=0}^{2}$, $i=0,1,2$, Например, примем $\bar{x}=0.1$,

$F(0.1) = (0.1)^3 = 0.001$, $L_2(0.1) = 3(0.1)^2 - 2\cdot 0.1 = 0.03-0.2 = -0.17$.

$\Delta = F(0.1) - L_2(0.1) =$ <u>0.171</u>.

$M_3 = \max_{\xi\in[a,b]}\left|F^{(3)}(\xi)\right|$, $F^{(3)} = 6$, $\Rightarrow M_3 = 6$, максимум производной не зависит от x.

$\omega_2 = (0-0.1)(1-0.1)(2-0.1) = -0.1\cdot 0.9\cdot 1.9 = -0.171$

$R_2=\dfrac{6}{6}\cdot 0.171=$<u>0.171</u>,

$\Delta=0.171=R_2=0.171$ - оценка остаточного члена совпала с абсолютной погрешностью.

Ответ: $L_2(x) = 3x^2 - 2x$, $0.171=R_2(0.1)\le 0.171$.

б)$F(x) = x^4$

x	$F(x)$
0	0
1	1
2	16

Определение 2.2 интерполяционного полинома в форме Лагранжа при n=2

$$L_2 = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_{01})(x_2-x_1)}$$

$$L_2 = 1\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 16\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = -x(x-2) + 8x(x-1) = 7x^2 - 6x.$$

Проверка (по определению 2.1)

$L_2(0)=0=F(0)$.

$L_2(1)= 7\cdot1^2 - 6\cdot1=1=F(1)$.

$L_2(2)= 7\cdot2^2 - 6\cdot2=28-12 = 16 =F(2)$.

Оценка погрешности

$\bar{x} = 0.1$, $F(0.1) = (0.1)^3 = 0.001$, $L_2(0.1) = 0.07 - \cdot0.6 = -0.53$.

$\Delta = 0.0001-(-0.53) =0.5301$.

$F^{(3)}(x) = 24x,\ M_3 = \max_{x\in[0,2]}|24x| = 48.$

$\omega_3 = 0.171, R_3 \le \frac{48}{6}\cdot 0.171 = 1.386$, $\Delta = 0.171 \le 1.386$ - абсолютная погрешность (значение остаточного члена) меньше оценки остаточного члена.

Ответ: $L_2 = 7x^2 – 6x$, $0.171=R_2(0.1)\le 1.386$.

3. Интерполяционный полином Эрмита – задание 3

Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат.

3.1. Необходимые теоретические сведения из теории интерполирования с кратными узлами

Определение 3.1. Разделенной разностью нулевого порядка назовем значение функции в точке x_i. $F(x_i)$ – обозначение. Разделенную разность k-го порядка следующим образом определим через разделенные разности k-1 порядка

$$F(x_1;x_2;\ldots;x_k;x_{k+1}) = \frac{F(x_2;x_3;\ldots;x_k;x_{k+1}) - F(x_1;x_2;\ldots;x_k)}{x_{k+1}-x_k}.$$

Приведем следующие свойства разделенных разностей [1, 5].

1. $$F(x_j;x_{j+1};\ldots;x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{F(x_i)}{\prod\limits_{\substack{l=j \\ l\neq j}}^{j+k} x_i - x_l}.$$

2. Разделенная разность является линейным оператором
$$(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)(x_1;x_2;\ldots;x_k) = \alpha_1 F_1(x_1;x_2;\ldots;x_k) + \alpha_2 F_2(x_1;x_2;\ldots;x_k)$$

3. Разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов (т.е. не меняется при любой их перестановке), например
$$F(x_1;x_2;\ldots;x_k;x_{k+1}) = F(x_{k+1};x_k;\ldots;x_2;x_1)$$

При вычислении разделенных разностей принято [8] записывать их в виде таблицы

Таблица 3.1

Схема вычисления разделенных разностей

x_0	$F(x_0)$				
		$F(x_0;x_1)$			
x_1	$F(x_1)$		$F(x_0;x_1;x_2)$		
		$F(x_1;x_2)$	.		
x_2	$F(x_2)$	.	.	.	$F(x_0;x_1;\ldots;x_n)$
.	.	.	.		
.	.	.	$F(x_{n-2};x_{n-1};x_n)$		
.	.	$F(x_{n-1};x_n)$			
x_n	$F(x_n)$				

Определение 3.2. Интерполяционный полином $L_n(x)$ по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ может быть представлен **в форме Ньютона** с разделенными разностями:
$$L_n(x) = F(x_0) + F(x_0;x_1)(x-x_0) + \ldots +$$
$$+ F(x_0;x_1;\ldots;x_n)\cdot(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (3.1)$$

Интерполяционную формулу Ньютона удобнее применять в том случае, когда интерполируется одна и та же функция *F(x)*, но число узлов интерполяции постепенно увеличивается. Если узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций, то удобнее пользоваться формулой Лагранжа.

Замечание 1. При выводе формулы (3.1) не предполагалось, что узлы x_0, x_1, …, x_n расположены в каком-то определенном порядке. Поэтому роль точки x_0 в формуле (3.1) может играть любая из точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Соответствующее множество интерполяционных формул можно получить из (3.1) перенумераций узлов

$$L_n(x)=F(x_n)+F(x_n;x_{n-1})(x-x_n)+\ldots+$$
$$+F(x_n;x_{n-1};\ldots;x_0)\cdot(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1) \qquad (3.2)$$

Если $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то (3.1) называется формулой *интерполирования вперед*, а (3.2) – формулой *интерполирования назад*.

Замечание 2. Поскольку многочлены Лагранжа и Ньютона отличаются только формой записи, представление погрешности в виде (2.2) справедливо как для формулы Лагранжа, так и для формулы Ньютона. Однако погрешность интерполирования можно представить и в другом виде

$$F(x)-L_n(x)=F(x;x_0;\ldots;x_n)\omega_n(x),\ F(x;x_0;x_1;\ldots;x_n)=\frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Постановка задачи интерполирования Эрмита: пусть имеется m+1 различных вещественных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_m$ - узлов интерполирования. Предположим, что в узле x_j заданы значения функции $f(x)$ и значения всех ее производных до порядка k_j-1

$$f(x_j), f'(x_j), \ldots, f^{(k_j-1)}(x_j), \quad j=0,1,\ldots,m$$

Таким образом, о функции $f(x)$ известно $k_0+k_1+\ldots+k_m=n+1$ данных.

Рассмотрим задачу о построении многочлена степени не выше n

$$H_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (3.3)$$

удовлетворяющего условиям

$$H_n^{(s)}(x_j)=f^{(s)}(x_j), \quad j=0,1,\ldots,m, \quad s=0,1,\ldots,k_j-1. \qquad (3.4)$$

Здесь под $f^{(0)}(x)$ понимается $f(x)$.

Условия (3.4) представляют собой линейную алгебраическую систему относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена (3.3).

Определение 3.3. Построение многочлена (3.3) по условиям (3.4) называется **интерполированием Эрмита** или *интерполированием с кратными узлами*. Число k_j называется *кратностью* узла x_j (j = 0,1, …,m).

Отметим, что может существовать лишь один многочлен (3.3), удовлетворяющий условиям (3.4).

Из единственности интерполяционного многочлена Эрмита вытекает его существование [1, 5].

Приведем теорему о представлении остаточного члена интерполирования Эрмита для вещественной n + 1 раз дифференцируемой функции.

Теорема 3.1. Если $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз на промежутке $[a,\ b]$, содержащем узлы интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_m$, то для любой точки $x \in [a,b]$

$$R_n(f,x) = \frac{\Omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где $a < \xi < b$, $\Omega(x) = (x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}$ и $k_0 + k_1 + \ldots + k_m = n+1$.

Связь разделенной разности и производной функции $F(x)$ задается выражением

$$F(x;x_1;x_2;\ldots;x_N) = \frac{F^{(N)}(\xi)}{N!}.,$$

поэтому примем за определение

$$F\left(\underbrace{x_i;x_i;\ldots;x_i}_{M-L+1 раз}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} F\left(x^{\varepsilon}_{i\ell};\ldots;x^{\varepsilon}_{iM}\right) = \frac{F^{(M-\ell)}\left(\bar{x}_i\right)}{(M-L)!}.$$

Будем иметь

$$H_n(x) = F(x_0) + F(x_0;x_0)(x-x_0) + \ldots + F\left(\underbrace{x_0;\ldots;x_0}_{k_0\ раз}\right)(x-x_0)^{k_0-1} +$$

$$+F\left(\underbrace{x_0;\ldots;x_0}_{k_0\ раз};x_1\right)(x-x_0)^{k_0} + F\left(\underbrace{x_0;\ldots;x_0}_{k_0\ раз};x_1;x_1\right)(x-x_0)^{k_0}\cdot \tag{3.5}$$

$$(x-x_1) + \ldots + F\left(\underbrace{x_0;\ldots;x_0}_{k_0\ раз}\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{k_1\ раз}\right)(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1-1} +$$

$$+\ldots + F\left(\underbrace{x_0;\ldots;x_0}_{k_0\ раз};\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{k_1\ раз};\ldots;\underbrace{x_m;\ldots;x_m}_{k_m\ раз}\right)(x-x_0)^{k_0}\cdot(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m-1}.$$

Остаточный член формулы (3.5) определяется теоремой 3.1 и записывается следующим образом:

$$F(x) - H_n(x) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{m}\prod_{j=0}^{k_i}(x-x_i) = (x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}$$ и $k_0 + k_1 + \ldots + k_m = n+1$..

3.2.Пример выполнения задания 3.

а)$F(x) = x^3$

x	$F(x)$	$F'(x)$
0 2	0 8	 12

x_0	F_0		
x_1	F_1	F_{01}	
x_1	F_1	F_{11}	F_{011}

$H_2 = f_0 + f_{01}(x - x_0)+f_{011}(x - x_0)(x - x_1)$ (формула (3.1))

Составим таблицу разделенных разностей с учетом кратности узлов интерполирования, учитывая также, что $F_{11}=F'(2)=12$. Остальные разности вычисляем по определению.

0	0		
2	8	4	
2	8	12	4

$H_2 = 0 + 4(x - 0)+4(x - 0)(x - 2)=4x +4x(x - 2)= \underline{4x^2 - 4x}$,

Проверим 2-ой вариант (формула (3.2))

$H_2 = f_1 + f_{11}(x - x_1) + f_{011}(x - x_1)^2$,

$H_2 = 8 + 12(x - 2) + 4(x - 2)^2 = 8 + 12x - 24 + 4(x^2 - 4x + 4) =$

$=-16 + 16 + 12x - 16x + 4x^2 = \underline{4x^2 - 4x}$.

Проверка по определению 3.3

$H_2(0) = 4\cdot 0^2 - 4\cdot 0 = 0 = F(0)$,

$H_2(2) = 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 16 - 8 = 8 = F(2)$,

$H_2'(x) = 8x - 4$, $H_2'(2) = 8\cdot 2 - 4 = 12 =F'(2)$.

Вычислим и оценим погрешность в точке $x = \bar{x} \notin \{x_i\}_{i=0}^{2}, \quad i = 0, 1, 2$

$\bar{x} = 0.1,\ \Delta = F(\bar{x}) - H_2(\bar{x}),\ R_2 = \dfrac{F^{(3)}(\xi)}{3!}\omega_3(\bar{x}).$

$F(0.1) = 0.001$, $H_2(0.1) = 0.04 - 0.4 = - 0.36$,

$F^{(3)}(x) = 6$, $\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_2)^2$,

$\omega_2(0.1) = (0.1\text{-}0)(0.1\text{-}2)^2 = 0.1\cdot(1.9)^2 = 0.361$,

$R_2 = 0.361 = \Delta$.

Ответ:$H_2 = 4x^2 - 4x$, $0.361=R_2(0.1)\le 0.361$.

б) $F(x) = x^4$

x	$F(x)$	$F'(x)$
0 2	0 16	0

Составим таблицу разделенных разностей

x_0	F_0		
x_0	F_0	F_{00}	
x_1	F_1	F_{01}	F_{001}

0	0	0	
0	0	8	4
2	16		

$F_{00}= F'(0)=0$

$H_2 = F_0 + F_{01}(x - x_0)+F_{001}(x - x_0)^2,$
$H_2(x) = 0 + 0 + 4x^2.$

Проверка (определение 3.1)

$H_2(0)= 0 = F(0),$
$H_2'(0) = 8x= 0 =F'(0),$
$H_2(2) = 4\cdot 2^2 = 16 = F(2).$

Оценка погрешности.

$\bar{x} = 0.1,\ \Delta = F(\bar{x}) - H_2(\bar{x}) = |0.0001 - 0.04| = 0.0399,$
$F^{(3)}(x) = 24x, M_3 = \max_{x\in[0,2]}|24x| = 48,$
$\omega_3(x) = (x - x_0)^2(x - x_1),$
$\omega_3(0.1) = (0.1)^2\cdot 1.9 = 0.019,$
$R_3 \le \frac{48}{6}\cdot 0.019 = 0.152,$
$\Delta = 0.0399 \le 0.152$

Ответ: $H_2 = 4x^2$, $0.0399=R_2(0.1) \le 0.152$.

4. Составная формула трапеций – задание 4

Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат.

4.1. Необходимые теоретические сведения из теории интегрирования

Пусть необходимо вычислить значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

Для вычисления значения определенного интеграла применяют *квадратурные формулы*. В этих случаях применяется приближенное равенство вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i), \tag{4.2}$$

где c_i – числовые коэффициенты (веса квадратурной формулы), x_i – точки из отрезка $[a,b]$ (узлы квадратурной формулы); $n \ge 0$ – целое число.

Сумма в правой части приближенного равенства называется *квадратурной суммой*. Разность между левой и правой частями приближенного равенства называется *остаточным членом* квадратурной формулы [1, 8].

Квадратурная формула (4.2) точна для многочлена $P_m(x)$ степени m , если для любого многочлена степени m и выше формула дает точное значение интеграла.

Последнее можно записать следующим образом

$$\int_a^b P_m(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i P_m(x_i).$$

Замечание. Среди двух квадратурных формул, вычисляющих интеграл с заданной точностью, как правило, более эффективной считается та, в которой используется меньшее число узлов.

Традиционно интеграл (4.1) интерпретируют как площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x и прямыми $x = a,\ x = b$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на элементарные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ точками $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Интеграл (4.1) можно представить тогда в виде следующей суммы

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i, \quad I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Введем обозначения: $f_i = f(x_i), \quad f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2}) = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$. Пусть шаг $h = x_i - x_{i-1}$ постоянная величина.

Суть метода в том, что подынтегральная функция на частичных отрезках заменяется на соответствующий полином, найденный с помощью линейной интерполяции. Геометрически это означает замену криволинейной трапеции ступенчатой фигурой, состоящей из прямоугольных трапеций. Приближенное значение интеграла – сумма площадей полученных трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx I^h = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Оценка погрешности осуществляется по формулам:

$$\left|I-I^h\right| = \left|R^h\right| \le V^h,\ V^h = \frac{(b-a)}{12}M_2h^2,\ M_2 = \max_{[a;b]}\left|f''(x)\right|.$$

Главный член погрешности квадратурной формулы. Применение квадратурной формулы на сетке отрезка $[a,b]$ с шагом $h=(b-a)/n$, позволит получить приближенное значение I^h вычисляемого интеграла. Предположим, что погрешность квадратурной формулы может быть записана в следующем виде

$$I - I^h = Ch^k + o(h^k),$$

где величины $C \neq 0$ и $k > 0$ не зависят от h.

Определение 4.1. Величина Ch^k называется *главным членом погрешности* квадратурной формулы. Число k называется *порядком точности* квадратурной формулы.

Для достаточно гладкой функции f существует главный член погрешности каждой составной квадратурной формулы

$$I \approx I^h = \sum_{i=0}^{n} h \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_{i-1/2}+t_j h/2). \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. Пусть $\sum_{j=0}^{m} a_j = 1$ и k – минимальное среди натуральных чисел, для которых величина

$$\sigma_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^k dt - \sum_{j=0}^{m} a_j t_j^k$$

отлична от нуля. Если функция f непрерывно дифференцируемая k раз на отрезке $[a,b]$, то для погрешности квадратурной формулы (4.6) справедливо представление

$$I - I^h = Ch^k + o(h^k),$$

$$C = \frac{\sigma_k}{2^k k!}\int_a^b f^{(k)}(x)dx = \frac{\sigma_k}{2^k k!}\left(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right).$$

Следствие 1. Для квадратурной формулы трапеций справедливо следующее представление

$$I - I_{тр}^h = C_{тр}h^2 + o(h^2),\ C_{тр} = -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx.$$

Следствие 2. Уменьшение шага h в M раз приводит к уменьшению погрешности квадратурной формулы примерно в M^k раз. Если $h_1 = h/M$, то

$$I - I^{h_1} \approx Ch_1^k = \frac{1}{M^k}Ch^k \approx \frac{1}{M^k}(I - I^h).$$

Частным случаем этого результата является результат с уменьшением шага h в два раза: уменьшение шага h в два раза приводит к уменьшению погрешности примерно в 2^k раз:

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k}Ch^k \approx \frac{1}{2^k}(I - I^h).$$

Правило Рунге оценки погрешности. Непосредственное использование формул из теоремы для оценки погрешности $I - I^h$ неудобно. На практике поступают по-другому [3, 6]. Так как

$$I - I^h \approx Ch^k$$

и, кроме того, справедливо

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k}Ch^k,$$

то можем получить

$$I^{h/2} - I^h \approx \frac{1}{2^k}Ch^k(2^k - 1).$$

Учитывая в последнем выражении, что

$$I - I^h \approx Ch^k,$$

получаем

$$I^{h/2} - I^h \approx (I - I^{h/2})(2^k - 1).$$

Окончательно можем записать

$$I - I^{h/2} \approx \frac{I^{h/2} - I^h}{2^k - 1}.$$

Использование этой формулы на практике называют *правилом Рунге* или правилом двойного пересчета [6].

Замечание 1. Так как

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k}Ch^k \approx \frac{1}{2^k}(I - I^h),$$

то можем записать

$$I - I^h \approx 2^k(I - I^{h/2}).$$

Используя формулу правила Рунге

$$I - I^{h/2} \approx \frac{I^{h/2} - I^{h}}{2^k - 1},$$

можем получить следующее представление

$$I - I^{h} \approx \frac{2^k (I^{h/2} - I^{h})}{2^k - 1}.$$

Если формула правила Рунге используется для апостериорной оценки погрешности значения $I^{h/2}$, то полученная формула может быть использована для приближенной оценки погрешности значения I^{h}.

Замечание 2. Заменив h на $2h$ формула правила Рунге приводится к виду

$$I - I^{h} \approx \frac{I^{h} - I^{2h}}{2^k - 1}.$$

Так как для формулы трапеций $k = 2$, то можем записать

$$I - I_{mp}^{h} \approx \frac{1}{3}(I_{mp}^{h} - I_{mp}^{2h}),$$

Экстраполяция Ричардсона. Так как мы имеем

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k} Ch^k,$$

$$\frac{Ch^k}{2^k} \approx \frac{I^{h/2} - I^{h}}{2^k - 1},$$

то тогда можем записать

$$I \approx I^{h/2} = \frac{1}{2^k - 1}(I^{h/2} - I^{h}). \tag{4.7}$$

Таким образом, квадратурная формула I^{h} порождает новую квадратурную формулу (4.7), имеющую более высокий порядок точности.

Предположим, что для погрешности квадратурной формулы справедливо представление

$$I - I^{h} = C_1 h^{k_1} + C_2 h^{k_2} + \ldots + C_N h^{k_N} + o(h^{k_N})$$

при всех $N = 1,2,\ldots$, причем $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \ldots$. Такое представление приводит к *методу экстраполяции Ричардсона*. Пусть шаг h измельчается по правилу

$$h_j = h_{j-1} / 2, j = 1,2,\ldots,N,$$

тогда, положив

$$I_0^{h} = I^{h},$$

вычисления последующих приближений осуществляют по рекуррентному соотношению

$$I_N^{h} = I_{N-1}^{h/2} + \frac{1}{2^{k_N} - 1}(I_{N-1}^{h/2} - I_{N-1}^{h}), N = 1,2,\ldots .$$

Метод Ромберга. Для формулы трапеций представление экстраполяции Ричардсона применимо при $k_1 = 2, k_2 = 4, \dots, k_N = 2N$. Метод, применяющий экстраполяцию Ричардсона для формулы трапеций, называется *методом Ромберга* [6].

Первый шаг метода Ромберга приводит к следующему уточнению квадратурной формулы трапеций

$$I_{mp}^{h/2} + \frac{1}{3}(I_{mp}^{h/2} - I_{mp}^{h}) = \frac{4}{3} I_{mp}^{h/2} - \frac{1}{3} I_{mp}^{h} =$$

$$= \frac{2h}{3}\left[\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{2n-1} f_{i/2}\right] - \frac{h}{3}\left[\frac{f_i + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right] =$$

$$= \frac{h}{6}\left(f_0 + f_n + 4\sum_{i=1}^{h} f_{i-1/2} + 2\sum_{i=1}^{h-1} f_i \right) = I_C^h.$$

Таким образом, получили формулу Симпсона [8].

Вывод квадратур Ромберга основывается на аппроксимации интеграла по составной формуле трапеций в следующем виде

$$I = I^h + C_2^{(0)} h^2 + C_4^{(0)} h^4 + \ldots + C_{2m}^{(0)} h^{2m} + \circ(h^{2m}), \tag{4.8}$$

где величины $C_i^{(0)}, i = 2, 4, \ldots$ не зависят от h.

Определим теперь новую аппроксимацию интеграла следующей формулой

$$I_1 = \frac{1}{3}\left[4I^{h/2} - I^h\right].$$

Коэффициенты этой линейной комбинации выбраны таким образом, чтобы при вычислении с помощью экстраполяционной формулы Ричардсона (4.8) ошибки аппроксимации формула I_1 коэффициент при h^2 обращалась в ноль. Следовательно

$$I_1 = I^h + C_4^{(1)} h^4 + \ldots + o(h^{2m}).$$

Интеграл аппроксимируется с четвертым порядком точности (метод Симпсона). Процесс можно продолжить, выводя новую аппроксимацию I_2 как линейную комбинацию I_1^h и $I_1^{h/2}$, разложение которой по h не будет содержать члена порядка h^4. В общем случае мы можем построить треугольный массив

I^h

$I^{h/2} I_1^h$

$I^{h/4} I_1^{h/2} I_2^h$

———

где

$$I_k^{h/2^{j-1}} = \left[4^j I_{k-1}^{h/2^j} - I_{k-1}^{h/2^{j-1}}\right] / (4^j - 1).$$

Элементы i-го столбца этого массива сходятся к значению интеграла со скоростью порядка h^{2i}.

4.2. Пример выполнения задания 4

а) $f(x) = 3x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx = 1,\ I^h = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Положим в формуле $n = 1$.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{1} = 1,\ I^h = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = \frac{3}{2} = 1.5,$$

$$\Delta_h = I - I^h = 1 - 3/2 = -1/2 = -0.5,$$

$$h/2 = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$I^{h/2} = \frac{h/2}{2}\left(f(0) + f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(3 + 2\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8} = 1.125,$$

$$\Delta_{h/2} = I - I^{h/2} = 1 - 9/8 = -1/8 = -0.125.$$

Погрешность составной формулы

$$R^h = -\frac{b-a}{12} f''(\xi)h^2,\ \xi \in [a, b]$$

Для $f'' = 6$, $R^h = -\frac{1}{2} = -0.5.$

$$R^{h/2} = -\frac{b-a}{12} f''(\xi)h^2 = -\frac{1}{8} = -0.125.$$

$$\Delta_h = R^h,\ \Delta_{h/2} = R^{h/2},$$

$\dfrac{h}{h/2} = 2$, $\dfrac{R^h}{R^{h/2}} = 4$, $I - I_h = O(h^2)$.

Оценка погрешности по правилу Рунге

$\left| I - I^{h/2} \right| \approx \frac{1}{3}\left| I^h - I^{h/2} \right| = \frac{1}{3}\left| \frac{3}{2} - \frac{9}{8} \right| = \frac{1}{8}$ – оценка погрешности совпала с точным значением абсолютной погрешности.

Уточнение по Ричардсону

$I \approx I^{h/2} + \frac{1}{3}\left(I^{h/2} - I^h\right) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$ – уточненное значение интеграла совпадает с точным значением.

Ответ: I^h=1.5, R^h=-0.5, $I^{h/2}$=1.125, $R^{h/2}$=-0.125, $\left|I - I^{h/2}\right| \approx 0.125$, $I \approx 1$.

б) $f(x) = 4x^3$, $a = 0$, $b = 1$.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 4x^3 dx = 1.$$

Рассмотрим приближенные решения при h_1=b-a=1 и $h_2 = h_1/2$

$$I_{h_1} = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = 2,\ |R_1| = \left|I - I_{h_1}\right| = |1-2| = 1.$$

$$I_{h_2} = \frac{1}{4}\left(f_0 + f_1 + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(0 + 4 + 24\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} = 1.25,\ |R_2| = \left|1 - \frac{5}{4}\right| = \frac{1}{4} = 0.25$$

Оценка погрешности

$f''(x) = 24x$, $M_2 = \max_{x\in[0,1]}|24x| = 24$.

$$|R| \le \frac{b-a}{12}M_2 h^2,\ R_1 \le \frac{24}{12}\cdot 1^2 = 2,\ R_2 \le \frac{24}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$R_1 = 1 \le 2$, $R_2 = 1/4 \le 2/4$.

Оценка погрешности по Рунге

$$\Delta_R = \left|I - I_{h_2}\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_{h_1} - I_{h_2}\right| = \frac{1}{3}\left|2 - \frac{5}{4}\right| = \frac{1}{4}.$$

Уточнение по Ричардсону

$$I \approx I_{h_2} + \frac{1}{3}\left(I_{h_2} - I_{h_1}\right) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$$

Ответ: I^h=2, R^h=1<2, $I^{h/2}$=1.25, $R^{h/2}$=0.25<0.5, $\left|I - I^{h/2}\right| \approx 0.25$, $I \approx 1$.

в) $f(x) = 5x^4$, $a = 0$, $b = 1$.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 5x^4 dx = 1,$$

h_1=b-a=1 и $h_2 = h_1/2$

$$I_{h_1} = \frac{1}{2}(0+5) = \frac{5}{2},\ I_{h_2} = \frac{1}{24}\left(0 + 5 + 2\cdot 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = \frac{1}{4}\left(5 + \frac{5}{8}\right) = \frac{45}{32},$$

$R_1 = 3/2$, $R_2 = 13/32$,

$f'' = 60x^2$, $M_2 = \max_{x\in(0,1)}\left|60x^2\right| = 60$.

$|R_1| \le \frac{1-0}{12} \cdot 60 \cdot 1^2 = 5$, $|R_2| \le \frac{1-0}{12} \cdot 60 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Оценка погрешности по Рунге

$|R_2| = \left|I - I_{h_2}\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_{h_1} - I_{h_2}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{5}{2} - \frac{45}{32}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{80-45}{32}\right| = \frac{35}{96}$.

Сравним точное значение абсолютной погрешности (модуль остаточного члена), ее оценку сверху и оценку по Рунге

$$|R_2| = \frac{39}{96} \le \frac{120}{96}\,,\ |R_2| \approx \frac{35}{96}$$

Оценка по Рунге более точная.

Уточнение по Ричардсону

$I \approx I_{h_2} + \frac{1}{3}\left(I_{h_2} - I_{h_1}\right) = \frac{45}{32} + \frac{1}{3}\left(\frac{45}{32} - \frac{5}{2}\right) = \frac{45}{32} - \frac{35}{46} = \frac{100}{96}$

ошибка в этом случае составляет $1/24$.

Уточнение по Ричардсону эквивалентно применению формулы Симпсона 4-го порядка точности.

Ответ: I^h=2.5, R^h=1.5<5, $I^{h/2}$=1.40625, $R^{h/2}$=0.40625<1.25, $\left|I - I^{h/2}\right| \approx 0.3646$, $I \approx 1.0417$

5. Метод Гаусса – задание 5

Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы.

5.1. Необходимые теоретические сведения из теории решения СЛАУ [8]

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f$$

где A – матрица $m \times m$, $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)^T$ – искомый вектор, $f = \left(f_1, f_2, \ldots, f_m\right)^T$ – заданный вектор. Предполагается, что определитель матрицы A отличен от нуля, так что решение x существует и единственно.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы A. Из курса алгебры известно, что систему можно решить по крайней мере двумя способами: либо по формулам Крамера, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших m

первый способ, основанный на вычислении определителей, требует порядка $(m!)$ арифметических действий, в то время как метод Гаусса – только $O(m^3)$ действий. Поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении на ЭВМ задач линейной алгебры.

Теорема 5.1 (теорема об LU-разложении). Пусть все угловые миноры матрицы A отличны от нуля, $\Delta_j \neq 0$ $j=1,2,...,m$. Тогда матрицу A можно представить, причем единственным образом, в виде произведения $A = LU$, где L – нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами и U – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю.

Следствие. Метод Гаусса можно применять только тогда, когда все угловые миноры матрицы A отличны от нуля.

При реализации на ЭВМ прямого хода метода Гаусса нет необходимости действовать с переменными $x_1, x_2, ..., x_m$. Достаточно указать алгоритм, согласно которому исходная матрица A преобразуется к треугольному виду, и указать соответствующее преобразование правых частей системы.

Известно, что метод Гаусса приводит к разложению исходной матрицы в произведение двух треугольных. Более детально описать структуру этих треугольных матриц можно с помощью так называемых *элементарных треугольных матриц*.

Определение 5.1. Матрица L_j называется **элементарной нижней треугольной матрицей**, если она имеет вид:

$$L_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & \dots & l_{jj} & & & \\ 0 & \dots & l_{j+1,j} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & l_{mj} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

В матрице L_j все элементы главной диагонали кроме l_{jj} равны единице. Из остальных элементов отличными от нуля могут быть только элементы j-го столбца, расположенные ниже l_{jj}. Обратной к L_j является элементарная нижняя треугольная матрица

$$L_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & \dots & l_{jj}^{-1} & & & \\ 0 & \dots & -l_{j+1,j}l_{jj}^{-1} & 1 & & \\ & & -l_{j+2,j}l_{jj}^{-1} & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \\ 0 & \dots & -l_{mj}l_{jj}^{-1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему $Ax = f$, состоящую из трех уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = f_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = f_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = f_3.$$

После первого шага исключения по методу Гаусса преобразованная система принимает вид:

$$\begin{gathered} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{f_1}{a_{11}}, \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 = f_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}f_1, \\ \left(a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}}\right)x_3 = f_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}f_1. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Отсюда видно, что матрица A_1 системы (5.1) получается из исходной матрицы A путем умножения A слева на элементарную матрицу

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

Так что $A_1 = L_1A$. При этом систему (5.1) можно записать в виде

$$L_1Ax = L_1f.$$

Матрицу (5.2) будем называть элементарной треугольной матрицей L_1, соответствующей первому шагу исключения метода Гаусса.

Перепишем систему (5.1) в виде

$$\begin{gathered} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = f_3^{(1)} \end{gathered} \tag{5.3}$$

И осуществим второй шаг метода Гаусса, т.е. исключим неизвестное x_2 из последнего уравнения. Тогда получим систему вида:

$$x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = y_1,$$
$$x_2 + c_{23}x_3 = y_2, \qquad (5.4)$$
$$a_{33}^{(2)}x_3 = f_3^{(2)}.$$

Нетрудно видеть, что переход от (5.3) к (5.4) осуществляется путем умножения системы на элементарную треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\big/a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(1)}\big/a_{22}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.5)$$

Таким образом, после второго шага исключения мы приходим к системе

$$L_2L_1Ax = L_2L_1f, \qquad (5.6)$$

Где матрицы L_1 и L_2 определены согласно (5.2), (5.5). Наконец умножая (5.6) на матрицу

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\big/a_{33}^{(2)} \end{bmatrix},$$

Получаем систему

$$L_3L_2L_1Ax = L_3L_2L_1f,$$

Матрица которой $U = L_3L_2L_1A$ является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю. Отсюда следует, в частности, что $A = LU$, где $L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$ - нижняя треугольная матрица.

Таким образом, LU – разложение матрицы A может быть получено с помощью элементарных треугольных матриц: сначала строятся матрицы L_1, L_2, L_3 и вычисляется $U = L_3L_2L_1A$ и затем находится $L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$.

Отметим, что матрицы L_k^{-1} (k= 1,2,3) имеют простой вид:

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix},\ L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & 1 \end{bmatrix},\ L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & 0 \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix},$$

Причем на диагонали матрицы L расположены ведущие элементы метода исключения.

Метод Гаусса с выбором главного элемента - основная идея метода. Может оказаться, что система

$$Ax = f$$

имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы A равен нулю. Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы A отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться непригодным.

Определение 5.2. *Матрицей перестановок* P называется квадратная матрица, у которой в каждой строке и в каждом столбце только один элемент отличен от нуля и равен единице.

Определение 5.3. *Элементарной матрицей перестановок* P_{kl} называется матрица, полученная из единичной матрицы перестановкой k–ой и l-ой строк.

Например, элементарными матрицами перестановок третьего порядка являются матрицы

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим следующие свойства элементарных матриц перестановок, вытекающие непосредственно из их определения [8].

1. Произведение двух (а следовательно, и любого числа) элементарных матриц перестановок является матрицей перестановок (не обязательно элементарной).

2. Для любой квадратной матрицы A матрица $P_{kl}A$ отличается от A перестановкой k–ой и l-ой строк.

3. Для любой квадратной матрицы A матрица AP_{kl} отличается от A перестановкой k–го и l-го столбца.

Поясним применение элементарных матриц перестановок для описания метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Рассмотрим следующий пример [8] системы третьего порядка:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= f_1, \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 &= f_2, \\ 5x_2 + 3x_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Система имеет вид $Ax = f$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Максимальный элемент первого столбца матрицы A находится во второй строке. Поэтому в системе (5.7) надо поменять местами первую и вторую строки и перейти к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + \quad x_3 &= f_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= f_1, \\ 5x_2 + 3x_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Систему (5.8) можно записать в виде

$$P_{12}Ax = P_{12}f, \tag{5.9}$$

Т.е. она получается из системы (5.7) путем умножения на матрицу перестановок

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, к системе (5.8) надо применить первый шаг обычного метода исключения Гаусса. Этот шаг, как мы видели, эквивалентен умножению системы (5.9) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В результате от (5.9) перейдем к системе

$$L_1P_{12}Ax = L_1P_{12}f \tag{5.10}$$

или, в развернутом виде

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{f_2}{2}, \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2}, \\ 5x_2 + 3x_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Из последних двух уравнений системы (5.10) надо исключить переменное x_2. Поскольку максимальным элементом первого столбца укороченной системы

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2}, \\ 5x_2 + 3x_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{5.12}$$

является элемент второй строки, делаем в (5.12) перестановку строк и тем самым от системы (5.11) переходим к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{f_2}{2}, \\ 5x_2 + 3x_3 &= f_3, \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

которую можно записать в матричном виде как

$$P_{23}L_1P_{12}Ax = P_{23}L_1P_{12}f \tag{5.14}$$

Таким образом, система (5.14) получена применением элементарной матрицы перестановок

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

к системе (5.10).

Далее, к системе (5.13) надо применить второй шаг исключения обычного метода Гаусса. Это эквивалентно умножению системы (5.13) на элементарную треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате получим систему

$$L_2P_{23}L_1P_{12}Ax = L_2P_{23}L_1P_{12}f \tag{5.15}$$

или

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{f_2}{2}, \\ x_2 + \frac{3}{5}x_3 &= \frac{1}{5}f_3, \\ -\frac{1}{10}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2} - \frac{1}{5}f_3. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Заключительный шаг прямого хода метода Гаусса состоит в замене последнего уравнения системы (5.16) уравнением

$$x_3 = -10\left(f_1 - \frac{f_2}{2} - \frac{1}{5}f_3\right),$$

Что эквивалентно умножению (5.15) на матрицу

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для рассмотренного примера процесс исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу записывается в виде

$$L_3L_2P_{23}L_1P_{12}Ax = L_3L_2P_{23}L_1P_{12}f.$$

По построению матрица

$$U = L_3L_2P_{23}L_1P_{12}A \tag{5.17}$$

является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю.

Отличие от обычного метода Гаусса состоит в том, что в качестве сомножителей в (5.17) наряду с элементарными треугольными матрицами L_k могут присутствовать элементарные матрицы перестановок P_{kl}.

Покажем еще, что из (5.17) следует разложение

$$PA = LU,$$

где L – нижняя треугольная матрица, имеющая обратную, и P – матрица перестановок. Для этого найдем матрицу

$$\tilde{L}_1 = P_{23} L_1 P_{23}.$$

По свойству 2 матрица $P_{23}L_1$получается из матрицы L_1 перестановкой второй и третьей строк,

$$P_{23} L_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\tilde{L}_1$ согласно свойству 3 получается из $P_{23}L_1$ перестановкой второго и третьего столбцов,

$$\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

т.е. $\tilde{L}_1$ - нижняя треугольная матрица, имеющая обратную.

Из (5.18), учитывая равенство $P_{23}^{-1} = P_{23}$, получим

$$\tilde{L}_1 P_{23} = P_{23} L_1.$$

Отсюда и из (5.17) видим, что

$$U = L_3 L_2 \tilde{L}_1 P_{23} P_{12} A = L^{-1} PA,$$

где обозначено $P = P_{23}P_{12}$, $L = \tilde{L}^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$.

Поскольку P – матрица перестановок и L – нижняя треугольная матрица, то существование разложения $PA = LU$ доказано.

Оно означает, что метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен обычному методу Гаусса, примененному к матрице PA, т.е. к системе, полученной из исходной системы перестановкой некоторых уравнений.

$$PAx = Pf,$$

где P – некоторая матрица перестановок.

Теоретическое обоснование метода Гаусса с выбором главного элемента содержится в следующей теореме.

Теорема 5.2. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица перестановок P такая, что матрица PA имеет отличные от нуля угловые миноры.

Следствие. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица перестановок P такая, что справедливо разложение

$$PA = LU$$

где L – нижняя треугольная матрица с отличными от нуля диагональными элементами и U – верхняя треугольная матрица с единичной главной диагональю.

Вычисление определителя. В большинстве существующих стандартных программ одновременно с решением системы линейных алгебраических уравнений вычисляется определитель матрицы A. Пусть в процессе исключения найдено LU-разложение, т.е. построены L и U. Тогда

$$\det(PA) = \det L \det U = \det L = l_{11} l_{22} \ldots l_{mm},$$

т.е. произведение диагональных элементов матрицы L равно определителю матрицы PA. Поскольку матрицы PA и A отличаются только перестановкой строк, определитель матрицы PA может отличаться от определителя A только знаком. А именно,

$\det(PA) = \det A$, если число перестановок четно, и

$\det(PA) = -\det A$, если число перестановок нечетно.

Таким образом, для вычисления определителя необходимо знать, сколько перестановок было осуществлено в процессе исключения.

Обращение матрицы. Нахождение матрицы, обратной к A, эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = E,$$

где E – единичная матрица и X – искомая квадратная матрица. Пусть $A=[a_{ij}]$, $X = [x_{ij}]$. Уравнение () можно записать в виде системы m^2 уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \ i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Для дальнейшего важно заметить, что система () распадается на m независимых систем уравнений с одной и той же матрицей A, но с различными правыми частями. Эти системы имеют вид

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $x^{(j)} = \left(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}\right)^T$, у вектора $\delta^{(j)}$ равна единице j-я компонента и равны нулю остальные компоненты.

Например, для матрицы второго порядка система () распадается на две независимые системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Для решения систем используется метод Гаусса (обычный или с выбором главного элемента). Рассмотрим применение метода Гаусса без выбора главного элемента. Поскольку все системы имеют одну и ту же матрицу A, достаточно один раз совершить прямой ход метода Гаусса, т.е. получить разложение $A = LU$ и запомнить матрицы L и U. Для этого требуется сделать $m(m^2 - 1)/3$ действий умножения и деления [7, 8].

Обратный ход осуществляется путем решения систем уравнений

$$Ly^{(j)} = \delta^{(j)}, \ \ y^{(j)} = \left(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj}\right)^T,$$

$$Ux^{(j)} = y^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

с треугольными матрицами L и U. Решение системы при каждом j требует $0{,}5m(m$-$1)$ действий. Для решения системы надо еще добавить m делений на диагональные элементы матрицы L, так что здесь потребуется $0{,}5m(m+1)$ умножений и делений. Всего при каждом j на обратный ход затрачивается $0{,}5m(m\text{-}1)+0{,}5m(m+1)m = m^2$ действий.

Для оценок погрешности необходимо ввести понятия норм вектора и матрицы [1, 7, 8].

Определение 5.4. Нормой вектора $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$ называется функционал, обозначаемый $\|x\|$ и удовлетворяющий условиям:

$$\|x\| > 0, \quad x \neq 0, \quad \|0\| = 0,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Наиболее употребительны следующие нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(x,x)}.$$

Нормы $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{II}}$ называются *эквивалентными*, если для всех $x \in R^n$ справедливы неравенства

$$c_1\|x\|_{II} \leq \|x\|_I \leq c_2\|x\|_{II}$$

с одними и теми же положительными постоянными c_1 и c_2.

Определение 5.5. Нормой матрицы A называется функционал, обозначаемый $\|A\|$ и удовлетворяющий условиям:

$$\|A\| > 0, \quad A \neq 0, \quad \|0\| = 0,$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|AC\| \leq \|A\|\|C\|.$$

Определение 5.6. Нормой матрицы A, **подчиненной** норме вектора, называется число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Замечание. Имеем следующие нормы матриц, подчиненные введенным выше нормам вектора

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \ \|A\|_2 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \ \|A\|_3 = \sqrt{\max_i \lambda_i\left(A^T A\right)}$$

Введем понятие *обусловленности* системы $Ax = b$.

Решим ее, найдя приближенное решение $\bar{x}$. Подставим данное решение в систему, получим $A\bar{x} = \bar{b}$. Можно ли оценить погрешность, оценивая *невязку* $\|b - \bar{b}\|$?

Оказывается, нет. Рассмотрим $A(x - \bar{x}) = b - \bar{b}$. Предполагая, что система имеет единственное решение, то есть $\det A \neq 0$, получим равенство:

$$x - \bar{x} = A^{-1}(b - \bar{b}),$$

откуда следует неравенство

$$\|x - \bar{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b - \bar{b}\|$$

– оценка абсолютной погрешности. Если норма $\left\|A^{-1}\right\|$ матрицы, обратной матрице A, велика, то при малом $\|b - \bar{b}\|$ абсолютная погрешность $\|x - \bar{x}\|$ может быть велика.

При этом

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b - \bar{b}\|}{\|x\|} = \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq$$

$$\leq \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|A\| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|}.$$

Оценка относительной погрешности принимает вид:

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|}.$$

Определение 5.7. Число $M_A = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$ называют **числом обусловленности**.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq M_A \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Таким образом, число обусловленности характеризует зависимость относительной погрешности решения от погрешности правой части. Абсолютная погрешность решения определяется нормой обратной матрицы системы.

Так как $E = A \cdot A^{-1}$, то $\|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \geq 1$. Говорят, что матрица A хорошо обусловлена, если ее число обусловленности мало (<100) и плохо обусловлена, если ее число обусловленности велико (≥100). Конечно, указанная классификация носит условный характер (матрицы с числом обусловленности 99, и 100 фактически обусловлены одинаково), но она все-таки оказывается полезной.

5.2. Пример выполнения задания 5

Система $Ax = f$

$$\begin{cases} x_1 \quad + 8x_2 \qquad = 15 \\ 2x_1 - x_2 \quad + x_3 \quad = -1, \\ -4x_1 \qquad + 2x_3 \quad = 10 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы, состоящую из матрицы системы и вектора правой части. В матрице подчеркнут главный (наибольший по модулю) элемент в первом столбце, равный –4,

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ \underline{\underline{-4}} & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

То есть, поменяли местами первую и третью строки, что эквивалентно умножению системы на P_{13}. Далее преобразования соответствуют умножению на матрицу L_1^{-1}

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_1 P_{13} A x = L_1 P_{13} f.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -5/2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & \underline{\underline{8}} & 1/2 & 35/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Подчеркнут главный элемент во втором столбце расширенной матрицы, равный 8. Меняем местами вторую и третью строки.

$$L_2 P_{23} L_1 P_{13} A x = L_2 P_{23} L_1 P_{13} f.$$

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 8 & 1/2 & 35/2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 1/16 & 35/16 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2 & -5/2\\ 0 & 1 & 1/16 & 35/16\\ 0 & 0 & 33/16 & 99/16\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2 & -5/2\\ 0 & 1 & 1/16 & 35/16\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$L_3L_2P_{23}L_1P_{13}Ax = L_3L_2P_{23}L_1P_{13}f.$$

$$L_3^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 33/16\end{pmatrix},$$

$$L = P_{23}L_1^{-1}P_{23}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

Таким образом, имеем

$$U = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1/16\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 33/16\end{pmatrix},$$

Проверим выполнение равенства $LU = PA$,

$$LU = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$P = P_{23}P_{13},\ PA = P_{23}P_{13}A = P_{23}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 8 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A

$$\det PA = \det LU = l_{11}l_{22}l_{33} = -66 = \det A,$$

т.к. число перестановок четно.

Обратный ход метода Гаусса

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1/16\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/2\\ 35/16\\ 3\end{pmatrix}$$

$x_3=3,\ x_2 = \frac{35}{16}-\frac{3}{16} = \frac{32}{16} = 2,\ x_1 = -\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)3 = -\frac{2}{2} = -1.$

$x_* = (-1, 2, 3)^T.$

Проверка осуществляется подстановкой решения в исходную систему

$Ax_* \equiv f$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix} 1(-1)+8\cdot2+0\cdot3 = 15, \\ 2(-1)-1\cdot2+1\cdot3 = -1, \\ -4(-1)+0\cdot(2)+2\cdot(3)=10. \end{matrix} \Rightarrow \equiv \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

То есть, решение найдено верно.

Построение обратной матрицы на основе LU- разложения.

Найдем $L^{-1} = L_3 L_2 P_{23} L_1 P_{23} = L_3 L_2 \tilde{L}_1$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16/33 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1 \end{pmatrix},\ L_1 = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}_1 = P_{23} L_1 P_{23} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 1/32 & 1/8 & 0 \\ 17/66 & 2/33 & 16/33 \end{pmatrix}.$$

Для построения обратной матрицы $(PA)^{-1}$ необходимо решить 3 системы уравнений

$$Ux_{(j)}=y_{(j)},$$

где $x_{(j)}$ – j столбец матрицы $(PA)^{-1}$, $y_{(j)}$ – j столбец матрицы L^{-1}.

1) $Ux_{(1)} = y_{(1)}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/32 \\ 17/66 \end{pmatrix},$

имеем $x_{31} = \dfrac{17}{66},\ x_{21} = \dfrac{1}{32} - \dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{17}{66} = \dfrac{66-34}{32\cdot16} = \dfrac{1}{66},$

$x_{11} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17}{66} = \dfrac{-33+16}{2\cdot66} = -\dfrac{4}{33}.$ $\quad x_{(1)} = \begin{pmatrix} -4/33 \\ 1/66 \\ 17/66 \end{pmatrix}$

2) $Ux_{(2)} = y_{(2)}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \\ 2/33 \end{pmatrix},$

имеем $x_{32} = \frac{2}{33}$, $x_{22} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{33} = \frac{66-2}{33 \cdot 16} = \frac{4}{33}$,

$x_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{33} = \frac{1}{33}$.

$$x_{(2)} = \begin{pmatrix} 1/33 \\ 4/33 \\ 2/33 \end{pmatrix}$$

3) $Ux_{(3)} = y_{(3)}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16/33 \end{pmatrix}$,

имеем $x_{33} = \frac{16}{33}$, $x_{23} = -\frac{1}{16} \cdot \frac{16}{33} = -\frac{1}{33}$, $x_{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{33} = \frac{8}{33}$.

$$x_{(3)} = \begin{pmatrix} 8/33 \\ -1/33 \\ 16/33 \end{pmatrix}$$

$$(PA)^{-1} = \begin{pmatrix} -4/33 & 1/33 & 8/33 \\ 1/66 & 4/33 & -1/33 \\ 17/66 & 2/33 & 16/33 \end{pmatrix}.$$

$(PA)^{-1} \cdot PA = E$, $(PA)^{-1} \cdot P = A^{-1}$, таким образом

$$(A)^{-1} = (PA)^{-1} P_{23} P_{13} = \begin{pmatrix} -4/33 & 8/33 & 1/33 \\ 1/66 & -1/33 & 4/33 \\ 17/66 & 16/33 & 2/33 \end{pmatrix} P_{13} = \begin{pmatrix} 1/33 & 8/33 & -4/33 \\ 4/33 & -1/33 & 1/66 \\ 2/33 & 16/33 & 17/66 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/33 & 8/33 & -4/33 \\ 4/33 & -1/33 & 1/66 \\ 2/33 & 16/33 & 17/66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Число обусловленности

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max(9, 4, 6) = 9,$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_i \sum_j |A^{-1}_{(ij)}| = \max(\frac{13}{33}, \frac{11}{66}, \frac{53}{66}) = \frac{53}{66} \approx 0.8,$$

$$M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 9 \cdot \frac{53}{66} = \frac{159}{22} \approx 7.2.$$

6. Метод прогонки – задание 6.

Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки.

6.1. Необходимые теоретические сведения из теории решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей [7]

Метод прогонки является одним из эффективных методов решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами, возникающих при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных второго порядка, и является частным случаем метода Гаусса.

Рассмотрим следующую СЛАУ:

$$a_1 = 0$$

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2, \\ \qquad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}, \\ \qquad\qquad a_n x_{n-1} + b_n = d_n, \quad c_n = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

решение которой будем искать в виде:

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i - \overline{1, n}, \tag{6.2}$$

где $A_i, B_i, \quad i = \overline{1, n}$, – прогоночные коэффициенты. Для их определения выразим из первого уравнения СЛАУ (6.1) x_1 через x_2. Получим:

$$x_1 = \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} A_1 x_2 + B_1, \tag{6.3}$$

откуда

$$A_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Из второго уравнения СЛАУ (6.1) с помощью (6.3) выразим x_2 через x_3

$$x_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 A_1} x_3 + \frac{d_2 - a_2 B_1}{b_2 + a_2 A_1} = A_2 x_3 + B_2,$$

откуда

$$A_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 A_1}, \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{b_2 + a_2 A_1}.$$

Продолжая этот процесс, получим из i-го уравнения СЛАУ (6.1):

$$x_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}.$$

Следовательно,

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}.$$

Из последнего уравнения СЛАУ имеем:

$$x_n = \frac{-c_n}{b_n + a_n A_{n-1}} x_{n+1} + \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}} = 0 \cdot x_{n+1} + B_n,$$

т.е.

$$A_n = 0 \text{ (т.к. } c_m = 0), \quad B_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}} = x_n.$$

Таким образом, прямой ход метода прогонки по определению прогоночных коэффициентов $A_i, B_i, \quad i = \overline{1,n}$ завершен.

Прогоночные коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}; \tag{6.4}$$

$$A_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}, \quad \text{так как } a_1 = 0, i = 1; \tag{6.5}$$

$$A_n = 0 \text{ (т.к. } c_m = 0), \quad B_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}, \quad i = n. \tag{6.5}$$

Обратный ход метода прогонки осуществляется в соответствии с выражением (6.2):

$$\begin{cases} x_n = A_n x_{n+1} + B_n = 0 \cdot x_{n+1} + B_n = B_n, \\ x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1}, \\ x_{n-2} = A_{n-2} x_{n-1} + B_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = A_1 x_2 + B_1. \end{cases} \tag{6.6}$$

Формулы (6.4)–(6.7) – формулы *правой прогонки*.

Аналогично, начиная с последнего уравнения СЛАУ (6.1) выводятся формулы *левой прогонки*.

Общее число операций в методе прогонки равно $8n+1$, т.е. пропорционально числу уравнений. Такие методы решения СЛАУ называют *экономичными.*

Для устойчивости метода прогонки (6.4)–(6.7) достаточно выполнения следующих условий:

$$|b_i| \ge |a_i| + |c_i|,\ i = \overline{1,n}, \quad a_i \ne 0, \quad i = \overline{2,n}, \quad c_i \ne 0, \quad i = \overline{1,n-1},$$

причем строгое неравенство имеет место хотя бы при одном i.

Устойчивость понимается в смысле накопления погрешности вектора неизвестных оператором прогонки при малых погрешностях входных данных (правых частей и элементов матрицы СЛАУ).

Обоснование метода прогонки. Метод прогонки содержит операцию деления и, следовательно, возможно накопление ошибок при увеличении числа уравнений в СЛАУ (6.1). Поэтому необходимо гарантировать *корректность,* т.е. выполнение условия:

$$b_i + a_i A_{i-1} \ne 0, \quad i = \overline{1,n} \tag{6.8}$$

и *устойчивость,* т.е. не накопление ошибок при увеличении числа уравнений СЛАУ (6.1).

Пусть прогоночные коэффициенты $A_i, B_i, \quad i = \overline{1,n}$ вычислены точно, а при вычислении x_n допущена ошибка ε_n: $\hat{x}_n = x_n + \varepsilon_n$. Тогда из (6.7) получим следующие равенства:

$$\hat{x}_i = A_i \hat{x}_{i+1} + B_i, \quad i = n-1,\ldots,1,$$

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = n-1,\ldots,1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$\varepsilon_i = A_i \varepsilon_{i+1}, \quad i = n-1,\ldots,1,$$

т.е. если выполняются условия:

$$|A_i| < 1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6.9}$$

то алгоритм метода прогонки не накапливает ошибок и является устойчивым.

Для корректности и устойчивости метода прогонки, т.е. для реализации неравенств (6.8), (6.9), существует следующая лемма.

Лемма (**достаточное условие корректности и устойчивости метода прогонки**): Пусть коэффициенты СЛАУ (6.1) удовлетворяют условиям:

$$|a_i| \ge 0, \quad |b_i| > 0, \quad |c_i| \ge 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$|b_i| \ge |a_i| + |c_i|, \quad i = \overline{2,n-1}, \tag{6.10}$$

$$|b_1| \ge |c_1|, \quad |b_n| \ge |a_n|, \tag{6.11}$$

причем хотя бы в одном из неравенств (6.10) или (6.11) выполняется строгое неравенство, т.е. матрица СЛАУ (6.1) имеет диагональное преобладание. Тогда имеют место неравенства (6.8) и (6.9), гарантирующие корректность и устойчивость метода прогонки.

6.2. Пример выполнения задания 6

Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей $A(n=4)$:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 10, \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_3 - 3x_4 &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(a_1 = 0, c_4 = 0)$.

Решить эту систему методом прогонки.

Прямой ход – вычислим прогоночные коэффициенты:

$$A_1 = \frac{-c_1}{b_1} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}; \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{8}{5} = \frac{8}{5};$$

$$A_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 A_1} = \frac{1}{6 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} = -\frac{5}{21}; \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{b_2 + a_2 A_1} = \frac{10 - 3 \cdot \frac{8}{5}}{6 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{26}{21}.$$

$$A_3 = \frac{-c_3}{b_3 + a_3 A_2} = \frac{2}{4 + 1 \cdot \left(-\frac{5}{21}\right)} = \frac{42}{79}; \quad B_3 = \frac{d_3 - a_3 B_2}{b_3 + a_3 A_2} = \frac{3 - 1 \cdot \frac{26}{21}}{4 + 1 \cdot \left(-\frac{5}{21}\right)} = \frac{37}{79}.$$

Обратный ход – найдем решение

$$x_4 = B_4 = \frac{d_4 - a_4 B_3}{b_4 + a_4 A_3} = \frac{-2 - 1 \cdot \frac{37}{79}}{-3 + 1 \cdot \left(\frac{42}{79}\right)} = 1;$$

$$x_3 = A_3 x_4 + B_3 = \frac{42}{79} \cdot 1 + \frac{37}{79} = 1;$$

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2 = -\frac{5}{21} \cdot 1 + \frac{26}{21} = 1;$$

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1 = -\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{8}{5} = 1.$$

Проверка: подстановкой решения $x_* = (1;1;1;1)^T$ в исходную систему убеждаемся, что задача решена верно:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 5\cdot 1+3\cdot 1=8 \\ 3\cdot 1+6\cdot 1+1\cdot 1=10 \\ 1\cdot 1+4\cdot 1-2\cdot 1=3 \\ 1\cdot 1-3\cdot 1=-2 \end{matrix} \equiv \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Проверим достаточное условие корректности и устойчивости метода прогонки (n=4)

b=(5;6;4;-3)^T – равных 0 элементов нет,

$|b_2|$=6>|3|+|1|=4, $|b_3|$=4>|1|+|-2|=3, неравенства (6.10) выполнено строго,

$|b_1|$=5>|3|, $|b_4|$=3>|1| неравенства (6.11) выполнены строго.

Ответ: решением СЛАУ является вектор $x_* = (1;1;1;1)^T$, условия применимости метода прогонки выполнены.

7. Метод простой итерации - задание 7

Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости.

7.1. Необходимые теоретические сведения из теории итерационных методов решения СЛАУ [7]

Пусть система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$x = Bx + c \tag{7.1}$$

Здесь B – квадратная матрица с элементами $b_{ij}\,(i,\, j = 1,2,\ldots,m)$, с – вектор-столбец с элементами $c_i\,(i = 1,2,\ldots,m)$.

В развернутой форме записи система (7.1) имеет следующий вид:

$$x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1m}x_m + c_1,$$
$$x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2m}x_m + c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_m = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \ldots + b_{mm}x_m + c_m.$$

Вообще говоря, операция приведения системы к *виду, удобному для итерации* (т.е. к виду (7.1)), не является простой и требует специальных знаний, а также существенного использования специфики системы [7, 8].

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})^{\mathrm{T}}$. Подставляя его в правую часть системы (7.1) и вычисляя полученное выражение, находим первое приближение:

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + c.$$

Продолжая этот процесс далее, получим последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots$ приближений, вычисляемых по формуле:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, k = 0,1,2,\dots .$$

В развернутой форме записи формула (7.1) выглядит так:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \dots + b_{1m}x_m^{(k)} + c_1,\\
x_2^{(k+1)} &= b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + b_{23}x_3^{(k)} + \dots + b_{2m}x_m^{(k)} + c_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_m^{(k+1)} &= b_{m1}x_1^{(k)} + b_{m2}x_2^{(k)} + b_{m3}x_3^{(k)} + \dots + b_{mm}x_m^{(k)} + c_m.
\end{aligned}$$

Теорема 7.1 о достаточном условии сходимости метода простой итерации. Пусть выполнено условие

$$\|B\| < 1 \tag{7.2}$$

Тогда:

- решение $\bar{x}$ системы (7.1) существует и единственно;
- при произвольном начальном приближении $x^{(0)}$ метод простой итерации сходится и справедлива оценка погрешности

$$\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \le \|B\|^n \left\|x^{(0)} - \bar{x}\right\|.$$

Замечание 1. В условии (7.2) имеется в виду некоторая каноническая [4] норма матрицы.

Замечание 2. Норма матрицы должна быть подчинена норме вектора (см. задание 5)

Апостериорная оценка погрешности. Если выполнено условие (7.2), то справедлива апостериорная оценка погрешности:

$$\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \le \frac{1}{1 - \|B\|}\left\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right\|$$

или

$$\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| \tag{7.3}$$

Если требуется найти решение с точностью ε, то в силу (7.3) следует вести итерации до выполнения неравенства:

$$\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right\|<\varepsilon .$$

Таким образом, в качестве критерия окончания итерационного процесса может быть использовано неравенство:

$$\left\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right\|<\varepsilon_1,\ \varepsilon_1=\frac{1-\|B\|}{\|B\|}\varepsilon .$$

Теорема 7.2 о необходимом и достаточном условии сходимости метода простой итерации. Для сходимости процесса итерации $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c,\ k=0,1,2,\ldots$ при любом выборе вектора начального приближения $x^{(0)}$ и любом свободном члене c необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы B, то есть корни характеристического уравнения $\det(B-\lambda E)=0$ были по модулю меньше единицы [4].

7.2. Пример выполнения задания 7

а) Дана система двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_1&=0{,}5x_2+1{,}5\\ x_2&=-0{,}3x_1+1{,}0\end{aligned},$$

записанная в виде, удобном для итераций $x=Bx+c$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0{,}5\\-0{,}3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}0\end{pmatrix}$$

Дано также начальное приближение $x^{(0)}$=(2; 0,5)^T.

Вычислим первое приближение

$$\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0{,}5\\-0{,}3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}25\\-0{,}6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}75\\0{,}4\end{pmatrix}$$

Второе приближение

$$\begin{pmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0{,}5\\-0{,}3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}75\\0{,}4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2\\-0{,}525\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}7\\0{,}475\end{pmatrix}$$

Проверим достаточное условие сходимости (7.2), т.е. $\|B\|<1$

$$\|B\|_1=\max_i\sum_j\left|b_{ij}\right|=\max_i\begin{pmatrix}0+|0{,}5|\\|-0{,}3|+0\end{pmatrix}=0{,}5<1$$

Условие (7.2) выполнено, т.е., итерационный процесс будет сходиться к единственному решению системы.

В этом случае справедлива апостериорная оценка погрешности (7.3)

$$\left\|x^{(2)}-\bar{x}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|$$

$$\left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|_1 = \max_i \begin{pmatrix} |1{,}7-1{,}75| \\ |0{,}475-0{,}4| \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} |-0{,}05| \\ |0{,}075| \end{pmatrix} = 0{,}075,$$

$$\left\|x^{(2)}-\bar{x}\right\| \le \frac{0{,}5}{1-0{,}5}0{,}075 = 0{,}075.$$

Ответ: решение системы на второй итерации $\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}7 \\ 0{,}475 \end{pmatrix}$, итерационный процесс сходится, т.к. выполняется достаточное условие, погрешность решения на второй итерации не превышает 0.075.

б**)** Дана система двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= -0{,}5x_1 - 0{,}7x_2 + 1{,}5 \\ x_2 &= -0{,}6x_1 + 0{,}6x_1 + 1{,}0 \end{aligned},$$

записанная в виде, удобном для итераций $x = Bx + c$ и начальное приближение $x^{(0)}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix}, \; x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Вычислим первое приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}85 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}35 \\ 3{,}1 \end{pmatrix}$$

Второе приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}35 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}995 \\ -2{,}07 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}495 \\ 3{,}07 \end{pmatrix}$$

Проверим достаточное условие сходимости $\|B\| < 1$ (теорема 7.1)

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_j |b_{ij}| = \max_i \begin{pmatrix} |-0{,}5| + |0{,}7| \\ |-0{,}6| + |0{,}6| \end{pmatrix} = 1{,}2 > 1$$

Условие (7.2) не выполнено. Можно убедиться, что и использование нормы 2 приводит к такому же результату

$$\|B\|_2 = \max_j \sum_i |b_{ij}| = \max_j \left(|-0.5| + |-0.6|; \quad |-0.7| + |0.6|\right) = 1.3 > 1.$$

Вычислим норму 3

$$\|B\|_3 = \sqrt{\max_i \lambda_i \left(B^T B\right)}$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.6 \\ -0.7 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.5 & -0.7 \\ -0.6 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.74 & -0.12 \\ -0.12 & 0.72 \end{pmatrix},$$

Собственные числа находим, решая характеристическое уравнение

$$\left|B^T B - \lambda E\right| = 0: \ (0.74 - \lambda)(0.72 - \lambda) - 0.0144 = 0:$$

$$\lambda_1 \approx 0.85, \ \lambda_2 \approx 0.61,$$

$$\|B\|_3 = \sqrt{\lambda_1} \approx 0.922 < 1.$$

Отметим, что в случае, когда $\|B\| > 1$, о сходимости (равно как и о расходимости) итерационного процесса сказать ничего нельзя.

Так как $\|B\| < 1$, то справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\left\|x^{(2)} - \overline{x}\right\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_1 = \max_i \begin{pmatrix} \left|-0.35 - (-0.495)\right| \\ \left|3.1 - 3.07\right| \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} |0.145| \\ |-0.03| \end{pmatrix} = 0.145,$$

$$\left\|x^{(2)} - \overline{x}\right\| \le \frac{0.922}{1 - 0.922} 0.145 = 1.714$$

Необходимое и достаточное условие сходимости метода простой итерации требует, чтобы все собственные значения матрицы *B* по модулю были меньше 1 (теорема 7.2). Собственные числа являются корнями характеристического уравнения. В данном случае

$$\left|B - \lambda E\right| = 0: \ (-0{,}5 - \lambda)(0{,}6 - \lambda) - 0{,}42 = 0:$$

$$\lambda_1 = 0{,}9, \ \lambda_2 = -0{,}8,$$

то есть, итерационный процесс сходится.

Ответ: решение системы на второй итерации $\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}495 \\ 3{,}07 \end{pmatrix}$, итерационный процесс сходится, т.к. выполняется необходимое и достаточное условие, погрешность решения на второй итерации не превышает 1.714.

8. Варианты заданий для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

   $25.1 \cdot 1.743 \qquad = ?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x$
0	0
1/2	1/2
1	1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^7$	$F'(x)$
1	1	7
2	128	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_{3/2}^{7/2} (6x-5)^2\,dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 8x_1 + 12x_2 + 14x_3 &= 14, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned}$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$x_1 - x_2 = 3,$$
$$3x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 27,$$
$$3x_2 + x_3 - 14x_4 = 30,$$
$$2x_3 + 2x_4 = 13.$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1, \\ x_2 &= x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\| A\|_1$=?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вариант 2

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$1.9 \cdot 2.3$ =?

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^4$
0	0
1/2	1/16
1	1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^4$	$F'(x)$
1	1	
2	16	32

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_1^3 \frac{1}{x+1}dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 6. \end{aligned}$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 18x_3 &= 20, \\ 2x_2 + x_3 - 21x_4 &= 13, \\ x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_3 = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 3

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

   $5 \cdot 8.2 \quad =?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^7$
0	0
1/2	1/128
1	1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^7$	$F'(x)$
1	1	7
2	128	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_1^3 x^7 dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 7,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 6.$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 9x_2 &= 6,\\
x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= 12,\\
x_2 + 3x_3 - 15x_4 &= 17,\\
2x_3 + 2x_4 &= 14.
\end{aligned}
$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1,\\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}
$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_2$=?

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Вариант 4

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$5.2 \cdot 8$ =?

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^6$
0	1
1/2	1/64
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^6$	$F'(x)$
0	1	-6
1	0	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_0^1 (x-1)^6\,dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3.5x_2 + 3.5x_3 &= 3.5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 6. \end{aligned}$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 6, \\ 3x_1 + x_2 - 14x_3 &= 16, \\ 3x_2 + x_3 - 21x_4 &= 10, \\ 2x_3 + 2x_4 &= 26. \end{aligned}$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_2$=?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вариант 5

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.
   $3 \cdot 2.1 \qquad = ?$
2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^6$
0	0
1/2	1/64
1	1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^6$	$F'(x)$
1	1	6
2	64	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
   $$\int_0^1 x^6 dx = ?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 &= 3.5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 6. \end{aligned}$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 33x_3 &= 20, \\ x_2 + 3x_3 - 12x_4 &= 7, \\ 2x_3 + 3x_4 &= 9. \end{aligned}$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1 + x_2 + 1, \\ x_2 &= x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_3$=?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вариант 6

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$5.8 \cdot 3 \qquad =?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^3$
0	-1
1/2	-1/8
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^3$	$F'(x)$
1	0	
2	1	3

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
$$\int_0^1 (x-1)^3 dx = ?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 6. \end{aligned}$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки
$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 22x_3 &= 14, \\ 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 16, \\ 3x_3 + 2x_4 &= 16. \end{aligned}$$
7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 1. \end{aligned}$$
8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_2 = ?$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вариант 7

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.
   $9 \cdot 5.3 \quad =?$
2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x-1$
0	-1
1/2	-1/2
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x-1$	$F'(x)$
1	0	
2	1	1

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
   $$\int_1^2 \frac{(x-1)}{x} dx = ?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
   $$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5,$$
   $$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 7,$$
   $$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 6.$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$2x_1 - 2x_2 = 6,$$
$$2x_1 + x_2 - 9x_3 = 9,$$
$$2x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 18,$$
$$3x_3 + 2x_4 = 22.$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1, \\ x_2 &= x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_2$=?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вариант 8

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$4.6 \cdot 3$ =?

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^7$
0	0
1/2	-1/128
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^7$	$F'(x)$
1	0	
2	1	7

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_0^1 (x-1)^7 \, dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 &= 3.5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 6. \end{aligned}$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 - 9x_3 &= 5, \\ 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 &= 29, \\ 2x_3 + 2x_4 &= 18. \end{aligned}$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_3$=?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 9

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.
   $1.2 \cdot 1 \qquad = ?$
2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^2$
0	0
1/2	1/4
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^2$	$F'(x)$
1	0	0
2	1	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
   $$\int_0^1 (x-1)^2\,dx = ?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
   $$10x_1 - 7x_2 + 0 \cdot x_3 = 7,$$
   $$-3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4,$$
   $$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6.$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 6x_2 &= 2,\\
3x_1 + 3x_2 - 12x_3 &= 27,\\
x_2 + 3x_3 - 12x_4 &= 6,\\
3x_3 + x_4 &= 23.
\end{aligned}
$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1,\\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_1$=?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вариант 10

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$2.6 \cdot 3.05 \quad =?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^5$
0	-1
1/2	-1/32
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^5$	$F'(x)$
1	0	
2	1	5

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
$$\int_0^1 (x-2)^3\,dx = ?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4.5x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -2, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 &= 6, \\ 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 &= 21, \\ 7x_3 + 2x_4 &= 15. \end{aligned}$$
7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}$$
8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_1 = ?$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вариант 11

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.
$$7.5 \cdot 2.2 \quad = ?$$
2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^4$
0	0
1/2	1/16
1	1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^4$	$F'(x)$
1	1	4
2	16	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
$$\int_0^1 3x^2 dx = ?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 = 3,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4.$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 &= 6,\\
x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 15,\\
2x_2 + 4x_3 - 10x_4 &= 8,\\
5x_3 + 2x_4 &= 10.
\end{aligned}
$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 1,\\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}
$$

8. Вычислить норму матрицы $\| A \|_1$=?

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.
$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.
$$

Вариант 12

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$1.6 \cdot 2.05 \quad =?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^2$
0	1
1/2	1/4
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^2$	$F'(x)$
0	1	-2
2	1	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_0^1 (x+1)^3\,dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 &= 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2. \end{aligned}$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 18x_3 &= 15, \\ 4x_2 + 6x_3 - 18x_4 &= 10, \\ 4x_3 + 4x_4 &= 8. \end{aligned}$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\| A \|_1 = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 13

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

   $7.2 \cdot 1.1 \quad =?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^3$
0	0
1/2	1/8
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-1)^3$	$F'(x)$
2	1	3
3	8	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_0^1 (x-1)^3 dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$10x_1 - 7x_2 + 0 \cdot x_3 = 7,$$
$$-3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4,$$
$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6.$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 6x_2 &= 2,\\
3x_1 + 3x_2 - 12x_3 &= 27,\\
x_2 + 3x_3 - 12x_4 &= 6,\\
3x_3 + x_4 &= 23.
\end{aligned}
$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1,\\
x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1.
\end{aligned}
$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_1$=?

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.
$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Вариант 14

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$$12.6 \cdot 3.05 \ =?$$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv 2(x-1)^5$
0	-2
1/2	-1/16
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv 2(x-1)^5$	$F'(x)$
1	0	0
2	1	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
$$\int_0^1 2(x-1)^5\,dx=?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
$$\begin{aligned} -x_1+x_2+2x_3&=1,\\ 2x_1+5x_2+4.5x_3&=-3,\\ 2.2x_1+4x_2+2x_3&=4. \end{aligned}$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки
$$\begin{aligned} x_1-2x_2&=-2,\\ x_1+2x_2-9x_3&=6,\\ 2x_2+4x_3-9x_4&=21,\\ 7x_3+2x_4&=15. \end{aligned}$$
7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1&=-x_1+\tfrac{1}{5}x_2+1,\\ x_2&=\tfrac{1}{2}x_1-\tfrac{1}{2}x_2+1. \end{aligned}$$
8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_1=?$
$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
9. Оценить обусловленность матрицы $M_A=?$
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вариант 15

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

   $3 \cdot 2.1 \quad = ?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^6$
0	0
1/2	1/64
1	1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv x^6$	$F'(x)$
1	1	6
2	64	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

   $$\int_0^1 x^6 dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

   $$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
   $$2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 = 3.5,$$
   $$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 6.$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 &= 3,\\
3x_1 + 2x_2 - 33x_3 &= 20,\\
x_2 + 3x_3 - 12x_4 &= 7,\\
2x_3 + 3x_4 &= 9.
\end{aligned}
$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1 + x_2 + 1,\\ x_2 &= x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}
$$

8. Вычислить норму матрицы $\| A\|_3$=?

$$
A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Вариант 16

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$4.8 \cdot 3.01 \quad =?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-3)^3$
1	-8
3/2	-27/8
2	-1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (x-3)^3$	$F'(x)$
2	-1	3
3	0	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_3^2 (x-3)^3\,dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$\begin{aligned} 2.2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2, \\ 4x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= -7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6.1x_3 &= 6. \end{aligned}$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 &= 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2.2x_3 &= 14, \\ 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 16, \\ 1.3x_3 + 2x_4 &= 1.6. \end{aligned}$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 2, \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 - 1. \end{aligned}$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_1 = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Вариант 17

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

   $9.1 \cdot 5.3 \quad =?$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (2x-1)^2$
0	1
1/2	0
1	1

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv (2x-1)^2$	$F'(x)$
1	1	4
2	9	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

$$\int_1^2 (2x-1)^2\,dx = ?$$

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

$$5x_1 + 0.5x_2 + 5x_3 = 5,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 0.7x_3 = 7,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 0.6x_3 = 6.$$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 &= 6,\\
2x_1 + x_2 - 9x_3 &= 9,\\
2x_2 + 2x_3 - 1.6x_4 &= 1.8,\\
3x_3 + 2x_4 &= 22.
\end{aligned}
$$

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + 1,\\
x_2 &= -\tfrac{1}{7}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1.
\end{aligned}
$$

8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_2$=?

$$
A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1.1 \\ -2 & 1.3 & -3 \\ -3 & 0.2 & 3 \end{bmatrix}.
$$

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.
$$

Вариант 18

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только знаки, верные в узком смысле.

$$4.6 \cdot 3.01 \quad = ?$$

2. Построить интерполяционный полином Лагранжа по трем узлам. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv 3(x-1)^7$
0	3
1/2	-3/128
1	0

3. Построить интерполяционный полином Эрмита с разделенными разностями. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

x	$F(x) \equiv 3(x-1)^7$	$F'(x)$
1	0	0
2	3	

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат
$$\int_0^1 3(x-1)^7\,dx = ?$$
5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ 2x_1 + 5x_2 + 3.5x_3 &= -3.5,\\ 2x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 6. \end{aligned}$$
6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 2,\\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 &= 5,\\ 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 &= 9,\\ 2x_3 + 5x_4 &= 18. \end{aligned}$$
7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации (выполнить две итерации). Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + 1,\\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}$$
8. Вычислить норму матрицы $\|A\|_3$=?
$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
3. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1990. – 208 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 3-е изд., исп. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
5. Игумнов Л.А., Котов В.Л., Кротова В.С., Чекмарев Д.Т. Теория интерполирования: Учебно-методическая разработка. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2004. – 44 с.
6. Игумнов Л.А., Чекмарев Д.Т. Численное интегрирование: Учебно-методическая разработка. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 1999. – 33 с.
7. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 31 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ». ЧАСТЬ 1

Авторы:
Леонид Александрович **Игумнов**
Василий Леонидович **Котов**
Светлана Юрьевна **Литвинчук** и др.

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.