МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ». ЧАСТЬ 2

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2015

УДК 519.6
ББК 22.193
С23

С23 СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ». ЧАСТЬ 2: Учебно-методическое пособие / Авторы: Игумнов Л.А., Котов В.Л., Литвинчук С.Ю., Чекмарев Д.Т. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 69 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. **В.И. Ерофеев**

В учебно-методическом пособии рассмотрены разделы решения нелинейных алгебраических уравнений и систем, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных первого порядка. Приводятся примеры решения задач и варианты заданий для самостоятельного выполнения в рамках типовой программы курса «Численные методы». Учебно-методическое пособие содержит основные определения и необходимые теоремы в объеме, достаточном для их успешного применения при выполнении самостоятельных работ.

Предназначено для студентов механико-математического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии механико-математического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.А. Денисова**

УДК 519.6
ББК 22.193

Содержание

1. Метод Ньютона решения нелинейного уравнения – задание 1

Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

1.1. Необходимые теоретические сведения из теории решения нелинейных уравнений

Рассматривается задача нахождения корней уравнения вида

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ – непрерывная функция.

Методы решения уравнений делятся на *прямые* и *итерационные*. Прямые методы позволяют записать решение в виде некоторого конечного соотношения (формулы). На практике данная группа методов не всегда применима.

Зачастую решить данные уравнения удается только с помощью универсальных вычислительных алгоритмов – *итерационных методов* или *методов последовательных приближений*. В них необходимо задать некоторое приближенное решение – *начальное приближение*. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый *итерацией*. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с заданной точностью.

Процесс решения уравнения делится на два этапа:

1) *отделение корня* и нахождение начального приближения (может быть произведено графически или аналитически),

2) *уточнение корня* – прохождение необходимого числа шагов итерации.

Будем говорить, что корень t отделен на отрезке $[a;b] \subset D_f$, если $t \in [a;b]$ и других корней на этом отрезке нет. При этом сам отрезок $[a;b]$ называется *отрезком изоляции корня*. Отделить корень фактически означает найти для него отрезок изоляции.

Теорема 1.1 (об отделении корней). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то есть $f(a)f(b) < 0$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $t \in [a;b]$, в которой $f(t) = 0$ (рис. 1.1).

Замечание. Если же $f(x)$ непрерывна и дифференцируема и ее первая производная сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, то на $[a,b]$ находится только один корень уравнения.

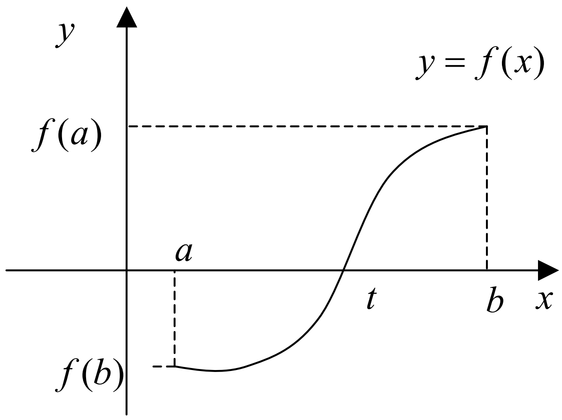

Рис. 1.1. Графическое отделение корня

Наиболее полно изучен вопрос о расположении корней *алгебраического многочлена* n -й степени.

$$P_n(x) = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \ (a_n \neq 0). \qquad (1.1)$$

Рассмотрим случай *действительного уравнения*. Алгебраическое уравнение (1.1) называется действительным, если все его коэффициенты a_i действительные числа. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.2 (о числе корней алгебраического уравнения).

Алгебраическое уравнение (1.1) n-й степени имеет ровно n корней, действительных или комплексных, при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Теорема 1.3. (о свойстве парной сопряженности комплексных корней уравнения).

Если $x_i = \alpha + \beta i$ – корень алгебраического уравнения (1.1) кратности k, то сопряженное число также является корнем той же кратности.

Следствие. Алгебраическое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Поиск приближенного значения корня с точностью до заданного достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ называется *процессом уточнения* корня. Задача уточнения считается решенной, если найдется число x, такое что $|t - x| \leq \varepsilon$. Тогда $t \approx x$ с точность до малого $\varepsilon > 0$.

Построим касательную к кривой $y = f(x)$. Каждое приближение к точному решению будет абсциссой точки пересечения соответствующей касательной и оси OX. Важным является вопрос о выборе начального приближения $x_0 \in [a;b]$. Начальное приближение удовлетворяет неравенству $f(x_0) f''(x_0) > 0$. Принято следующее правило: если $f'(x)$ и $f''(x)$ одного знака на отрезке $[a;b]$, то следует брать $x_0 = b$, а если разных знаков, то $x_0 = a$.

После того, как начальное приближение выбрано, строят касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0\,(x_0; f(x_0))$, уравнение которой имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Следующее приближение корня x_1 найдем, исходя из того, что это абсцисса точки пересечения касательной и оси абсцисс, а значит $y = 0$. Получим

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Для $n-$го приближения будем иметь рекуррентную формулу

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \tag{1.2}$$

где $f'(x_{n-1}) \neq 0$.

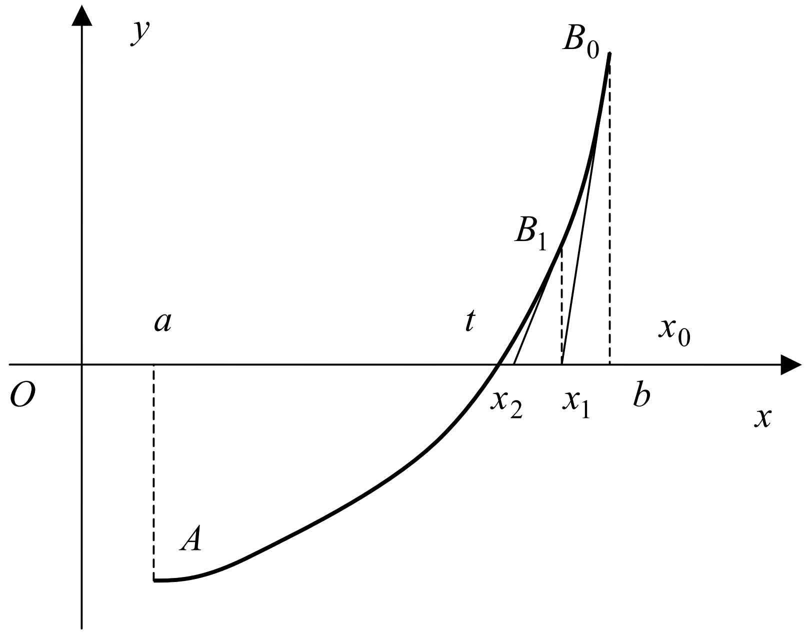

Рис. 1.2. Графическое изображение метода Ньютона (касательных)

Теорема 1.4 (достаточное условие сходимости метода Ньютона). Пусть $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на отрезке $[a;b]$ изоляции корня t, причем:

- $f(a)f(b) < 0$,
- производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a;b]$,
- производная $f'(x) \neq 0$.

Тогда, исходя из начального приближения $x_0 \in [a;b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно построить последовательность, определяемую рекуррентной формулой и сходящуюся к единственному корню t на отрезке $[a;b]$.

Пусть также существуют положительные числа m и M такие, что $|f'(x)| \geq m_1$, $|f''(x)| \leq M_2$, $x \in [a;b]$. Погрешность приближений к t, найденных методом касательных, оценивается формулой

$$|t - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}|t - x_{n-1}|^2,\ n = 1,2,... \qquad (1.3)$$

Обычно берут $M_2 = \max\limits_{[a;b]}|f''(x)|$, $m_1 = \min\limits_{[a;b]}|f'(x)|$.

На практике итерационный процесс (1.2) останавливают при выполнении условия

$$|x_n - t| \le |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon, \qquad (1.4)$$

где ε – заданная точность.

1.2. Пример выполнения задания 1

Дано: $f(x) \equiv x^3 - 2x$, т.о. $f(x)$=0 является алгебраическим уравнением. По Теореме 1.2 уравнение имеет 3 корня, среди которых по крайней мере 1 действительный.

Отделим корни аналитически. Найдем производную и вычислим корни уравнения $f'(x)$=0

$f'(x) = 3x^2 - 2$ =0 при $x = \pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.82 \approx \pm 1$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равными критически значениям функции (корням уравнения $f'(x)$=0) или близким к ним

Таблица 1.1

Таблица перемены знаков функции

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	–	+	–	+

Так как происходят три перемены знака функции, то уравнение имеет три действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, следует уменьшить промежутки, содержащие корни, так чтобы их длина была не больше 1. Для этого составим новую таблицу знаков функции $f(x)$

Таблица 1.2

Уточненная таблица перемены знаков функции

x	-2	-1	1	2
$\operatorname{sign} f(x)$	–	+	–	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках: $x_1 \in [-2,-1]$, $x_2 \in [-1,1]$, $x_3 \in [1,2]$.

Проверим условия применимости метода Ньютона на отрезке $[1,2]$, определяемые теоремой 1.2.

Таблица 1.3

Проверка условий применимости метода Ньютона на отрезке

$[a,b]$	$[1,2]$	выполнение
$f(a)\,f(b)<0$	$(1^3-2\cdot1)\cdot(2^3-2\cdot2)$= -4<0	выполнено
$f'(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$ sign $f'(x)$=const	$f'(x)=3x^2-2$=0, $x=\pm\sqrt{2/3}\notin[1,2]$ $f'(x)>0$ при $x\in[1,2]$	выполнено
sign $f''(x)$=const $\forall x\in[a,b]$	$f''(x)=6x>0$ при $x\in[1,2]$	выполнено

В случае выполнения условий применимости, как в нашем случае, начальное приближение метода Ньютона должно удовлетворять неравенству: $f(x_0)f''(x_0)>0$. Так как вторая производная положительна и $f(b)>0$ (табл. 1.2, 1.3), то в качестве начального приближения выбираем правую границу отрезка $x_0=2$.

Выполним две итерации метода Ньютона по формуле

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad k=0,1,...$$

Первая итерация:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{2^3-2\cdot2}{3\cdot2^2-2}=2-\frac{4}{10}=1.6;$$

Вторая итерация:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.6-\frac{1.6^3-2\cdot1.6}{3\cdot1.6^2-2}=1.6\left(1-\frac{2.56-2}{3\cdot2.56-2}\right)=1.4422.$$

Получим оценку погрешности, используя оценки для производных функции $f(x)$:

$$M_2=\max_{[a;b]}|f''(x)|=\max_{[1;2]}|6x|=12,\ m_1=\min_{[a;b]}|f'(x)|=\min_{[1;2]}\left|3x^2-2\right|=1,$$

$$|t-x_2|\le\frac{M_2}{2m_1}|x_2-x_1|^2=\frac{12}{2\cdot1}|1.4422-1.6|^2\le0.15.$$

В соответствии с этой оценкой верными являются не более, чем два десятичных знака приближенного числа (или один знак после запятой), второй знак необходимо считать сомнительным: x_2=1.4$\underline{4}$.

Точным значением решения уравнения на отрезке $[1,2]$ является $t=\sqrt{2}\approx1.4142$, абсолютная погрешность приближенного решения на второй итерации равна $\Delta=|t-x_2|=|1.4142-1.4442|=0.028$. Таким образом, верными в узком смысле по-прежнему являются две значащие цифры.

Ответ: один из искомых корней уравнения находится на отрезке $[1,2]$, условия применимости метода Ньютона на этом отрезке выполнены, получена последовательность приближений: *x*= 2, 1.6, 1.44.

2. Метод Ньютона решения системы нелинейных уравнений – задание 2

Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

2.1. Необходимые теоретические сведения из теории решения систем нелинейных уравнений

Если известно достаточно хорошее начальное приближение к решению уравнения $f(x) = 0$, то эффективным методом повышения точности является *метод Ньютона*. Идея метода Ньютона заключается в том, что в окрестности имеющегося приближения x_n задача заменяется некоторой вспомогательной линейной задачей.

Последняя задача выбирается так, чтобы погрешность замены имела более высокий порядок малости, чем первый (в определяемом далее смысле), в окрестности имеющегося приближения. За следующее приближение принимается решение этой вспомогательной задачи.

Рассмотрим случай скалярного уравнения $f(x) = 0$. В качестве такой вспомогательной задачи естественно взять линейную задачу

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

Ее решение

$$x = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

принимается за следующее приближение x_{n+1} к решению исходного уравнения, т.е. итерации ведутся по формуле

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

с действительными левыми частями.

Запишем короче систему (1). Совокупность аргументов x_1, $x_2, \ldots, x_n$ можно рассматривать как n-мерный вектор

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Аналогично совокупность функций f_1, $f_2, \ldots, f_n$представляет собой также n-мерный вектор (вектор-функцию)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Поэтому система (1) кратко записывается так:

$$f(x)=0. \tag{2.1'}$$

Для решения системы (2.1') будем пользоваться методом последовательных приближений.

Предположим, что найдено p-е приближение

$$x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \cdots, x_n^{(p)}\right)$$

Одного из изолированных корней $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ векторного уравнения (2.1'). Тогда точный корень уравнения (1') можно представить в виде

$$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}, \tag{2.2}$$

где $\varepsilon^{(p)} = \left(\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, \varepsilon_n^{(p)}\right)$ - поправка (погрешность корня).

Подставляя выражение (2.2) в уравнение (2.1'), будем иметь

$$f\left(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}\right) = 0. \tag{2.3}$$

Предполагая, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей x и $x^{(p)}$, разложим левую часть уравнения (2.3) по степеням малого вектора $\varepsilon^{(p)}$, ограничиваясь линейными членами,

$$f\left(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}\right) = f\left(x^p\right) + f'\left(x^p\right)\varepsilon^{(p)} = 0 \tag{2.4}$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{cases} f_1\left(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}\right) = \\ \quad = f_1\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) + f'_{1x_1}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_1^{(p)} + \\ \qquad + f'_{1x_2}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_2^{(p)} + \ldots + f'_{1x_n}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_n^{(p)} = 0, \\ f_2\left(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}\right) = \\ \quad = f_2\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) + f'_{2x_1}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_1^{(p)} + \\ \qquad + f'_{2x_2}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_2^{(p)} + \ldots + f'_{2x_n}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_n^{(p)} = 0, \\ \qquad \vdots \\ f_n\left(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}\right) = \\ \quad = f_n\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) + f'_{nx_1}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_1^{(p)} + \\ \qquad + f'_{nx_2}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_2^{(p)} + \ldots + f'_{nx_n}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_n^{(p)} = 0. \end{cases} \tag{2.4'}$$

Из формул (2.4) и (2.4') вытекает, что под производной $f'(x)$ следует понимать *матрицу Якоби* системы функций f_1, $f_2,\ldots,f_n$ относительно переменных x_1, $x_2,\ldots,x_n$, т.е.

$$f'(x)=W(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$f'(x)=W(x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \quad (i\ ,j=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Система (2.4’) представляет собой линейную систему относительно поправок $\varepsilon_i^{(p)}$ (i=1, 2, …, n) с матрицей $W(x)$, поэтому формула (2.4) может быть записана в следующем виде:

$$f\left(x^{(p)}\right)+W\left(x^{(p)}\right)\varepsilon^{(p)}=0.$$

Отсюда, предполагая, что матрица $W(x^{(p)})$ – неособенная, получим:

$$\varepsilon^{(p)}=-W^{-1}\left(x^{(p)}\right)f\left(x^{(p)}\right).$$

Следовательно,

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-W^{-1}\left(x^{(p)}\right)f\left(x^{(p)}\right) \quad (p=0,\ 1,\ 2, \dots) \tag{2.5}$$

Соотношения (2.5) определяют итерационный процесс **метода Ньютона** решения системы нелинейных уравнений. За нулевое приближение $x^{(0)}$ можно взять грубое значение искомого корня.

Для формулировки теоремы о сходимости метода Ньютона для решения нелинейного функционального уравнения введем следующие определения.

Пусть $F(x)$ – оператор, отображающий линейное нормированное пространство H на линейное нормированное пространство Y, может быть и совпадающее с H. Нормы в этих пространствах соответственно обозначаем $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_Y$.

Определение. Линейный оператор P, действующий из пространства H в пространство Y, назовем *производной оператора F(x)* в точке x, если

$$\left\|F(x+\eta)-F(x)-P_\eta\right\|_Y=o\left(\|\eta\|_H\right) \tag{2.6}$$

при $\|\eta\|_H \to 0$.

В дальнейшем будем обозначать такой оператор P через $F'(x)$. Пусть, например,

$$x=\left(x_1,x_2,\dots,x_m\right)^T,\ F=\left(f_1,f_2,\dots,f_m\right)^T.$$

Если функции f_i непрерывно дифференцируемы в окрестности данной точки x, то

$$f_i\left(x_1+\eta_1,\dots,x_m+\eta_m\right)=f_i\left(x_1,\dots,x_m\right)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i\left(x_1,\dots,x_m\right)}{\partial x_j}\eta_j+o\left(\|\eta\|\right).$$

Совокупность этих соотношений можно переписать в виде (2.6), если за P принять оператор умножения слева на матрицу

$$F'(x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right].$$

В простейшем случае m= 1 оператор P превращается в оператор умножения на производную f'_x.

Пусть X – решение уравнения $F(x) = 0$, x^n – некоторое приближение к X. В предположении существования производной F', согласно (2.6), имеем

$$\left\|F(x)-F\left(x^n\right)-F'\left(x^n\right)\left(X-x^n\right)\right\|_Y=o\left(\left\|X-x^n\right\|_H\right). \tag{2.7}$$

Если величина $\left\|X-x^n\right\|_H$ мала, то можно написать приближенное равенство

$$F\left(x^n\right)+F'\left(x^n\right)\left(X-x^n\right)\approx F(X).$$

Поскольку $F(X)\equiv 0$, то

$$F\left(x^n\right)+F'\left(x^n\right)\left(X-x^n\right)\approx 0.$$

Возьмем в качестве следующего приближения x^{n+1} решение уравнения

$$F\left(x^n\right)+F'\left(x^n\right)\left(X-x^n\right)=0,$$

если такое уравнение существует. В предположении, что оператор F' обратим, это решение можно записать в виде

$$x^{n+1}=x^n-\left(F'\left(x^n\right)\right)^{-1}F\left(x^n\right). \tag{2.8}$$

Итерационный процесс (2.8) называют *методом Ньютона* (см. также (2.5)).

Пусть $\Omega_a=\left\{x:\left\|x-X\right\|_H<a\right\}$. Пусть при некоторых a, a_1, a_2, $0<a$, $0\le a_1$, $a_2<\infty$, выполнены условия:

$$\left\|\left(F'(X)\right)^{-1}\right\|_Y\le a_1 \quad \text{при } x\in\Omega_a; \tag{2.9}$$

$$\left\|F(u_1)-F(u_2)-F'(u_2)(u_1-u_2)\right\|_Y=\le a_2\left\|u_2-u_1\right\|_H^2 \tag{2.10}$$

при u_1, $u_2\in\Omega_a$. Обозначим $c = a_1a_2$, b=min $\{a, c^{-1}\}$.

Теорема 2.1 (о сходимости метода Ньютона). При условиях (2.9), (2.10) и $x^0\in\Omega_b$ итерационный процесс Ньютона (2.8) сходится с оценкой погрешности

$$\left\|x^n-X\right\|_H\le c^{-1}\left(\left\|x^0-X\right\|_H\right)^{2^n}. \tag{2.11}$$

Примечание. Если в рассматриваемом выше примере в некоторой окрестности решения функции f_i имеются ограниченные вторые производные, то, согласно формуле Тейлора, имеем

$$f_i(y)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}\left(y_j-x_i\right)+O\left(\left\|y-x\right\|^2\right),$$

И, таким образом, условие (2.6) выполнено.

Обращение оператора $F'(x^n)$ зачастую оказывается более трудоемкой операцией, чем вычисление значения $F(x^n)$. Поэтому метод Ньютона часто модифицируется следующим образом. По ходу вычислений выбирают или заранее задаются некоторой возрастающей последовательностью чисел $n_0 = 0$, n_1, n_2,… При $n_k \le n < n_{k+1}$ итерации производят по формуле

$$x^{n+1} = x^n - \left(F'\left(x^{n_k}\right)\right)^{-1} F\left(x^n\right).$$

Увеличение числа итераций, сопровождающее такую модификацию, компенсируется большей «дешевизной» одного шага итерации. Выбор последовательности $\{n_k\}$ нужно производить с обоюдным учетом этих факторов.

Сравним асимптотическую скорость сходимости метода Ньютона и простой итерации. Для последнего мы имели оценку погрешности

$$\left\|x^n - X\right\| \le q^n \left\|x^0 - X\right\|, \quad q<1.$$

Чтобы погрешность стала меньше ε, согласно этой оценке достаточно взять

$$n \ge \log_{q^{-1}} \frac{\left\|x^0 - X\right\|}{\varepsilon} \approx \log_{q^{-1}} \frac{1}{\varepsilon}.$$

В случае метода Ньютона правая часть (2.11) будет меньше ε, если

$$n \ge -\log_2 \frac{\log_2\left(c\left\|x^0 - X\right\|\right)}{\log_2(c\varepsilon)} \approx \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, асимптотически, при $\varepsilon \to 0$, метод Ньютона требует меньшего количества итераций.

2.2. Пример выполнения задания 2

Дана система уравнений и начальное приближение

$$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 = 1. \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3{,}4 \\ 2{,}2 \end{bmatrix}$$

Для приближенного решения системы методом Ньютона, приведем систему к виду (2.1) с нулевыми правыми частями, иначе говоря

$$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Вычислим вторые приближения корней, производя вычисления с точностью до четырех десятичных знаков. Полагая

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + 3\lg x_1 - x^2, \\ f_2(x_1, x_2) \equiv 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1. \end{cases} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = 0,$$

имеем:

$$f\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 3{,}4 + 3\lg 3{,}4 - 2{,}2^2 \\ 2 \cdot 3{,}4^2 - 3{,}4 \cdot 2{,}2 - 5 \cdot 3{,}4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1544 \\ -0{,}3600 \end{bmatrix}.$$

Составим теперь матрицу Якоби

$$W(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{3M}{x_1} & -2x_2\\ 4x_1-x_2-5 & -x_1\end{bmatrix},$$

где M = 0,43429. Отсюда

$$W(x^{(0)})=\begin{bmatrix}1+\dfrac{3\cdot 0{,}43429}{3{,}4} & -2\cdot 2{,}2\\ 4\cdot 3{,}4-2{,}2-5 & -3{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}3832 & -4{,}4\\ 6{,}4 & -3{,}4\end{bmatrix},$$

причем

$$\Delta=\det W\left(x^{(0)}\right)=23{,}4571.$$

Следовательно, матрица $W(x^{(0)})$ – неособенная. Составим обратную ей матрицу

$$W^{-1}(x^{(0)})=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-3{,}4 & 4{,}4\\ -6{,}4 & 1{,}3832\end{bmatrix}.$$

Используя формулу метода Ньютона (2.5), получим:

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}3{,}4\\ 2{,}2\end{bmatrix}-\frac{1}{23{,}4571}\begin{bmatrix}-3{,}4 & 4{,}4\\ -6{,}4 & 1{,}3832\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}1544\\ -0{,}3600\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3{,}4\\ 2{,}2\end{bmatrix}-\frac{1}{23{,}4571}\begin{bmatrix}-2{,}10896\\ -1{,}48604\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3{,}4\\ 2{,}2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}0899\\ 0{,}0633\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3{,}4899\\ 2{,}2633\end{bmatrix}.$$

Аналогично находятся дальнейшие приближения.

3. Метод Эйлера и его модификации – задание 3

Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

3.1. Необходимые теоретические сведения из теории решения задачи Коши для ОДУ первого порядка

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида $y'=f(x,y)$, где $f(x,y)$ – непрерывная функция двух переменных и дифференцируемая по *y*. Его *решением* называется функция $y=\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая на некотором конечном или бесконечном множестве и обращающая на нем данное уравнение в тождество $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$.

Общее решение записывается в виде функции $y=\varphi(x,C)$ с произвольной числовой постоянной C.

Частное решение $y=\varphi(x,C_0)$ получается из общего решения при конкретном значении числового параметра $C=C_0$. Для выделения частного решения обычно ставится условие, которому должно удовлетворять это решение: $y=y_0$ при $x=x_0$, которое называется *начальным условием*, а точка (x_0,y_0) – *начальной точкой*. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

Теорема 3.1. (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть точка (x_0,y_0) является внутренней точкой замкнутой прямоугольной области $D=\{(x;y): a_1\le x\le b_1,\ a_2\le y\le b_2\}\subset D_f$, на которой выполняются условия:

1) функция f непрерывна как функция двух переменных;

2) частная производная f'_y существует и ограничена как функция двух переменных.

Тогда найдется такой отрезок $[x_0-\delta, x_0+\delta]\subset[a_1;b_1]$, $\delta>0$, на котором уравнение имеет единственное решение $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию.

В качестве начальной точки в данной теореме можно взять любую внутреннюю точку области D. Следовательно, через каждую точку в достаточно малой ее окрестности проходит единственная интегральная кривая из семейства $y=\varphi(x,C)$.

Будем рассматривать простейший случай

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0. \tag{3.1}$$

При численном решении задача сводится к поиску в точках $x_0,x_1,...,x_n$ приближенных значений y_k, $k=\overline{0,n}$. Точки x_k, $k=\overline{0,n}$ задают сетку, у которой $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ – шаг сетки. Если шаг сетки постоянный и обозначить его $\Delta x_k=h$, то

Метод Эйлера (классический) основан на записи (3.1) в следующей форме (через конечные разности)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x,y),\quad \Delta y=y(x+h)-y(x),\quad \Delta x=(x+h)-x=h. \tag{3.2}$$

Приближенное значение y_k из (3.2) в точке $x_k=x_0+kh$ вычисляется по формуле

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k),\quad k=\overline{0,n}. \tag{3.3}$$

Для получения формулы (3.3) можно применить и иной прием. Запишем задачу (3.1) в виде

$$y'=f(x,y(x)),\qquad y(x_k)=y_k,\qquad k=\overline{0,n}. \tag{3.4}$$

Применим к (3.4) формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx = y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z, y(z))dz. \qquad (3.5)$$

Таким образом (3.5) позволяет записать

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z, y(z))dz \qquad (3.6)$$

Применим к вычислению интеграла из (3.6) формулу левых прямоугольников, тогда (3.6) запишется

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0, n} \qquad (3.7)$$

Мы получим формулу *классического метода Эйлера*. Так как формулы левых прямоугольников имеют первый порядок точности, то и классический метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Описанная на примере (3.4)-(3.7) процедура позволяет построить *модификации метода Эйлера*.

Первая улучшенная формула метода Эйлера (усовершенствованный метод Эйлера) получается, если в (3.6) для вычисления интеграла применить формулу центральных прямоугольников. Вид формулы усовершенствованного метода Эйлера следующий

$$\begin{aligned} y_{k+1/2} &= y_k + \frac{1}{2}hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}). \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Так как формула центральных прямоугольников имеет второй порядок точности, то и формула усовершенствованного метода Эйлера имеет второй порядок точности.

Вторая модификация метода Эйлера получается, если в (3.6) для вычисления интеграла применить формулу трапеций. Вид формулы второй модификации классического метода Эйлера следующий

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\big) \qquad (3.9)$$

В формуле (3.9) значение y_{k+1} в правой части предсказывается по формуле (3.4) классического метода Эйлера, а затем по формуле (3.9) получается окончательное (скорректированное) значение y_{k+1}.

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \widetilde{y}_{k+1})\big). \end{aligned} \qquad (3.10)$$

По этой причине метод (3.10) называется метод типа предиктор-корректор. Иногда метод называют *методом Эйлера-Коши* или *методом Хьюна*.

Так как формула трапеций имеет второй порядок точности, то и вторая модификация метода Эйлера имеет второй порядок точности. Методы Эйлера являются одношаговыми методами.

3.2. Пример выполнения задания 3

Пример 1. Дано: $y' = f(x,y)$, $f \equiv y - x$, $y(0) = 1$.

Получить приближение к $y(0.1) = ?$, применяя метод Эйлера и его модификации.

а) Запишем формулу метода Эйлера

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0,n}$.

Положим шаг интегрирования $h = 0.1$ и введем обозначения

$x_0 = 0$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(0.1)$, $f_0 = f(x_0, y_0)$

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - x_0 = 1 - 0 = 1$, $y_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

б) Запишем первую улучшенную формулу (3.8) метода Эйлера

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{1}{2} hf(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение y на половинном шаге $x_{1/2}$

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f_0,$$

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - x_0 = 1 - 0 = 1$, $y_{1/2} = 1 + \dfrac{0.1}{2} \cdot 1 = 1.05$.

Введем обозначения: $f_{1/2} = f(x_{1/2}, y_{1/2})$, $x_{1/2} = x_0 + h/2$.

Имеем: $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0 + 0.1/2 = 0.05$, $f_{1/2} = y_{1/2} - x_{1/2} = 1.05 - 0.05 = 1$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$y_1 = y_0 + hf_{1/2} = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

в) Запишем вторую модифицированную формулу (3.10) метода Эйлера

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение $\tilde{y}$ на следующем шаге x_1:

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - x_0 = 1 - 0 = 1$,

$\tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$.

Вычисления на этом этапе совпали с вычислениями по методу Эйлера в п. а). Это справедливо только для первого шага, в общем случае это не так.

Введем обозначения: $\tilde{f}_1 = f(x_1, \tilde{y}_1)$, $x_1 = x_0 + h$.

Имеем: $x_1 = 0.1$, $\tilde{f}_1 = \tilde{y}_1 - x_1 = 1.1 - 0.1 = 1$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f_0 + \tilde{f}_1\right) = 1 + \frac{0.1}{2}(1 + 1) = 1.1.$$

Решения по всем трем методам совпали. Точное решение поставленной задачи Коши $y = x + 1$ при $x = 0.1$ также равно $y(0.1) = 1.1$.

Ответ: $y(0.1) \approx y_1 = 1.1$ по всем трем методам.

Пример 2. Дано: $y' = f(x,y)$, $f \equiv y - x$, $y(0) = 2$.

Получить приближение к $y(0.1) = ?$, применяя метод Эйлера и его модификации.

а) Запишем формулу метода Эйлера

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0,n}$.

Положим шаг интегрирования $h = 0.1$ и введем обозначения

$x_0 = 0$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(0.1)$, $f_0 = f(x_0, y_0)$

Имеем: $y_0 = 2$, $f_0 = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$, $y_1 = y_0 + hf_0 = 2 + 0.1 \cdot 2 = 2.2$

б) Запишем первую улучшенную формулу (3.8) метода Эйлера

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{1}{2}hf(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение y на половинном шаге $x_{1/2} = x_0 + h/2$

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2}f_0,$$

Имеем: $y_0 = 2$, $f_0 = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$, $y_{1/2} = 2 + \dfrac{0.1}{2} \cdot 2$=2.1.

Введем обозначения: $f_{1/2} = f(x_{1/2}, y_{1/2})$, $x_{1/2} = x_0 + h/2$.

Имеем: $x_{1/2} = x_0 + h/2$=0+0.1/2=0.05, $f_{1/2} = y_{1/2} - x_{1/2} = 2.1 - 0.05 = 2.05$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$y_1 = y_0 + hf_{1/2}$=$2 + 0.1 \cdot 2.05$=2.205

в) Запишем вторую модифицированную формулу (3.10) метода Эйлера

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение $\tilde{y}$ на следующем шаге x_1:

Имеем: $y_0 = 2$, $f_0 = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$,

$\tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 = 2 + 0.1 \cdot 2 = 2.2$.

Введем обозначения: $\tilde{f}_1 = f(x_1, \tilde{y}_1)$, $x_1 = x_0 + h$.

Имеем: $x_1 = 0.1$, $\tilde{f}_1 = \tilde{y}_1 - x_1 = 2.2 - 0.1 = 2.1$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f_0 + \tilde{f}_1\right)=1 + \frac{0.1}{2}(2 + 2.1)=2.205.$$

Решения по модификациям метода Эйлера совпали. Точное решение поставленной задачи Коши $y = x + 1 + e^x$ при $x = 0.1$ с точностью до пяти знаков после запятой равно $y(0.1) =$2.20517. Абсолютная погрешность полученных решений равна 0.0052, 0.0002.

Ответ: $y(0.1) \approx y_1 = 2.20$ по методу Эйлера, $y_1 = 2.205$ по модификациям метода.

Пример 3. Дано: $y' = f(x,y)$, $f \equiv y - \dfrac{2x}{y}$, $y(0)=1$.

Получить приближение к $y(0.1)=?$, применяя метод Эйлера и его модификации.

а) Запишем формулу метода Эйлера

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0,n}$.

Положим шаг интегрирования $h = 0.1$ и введем обозначения

$x_0 = 0$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(0.1)$, $f_0 = f(x_0, y_0)$

Имеем: $y_0 = 2$, $f_0 = y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0} = 1 - 0 = 1$

$y_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

б) Запишем первую улучшенную формулу (3.8) метода Эйлера

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{1}{2}hf(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение y на половинном шаге $x_{1/2} = x_0 + h/2$

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f_0,$$

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0} = 1 - 0 = 1$, $y_{1/2} = 1 + \dfrac{0.1}{2} \cdot 1 = 1.05$.

Введем обозначения: $f_{1/2} = f(x_{1/2}, y_{1/2})$, $x_{1/2} = x_0 + h/2$.

Имеем: $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0.05$, $f_{1/2} = y_{1/2} - \dfrac{2x_{1/2}}{y_{1/2}} = 1.05 - \dfrac{2 \cdot 0.05}{1.05} = 0.954762$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$y_1 = y_0 + hf_{1/2} = 1 + 0.1 \cdot 0.954762 = 1.0954762$

в) Запишем вторую модифицированную формулу (3.10) метода Эйлера

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение $\tilde{y}$ на следующем шаге x_1:

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0} = 1 - 0 = 1$, $\tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$.

Введем обозначения: $\tilde{f}_1 = f(x_1, \tilde{y}_1)$, $x_1 = x_0 + h$.

Имеем: $x_1 = 0.1$, $\tilde{f}_1 = \tilde{y}_1 - \dfrac{2x_1}{\tilde{y}_1} = 1.1 - \dfrac{2 \cdot 0.1}{1.1} = 0.9181818$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f_0 + \tilde{f}_1\right) = 1 + \frac{0.1}{2}(1 + 0.91818) = 1.095909.$$

Решения методу Эйлера и его модификациям отличаются. Точное решение поставленной задачи Коши $y=\sqrt{2x+1}$ при $x=0.1$ с точностью до пяти знаков после запятой равно $y(0.1)=1.09544$. Соответственно, абсолютная погрешность полученных решений равна 0.00456, 0.000036, 0.00047. Ответ запишем, применяя правило округления по дополнению.

Ответ: $y(0.1)\approx y_1=1.10$ по методу Эйлера, $y_1=1.0954$ по первой улучшенной формуле, $y_1=1.096$ по второй модифицированной формуле метода Эйлера.

4. Явные двухэтапные методы – задание 4

Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

4.1. Необходимые теоретические сведения: семейство явных двухэтапных методов Рунге-Кутты

Рассмотрим семейство явных двухэтапных методов Рунге-Кутты и покажем, что методы Эйлера, Эйлера-Коши являются частным случаем методов Рунге-Кутты.

Формула двухэтапных методов выглядит следующим образом

$$y_{k+1}=y_k+h\left[p_1 f(x_k,y_k)+p_2 f(x_k+\alpha_2 h, y_k+h\beta_{21} f(x_k,y_k))\right] \quad (4.1)$$

или

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=p_1 f(x_k,y_k)+p_2 f(x_k+\alpha_2 h, y_k+\beta_{21} h f(x_k,y_k)). \quad (4.2)$$

Параметрами в (4.1), (4.2) являются $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$.

Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi(h)=y(x+h)-y(x)-p_1 hf(x,y)-p_2 hf\left(x+\alpha_2 h, y+h\beta_{21} f(x,y)\right), \quad (4.3)$$

где $x=x_k$, $y=y(x_k)$, $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$.

Если функция в правой части уравнения $f(x,y)$ – достаточно гладкая функция своих аргументов, то $\varphi(h)$ – гладкая функция параметра h и существуют производные $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ и $\varphi'''(h)$. Подбором параметров $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ можно добиться, что производные $\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$.

Согласно формуле Тейлора выполняется равенство

$$\varphi(h)=\sum_{i=0}^{2}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}h^i+\frac{\varphi'''(\theta h)}{3!}h^3=\frac{\varphi'''(\theta h)}{3!}h^3, \quad 0<\theta<1 \quad (4.4)$$

Функция $\varphi(h)$ представляет собой *погрешность метода на шаге*, *порядок погрешности метода* в данном случае второй.

Обозначим: $\bar{x} = x + \alpha_2 h$, $\bar{y} = \beta_{21} h f(x, y)$ и вычислим производные функции $\varphi(h)$, определяемой выражением (4.3):

$$\varphi'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x,y) - p_2 f(\bar{x},\bar{y}) - p_2 h\left(\alpha_2 f_x(\bar{x},\bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x},\bar{y}) f(x,y)\right)$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h) - 2p_2\left(\alpha_2 f_x(\bar{x},\bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x},\bar{y}) f(x,y)\right) -$$
$$- p_2 h\left(\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + 2\alpha_2\beta_{21} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) f(x,y) + \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(f(x,y))^2\right)$$

$$\varphi'''(h) = y'''(x+h) - 3p_2\left(\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + 2\alpha_2\beta_{21} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) f(x,y) -\right.$$
$$\left. + \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(f(x,y))^2\right) + O(h)$$

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y' = f(x,y),\ y'' = f'_x + f'_y y',\ y''' = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y y''$$

Подставим в выражения $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ и $\varphi'''(h)$ значение $h = 0$ и воспользуемся этими соотношениями; получим

$$\varphi(0) = y - y = 0,$$
$$\varphi'(0) = (1 - p_1 - p_2) f(x,y),$$
$$\varphi''(0) = (1 - 2p_2\alpha_2) f_x(x,y) + (1 - 2p_2\beta_{21}) f_y(x,y) f(x,y),$$
$$\varphi'''(0) = \left(1 - 3p_2\alpha_2^2\right) f_{xx}(x,y) + (2 - 6p_2\beta_{21}) f_{xy}(x,y) f(x,y) +$$
$$\left(1 - 3p_2\beta_{21}^2\right) f_{yy}(x,y)(f(x,y))^2 + f_y(x,y) y''(x),$$

Для выполнения условий аппроксимации второго порядка формулы (4.2), в выражении (4.4), представляющем собой ошибку аппроксимации, должны обращаться в ноль следующие коэффициенты

$$(1 - p_1 - p_2) = 0, \quad \left(\frac{1}{2} - p_2\,\alpha_2\right) = 0, \quad \left(\frac{1}{2} - p_2\,\beta_{21}\right) = 0$$

или

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

Выражения (4.5) являются **условиями аппроксимации второго порядка** для двухэтапных методов Рунге-Кутты (4.2).

Замечание 1. Анализ погрешности аппроксимации (4.4) показывает, что выполнение только первого условия в (4.5), а именно $p_1 + p_2 = 1$, обеспечивает первый порядок аппроксимации, так как $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) \neq 0$.

Замечание 2. Формула (4.2) второго порядка точности представляет собой однопараметрическое семейство, так как условия (4.5) можно преобразовать, выразив значения коэффициентов через один из параметров, например, $\alpha \equiv \alpha_2$:

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}, \qquad \beta_{21} = \alpha, \qquad p_2 = \frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha \in (0,1).$$

$$y_{k+1} = y_k + h\left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(x_k, y_k) + \frac{1}{2\alpha} f(x_k + \alpha h, y_k + \alpha h f(x_k, y_k))\right], \qquad (4.6)$$

При $\alpha = 1/2$ формула (4.6) дает первую модификацию метода Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) \qquad (4.7)$$

При $\alpha = 1$ формула (4.6) дает метод Эйлера-Коши (метод Хьюна) – вторую модификацию метода Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_k + \alpha h, y_k + \alpha h f(x_k, y_k))\right], \qquad (4.8)$$

Замечание 3. У формул одинакового порядка точности по h главные члены погрешности на шаге часто оказываются непропорциональными. Например, главный член погрешности формулы (4.7) равен $\left(B + \frac{A}{2}\right)h^3$, а у формулы (4.8) равен $(B - A)h^3$, где

$$B = \frac{1}{6} f_y y'', \ A = \frac{1}{12}\left(f_{xx} + 2 f_{xy} y' + f_{yy} (y')^2\right),$$

Поэтому можно указать два уравнения таких, что для первого уравнения меньшую погрешность дает метод (4.7), а для второго уравнения – метод (4.8).

Замечание 4. В случае уравнения $y' = y$ имеем $\varphi'''(0) = y$ независимо от значений $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$. Отсюда следует, что нельзя построить формулы двухэтапного метода Рунге-Кутты третьего порядка точности.

4.2. Пример выполнения задания 4

а) Дана формула: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} hf(x_k, y_k) + \frac{1}{2} hf(x_k + h, y_k + h f(x_k, y_k))$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(x_k + \alpha_2 h, y_k + h\beta_{21} f(x_k, y_k))$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = \frac{1}{2}, \qquad p_2 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \beta_{21} = 1.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \qquad p_2 \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \qquad p_2 \beta_{21} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации выполнены, формула являет собой метод Эйлера-Коши (метод Хьюна) – вторую модификацию метода Эйлера второго порядка точности.

Ответ: данная формула принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

б) Дана формула: $y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\,f(x_k, y_k)\right)$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(x_k + \alpha_2\, h, y_k + h\beta_{21}\, f(x_k, y_k))$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad \beta_{21} = \frac{1}{2}.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = 0 + 1 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации выполнены, формула являет собой первую модификацию метода Эйлера второго порядка точности.

Ответ: данная формула принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

в) Дана формула:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3}hf(x_k, y_k) + \frac{2}{3}hf\left(x_k + \frac{3h}{4}, y_k + \frac{3h}{4}f(x_k, y_k)\right)$$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(x_k + \alpha_2\, h, y_k + h\beta_{21}\, f(x_k, y_k))$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{2}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{3}{4}, \qquad \beta_{21} = \frac{3}{4}.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации выполнены, метод имеет второй порядок точности.

Ответ: данная формула принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

г) Дана формула:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3}hf(x_k, y_k) + \frac{2}{3}hf\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_k + \frac{2h}{3}f(x_k, y_k)\right)$$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$$y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(x_k + \alpha_2 h, y_k + h\beta_{21} f(x_k, y_k))$$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{2}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{2}{3}, \qquad \beta_{21} = \frac{2}{3}.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации не выполнены. Выполнение только первого условия обеспечивает первый порядок точности.

Ответ: данная формула не принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

5. Метод прогонки решения краевой задачи – задание 5

Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

5.1. Необходимые теоретические сведения из теории решения краевых задач для ОДУ второго порядка

При применении метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка получается «трехчленная система» линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан специальный метод, получивший название *метод прогонки*.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{5.1}$$

С двухточечными линейными краевыми условиями

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \tag{5.2}$$

$$\left(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0\right)$$

в предположении, что функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

От дифференциального уравнения (5.1) обычным приемом перейдем к конечно-разностному уравнению. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$. Полагая, что $x_i = x_0 + ih$, $x_0 = a$, $x_n = b$ (i=0,1,2,…,n) и вводя обозначения

$$p(x_i) = p_i,\ q(x_i) = q_i,\ f(x_i) = f_i,\ y(x_i) = y_i,$$

для внутренних точек $x = x_i$ (i= 1,2,…,n-1) отрезка [a, b] вместо дифференциального уравнения получаем систему конечно-разностных уравнений

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \ (i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Отсюда после соответствующих преобразований будем иметь

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \hat{f}_i h^2 \ (\text{i}= 1,2,\ldots,\text{n}-1) \tag{5.3}$$

где для краткости положено

$$m_i = -\frac{2 - q_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2}h},\quad n_i = -\frac{1 - \frac{p_i}{2}h}{1 + \frac{p_i}{2}h},\quad \hat{f}_i = -\frac{f_i}{1 + \frac{p_i}{2}h}. \tag{5.4}$$

Для производных на концах $x_0 = a$ и $x_0 = b$ берем односторонние производные

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} \text{ и } y'_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h}.$$

Отсюда согласно условиям (5.2), получим

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A,\quad \beta_0 y_0 + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B. \tag{5.5}$$

Линейная система (5.3), (5.5) состоит из n +1 уравнений первой степени относительно неизвестных y_0, y_1, …, y_n. Эту систему можно решить обычным способом. Однако мы сейчас укажем другой, более короткий путь, получивший название *метода прогонки*.

Разрешая уравнение (5.3) относительно y_i, будем иметь

$$y_i = \frac{\hat{f}_i}{m_i}h^2 - \frac{1}{m_i}y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i}y_{i-1}. \tag{5.6}$$

Предположим, что с помощью полной системы (5.3), (5.5) из уравнения (5.6) исключена неизвестная y_{i-1}. Тогда это уравнение примет вид

$$y_i = c_i\left(d_i - y_{i+1}\right), \tag{5.7}$$

где c_i, d_i (i= 1,2,…,n-1) – некоторые коэффициенты. Отсюда

$$y_{i-1} = c_{i-1}\left(d_{i-1} - y_i\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.3), получим

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}\left(d_{i-1} - y_i\right)\hat{f}_i h^2,$$

и, следовательно,

$$y_i = \frac{\left(\hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}\right) - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \tag{5.8}$$

Сравнивая формулы (5.7) и (5.8), получим для определения c_i и d_i рекуррентные формулы:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad d_i = \hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} \text{ (i= 1,2,…,n-1).} \tag{5.9}$$

Определим теперь c_0и d_0. Из первого краевого условия (5.5) получаем

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}.$$

С другой стороны, из формулы (5.7) при $i = 0$ имеем

$$y_0 = c_0 (d_0 - y_1). \tag{5.10}$$

Сравнивая последние два равенства, находим

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \tag{5.11}$$

На основании формул (5.9), (5.11) последовательно определяются коэффициенты c_i, d_i(i= 1,2,…,n-1) до c_{n-1}, d_{n-1}включительно (*прямой ход*).

Обратный ход начинается с определения y_i. Используя второе краевое условие (5.5) и формулу (5.7) при $i = n$ -1, получим систему двух уравнений

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B, \quad y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \tag{5.12}$$

Решая систему (5.12) относительно y_n, будем иметь

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)}. \tag{5.13}$$

Теперь по формуле (5.7) последовательно находим y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3},…, y_0.

Для контроля можно проверить выполнение первого краевого условия. Вычисления удобно расположить в виде таблицы

Таблица 5.1

Схема метода прогонки

i	0	1	2	…	n -2	n - 1	n
c_i	c_0	c_1	c_2	…	c_{n-2}	c_{n-1}	
d_i	d_0	d_1	d_2	…	d_{n-2}	d_{n-1}	
x_i	$x_0 = a$	x_1	x_2	…	x_{n-2}	x_{n-1}	$x_n = b$
y_i	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

Для простейших краевых условий $y(a) = A$, $y(b) = B$ формулы для c_0, d_0, y_0 и y_n упрощаются. А именно, полагая $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ и $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, из формул (5.11) будем иметь: $c_0 = 0$, $d_0 = \infty$,$c_0 d_0 = A$. Отсюда

$$c_1 = \frac{1}{m_1}, \quad d_1 = \hat{f}_1 h^2 - n_1 A; \tag{5.14}$$

причем

$$y_n = B, \quad y_0 = A. \tag{5.15}$$

Заметим, что метод прогонки обладает устойчивым вычислительным алгоритмом [3], [4], т.е. ошибки округления не вызывают неограниченного возрастания погрешности решения.

5.2. Пример выполнения задания 5

а) Дана краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного)

$$y'' - y' + 1 = 0,\ y(0) + y'(0) = 3,\ y'(1) = 6,\ x \in [0,1].$$

Для численного решения задачи методом конечных разностей, область изменения переменной $x \in [0,1]$ разобьем на три отрезка с шагом $h = \frac{1}{3}$, полагая $x_n = x_0 + n \cdot h$, $n = 1,2,3$, $x_0 = 0$, значения искомой функции в узлах сетки обозначим y_0, y_1, y_2, y_3.

Составим разностную схему для уравнения во внутренних узлах сетки x_1, x_2, используя центральные разности второго порядка аппроксимации

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O\left(h^2\right), \quad y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O\left(h^2\right).$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} - \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + 1 = 0,\ n = 1,\ 2.$$

При аппроксимации производных, входящих в граничные условия, будем использовать односторонние разности первого порядка

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h), \qquad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h),$$

для левой и правой границ соответственно:

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} = 3,\ \frac{y_3 - y_2}{h} = 6$$

Таким образом, будем иметь систему уравнений, где неизвестными являются y_0, y_1, y_2, y_3

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{1/3} = 3,$$

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1/9} - \frac{y_2 - y_0}{2/3} + 1 = 0,\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{1/9} - \frac{y_3 - y_1}{2/3} + 1 = 0,$$

$$\frac{y_3 - y_2}{1/3} = 6.$$

Или, в преобразованном виде

$$-\frac{2}{3}y_0+y_1=1,$$
$$\frac{7}{6}y_0-2y_1+\frac{5}{6}y_2=-\frac{1}{9},$$
$$\frac{7}{6}y_1-2y_2+\frac{5}{6}y_3=-\frac{1}{9},$$
$$-y_2+y_3=2.$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{6} & -2 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{7}{6} & -2 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Матрица системы линейных алгебраических уравнений имеет трехдиагональный вид, для решения которой применим метод прогонки.

б) Дана краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного)

$$y''-4y'-2y=-4x,\ y(0)-y'(0)=0,\ y(3)=1,\ x\in[0,3].$$

Для численного решения задачи методом конечных разностей, область изменения переменной $x\in[0,3]$ разобьем на три отрезка с шагом $h=1$, полагая $x_n=x_0+n\cdot h$, $n=1,2,3$, $x_0=0$. Значения искомой функции в узлах сетки обозначим y_0,y_1,y_2,y_3.

Составим разностную схему для уравнения во внутренних узлах сетки x_1,x_2, используя центральные разности второго порядка аппроксимации

$$y''_n=\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+O\left(h^2\right),\qquad y'_n=\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+O\left(h^2\right).$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}-4\left(\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}\right)-2y_n=-4x_n,\ n=1,2.$$

При аппроксимации производных, входящих в граничные условия, будем использовать односторонние разности первого порядка

$$y'_n=\frac{y_{n+1}-y_n}{h}+O(h),\qquad y'_n=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+O(h),$$

для левой и правой границ соответственно:

$$y_0-\frac{y_1-y_0}{h}=0,\ y_3=1$$

Таким образом, будем иметь систему уравнений, где неизвестными являются y_0,y_1,y_2,y_3

$$y_0-\frac{y_1-y_0}{1}=0,$$
$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{1}-4\left(\frac{y_2-y_0}{2}\right)-2y_1=-4\cdot 1,$$
$$\frac{y_3-2y_2+y_1}{1}-4\left(\frac{y_3-y_1}{2}\right)-2y_2=-4\cdot 2,$$

$y_3 = 1.$

Или, в преобразованном виде

$$2y_0 - y_1 = 0,$$
$$3y_0 - 4y_1 - y_2 = -4,$$
$$3y_1 - 4y_2 - y_3 = -8,$$
$$y_3 = 1.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Матрица системы линейных алгебраических уравнений имеет трехдиагональный вид, для решения которой применим метод прогонки.

6. Метод конечных разностей – задание 6

Определить порядок аппроксимации разностной схемы решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка.

6.1. Необходимые теоретические сведения: основные понятия теории разностных схем для уравнений в частных производных

Пусть требуется приближенно вычислить решение *u* дифференциальной краевой задачи

$$Lu = f \tag{6.1}$$

поставленной в некоторой области D с границей Γ. Для этого следует выбрать дискретное множество точек D_h – сетку, принадлежащее $D + \Gamma$, ввести линейное нормированное пространство U_h функций, определенных на сетке D_h, установить соответствие между решением u и функцией $[u]_h \in U_h$, которую будем считать искомой таблицей решения u. Для приближенного отыскания таблицы $[u]_h$, которую мы условились считать точным решением задачи (6.1), надо на основе задачи (6.1) составить систему уравнений

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \tag{6.2}$$

относительно функции $u^{(h)}$ из U_h,

Определение 6.1 (сходимость) Решение разностной краевой задачи сходится к решению дифференциальной краевой задачи, если

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{6.3}$$

Если для решения разностной краевой задачи (6.2) выполнено неравенство

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \le Ch^k,$$

то говорят, что сходимость имеет порядок k относительно h.

Свойство сходимости является основным свойством разностной схемы, гарантирующим возможность получения решения с любой наперед заданной точностью (по крайней мере, теоретически).

Задачу построения сходящейся разностной схемы (6.2) разбивают на две – построение разностной схемы (6.2), *аппроксимирующей* задачу (6.1) на решении *u* последней, и на проверку *устойчивости* схемы (6.2).

Введем определение *аппроксимации*. Чтобы это понятие имело смысл, надо ввести норму в пространстве F_h, которому принадлежит правая часть $f^{(h)}$ уравнения (6.2). При этом норму $\|\cdot\|_{U_h}$ определим равенством

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} = \sup_{m,n}\left\|u_m^n\right\| = \max_n \sup_m \left|u_m^n\right|.$$

Норму $\|\cdot\|_{F_h}$ будем понимать следующим образом: если $g^{(h)} \in F_h$,

$$g^{(h)} = \begin{cases} \varphi_m^n, & m = 0, \pm 1, \ldots; \quad n = 0, 1, \ldots, [T/\tau], \\ \psi_m, & m = 0, \pm 1, \ldots, \end{cases}$$

то

$$\left\|g^{(h)}\right\|_{F_h} = \max_{m,n}\left|\varphi_m^n\right| + \max_m\left|\psi_m\right| = \max_n\left[\max_m\left|\varphi_m^n\right| + \max_m\left|\psi_m\right|\right].$$

Определение 6.2 (аппроксимация). Разностная задача (6.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (6.1) на решении *u*, если в равенстве

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$$

невязка $\delta f^{(h)}$, возникающая при подстановке $[u]_h$ в разностную краевую задачу (6.2), стремится к нулю при $h \to 0$:

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} = \left\|L_h[u]_h - f^{(h)}\right\|_{F_h} \to 0.$$

Если при этом

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} \le Ch^k,$$

где *C* не зависит от *h*, то аппроксимация имеет порядок *k* относительно *h*.

Простейший прием построения разностных краевых задач, аппроксимирующих дифференциальные, состоит в замене производных соответствующими разностными отношениями.

Приведем несколько примеров разностных схем, полученных таким способом. В этих примерах будут использованы приближенные формулы

$$\begin{cases} \dfrac{df(z)}{dz} \approx \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \\ \dfrac{df(z)}{dz} \approx \dfrac{f(z) - f(z-\Delta z)}{\Delta z}, \\ \dfrac{df(z)}{dz} \approx \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z-\Delta z)}{2\Delta z}, \\ \dfrac{d^2 f(z)}{dz^2} \approx \dfrac{f(z+\Delta z) - 2f(z) + f(z-\Delta z)}{\Delta z^2}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Предполагая функцию $f(z)$ имеющей достаточное число ограниченных производных, можно выписать выражения для остаточных членов этих формул. По формуле Тейлора

$$\begin{cases} f(z+\Delta z) = f(z) + \Delta z f'(z) + \dfrac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) + \dfrac{(\Delta z)^3}{3!} f''(z) + \dfrac{(\Delta z)^4}{4!} f^{(4)}(z) + o\left[(\Delta z)^4\right], \\ f(z-\Delta z) = f(z) - \Delta z f'(z) + \dfrac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) \dfrac{(\Delta z)^3}{3!} f''(z) + \dfrac{(\Delta z)^4}{4!} f^{(4)}(z) + o\left[(\Delta z)^4\right]. \end{cases} \quad (6.7)$$

Используя разложение (6.7), можно получить выражения для остаточных членов приближенных формул (6.6). Именно, справедливы равенства

$$\begin{cases} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \left[\dfrac{\Delta z}{2} f''(z) + o(\Delta z)\right], \\ \dfrac{f(z) - f(z-\Delta z)}{\Delta z} = f'(z) + \left[-\dfrac{\Delta z}{2} f''(z) + o(\Delta z)\right], \\ \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z-\Delta z)}{2\Delta z} = f'(z) + \left[\dfrac{(\Delta z)^2}{3} f'''(z) + o\left((\Delta z)^2\right)\right], \\ \dfrac{f(z+\Delta z) - 2f(z) + f(z-\Delta z)}{\Delta z^2} = f''(z) + \left[\dfrac{(\Delta z)^2}{12} f^{(4)}(z) + o\left((\Delta z)^2\right)\right]. \end{cases} \quad (6.8)$$

Остаточные члены приближенных формул (6.6) входят в соответствующие равенства (6.8) в виде выражений в квадратных скобках.

Очевидно, что формулы (6.6) и выражения остаточных членов, выписанные в формулах (6.8), можно использовать и при замене частных производных разностными отношениями.

Например, разности *первого порядка* аппроксимации

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau}$$

причем

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + o(\Delta t)\right]$$

$$\frac{u(x,t) - u(x-\Delta t,t)}{\Delta t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + o(\Delta t)\right].$$

Точно так же справедливы формулы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$$

и при этом

$$\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\left[\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+o(\Delta x)\right]$$

$$\frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\left[\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+o(\Delta x)\right]$$

Центральные разности *второго порядка* аппроксимации

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\approx\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t},\ \frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u_m^{n+1}-u_m^{n-1}}{2\tau}$$

причем

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\left[\frac{(\Delta t)^2}{3}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3}+o((\Delta t)^2)\right].$$

Точно так же справедливы формулы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\approx\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x},\ \frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u_{m+1}^{n}-u_{m-1}^{n}}{2h}$$

и при этом

$$\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\left[\frac{(\Delta x)^2}{3}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}+o((\Delta x)^2)\right]$$

и т.д.

6.2. Пример выполнения задания 6

Рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases}\dfrac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}-\dfrac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=\varphi(x_m,t_p) \quad p=0,1,\ldots,[T/\tau]-1,\\ u_m^0=\psi(x_m), \quad m=0,\pm1,\ldots\end{cases}$$

и дифференциальную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x,t),$$
$$u(x,0)=\psi(x)$$

Ошибка аппроксимации разностной схемы для задачи Коши складывается из ошибки аппроксимации для дифференциального уравнения и начальных условий. Для аппроксимации частных производных по времени и пространству в данном случае применяются конечные разности первого порядка, начальные условия и правая часть задаются точно.

Таким образом, ошибка аппроксимации схемы является величиной $O(\tau+h)$.

Ответ: схема имеет первый порядок аппроксимации.

7. Исследование устойчивости и сходимости – задание 7

Исследовать разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

7.1. Необходимые теоретические сведения: спектральный признак устойчивости Неймана, основная теорема теории разностных схем

Простейшим примером разностной задачи Коши может служить задача

$$L_h u(h) \equiv \begin{cases} \dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = \varphi_m^p, & p = 0,1,\dots,[T/\tau]-1, \\ u_m^0 = \psi_m, \quad m = 0, \pm 1, \dots \end{cases} \qquad (7.1)$$

Положив

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \varphi_m^p, & p = 0,1,\dots,[T/\tau]-1, \\ \psi_m, & m = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

запишем задачу (7.1) в форме

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}. \qquad (7.2)$$

Определим нормы $\left\| u^{(h)} \right\|_{U_h}$ и $\left\| f^{(h)} \right\|_{F_h}$ равенствами

$$\left\| u^{(h)} \right\|_{U_h} = \max_p \max_m \left| u_m^p \right|, \quad \left\| f^{(h)} \right\|_{F_h} = \max_m \left| \psi_m \right| + \max_{m,p} \left| \varphi_m^p \right|.$$

Определение 7.1 (устойчивость). Разностная краевая задача (7.2), по определению, устойчива, если существуют числа $\delta > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\delta f^{(h)}$ из F_h, удовлетворяющем неравенству $\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} \le \delta$, разностная краевая задача

$$L_h Z^{(h)} = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$$

имеет одно и только одно решение, причем выполняется условие

$$\left\| z^{(h)} - u^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h},$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h.

В случае линейного оператора L_h сформулированное определение равносильно следующему.

Определение 7.2. (устойчивость) Разностная краевая задача (7.2) устойчива, если существует $h_0 > 0$ такое, что при $h < h_0$ и любом $f^{(h)} \in F_h$ она однозначно разрешима, причем

$$\left\| u^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \left\| f^{(h)} \right\|_{F_h},$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h и от $f^{(h)}$.

Замечание 1. Свойство устойчивости можно трактовать как равномерную относительно h чувствительность решения разностной краевой задачи (7.2) к возмущениям $\delta f^{(h)}$ правой части.

Замечание 2. Подчеркнем, что в силу приведенного определения *устойчивость* есть некоторое *внутреннее* свойство разностной краевой задачи. Оно формулируется независимо от какой-либо связи с дифференциальной краевой задачей, в частности независимо от аппроксимации и сходимости.

Изложим широко применяемый способ Неймана исследования разностных задач с начальными данными, ограничившись случаем разностной задачи Коши с постоянными коэффициентами. Тогда условие устойчивости задачи (7.2)

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} \le C\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} \tag{7.3}$$

примет вид

$$\max_p\left|u_m^p\right| \le C\left[\max_m\left|\psi_m\right| + \max_{m,k}\left|\varphi_m^k\right|\right], \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau] \tag{7.4}$$

где C не зависит от h (и от $\tau = rh$, $r = \text{cost}$). Условие (7.4) должно выполняться при произвольных $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m^p\}$.

В частности, для устойчивости необходимо, чтобы оно выполнялось при произвольных $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m^p\} \equiv 0$, т.е. чтобы решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau]-1, \\ u_m^0 = \psi_m, \quad m = 0, \pm 1, \ldots \end{cases} \tag{7.5}$$

удовлетворяло условию

$$\max_p\left|u_m^p\right| \le C\max_m\left|u_m^0\right|, \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau] \tag{7.6}$$

при произвольной ограниченной функции $u_m^0 = \varphi_m$.

Свойство (7.6), необходимое для устойчивости (7.4) задачи (7.1), называют *устойчивостью задачи* (7.1) *относительно возмущения начальных данных*. Оно означает, что возмущение $\{u_m^0\}$, внесенное в начальные данные задачи (7.1), вызовет возмущение $\{u_m^p\}$ решения задачи (7.1), которое в силу (7.6) не более чем в C раз превосходит возмущение начальных данных, причем C не зависит от h.

Для устойчивости задачи Коши (7.1) по начальным данным необходимо, чтобы условие (7.6) выполнялось, в частности, если $\{u_m^0\}$ есть какая-нибудь гармоника

$$u_m^0 = e^{i\alpha m}, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \tag{7.7}$$

где α – вещественный параметр. Но решение задачи (5) при начальном условии (7.7) имеет вид

$$u_m^p = \lambda^p e^{i\alpha m}, \tag{7.8}$$

где $\lambda = \lambda(\alpha)$ определяется путем подстановки выражения (7.8) в однородное разностное уравнение задачи (7.5):

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}, \quad r = \frac{\tau}{h} = \text{const}. \tag{7.9}$$

Для решения (7.8) справедливо равенство

$$\max_p \left|u_m^p\right| = \left|\lambda(\alpha)\right| \max_m{}^p \left|u_m^0\right|.$$

Поэтому для выполнения условия (7.6) необходимо, чтобы при всех вещественных α выполнялось неравенство

$$\left|\lambda(\alpha)\right|^p \le C, \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau],$$

или

$$\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1 + C_1\tau, \tag{7.10}$$

где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от α и τ.

Это и есть **необходимое спектральное условие Неймана** применительно к рассматриваемому примеру.

Существование решения вида (7.8) показывает, что гармоника $\{e^{iam}\}$ является собственной функцией оператора перехода

$$u_m^{p+1} = (1-r)u_m^p + ru_{m+1}^p, \quad m = 0, \pm 1, \ldots,$$

который в силу разностного уравнения (7.5) ставит в соответствие сеточной функции $\{u_m^p\}$, $m = 0, \pm1,\ldots$, определенной на слое $t_p = p\tau$ сетки, сеточную функцию $\{u_m^{p+1}\}$, $m = 0, \pm1,\ldots$, определенную на слое $t_{p+1} = (p+1)\tau$. Число $\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}$ является соответствующим этой гармонике $\{e^{iam}\}$ собственным числом оператора перехода. Линия, которую пробегает точка $\lambda(\alpha)$ на комплексной плоскости, когда α пробегает вещественную ось, вся состоит из собственных значений и является *спектром оператора перехода*.

Таким образом, *необходимое условие устойчивости* (7.10) можно сформулировать так: спектр оператора перехода, соответствующего разностному уравнению задачи (7.5), должен лежать в круге радиуса $1+C_1\tau$ на комплексной плоскости. в нашем примере спектр (7.9) не зависит от τ. Поэтому условие устойчивости (7.10) равносильно требованию, чтобы спектр $\lambda(\alpha)$ лежал в единичном круге

$$\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1. \tag{7.11}$$

Для примера воспользуемся сформулированным признаком для анализа устойчивости задачи (7.1). Спектр (7.9) представляет собою окружность с центром в точке $1-r$ и радиусом r на комплексной плоскости. В случае $r< 1$ эта окружность лежит внутри единичного круга (касаясь его в точке $\lambda = 1$), при $r= 1$ совпадает с единичной окружностью, а при $r> 1$ лежит вне единичного круга (рис. 7.1). Соответственно необходимое условие устойчивости (7.11) выполнено при $r\le 1$ и не выполнено при $r> 1$. Такая схема называется условно-устойчивой.

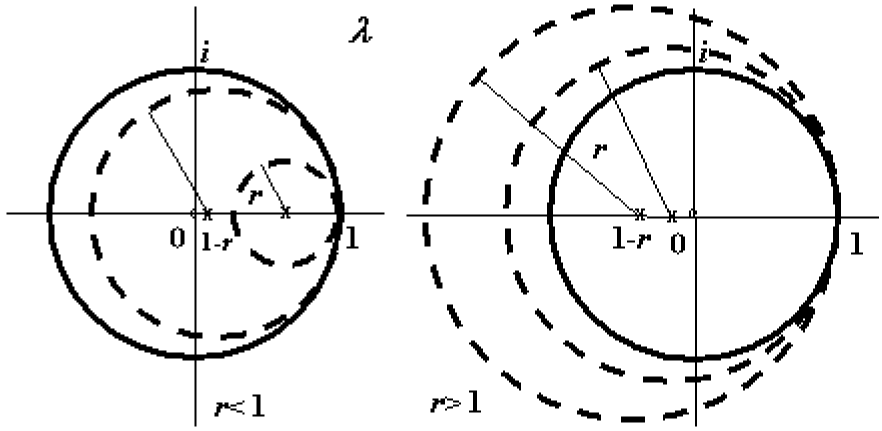

Рис. 7.1. Схема применения признака устойчивости Неймана на комплексной плоскости в случае условной устойчивости (слева) и неустойчивости (справа) разностной схемы.

В общем случае задачи Коши для разностных уравнений и систем разностных уравнений необходимый спектральный признак устойчивости Неймана состоит в том, что спектр $\lambda = \lambda(\lambda, h)$ разностной задачи при всех достаточно малых h должен лежать в круге

$$|\lambda| \le 1 + \varepsilon \tag{7.12}$$

на комплексной плоскости, как бы мало ни было заранее выбранное положительное число ε.

Если необходимое условие Неймана (7.12) не выполнено, то ни при каком разумном выборе норм нельзя ожидать устойчивости, а в случае его выполнения можно надеяться, что при некотором разумном выборе норм устойчивость имеет место (для одного уравнения необходимый признак является и достаточным).

Докажем теперь, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Теорема 7.1. (Основная теорема теории разностных схем) о зависимости между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью. Пусть разностная схема $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ аппроксимирует задачу $Lu = f$ на решении u с порядком h^k и устойчива.

Тогда решение $u^{(h)}$ разностной задачи $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ сходится к $[u]_h$, причем имеет место оценка

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \le C C_1 h^k \ , \tag{7.13}$$

где C и C_1 – числа, входящие в оценки определений аппроксимации и устойчивости.

Доказательство. Положим в определении устойчивости

$$\varepsilon^{(h)} \equiv \delta f^{(h)},\ [u]_h \equiv z^{(h)},$$

где $\delta f^{(h)}$ – погрешность аппроксимации.

Тогда оценка разности решений примет вид

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} .$$

Учитывая определение аппроксимации (6.2), сразу получаем доказываемое неравенство (7.12).

Таким образом, для рассмотренного примера в силу аппроксимации первого порядка и доказанной устойчивости при $r \le 1$ имеет место и линейная (первого порядка) относительно h сходимость решений разностной задачи к решению дифференциальной задачи при выполнении ограничения на шаги по времени и пространству $t \le h$.

7.2. Пример выполнения задания 7

Рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \dfrac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = \varphi(x_m, t_p) \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau]-1, \\ u_m^0 = \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \ldots \end{cases}$$

Подставляя выражение вида (7.8) в соответствующее однородное разностное уравнение, после простых преобразований получим

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - re^{-i\alpha}.$$

В силу этой формулы спектр представляет собой окружность с центром в точке $1+r$ и радиусом r (рис. 7.2). Ни при каком r спектр не лежит в единичном круге. Условие устойчивости (7.12) всегда не выполнено. Такая схема называется абсолютно неустойчивой.

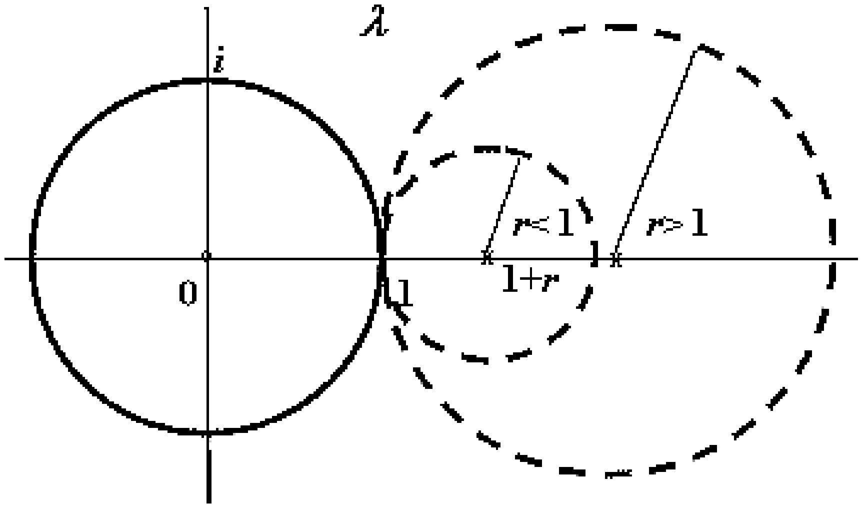

Рис.7.2. Схема применения признака устойчивости Неймана на комплексной плоскости (случай абсолютной неустойчивости разностной схемы)

Схема обладает аппроксимацией первого порядка, но является неустойчивой. По основной теореме теории разностных схем сходимости решений не будет.

8. Варианты заданий для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{matrix} x_2 = x_1^3 - 1, \\ x_2 = -5 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = y, \; y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0 \cdot hf(x_n, y_n) + 1 \cdot hf(x_n + 0.5 \cdot h, y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \; y(1) = 2,$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1, \qquad h = 1/3.$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 3 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 2

1. Отделить корни графически или аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 6x - 8 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^2 + 2, \\ x_2 &= 3, \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = y = 1,\ y(0) = 2,\ h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2} \cdot hf(x_n + 1 \cdot h, \quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y(1) = 4,\ h = 1/3.$$

$$0 \,\_\_\_\_\_\_\_\_\_\, \frac{1}{3} \,\_\_\_\_\_\_\_\_\_\, \frac{2}{3} \,\_\_\_\_\_\_\_\_\_\, 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 3

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^3 - 3, \\ x_1 &= 4, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 2, \; y(0) = -1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n + 2 \cdot h, \quad y_n + 2 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 2y' = 0, \qquad y(0) = 1, \; y(1) = 4, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 4 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 4

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2, \\ x_2 &= -6, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x - 1,\ y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf\left(x_n + \frac{3}{4} \cdot h,\quad y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n)\right)$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 5y = 0, \qquad y(0) = 5,\ y(1) = -2,\ h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 5

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^4 - 1, \\ x_1 &= x_1^2 - x_2, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x + y, \ y(0) = 1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n + 1 \cdot h, \quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 6y' = 0, \qquad y(0) = -2, \ y(1) = 8, \ h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} + 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \ u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 6

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + x - 5 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x_2^2} - 1, \\ x_1 &= 4, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x - y, \; y(0) = -2, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf(x_n + 0.5 \cdot h, \quad y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$4y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3, \; y(1) = -1, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} + 5 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 5 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 7

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0\,.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1^2 - 2, \\ x_2 &= 4, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 1 + 2y\,,\ y(0) = 0\,, \qquad h = 0.1\,.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3}\cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{3}\cdot hf(x_n + 1.5\cdot h, \quad y_n + 1.5\cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 7y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y(1) = 3\,,\ h = 1/3\,.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} + 3\cdot\frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0\,,\ u_m^0 = f(m\cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,\ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 8

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2^3 + 2, \\ x_2 &= -5, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x + y + 2, \; y(0) = -1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.6 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.4 \cdot hf(x_n + 1.25 \cdot h, \quad y_n + 1.25 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 8y' = 0, \qquad y(0) = 4, \; y(1) = 3, \; h = 1/3.$$

$$0 \;\underline{\qquad\qquad}\; \frac{1}{3} \;\underline{\qquad\qquad}\; \frac{2}{3} \;\underline{\qquad\qquad}\; 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} + \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 9

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2 - 1, \\ x_2 &= -5x_1, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 2x + y, \quad y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf\left(x_n + \frac{1}{3} \cdot h, \quad y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) \right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \; y(1) = 2, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 3 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{2h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 10

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1^4 - 1, \\ x_2 &= -5x_1, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = \frac{y}{x+1}, \; y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4} \cdot hf\left(x_n + \frac{2}{3} \cdot h, \quad y_n + \frac{2}{3} \cdot hf(x_n, y_n)\right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 4y' + 4 = 0, \quad y(0) = 2, \; y(1) = 2, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^{p-1}}{2\tau} - 4 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 11

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.2x^2 + 0.3x - 1.2 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$x_1 = \frac{1}{x_2} - 1, \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
$$x_2 = 4x_1,$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = -y, \; y(0) = 2, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.2 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.8 \cdot hf(x_n + 0.625 \cdot h, \quad y_n + 0.625 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \; y(1) = 3, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 12

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0\,.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$x_1 = \frac{1}{x_2^2} - 1, \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
$$x_2 = 3x_1 - 5,$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 3y + 1\,,\ y(0) = -1\,, \qquad h = 0.1\,.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.6 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.4 \cdot hf(x_n + 1.25 \cdot h, \quad y_n + 1.25 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 2y = 0\,, \qquad y(0) = -2\,,\ y(1) = 4\,,\ h = 1/3\,.$$

$$0\,\underline{\qquad\qquad}\,\frac{1}{3}\,\underline{\qquad\qquad}\,\frac{2}{3}\,\underline{\qquad\qquad}\,1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2.5 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_{m-1}^p}{h} = 0\,,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,\ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 13

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^3 - x_1, \\ x_1 &= -\frac{5}{x_2}, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x - y, \; y(0) = -2, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.6 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.4 \cdot hf(x_n + 0.8 \cdot h, \quad y_n + 0.8 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \; y(1) = 3, \; h = 1/3.$$

$$0 \,\rule{2cm}{0.4pt}\, \frac{1}{3} \,\rule{2cm}{0.4pt}\, \frac{2}{3} \,\rule{2cm}{0.4pt}\, 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 6 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 14

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2^3 + 1, \\ x_2 &= -3, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x + 2y - 2, \; y(0) = 1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.1 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.9 \cdot hf\left(x_n + \frac{5}{9} \cdot h, \quad y_n + \frac{5}{9} \cdot hf(x_n, y_n)\right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + y' + 7y = 0, \quad y(0) = 5, \; y(1) = 7, \; h = 1/3.$$

$$0 \;\underline{\qquad\qquad}\; \frac{1}{3} \;\underline{\qquad\qquad}\; \frac{2}{3} \;\underline{\qquad\qquad}\; 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^{p-1}}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 15

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1^3 - 1, \\ x_2 &= -x_1, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 2y, \; y(0) = -1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.5 \cdot hf(x_n + 1 \cdot h, \quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 10y = 0, \qquad y(0) = 1, \; y(1) = 3, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 16

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 4x - 6 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1^4 - 1, \\ x_2 &= -5x_1, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = \frac{y}{x+1}, \; y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4} \cdot hf\left(x_n + \frac{2}{3} \cdot h, \quad y_n + \frac{2}{3} \cdot hf(x_n, y_n) \right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 3y' = 0, \qquad y(0) = 2, \; y(1) = 2, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{2\tau} - 4 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 17

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0.8 = 0\,.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1^2 - 2, \\ x_2 &= 4, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 1 + 2y\,,\ y(0) = 0\,, \qquad h = 0.1\,.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3}\cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{3}\cdot hf\big(x_n + 1.5\cdot h,\quad y_n + 1.5\cdot hf(x_n, y_n)\big).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 7y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y(1) = 3\,,\ h = 1/3\,.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} + 3\cdot\frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0\,,\ u_m^0 = f(m\cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,\ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 18

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2^3 + 2, \\ x_1 &= -5, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x + y + 2, \; y(0) = -1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.6 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.4 \cdot hf(x_n + 1.25 \cdot h, \quad y_n + 1.25 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 8y' = 0, \qquad y(0) = 4, \; y(1) = 3, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} + \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 19

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3-0.2x^2+0.3x+1.2=0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2^3+1, \\ x_2 &= -3, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x + 2y - 2,\ y(0)=1, \qquad h=0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.1\cdot hf(x_n, y_n) + 0.9\cdot hf\left(x_n+\frac{5}{9}\cdot h,\quad y_n+\frac{5}{9}\cdot hf(x_n,y_n)\right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y''+y'+7y=0,\quad y(0)=5,\ y(1)=7,\ h=1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1}-u_m^{p-1}}{\tau} - 2\cdot\frac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m\cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0)=f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 20

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 2x + 4 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1^3 - x_2 - 1, \\ x_2 &= -x_1, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 2y, \; y(0) = -1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.5 \cdot hf(x_n + 1 \cdot h, \quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 10y = 0, \qquad y(0) = 1, \; y(1) = 3, \; h = 1/3.$$

$$0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{1}{3} \_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{2}{3} \_\_\_\_\_\_\_\_ 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 21

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^3 - x_1, \\ x_1 &= -\frac{5}{x_2}, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x - y, \; y(0) = -2, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.6 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.4 \cdot hf(x_n + 0.8 \cdot h, \quad y_n + 0.8 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 2y = -x, \qquad y(0) = 1, \; y(1) = 3, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 6 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 22

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x_2^2} - 1, \\ x_2 &= 3x_1 - 5, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 3y + 1, \; y(0) = -1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.6 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.4 \cdot hf(x_n + 1.25 \cdot h, \quad y_n + 1.25 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 2y = 1, \qquad y(0) = -2, \; y(1) = 4, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2.5 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 23

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{}{x_2} - 1, \\ x_2 &= 4x_1, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = -y, \ y(0) = 2, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0.2 \cdot hf(x_n, y_n) + 0.8 \cdot hf(x_n + 0.625 \cdot h, \quad y_n + 0.625 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \ y(1) = 3, \ h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \ u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 24

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2 - 1, \\ x_2 &= -5x_1, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 2x + y, \; y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf\left(x_n + \frac{1}{3} \cdot h, y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) \right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 3y = x, \qquad y(0) = 2, \; y(1) = 2, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 3 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_{m-1}^p}{2h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 25

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$x_1 = \frac{1}{x_2^2} - 1, \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
$$x_1 = 4,$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x - y, \; y(0) = -2, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf(x_n + 0.5 \cdot h, \quad y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$4y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3, \; y(1) = -1, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} + 5 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 5 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 26

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 2 = 0 .$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^4 - 1, \\ x_1 &= x_1^2 - x_2, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x + y, \; y(0) = 1, \qquad h = 0.1 .$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n + 1 \cdot h, \quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 6y' = 0, \qquad y(0) = -2, \; y(1) = 8, \; h = 1/3 .$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} + 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 27

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.2x^2 + 0.4x - 1.4 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2, \\ x_2 &= -6, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = x - 1, \ y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf\left(x_n + \frac{3}{4} \cdot h, \quad y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) \right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 5y = 0, \qquad y(0) = 5, \ y(1) = -2, \ h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \ u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 28

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + 0.4x^2 + 0.6x - 1.6 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^3 - 3, \\ x_1 &= 4, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = 2, \; y(0) = -1, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n + 2 \cdot h, \quad y_n + 2 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 2y' = 0, \qquad y(0) = 1, \; y(1) = 4, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 4 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 29

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 + x - 3 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^2 + 2, \\ x_2 &= 3, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = y + 1, \; y(0) = 2, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2} \cdot hf\left(x_n + 1 \cdot h, \quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n)\right).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' - 2y = 0, \qquad y(0) = 3, \; y(1) = 4, \; h = 1/3.$$

$$0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{1}{3} \_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{2}{3} \_\_\_\_\_\_\_\_ 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Вариант 30

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

$$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.4 = 0.$$

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^3 - 1, \\ x_2 &= -5, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

$$y' = y, \; y(0) = 3, \qquad h = 0.1.$$

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + 0 \cdot hf(x_n, y_n) + 1 \cdot hf(x_n + 0.5 \cdot h, \quad y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n)).$$

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

$$y'' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \; y(1) = 2, \; h = 1/3.$$

$$0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1$$

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 3 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \; u_m^0 = f(m \cdot h).$$

решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; u(x,0) = f(x).$$

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
3. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1990. – 208 с.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 3-е изд., исп. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
6. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Численные методы решения нелинейных уравнений: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. – 61 с.
7. Игумнов Л.А., Чекмарев Д.Т. Численное интегрирование: Учебно-методическая разработка. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 1999. – 33 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
9. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем: Учебно-методическая разработка / Сост.: Игумнов Л.А., Котов В.Л., Литвинчук С.Ю., Чекмарев Д.Т. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2000. – 38 с.

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ
«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ».
ЧАСТЬ 2

Авторы:
Леонид Александрович **Игумнов**
Василий Леонидович **Котов**
Светлана Юрьевна **Литвинчук** и др.

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж ___ экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37