МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Е.В. Круглов
Е.А. Таланова

Основные методы вычисления интегралов

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института экономики и предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» (бакалавриат).

Нижний Новгород
2019

УДК 517
ББК 22.161.1
К 84

К 84 Круглов Е.В., Таланова Е.А. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. –50 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., доцент А.В.Калинин

Учебно-методическое пособие, раскрывающее тему «Интегральное исчисление функции одного переменного» дисциплины «Математический анализ», предназначено для студентов института экономики и предпринимательства ННГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В..

УДК 517
ББК 22.161.1

Содержание

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения, изучающих математику по учебной программе дисциплины «Математический анализ», составленной в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению «Бизнес-информатика». Пособие направлено на формирование компетенции ПК-18 «Способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования».

В учебном пособии рассматриваются приемы и методы интегрирования и содержатся основные теоретические сведения: понятия, определения и теоремы, необходимые для вычисления интегралов. В данном пособии имеется достаточное количество как разобранных примеров, так и примеров для самостоятельного решения. Завершают материал задания для контрольных работ по теме «Интегралы».

1. Справочные сведения

1.1.Первообразная и неопределенный интеграл.

Одной из основных задач дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала от заданной функции
$F'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x)$ или $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$
В интегральном исчислении основной является обратная задача – отыскание функции $F(x)$ по заданной её производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$. То есть, для данной функции $f(x)$ надо найти такую функцию $F(x)$, что
$F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx.$

Определение 1. Пусть в некотором промежутке X задана функция $f(x)$. Функция $F(x)$, производная которой во всех точках промежутка X равна $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$ (или, что то же самое, $dF(x) = f(x)dx$), называется первообразной по отношению к $f(x)$ на промежутке X.

Примеры:
1) для функции $f(x) = 2x$ первообразной является функция $F(x) = x^2$;
2) для функции $f(x) = \cos x$ первообразной является функция $F(x) = \sin x$.

Однако функция $F(x) = x^2 + 3$ также будет первообразной для функции $f(x) = 2x$, а $F(x) = \sin x - 100$ будет первообразной для $f(x) = \cos x$.
В связи с этими рассуждениями возникают следующие вопросы:
1) всегда ли можно найти первообразную; 2) сколько их; 3) как их находить?
Ответ на первый вопрос дает

Теорема. Всякая непрерывная на промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную.

Эта теорема доказана, например, в книге [8].

На второй вопрос отвечает

Лемма (основная лемма интегрального исчисления). 1) Если $F(x)$ есть какая-то первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то при любой постоянной C все функции $F(x) + C$ также являются первообразными, причем 2) любая другая первообразная той же функции $\varPhi(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторую постоянную C, то есть $\varPhi(x) = F(x) + C$.

Доказательство.

1) Так как $F'(x) = f(x)$, то $(F(x)+C)' \equiv F'(x)+C' = f(x)$.
2) пусть $\Phi(x)$ тоже является первообразной для $f(x)$, то есть $\Phi'(x) = f(x)$.
Имеем:
$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0.$
Следовательно $(\Phi(x) - F(x) \equiv C = const$, так что $\Phi(x) = F(x) + C$.

Определение 2. Выражение $F(x)+C, C = const$, содержащее все функции, производные которых совпадают с $f(x)$ на промежутке X, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается символом $\int f(x)dx.$

Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in X \forall C = const.$
При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, символ $\int$– знаком интеграла.

Подчеркнем, что неопределенный интеграл - это не функция, а множество (семейство) функций $F(x)+C$; они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Поэтому иногда возникают недоразумения, когда при разных способах вычисления интеграла получаются разные выражения, а произвольную постоянную обозначают одной и той же буквой. То есть, если $f(x) \equiv g(x)$, то нельзя утверждать, что для их первообразных $F(x)$ и $G(x)$ сохраняется $F(x) \equiv G(x)$, где $G(x)$ - первообразная для $g(x)$; однако, существует $\exists C_1 = const$ такая, что $G(x) = F(x) + C_1$. При этом $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ - это есть равенство (совпадение) двух множеств функций: $\forall C, \exists C_2$, такая, что $F(x)+C = G(x)+C_2$ или наоборот $\forall C_2, \exists C$.

Употребляется также запись $\int \varphi(x)u'(x)dx \equiv \int \varphi(x)d(u(x))$. В этом случае говорят, что здесь произведено "внесение функции под знак дифференциала": $u'(x)dx = d(u(x))$. Например, $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$ $x > 0$ или $\sin xdx = -d(\cos x)$.

Нахождение первообразной и вместе с тем неопределенного интеграла от данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$. Это есть операция, обратная дифференцированию. Следовательно, *результат интегрирования можем проверить дифференцированием*.

1.2. Свойства неопределенного интеграла

Исходя из определения, получаем следующие простейшие свойства неопределенных интегралов, которые позволяют их вычислять:

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, а
$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. Если $f(x)$ – дифференцируемая функция, то $\int f'(x)dx = f(x) + C.$
$\int d\,f(x) = f(x) + C$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные на некотором промежутке, то функция $f(x) + g(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

4. Если $f(x)$ имеет первообразную, и $a \in R$, то функция $af(x)$ также имеет первообразную, причем при $a \neq 0$ верно равенство $\int a\,f(x) = a\int f(x)dx$.

5. $\int \left(Af(x) + Bg(x)\right)dx = A \cdot \int f(x)dx + B \cdot \int g(x)dx, \ |A| + |B| \neq 0.$

Доказательство третьего и четвертого свойств основано непосредственно на определении 2.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ - первообразные для функций соответственно $f(x)$ и $g(x)$: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тогда

$\left(F(x) + G(x)\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

и $\left(aF(x)\right)' = aF'(x) = af(x)$. Поэтому:

а) $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = F(x) + G(x) + C$, $\forall C = const$,

$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \left(F(x) + C_1\right) + \left(G(x) + C_2\right) = F(x) + G(x) + C$, где $C = C_1 + C_2$ - произвольная постоянная (вместе с C_1 и C_2). Результаты совпадают.

б) аналогично:

$\int a\,f(x) = aF(x) + C$, $\forall C = const$,

$a\int f(x) = a(F(x) + C_1) = aF(x) + C$, $C = aC_1$ - произвольная постоянная (вместе с C_1), так как $a \neq 0$.

Свойство 5 называется свойством линейности. Оно следует из свойств 3 и 4, которые, в свою очередь, являются его частными случаями.

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$ - какая-либо непрерывно дифференцируемая функция от x , то

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C \quad , \tag{1.2.1}$$

то есть

$$\int f(u(x))d(u(x)) = \int f(u)du \quad . \tag{1.2.2}$$

Доказательство.
Дано: $F'(x) = f(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем $\left[F(u(x))\right]' = F'_u(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$ - это есть подынтегральная функция в формуле (1.2.1), а $F(u(x))$ - её первообразная. Следовательно, формула верна.
Говорят: в интегралах, стоящих слева в формулах (1.2.1) и (1.2.2), произвели замену переменной интегрирования по формуле $u = u(x)$, приводящей к интегралу в правой части формулы (2), который равен $F(u) + C$.

1.3.Таблица основных интегралов

Пользуясь сказанным выше, составим таблицу неопределенных интегралов. Для нижеследующих пунктов 1-10 это означает всего лишь «обратить» таблицу производных.

Пусть $u = u(x)$ - какая-либо функция от x, в частности, возможно $u = x$ (то есть u – независимая переменная)

1. $\int 0 \cdot du = C$.

2. а) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$; б) $\int du = u + C$.

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

4. а) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$; б) $\int e^u du = e^u + C$.

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

6. $\int \cos u du = \sin u + C$.

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$.

9. а) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$; б) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, a > 0$.

10. а) $\int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + C$; б) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, a > 0$.

11. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a > 0$.

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, a > 0$.

13. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$.

14. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$.

15. $\int shudu = chu + C$.

16. $\int chudu = shu + C$.

17. $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = thu + C$.

18. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$.

2. Основные методы интегрирования

2.1. Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределённого интеграла.

Примеры

1) $\int\left(5x^3-4x^2+7\right)dx=5\int x^3dx-4\int x^2dx+7\int dx=5\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+7x+C.$

2) $\int\frac{x^5+5x^4+2x}{x^2}\,dx=\int\left(x^3+5x^2+\frac{2}{x}\right)dx=\int x^3dx+5\int x^2dx+2\int\frac{dx}{x}=$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+2\ln|x|+C.$

3) $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{6}{x^3}+2\right)dx=3\int x^{1/2}dx-6\int x^{-3}dx+2\int dx=2\sqrt{x^3}+\frac{3}{x^2}+2x+C$.

4) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-arctgx+C.$

5) $\int tg^2xdx=\int(\frac{1}{\cos^2x}-1)dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=tgx-x+C$.

6) найти $\int e^{3\sin x}\cos xdx$

Решение:

Умножим и разделим на 3, чтобы использовать внесение под дифференциал. Запишем подробно.

$$\int e^{3\sin x}\cos xdx=\frac{1}{3}\int e^{3\sin x}\cdot 3\cdot\cos xdx=\frac{1}{3}\int e^{3\sin x}d(3\sin x)=\left[u=3\sin x\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\int e^u du=\frac{1}{3}e^u+C=\frac{1}{3}e^{3\sin x}+C\ .$$

Функцию $u=3\sin x$ внесли здесь под знак дифференциала.

7) найти $\int\cos 15xdx$

Решение:

Воспользуемся снова внесением под знак дифференциала. Для этого умножим и разделим интеграл на 15.

$$\int\cos 15xdx=\frac{1}{15}\int 15\cos 15xdx=\frac{1}{15}\int\cos 15xd(15x)=\frac{1}{15}\sin 15x+C\ .$$

8)найти $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

Решение:

Вспомним, что $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = d(\sqrt{x})$. Тогда

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = \int \cos\sqrt{x} \cdot d(\sqrt{x}) = \sin\sqrt{x} + C.$$

9) найти $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}$

Решение:

Заметим, что числитель дроби равен дифференциалу знаменателя.

Следовательно $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \ln(x^2+x+1) + C$.

10) $\int \frac{(arctgx)^3 dx}{x^2+1} = \int (arctgx)^3 d(arctgx) = \frac{(arctgx)^4}{4} + C$.

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\int \left(x\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{3} \right) dx$; 2) $\int \left(x^2\sqrt{x} - \frac{\sqrt[5]{x^2}}{4} \right) dx$; 3) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx$;

4) $\int \left(\frac{3}{1+x^2} + \frac{2}{x^4} - \frac{5}{x} + 3 \right) dx$; 5) $\int \left(\frac{e^x \cdot x^2 - 1}{x^2} \right) dx$; 6) $\int \frac{(2x+3)^2}{x^2} dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx$; 8) $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$; 9) $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$;

10) $\int 2\cos^2 \frac{x}{2} dx$; 11) $\int (\mathrm{tg}x + ctgx)^2 dx$; 12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;

13) $\int \frac{\sin^3 x + 8}{\sin^2 x} dx$; 14) $\int \frac{2+x^2}{1+x^2} dx$; 15) $\int \frac{2x-7}{x^2-9} dx$;

16) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$; 17) $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx$; 18) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$;

19) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$; 20) $\int \frac{x^3+4x+5}{x^2+4} dx$; 21) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;

22) $\int \frac{(3-2\sqrt{x})^7}{\sqrt{x}} dx$; 23) $\int \frac{e^x}{(e^x-2)^3} dx$; 24) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{2x^4+7}}$;

25) $\int 2^{5x^2+1} x\, dx$; 26) $\int \frac{e^{\sqrt{x}+2}}{2\sqrt{x}} dx$; 27) $\int \frac{dx}{x(2\ln x + 1)}$;

28) $\int (3-2x)^7 dx$; 29) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$; 30) $\int \frac{dx}{x(\ln x + 6)}$.

2.2. Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки)

Часто бывает так, что предлагаемый для вычисления интеграл не содержится в таблице интегралов и не сводится к табличным интегралам. Тогда применяются другие методы интегрирования, одним из которых является метод замены переменной.

Пусть имеет место неопределенный интеграл $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$, где подынтегральная функция непрерывна. Применив подстановку $t=\varphi(x)$ и вычислив дифференциал $dt=\varphi'(x)dx$, получим

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)\,dt$$

формулу замены переменной в неопределённом интеграле.

От выбора удачной подстановки для замены переменной зависит его сведение к табличному. Общее правило для выбора хорошей подстановки дать невозможно, но некоторые частные правила для важнейших типов интегралов даются ниже.

Примеры:

1) $\int\frac{dx}{7x-5}$.

Решение:

Обозначим $7x-5=t$. Дифференцируя обе части этого равенства, найдём, чему равно dx, т.е. $7dx=dt\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{7}$.

Тогда $\int\frac{dx}{7x-5}=\int\frac{dt}{7t}=\frac{1}{7}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{7}\ln|t|+C=\frac{1}{7}\ln|7x-5|+C$.

2) $\int\frac{dx}{x^2-6x+13}$.

Решение:

Выделим в знаменателе подынтегрального выражения $x^2-6x+13$ полный квадрат, получим

$x^2-6x+13=x^2-2\cdot3x+3^2-3^2+13=(x-3)^2-9+13=(x-3)^2+4$, тогда

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+4}=\begin{vmatrix}x-3=t\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+C=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x-3)+C.$$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{2t\,dt}{t\sqrt{1-t^2}}=2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=2\arcsin t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

4) $\int\frac{2xdx}{x^4+5}$.

Решение:

$$\int\frac{2xdx}{x^4+5}=\left|\begin{array}{l}x^2=t\\ 2xdx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x^2}{\sqrt{5}}+C.$$

5) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

Решение:

$$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}=\left|\begin{array}{l}1+2\cos x=t\\ -2\sin xdx=dt\\ \sin x\,dx=-\frac{1}{2}t\,dt\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=C-\sqrt{t}=$$

$$=C-\sqrt{1+2\cos x}.$$

6) $\int x^4\left(2x^5-17\right)^9dx.$

Решение:

$$\int x^4\left(2x^5-17\right)^9dx=\left|\begin{array}{l}2x^5-17=t\\ 10x^4dx=dt\\ x^4dx=\frac{1}{10}dt\end{array}\right|=\int t^9\cdot\frac{1}{10}dt=\frac{1}{10}\int t^9dt=\frac{t^{10}}{100}+C=\frac{\left(2x^5-17\right)^{10}}{100}.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\int\cos(2-x)dx$; 2) $\int x^2\sin\left(2x^3-1\right)dx$; 3) $\int e^{\frac{x}{3}-2}dx$;

4) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}dx$; 5) $\int(5x-6)^4dx$; 6) $\int(2-5\sin x)^5\cos xdx$;

7) $\int\frac{dx}{(1-2x)^3}$; 8) $\int\frac{e^xdx}{\left(7e^x-3\right)^6}$; 9) $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{7}}$;

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$; 11) $\int \left(x^3-3\right)^4 x^2\,dx$; 12) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$;

13) $\int \mathrm{tg}x\,dx$; 14) $\int \mathrm{ctg}x\,dx$; 15) $\int e^{x^2-x}(2x-1)dx$;

16) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; 17) $\int \frac{3x^2-7}{x^3-7x+5}dx$; 18) $\int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

19) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; 20) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 21) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$;

22) $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$; 23) $\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$; 24) $\int \cos^5 x\cdot\sin x\,dx$;

25) $\int \cos x\sqrt{\sin x-1}\,dx$; 26) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; 27) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$;

28) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}^2 x}$; 29) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; 30) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$.

2.3. Интегрирование по частям

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы м имеют непрерывную производную на промежутке X. Известно правило дифференцирования произведения двух функций: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Тогда $u\cdot v'=(u\cdot v)'-v\cdot u'$ и $\int u\cdot v'dx=\int (u\cdot v)'dx-\int v\cdot u'dx$. Таким образом,

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\,du \qquad (2.3.1)$$

(произвольная постоянная входит в состав последнего интеграла).

Формула (2.3.1) называется формулой интегрирования по частям. Иногда бывает, что новый интеграл в правой части формулы (2.3.1) проще исходного. При этом надо удачно определить, что взять за u и, соответственно, все остальное за dv.

Необходимо отметить также следующий факт. Несмотря на то, что по дифференциалу $dv=v'dx$ восстанавливается бесконечно много функций, и все они имеют вид $v+A$, постоянная A в конечный результат не входит. Это легко проверить, подставляя $v+A$ в (1), поэтому примем $A=0$.

Укажем некоторые группы интегралов, берущихся с помощью формулы интегрирования по частям.

I группа

Если имеем интегралы вида: $\int P_n(x)\sin ax\,dx$, $\int P_n(x)\cos ax\,dx$, $\int P_n(x)e^{ax}dx$,

$\int P_n(x)b^{ax}dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени *n*, то за функцию u принимаем многочлен $P_n(x)$, за dv – оставшееся выражение. Метод интегрирования применяется *n* раз.

Примеры:

1) $\int x\sin xdx$.

Решение:

Так как данный интеграл относится к группе I, то имеем в предлагаемом интеграле $u(x)=x$; тогда $dv(x)=\sin xdx,\ du(x)=dx, v(x)=\int\sin xdx=-\cos x+C$.

Из всей совокупности полученных функций $v(x)$ выберем какую-нибудь одну; пусть, например, $C=0$. Тогда

$\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

2) $\int x^2e^x\,dx$.

Решение:

Положим $u(x)=x^2$, $dv(x)=e^x dx$. Тогда $du(x)=2xdx$, $v(x)=e^x$. По формуле (1) имеем $\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x dx$. В правой части равенства содержится интеграл, который снова нужно брать по частям. Пусть $u=x$, $dv=e^x dx$.

Тогда $du=dx$, $v(x)=e^x$. По той же формуле (1) получим

$2\int xe^x dx=2(xe^x-\int e^x dx)=2xe^x-2e^x+C$. Поэтому $\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

II группа

Если имеем интегралы вида: $\int P_n(x)\arccos axdx$, $\int P_n(x)\arcsin axdx$

$\int P_n(x)\ln axdx, \int P_n(x)\log_b axdx, \int P_n(x)\mathrm{arctg}\,ax\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,ax\,dx$, то $dv(x)=P_n(x)\,dx$, а за функцию $u(x)$ принимаем оставшуюся функцию $\arccos x$, $\arcsin x$, $\ln x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $\mathrm{arcctg}\,x$. В случае если $P_n(x)=1$, то $dv(x)=dx$.

Пример.

Найти интеграл $\int x\ln x\,dx$.

Решение:

Так как данный интеграл относится к группе II, то $u(x)=\ln x$, тогда

$dv(x)=xdx,\ du(x)=\dfrac{dx}{x},\ v(x)=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}+C$. Из всей совокупности полученных функций $v(x)$ выберем какую-нибудь одну; пусть, например, $C=0$. Тогда

$\int x\ln xdx=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{dx}{x}=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\dfrac{1}{2}\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$.

Иногда удается взять интеграл, комбинируя метод интегрирования подстановкой и по частям.

Пример.

Найти интеграл $\int \cos\sqrt{x}\,dx$.

Решение:

$$\int \cos\sqrt{x}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = 2\int t\cos t dt = \left[u = t, dv = \cos t dt, du = dt, v = \sin t \right] =$$

$$= 2(t\sin t - \int \sin t dt) = 2(t\sin t + \cos t) + C = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}) + C.$$

Обратим также внимание на так называемые циклические интегралы, такие, как $A = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, $B = \int e^{ax}\sin bx\,dx$. После двукратного применения формулы интегрирования по частям они могут быть найдены из алгебраического уравнения. Пусть $dv = e^{ax}dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$. Тогда

$$A = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx +$$

$$+ \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx \right) + C.$$

Приравнивая левую и правую части, получим уравнение относительно интеграла A. Из него находим A, затем B:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + C_1,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + C_2.$$

При вычислении интегралов A и B можно было брать $dv = \cos bxdx$ или $dv = \sin bxdx$.

Аналогично можно найти $\int \sin(\ln x)\,dx, \int \cos(\ln x)dx.$

Пример.

Найти интеграл $\int e^{-x}\cos\frac{1}{2}x\,dx$.

Решение:

Так как под знаком интеграла присутствуют и e^{-x}, и $\cos\frac{1}{2}x$, то, на первый взгляд, можно в качестве u взять любую их этих функций. Пусть, например, $u = e^{-x}$, $dv = \cos\frac{1}{2}xdx$. Тогда $du = -e^{-x}dx$, $v = \int \cos\frac{1}{2}x\,dx = 2\int \cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}$.

По формуле (2.3.1) имеем

$$I=\int e^{-x}\cos\frac{1}{2}x\,dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx. \qquad (2.3.2)$$

Обозначим $I_1=\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx$ и тоже применим к нему интегрирование по частям. Полагая $u=e^{-x}$, $dv=\sin\frac{x}{2}dx$, получим $du=-e^{-x}dx$, $v=\int\sin\frac{x}{2}dx=2\int\sin\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=-2\cos\frac{x}{2}$. Тогда

$$I_1=\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I.$$

Подставляя этот результат в (2.3.2), получим уравнение с неизвестным интегралом I:

$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I\right)$, откуда находим

$5I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}$, $I=\frac{2}{5}e^{-x}\sin\frac{x}{2}-\frac{4}{5}e^{-x}\cos\frac{x}{2}+C$.

Замечание. Если в процессе решения при поиске I_1 выбрать $u=\sin\frac{x}{2}$, $dv=e^{-x}dx$, то получим $du=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, $v=-e^{-x}$, откуда

$$I_1=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I.$$

Тогда, подставляя I_1 в равенство (2), получим бесполезное тождество

$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I\right)$, $\mathbf{O}\equiv\mathbf{O}$.

Таким образом, только при удачном выборе частей и повторном интегрировании по частям из уравнения можно легко найти I.

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\int(x+3)e^{5x}\,dx$;	2) $\int(4x+3)\sin 3x\,dx$;	3) $\int(-5x+2)\cos 7x\,dx$;
4) $\int\mathrm{arctg}\,x\,dx$;	5) $\int\arcsin x\,dx$;	6) $\int(2x-1)\ln x\,dx$;
7) $\int x^2e^{2x}\,dx$;	8) $\int\sin 2x\cdot e^{5x}\,dx$;	9) $\int\cos 3x\cdot e^{4x}\,dx$;
10) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$;	11) $\int\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$;	12) $\int x\ln^2 x\,dx$;
13) $\int x\,tg^2x\,dx$;	14) $\int e^x\sin 3x\,dx$;	15) $\int e^{2x}\cos 5x\,dx$;
16) $\int\log_5 x\,dx$;	17) $\int\mathrm{arctg}\,2x\,dx$;	18) $\int 2^x\sin 2x\,dx$;

19) $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$; 20) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$; 21) $\int\sqrt{x^2+3}\,dx$

22) $\int\sin(\ln x)\,dx$; 23) $\int\cos(\ln x)dx$; 24) $\int e^{2x}\sin 4x\,dx$.

2.4. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

При вычислении интегралов вида $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ главным преобразованием является выделение полного квадрата. Напомним, как это делается:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Затем чаще всего нужно сделать замену переменной $t=x+\frac{b}{2a}$. После этого применяют рассмотренные ранее методы интегрирования и формулы.

Примеры:

1) $$\int\frac{x+3}{x^2+4x-1}dx=\int\frac{x+3}{(x+2)^2-5}dx=\left|\begin{array}{c}x+2=t\\ x=t-2\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{t+1}{t^2-5}dt=\int\frac{t}{t^2-5}dt+\int\frac{dt}{t^2-5}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-5)}{t^2-5}+\int\frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-5\right|+\frac{1}{2\sqrt5}\ln\left|\frac{t-\sqrt5}{t+\sqrt5}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x-1\right|+\frac{1}{2\sqrt5}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt5}{x+2+\sqrt5}\right|+C.$$

2) $$\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{3+2x-x^2}dx$$

Подынтегральная дробь неправильная (то есть степень знаменателя не больше степени числителя). В этом случае выделяют целую часть делением числителя на знаменатель (например, «уголком»):

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{3+2x-x^2}=-x+\frac{4x}{3+2x-x^2};$$

$$\int\left(-x+\frac{4x}{3+2x-x^2}\right)dx=-\int xdx+\int\frac{4xdx}{3+2x-x^2}=-\frac{x^2}{2}+4I,$$

где $I=\int\frac{xdx}{4-(x-1)^2}$. Найдем интеграл I.

$$I=\int\frac{xdx}{4-(x-1)^2}=\left|\begin{matrix}x-1=t\\ x=t+1\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t+1)dt}{4-t^2}=-\int\frac{t+1}{t^2-4}dt=-\int\frac{t}{t^2-4}dt=$$

$$=-\int\frac{1}{t^2-4}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-4)}{t^2-4}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|t^2-4\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|x^2-2x-3\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$

Следовательно, $\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{3+2x-x^2}dx=C-\frac{x^2}{2}-\ln\left|x^2-2x-3\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|.$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-3x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x-x^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}}=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{3}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9}-t^2}}=$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3t}{2}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x-1}{2}+C$.

4) $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx=\int\sqrt{(x-1)^2-2}\,dx=\left|\begin{matrix}x-1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{t^2-2}\,dt=$

$$=\left[u=\sqrt{t^2-2},dv=dt,du=\frac{t}{\sqrt{t^2-2}}dt,v=t\right]=t\sqrt{t^2-2}-\int t\frac{t}{\sqrt{t^2-2}}dt=$$

$$=t\sqrt{t^2-2}-\int\frac{t^2-2+2}{\sqrt{t^2-2}}dt=t\sqrt{t^2-2}-\int\sqrt{t^2-2}\,dt-\int\frac{2}{\sqrt{t^2-2}}dt=\left[I=\int\sqrt{t^2-2}dt\right]=$$

$$=t\sqrt{t^2-2}-I-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|.$$

Получаем уравнение $I=t\sqrt{t^2-2}-I-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|.$

$$2I=t\sqrt{t^2-2}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+2C.$$

$$I=\frac{t}{2}\sqrt{t^2-2}-\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+C.$$

С учетом того, что $t=x-1$, получаем

$$I=\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C.$$

Отметим, что выражения, содержащие $\sqrt{a^2-x^2}$ или $\sqrt{x^2+a^2}$, можно интегрировать и с помощью так называемых тригонометрических подстановок. Если содержится $\sqrt{a^2-x^2}$, то применяется подстановка $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$; если содержится $\sqrt{x^2+a^2}$, то делают подстановку $x=a\cdot tgt$ или

$x = a \cdot ctgt$; если же содержится $\sqrt{x^2 + a^2}$, то используют $x = \dfrac{a}{\sin t}$ или $x = \dfrac{a}{\cos t}$. Рассмотрим применение одной из этих подстановок в следующем примере.

4) $\int \sqrt{21 + 4x - x^2}\, dx = \int \sqrt{25 - (x-2)^2}\, dx = \left| \begin{matrix} x - 2 = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{25 - t^2}\, dt.$

Применим тригонометрическую подстановку $t = 5\sin z$, $dt = 5\cos z dz$.

$$\int \sqrt{25 - t^2}\, dt = \int \sqrt{25 - 25\sin^2 z} \cdot 5\cos z dz = 25\int \cos^2 z dz = 25\int \frac{1 + \cos 2z}{2} dz = \frac{25}{2}\int dz +$$

$$+ \frac{25}{2}\int \cos 2z dz = \frac{25}{2}\int dz + \frac{25}{4}\int \cos 2z d(2z) = \frac{25}{2} z + \frac{25}{4}\sin 2z + C = I.$$

Перейдем к старым переменным $\sin z = \dfrac{t}{5}$, $z = \arcsin\dfrac{t}{5}$.

$\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z = 2\sin z\sqrt{1 - \sin^2 z} = 2\dfrac{t}{5}\sqrt{1 - \dfrac{t^2}{25}}$. Тогда

$$I = \frac{25}{2}\arcsin\frac{t}{5} + \frac{5}{2}t\sqrt{1 - \frac{t^2}{25}} + C.$$

Учитывая, что $t = x - 2$, получаем

$$I = \frac{25}{2}\arcsin\frac{x-2}{5} + \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{21 + 4x - x^2} + C.$$

Если интеграл $\int f(x)dx$ выражается в конечном виде через элементарные функции, то он называется *берущимся* интегралом, в противном случае - *неберущимся*. К числу неберущихся интегралов относятся, например, $\int e^{x^2} dx$; $\int e^{-x^2} dx$; $\int \sin(x^2) dx$; $\int \cos(x^2) dx$; $\int \dfrac{\sin x}{x} dx$; $\int \dfrac{\cos x}{x} dx$; $\int \dfrac{e^x}{x} dx$; $\int \dfrac{dx}{\ln x}$ и др. Первообразные для подынтегральных функций неберущихся интегралов не являются элементарными функциями; это некие новые функции, которые реально существуют и играют важную роль в соответствующих приложениях.

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\int \dfrac{2x - 3}{x^2 + 2x + 5} dx$; 2) $\int \dfrac{xdx}{9 + 8x - x^2}$; 3) $\int \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3x} dx$;

4) $\int \dfrac{4dx}{3x^2 + 8x - 2}$; 5) $\int \dfrac{1 + x}{x - x^2} dx$; 6) $\int \dfrac{x^2 + 4x - 2}{x^2 + 3x - 4} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}$; 8) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$; 9) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

10) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$; 11) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 12) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$;

13) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x}}dx$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}}$; 15) $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$;

16) $\int \sqrt{x^2+4x}\,dx$; 17) $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$; 18) $\int \frac{4x-5}{x^2+5}dx$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

22) $\int \sqrt{x^2+6x}\,dx$; 23) $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$; 24) $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$.

2.5. Интегрирование рациональных выражений

Дробно-рациональная функция $\frac{Q(x)}{P(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, называется правильной рациональной дробью, если степень числителя меньше степени знаменателя; старший коэффициент у $P(x)$ будем считать равным единице $(c_0=1)$ - его всегда можно отнести к числителю $Q(x)$.

1. Основная **теорема** о разложении правильных дробей на простейшие. *Пусть многочлен* $P(x)$ *степени* n *имеет разложение:*

$$P(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^{\lambda}\cdot(x^2+rx+s)^{\mu}\ldots$$

Тогда правильная дробь $\frac{Q(x)}{P(x)}$ может быть однозначно разложена на сумму простейших дробей по формуле

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}+\ldots+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{R_1x+S_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\ldots, \qquad (2.5.1)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}, B_1, B_2, \ldots B_{\beta}, M_1, \ldots, M_{\lambda}, N_1, \ldots N_{\lambda}, R_1, \ldots, R_{\lambda}, S_1, \ldots S_{\mu}, \ldots$ - действительные числа; их столько же, какова степень многочлена $P(x)$.

Дроби входящие в это разложение, называются простейшими или элементарными рациональными дробями, поскольку на более простые дроби их разложить невозможно.

Этапы разложения дробей:

1. Если дробь $\frac{E(x)}{P(x)}$ неправильная (степень числителя больше или равна степени знаменателя), выделим целую часть делением числителя на знаменатель, представим неправильную дробь в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби $\frac{E(x)}{P(x)} = R(x) + \frac{Q(x)}{P(x)}$. Следующие пункты алгоритма посвящены разложению правильной дроби.
2. Разложить знаменатель дроби на простейшие множители вида $(x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + px + q\right)^{\gamma}$, где корни трехчлена комплексные.
3. Представить дробь в виде суммы простейших дробей, в знаменателях которых стоят всевозможные множители знаменателя, а в числителях соответствующей степени многочлены с неопределенными коэффициентами. При этом множителю знаменателя кратности k будут

соответствовать k простейших дробей, в знаменателях которых будут все степени множителя.

Проверка. Число неопределенных коэффициентов должно равняться степени многочлена в знаменателе исходной дроби.

Для фактического вычисления коэффициентов в этом разложении обычно применяют метод неопределенных коэффициентов. Он состоит в следующем:

а) пусть дана правильная рациональная дробь $\frac{Q(x)}{P(x)}$. Знаменатель этой дроби разлагаем на простые действительные множители и по виду этого разложения пишем для данной дроби разложение с неопределенными коэффициентами (2.5.1);

б) в правой части этого разложения приводим простые дроби к общему знаменателю, которым будет $P(x)$, складываем их, после чего знаменатель $P(x)$ в левой и правой частях отбрасываем. Получим тождество (2.5.2), в левой части которого многочлен $Q(x)$, а в правой многочлен с неопределенными коэффициентами $Q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$; (2.5.2)

в) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (2.5.2), получаем систему из n уравнений с n неизвестными. Решив её, найдем искомые коэффициенты.

Примеры:

1) $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx$

Решение:

Данная подынтегральная дробь - правильная. Раскладываем её знаменатель на простые множители. Знаменатель имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$, значит

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$.

Запишем разложение подынтегральной дроби с неопределенными коэффициентами $\dfrac{x-1}{x^2+x-6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+3}$. (2.5.3)

Дроби приводим к общему знаменателю и, освободившись от него, находим:

$$x-1=A(x+3)+B(x-2)=(A+B)x+3A-2B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{array}{c|c} x & A+B=1 \\ x^0 & 3A-2B=-1, \end{array}$$

откуда $A=\dfrac{1}{5}$, $B=\dfrac{4}{5}$.

Подставляя найденные коэффициенты в равенство (3), получаем искомое разложение

$$\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{\frac{1}{5}}{x-2}+\frac{\frac{4}{5}}{x+3}.$$

Следовательно

$$\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx=\int\frac{\frac{1}{5}}{x-2}dx+\int\frac{\frac{4}{5}}{x+3}dx=\frac{1}{5}\ln|x-2|+\frac{4}{5}\ln|x+3|+\ln C=\ln\left|C\sqrt[5]{(x-2)(x+3)^4}\right|.$$

2) $\displaystyle\int\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}dx$

Решение:

Разложим знаменатель дроби на простые множители. Заметим, что $x=2$ - корень знаменателя, поэтому разделив x^3-3x^2+4 на $x-2$, получим $x^3-3x^2+4=(x-2)(x^2-x-2)$. Трехчлен x^2-x-2 имеет корни $x=2$ и $x=-1$.

Поэтому окончательно имеем $x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1)$.

Запишем разложение подынтегральной дроби

$$\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{B}{x+1}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю и, освободившись от него, находим:

$$2x-5=A_1(x-2)(x+1)+A_2(x+1)+B(x-2)^2=(A_1+B)x^2+(A_2-A_1-4B)x+$$
$$+A_2-2A_1+4B.$$

Из этого тождества определяем A_1, A_2, B, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A_1+B=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x & A_2 - A_1 - 4B = 2 \\ x^0 & A_2 - 2A_1 + 4B = -5, \end{array}$$

откуда $A_1 = \dfrac{7}{9}$, $A_2 = -\dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{7}{9}$. Окончательно имеем

$$\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4} = \frac{7}{9(x-2)} - \frac{1}{3(x-2)^2} - \frac{7}{9(x+1)}.$$

Следовательно $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}dx = \frac{7}{9}\int\frac{dx}{(x-2)} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{7}{9}\int\frac{dx}{(x+1)} =$

$$= \frac{7}{9}\ln|x-2| + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{7}{9}\ln|x+1| + C = \frac{1}{3(x-2)} + \frac{7}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$

Решение:

Подынтегральная дробь неправильная. Выделим целую часть

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8} = 1 - \frac{x^2+3}{x^3-8}.$$

Разложим знаменатель дроби на простые множители:

$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4).$$

Запишем разложение $\dfrac{x^2+3}{x^3-8} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}$.

Откуда $x^2+3 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2) = (A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + 4A-2C.$

Напишем систему уравнений

$$\begin{array}{l|r} x^2 & A+B=1 \\ x & 2A-2B+C=0 \\ x^0 & 4A-2C=3, \end{array}$$

откуда $A = \dfrac{7}{12}$, $B = \dfrac{5}{12}$, $C = -\dfrac{1}{3}$.

Окончательно получим

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8} = 1 + \frac{7}{12(x-2)} + \frac{5x-4}{12(x^2+2x+4)}.$$

Следовательно, $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx = \int dx + \frac{7}{12}\int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{1}{12}\int \frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx =$

$$= x + \frac{7}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{12}I; \qquad (2.5.4)$$

$$I = \int \frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx = \int \frac{5x-4}{(x+1)^2+3}dx = \left| \begin{array}{c} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{5t-9}{t^2+3}dt = \int \frac{5t}{t^2+3}dt - \int \frac{9}{t^2+3}dt =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left(t^2+3\right) - \frac{9}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + C_1 = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) - 3\sqrt{3}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Подставляя значение I в равенство (2.5.4), получим

$$\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx = x + \frac{7}{12}\ln|x-2| + \frac{5}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

4) $\int \frac{x+3}{x^2(x+2)}dx$

Решение:

Подынтегральная дробь правильная, и знаменатель уже разложен на простые множители. Запишем разложение подынтегральной дроби на простейшие

$$\frac{x+3}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}. \qquad (2.5.5)$$

<u>Замечание.</u> Множитель x^k в знаменателе часто вызывает затруднения при разложении дроби на простейшие. Обращаем внимание, что в этом случае надо поступать, как с множителем $(x-a)^k$, считая, что $a=0$. Так как множитель $(x-a)^k$ в знаменателе дает при разложении k штук дробей вида $\frac{A_i}{(x-a)^i}$, $i=\overline{1,k}$, то и множитель x^k даст k штук дробей вида $\frac{A_i}{x^i}$, $i=\overline{1,k}$.

Теперь приведем правую часть (2.5.5) к общему знаменателю и затем отбросим знаменатели

$$x+3 = Ax^2 + Bx(x+2) + C(x+2) = (A+B)x^2 + (2B+C)x + 2C.$$

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B=0 \\ x & 2B+C=1 \\ x^0 & 2C=3, \end{array}$$

откуда $A=\dfrac{1}{4}$, $B=-\dfrac{1}{4}$, $C=\dfrac{3}{2}$. Тогда получим

$$\frac{x+3}{x^2(x+2)}=\frac{1}{4(x+2)}-\frac{1}{4x}+\frac{3}{2x^2}.$$

Значит $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2(x+2)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d(x+2)}{x+2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int x^{-2}dx=$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{3}{2x}+C.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-2x}$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-x^2}$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+4x}$;

4) $\displaystyle\int\frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$; 5) $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}$; 6) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}$;

7) $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+3x-4}dx$; 8) $\displaystyle\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; 9) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+x^2}$;

10) $\displaystyle\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$; 11) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-4x+9}$; 12) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

13) $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2}dx$; 14) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x+1)^4}dx$; 15) $\displaystyle\int\frac{4x+1}{2x^3+x^2-x}$;

16) $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1}dx$; 17) $\displaystyle\int\frac{xdx}{2x^2-6x+5}$; 18) $\displaystyle\int\frac{3x+1}{(x^2-1)(x+2)}dx$;

19) $\displaystyle\int\frac{x^5+1}{x^3-x^2}dx$; 20) $\displaystyle\int\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1}dx$; 21) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2+1}$;

22) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^3-2x^2+5x}dx$; 23) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-4x+4}$; 24) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x(x+1)^2}$.

2.6. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Интегралы вида $\displaystyle\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{s}{t}}\right]dx$, (2.6.1)

где R - рациональная функция, $p,q,\dots,s,t$ - целые числа, находятся с помощью подстановки $t=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, где m - наименьшее общее кратное чисел $q,\dots,t$.

Рассмотрим два частных случая:

1) если в интеграле (2.6.1) $c=0$, то он будет иметь вид

$$\int R\left[x,(\alpha x+\beta)^{\frac{p}{q}},\ldots,(\alpha x+\beta)^{\frac{s}{t}}\right]dx, \text{ где } \alpha=\frac{a}{d},\ \beta=\frac{b}{a}; \tag{2.6.2}$$

2) если $b=c=0$, $a=d=1$, то интеграл (1) примет вид

$$\int R\left[x, x^{\frac{p}{q}},\ldots, x^{\frac{s}{t}}\right]dx. \tag{2.6.3}$$

Интегралы вида (2.6.2) или (2.6.3) находятся с помощью подстановки $t=\sqrt[m]{\alpha x+\beta}$ или $t=\sqrt[m]{x}$.

Примеры:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx$.

Решение:

Это интеграл вида (2.6.1). Применим подстановку $t=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$, откуда

$x=\frac{t^2}{t^2-1}$, $dx=\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$. Тогда $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx$

$$=-\int \frac{t\left(t^2-1\right)^2 2t}{t^4\left(t^2-1\right)^2}dt==-\int \frac{2}{t^2}dt=-2\int t^{-2}dt=\frac{2}{t}+C=2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C.$$

2) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Решение:

Это интеграл вида (2.6.2). Наименьшее кратное показателей корней подынтегрального выражения $m=6$, следовательно применим подстановку $t=\sqrt[6]{1+x}$, откуда $x=t^6-1,\ dx=6t^5dt$.

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt=6\int\left(t^9-t^3+t^6\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{7}\right)+C=6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1+x}{10}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}\right)+C.$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Решение:

Это интеграл вида (2.6.3). Применим подстановку $t=\sqrt[4]{x}$, откуда $x=t^4$, $dx=4t^3dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^2dt}{t+1} = 4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1)\right) + C = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + \ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + C.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x}$; 2) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$; 3) $\int \sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx$;

4) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$;

7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; 9) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$;

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 11) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$; 12) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$;

13) $\int \frac{3x+7-\sqrt{5-x}}{3\sqrt{5-x}+4}dx$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-4}+\sqrt{3x-4}}$; 15) $\int \frac{x}{\sqrt{x}-4}dx$.

2.7. Интегрирование тригонометрических выражений

1. Интегралы вида $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$ $(a \neq b)$ находятся с помощью формул

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right]$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right]$$

Пример:

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(5-3)x + \sin(5+3)x\right]dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{2} \cdot d(2x) + \frac{1}{2}\int \frac{\sin 8x}{8} \cdot d(8x) = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

2. Интегралы вида $\int \sin^{2n+1} x dx$, $\int \cos^{2n+1} x dx$, n - натуральное число берутся внесением под дифференциал (или заменой переменной) множителя $\sin x$ или $\cos x$.

Примеры:

1) $\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right) d(\cos x) =$

$= -\int \left(1-2\cos^2 x + \cos^4 x\right) d(\cos x) = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^2 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$;

2) $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x) =$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

3.Для вычисления интегралов вида $\int \sin^{2n} x dx$, $\int \cos^{2n} x dx$ удобно пользоваться формулами $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, затем заменять переменную (или вносить под дифференциал).

Пример:

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{2} d(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Здесь формула понижения степени использовалась дважды.

4. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ легко вычисляются, если хотя бы одно из чисел m и n целое нечетное; другое при этом может быть и нецелым.

а) пусть n - нечетное, $n = 2k+1$. Имеем $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx =$

$= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^k d(\sin x)$;

б) если m - нечетное, $m = 2l+1$, то получим

$\int \sin^{2l+1} x \cos^n x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^n x d\left(\cos x\right).$

В обоих случаях идея состояла в том, чтобы функцию $\sin x$ или $\cos x$ подвести под знак дифференциала.

в) оба числа m и n - четные неотрицательные, $n = 2k$, $m = 2l$. Тогда под знаком интеграла находится тригонометрический многочлен степени $n = 2(k+l)$; её можно уменьшить вдвое, используя формулы понижения степени.

$\int \sin^{2l} x \cos^{2k} x dx = \int \frac{1}{2^{k+l}}(1-\cos 2x)^l \cdot (1+\cos 2x)^k dx$ - под знаком интеграла получили многочлен степени $(k+l)$. Здесь могут снова представиться все три случая а), б), в).

г) если m и n - оба четные и хотя бы одно из них отрицательное, то может быть удобна подстановка $tgx=t$ или $ctgx=t$ как результат подведения под дифференциал:

$$\frac{dx}{\cos^2 x}=d(tgx),\ \frac{dx}{\sin^2 x}=-d(ctgx).$$

Примеры:

1) $\int\left(\sqrt{\sin x}\right)^{-1}\cos^3 xdx=\int\left(\sqrt{\sin x}\right)^{-1}\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)=2\sqrt{\sin x}-\frac{2}{5}\left(\sqrt{\sin x}\right)^5+C$;

2) $\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$;

3) $\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\left(\int\sin x\cos x\right)^2\cdot\cos^2 xdx=\int\frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+\cos 2x)dx=$

$=\frac{1}{16}\int\left[(1-\cos 4x)+2\sin^2 2x\cos 2x\right]dx=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=$

$=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C$;

4) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\left(1+tg^2 x\right)d(tgx)=tgx+\frac{1}{3}tg^3 x+C$.

5. Интеграл $\int\sin^m x\cos^n xdx$, где m и n - рациональные числа, с помощью подстановки $t=\sin x$ или $t=\cos x$ сводится к интегралу от дифференциального бинома и в зависимости от структуры последнего берется или нет (см.теорему Чебышева, [7]).

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\int\sin 6x\cos xdx$; 2) $\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$; 3) $\int\sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$;

4) $\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$; 5) $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$; 6) $\int\sin^3 x\cos^2 xdx$.

7) $\int\sin 6x\sin 4xdx$; 8) $\int\frac{1+\cos x}{\sin^3 x}dx$; 9) $\int\cos^3 x\sqrt{\sin x}dx$;

10) $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$; 11) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^4 x}dx$; 12) $\int\frac{dx}{\sin x}$;

13) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x\cos^2 3x}$; 14) $\int\frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$; 15) $\int\frac{dx}{\sin^5 x}$.

16) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$; 17) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$; 18) $\int\sin^5 x\cos^2 xdx$.

3. Определённый интеграл

3.1. Задача о площади криволинейной трапеции

Будем рассматривать непрерывную в каждой точке промежутка $x \in [a, b]$ функцию $y = f(x)$ такую, что $f(x) \geq 0$. Поставим задачу: вычислить площадь криволинейной трапеции *ABCD* (см. рис. 1). Для этой цели разобьем произвольно промежуток $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

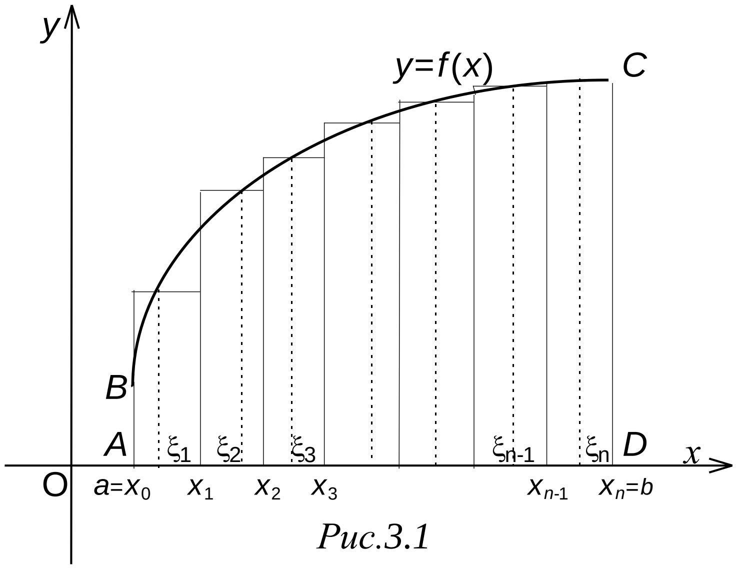

Рис.3.1

На каждом интервале (x_{k-1}, x_k) выберем произвольную точку ξ_k и рассмотрим прямоугольники, образуемые интервалами (x_{k-1}, x_k) по оси Ox и $(0, f(\xi_k))$ по оси Oy. Фигуру, образованную совокупностью таких прямоугольников, будем называть ступенчатой фигурой.

Обозначим λ длину самого большого из промежутков (x_{k-1}, x_k) и будем называть её мелкостью разбиения отрезка $[a, b]$. Очевидно, что чем меньше λ, тем больше площадь ступенчатой фигуры близка к площади криволинейной трапеции *ABCD.* А именно:

$$S_{ABCD} \approx S_{\text{ст.фиг.}} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Отметим, что суммы, образующиеся в данном соотношении, называются интегральными суммами.

Пусть мелкость разбиения $\lambda \to 0$. Тогда можно показать, что

$$S_{ABCD} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

3.2. Понятие определённого интеграла

Определение 1.Пусть $y = f(x)$ – произвольная, непрерывная в каждой точке промежутка $x \in [a,b]$ функция. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ называется **определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$.
Число a называют нижним пределом интегрирования, b - верхним пределом интегрирования. Знак $\int$ ввел Готфрид Вильгельм Лейбниц – это стилизованная буква *S*, начальная буква от латинского *Summa*. Окончательное обозначение $\int\limits_a^b f(x)dx$ ввел французский математик и физик Жозеф Фурье (1768-1830).

Заметим, что, в отличие от неопределённого интеграла определенный интеграл по определению является числом.
Теорема 1. (необходимое условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем.
Доказательство её можно найти, например, в [7].
Теорема 2.(достаточные условия существования определенного интеграла).

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема.
2. Если функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема.
3. Монотонные ограниченные функции интегрируемы.

Легко видеть, что изменение интегрируемой функции в конечном числе точек не изменяет значения интеграла, поэтому неважно, определена функция в этих точках или нет. Так, существует, как обычный, определенный интеграл от ограниченной функции $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.
Для вычисления определенного интеграла от функции $y = f(x)$служит ***формула Ньютона-Лейбница***:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $y = F(x)$ – любая из первообразных функции $y = f(x)$.
Таким образом, для того, чтобы вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$, необходимо найти любую первообразную функцию и вычислить разность её значений в верхнем и нижнем пределах интегрирования.

3.3.Некоторые свойства определённого интеграла

1) $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx,\ k - const;$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,\ c - const.$

Пример:

Вычислить определенные интегралы а) $\int\limits_1^2 \left(x^3 + x - 2\right)dx$; б) $\int\limits_1^2 (3x-2)^3 dx$.

Решение:

а) По формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int\limits_1^2 \left(x^3 + x - 2\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{1}{4}2^4 + \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^3 + \frac{1^2}{2} - 2\cdot 1\right) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

б) Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки

$3x - 2 = t \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$. Находим новые пределы интегрирования.

Подставляя в соотношение $3x - 2 = t$ значения $x_н = 1$ и $x_в = 2$, соответственно, получим $t_н = 3\cdot 1 - 2 = 1$ и $t_в = 3\cdot 2 - 2 = 4$.

Следовательно, $\int\limits_1^2 (3x-2)^3 dx = \frac{1}{3}\int\limits_1^4 t^3 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_1^4 = \frac{1}{12}\left(4^4 - 1^4\right) = 15.$

Примеры для самостоятельного решения:

1) $\int\limits_1^2 \left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)dx$;

2) $\int\limits_1^4 \left(2\sqrt{x} - 4x^3 + 3\right)dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x\right)dx$;

4) $\int\limits_0^1 \left(4^x - 2\right)dx$;

5) $\int\limits_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2}\right)dx$;

6) $\int\limits_{-1}^3 \left(\frac{2}{x} - x^2\right)dx$;

7) $\int\limits_{-2}^{3}\left(3e^{x}-5\right)dx$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{ctgx}{\sin^{2}x}dx$;

9) $\int\limits_{0}^{3}e^{\frac{x^2}{2}}x\,dx$; 10) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos x\,dx$;

11) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^{3}x\cdot\cos x\,dx$; 12) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)^{7}dx$;

13) $\int\limits_{e}^{e^3}\frac{\ln^{2}x}{x}dx$; 14) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^{3}x}dx$;

15) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{0}(2-4x)^{3}dx$; 16) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg}^{2}x}{1+x^{2}}dx$

3.4. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на промежутке $[\alpha;\beta]$, причем $\varphi(\alpha)a, \varphi(\beta)=b,$ сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на промежутке $[\alpha;\beta]$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (3.4.1)$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=F(x)\Big|_{a}^{b}=F(b)-F(a).$$

С другой стороны, функция $F(\varphi(t))$ есть первообразная для непрерывной на $[\alpha;\beta]$ функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, так как

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Сравнивая этот результат с формулой Ньютона-Лейбница, убеждаемся в справедливости равенства (1).

Замечание 1. Преимущество перед соответствующим методом для неопределенного интеграла в том, что здесь не требуется возвращаться к старой переменной. Вычислив интеграл в правой части равенства (1), мы тем самым вычислим интеграл в левой части. На символ dx можно смотреть как на дифференциал функции $x=\varphi(t)$, именно, $dx=\varphi'(t)dt.$ Поэтому формула (1) вполне естественно запоминается.

Замечание 2. Новые пределы интегрирования найдутся из уравнений $\varphi(t)=a, \varphi(t)=b.$

Замечание 3. Требование "сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на промежутке $[\alpha;\beta]$ " не лишнее, так как значения промежуточного аргумента $x=\varphi(t)$ могут выходить за пределы $[a;b]$. Пусть они образуют промежуток $[A,B]\supset[a;b]$. Тогда данное требование есть требование непрерывности $f(x)$ на $[a;b]$. Но это условие можно заменить менее общим: потребовать, чтобы значения $x=\varphi(t)\in[a;b]$, в частности, чтобы $x=\varphi(t)$ была монотонной.

3.5. Применение определенного интеграла

3.5.1. Площадь плоской фигуры

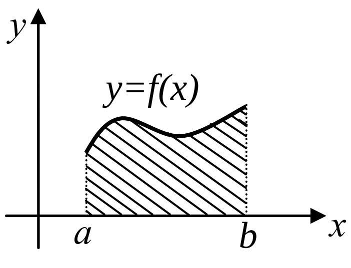

Рис.3

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ (см. рис. 3). Тогда площадь фигуры, ограниченной непрерывной функцией $y = f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком оси Ox, вычисляется по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$.

Если функция меняет знак, то получим только алгебраическую сумму площадей, в которой площади под осью Ox имеют знак минус. Чтобы получить саму площадь, надо устранить влияние знака функции $y = f(x)$, и получим

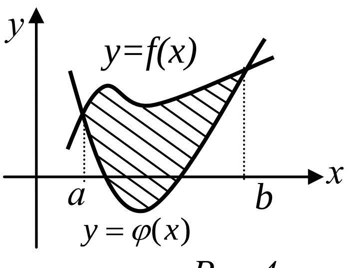

Рис.4

$S=\int_a^b |f(x)|dx.$ А площадь криволинейной фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f(x)$ и $y=\varphi(x)$, где $f(x)\ge\varphi(x)$ и a, b-абсциссы точек пересечения данных кривых (см. рис. 4), вычисляется по формуле $S=\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]\cdot dx$.

Пример.
Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y=x-1$ и параболой $y=-x^2+1$

Решение:

1. Построим на плоскости заданные линии:

А) Для построения прямой $y=x-1$, зададим значения для переменной x и найдем соответствующие ей значения переменной y

x	0	1
y	–1	0

Следовательно, прямая проходит через точки (0; –1) и (1; 0).

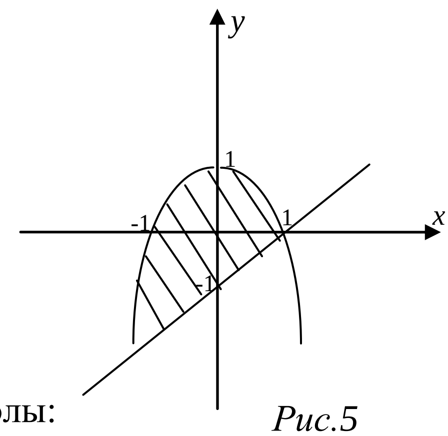

Рис.5

Б) Для построения параболы найдем точки

пересечения ее с осями координат и вершину параболы:

Пересечение с осью Ox, значит $y=0$, то есть $-x^2+1=0$. Решая данное уравнение, получаем $x=1$ и $x=-1$.

Пересечение с осью Oy, значит $x=0$, то есть $y(0)=-0^2+1=1$, получили точку (0; 1), которая совпала в нашем случае с вершиной параболы.

2) Площадь фигуры, ограниченной сверху и снизу непрерывными линиями $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, пресекающимися в точках с абсциссами $x=a$ и $x=b$, определяется по формуле $S=\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]\cdot dx$

Для нахождения точек пересечения линий решаем систему уравнений $\begin{cases} y=x-1, \\ y=-x^2+1. \end{cases}$

Приравняем правые части данных уравнений $-x^2+1=x-1$. Перенесем слагаемые из правой части в левую и приведем подобные, получим $-x^2-x+2=0$. Умножим данное уравнение на (–1), получим $x^2+x-2=0$. Решая данное уравнение, найдем корни $x=-2$ и $x=1$.

Площадь искомой фигуры равна

$$S=\int_{-2}^{1}\left(-x^2+1-(x-1)\right)\cdot dx=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$=-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2\cdot(-2)\right)=4{,}5$$

Задачи для самостоятельного решения:

1.Вычислить площади фигур ограниченных указанными линиями:

1) $y=4-x^2$ и $y=-5$;
2) $y=x^2$ и $y=\frac{x^3}{2}$;
3) $y=-\frac{5}{x}$ и $y=x-6$;
4) $y=\frac{2}{x}$ и $y=3-x$;
5) $y=x^2-4x$ и $y=0$;
6) $y=x^2+4x$ и $y=x+4$.

2. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\frac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=3$, $y=0$.

3. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$.

4. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=e$, $y=0$.

5. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$.

6. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\frac{1}{x^2}$, $x=2$, $x=3$, $y=0$.

7.Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1$, $y=0$.

8. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt[4]{x}$, $x=16$, $y=0$.

9. Найти площадь, ограниченную кривыми $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=x^3$ ($x\geq 0$).

10. Найти площадь фигуры, образуемой линиями $y=\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq \pi$.

11. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$.

12. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=e$, $y=0$.

13. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$.

14. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\frac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=3$, $y=0$.

15. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt[4]{x}$, $x=16$, $y=0$.

16. Найти площадь, ограниченную кривыми $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=x^3$ ($x\geq 0$).

17. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt[4]{x}$, $x=81$, $y=0$.

18.Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$.

19.Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\frac{1}{x}$, $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

20. Найти площадь фигуры, образуемую кривыми $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27$, $y=0$.

3.5.2. Вычисление объемов тел вращения

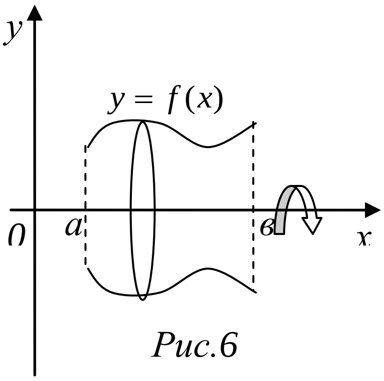

Рис.6

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $y=f(x)$. Тогда объем тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ вычисляется по формуле

$$V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

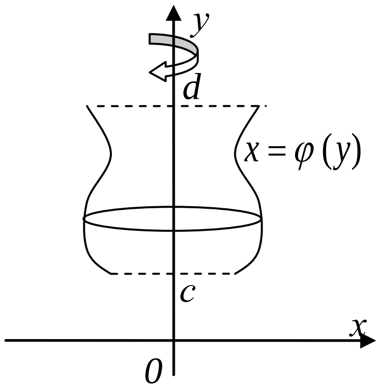

Рис.7

Пусть на отрезке $[c;d]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $x=\varphi(y)$. Тогда объем тела, образованного при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=\varphi(y)$, $x=0$, $y=c$, $y=d$ вычисляется по формуле

$$V_{Oy}=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy.$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ вокруг оси*Ox*.

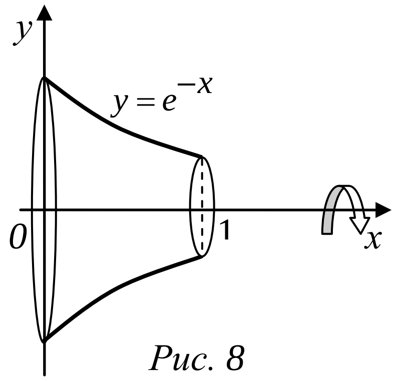

Рис. 8

Решение:

Применим формулу $V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$,

тогда искомый объем равен

$$V_{Ox}=\pi\int_0^1\left(e^{-x}\right)^2dx=\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^1\approx 1{,}36.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Вычислить объем тела вращения вокруг оси Ox, ограниченного кривой $y=\sin x$ в пределах $A(0;0)$ и $B\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

2. Вычислить объем тела вращения вокруг оси Ox, ограниченного кривой $y=\cos x$ в пределах $A\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ и $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

3. Вычислить объем тела вращения вокруг оси Ox и оси Oy, ограниченного дугой параболы $y=3-x^2$ расположенной в первой четверти.

4. Вычислить объем тела вращения вокруг оси Ox и оси Oy, ограниченного дугой гиперболы $y=\frac{3}{x}$ в пределах $A(1;3)$ и $B(3;1)$.

5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной заданными кривыми и осью Ox.

5.1. $y=2x^2;\quad y=-2x+4.$ 5.2. $y=x^2;\quad y=-x+2.$

5.3. $y=3x^2;\quad y=-x+4.$ 5.4. $y=\frac{1}{4}x^2;\quad y=-x+3.$

5.5. $y=\frac{1}{2}x^2;\quad y=-3x+8.$ 5.6. $y=\frac{1}{3}x^2;\quad y=-3x+12.$

5.7. $y=4x^2;\quad y=-2x+2.$ 5.8. $y=\frac{1}{4}x^2;\quad y=-\frac{1}{2}x+2.$

5.9. $y=4x^2;\quad y=-2x+6.$ 5.10. $y=x^2;\quad y=-x+3.$

5.11. $y=2x^2;\quad y=-3x+14.$ 5.12. $y=\frac{1}{3}x^2;\quad y=-x+6.$

5.13. $y=3x^2;\quad y=-2x+5.$ 5.14. $y=\frac{1}{3}x^2;\quad y=-2x+9.$

5.15. $y=\frac{1}{4}x^2;\quad y=-2x+6.$ 5.16. $y=2x^2;\quad y=-x+10.$

5.17. $y=3x^2;\quad y=-3x+6.$ 5.18. $y=x^2;\quad y=-2x+5.$

5.19. $y=\frac{1}{2}x^2;\quad y=-x+3.$ 5.20. $y=3x^2;\quad y=-5x+8.$

6. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных

графиками функций. Ось вращения Oy.

6.1. $y = \arccos\left(\frac{x}{3}\right)$; $y = \arccos x$; $y = 0.$

6.2. $y = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$; $y = \arcsin x$; $y = \frac{\pi}{2}.$

6.3. $y = x^2 + 1,$ $y = x$, $x = 0,$ $y = 0.$

6.4. $y = \sqrt{x-1},$ $y = 0$, $x = 0{,}5,$ $y = 1.$

6.5. $y = \ln x,$ $x = 2,$ $y = 0.$

6.6. $y = (x-1)^2,$ $y = 1$

6.7. $y^2 = x - 2,$ $y = 0$, $y = x^3,$ $y = 1.$

6.8. $y = x^3,$ $y = x^2.$

6.9. $y = \arccos\left(\frac{x}{3}\right)$; $y = \arccos\left(\frac{x}{5}\right)$; $y = 0.$

6.10. $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = 0.$

6.11. $y = x^2 - 2x + 1,$ $x = 2$; $y = 0.$

6.12. $y = x^3,$ $y = x.$

6.13. $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $x = 0.$

3.5.3. Длина дуги кривой

Если функция $y = f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на промежутке $(a;b)$, то длина дуги выражается формулой $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

Пример. Найти длину дуги кривой $y = 2x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 11$.

Решение.

Для вычисления длины дуги кривой, заданной в декартовых координатах, найдем производную. $y' = \left(2x^{\frac{3}{2}}\right)' = 3x^{\frac{1}{2}}$.

Поэтому искомая длина дуги равна

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_0^{11} \sqrt{1 + \left[3x^{\frac{1}{2}}\right]^2}\, dx = \int_0^{11} \sqrt{1+9x}\, dx = \frac{1}{9}\int_0^{11} \sqrt{1+9x}\, d(1+9x) = \frac{2}{9}\frac{(1+9x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{11} =$$

$$=\frac{2}{27}\cdot\left(100^{\frac{3}{2}}-1\right)=74.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найти длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$; $0\le x\le 12$.

2.Найти длину дуги кривой $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$; $0\le x\le\frac{7}{9}$.

3. Найти длину дуги кривой $y=4-\frac{x^2}{2}$; $0\le x\le 2\sqrt{2}$.

4.Найти длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$; $0\le x\le 1$.

5. Найти длину дуги кривой $y=1-\ln\sin x$; $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

6.Найти длину дуги кривой $y=\frac{1-e^x-e^{-x}}{2}$; $0\le x\le 3$.

7.Найти длину дуги кривой $y=\sqrt{2x-x^2}-1$; $\frac{1}{4}\le x\le 1$.

8.Найти длину дуги $y=\ln\cos x$; $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

9.Найти длину дуги $y=e^x+13$; $\ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$.

10.Найти длину дуги $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+3$; $0\le x\le 2$.

11.Найти длину дуги $y=\frac{x^2}{2}-1$; $0\le x\le\sqrt{2}$.

12.Найти длину дуги $y=\ln\sin x$; $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

13.Найти длину дуги $y=2-e^x$; $\ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$.

14.Найти длину дуги $y=1-\ln\sin x$; $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

15.Найти длину дуги $y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}+3}{4}$; $0\le x\le 2$.

16.Найти длину дуги $y=\ln\left(1-x^2\right)$; $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$.

17.Найти длину дуги $y=\frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$; $0\le x\le 1$.

18.Найти длину дуги $y=e^x+6$; $\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$.

4. Вопросы для самоконтроля

1. Интегральное исчисление. Первообразная. Неопределённый интеграл.
2. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.
3. Классы интегрируемых функций.
4.Четыре свойства и таблица интегралов. Неберущиеся интегралы.
5. Замена переменного. Подведение под знак дифференциала.
6. Интегрирование по частям.
7. Интегрирование дробно-рациональной функции.
8. Некоторые замены в интегралах от тригонометрических функций.
9. Некоторые замены в интегралах отпростейших иррациональностей.
10. Определённый интеграл: площадь криволинейной трапеции и определение определённого интеграла.
11. Свойства определённого интеграла.
12. Теоремы о среднем, интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона-Лейбница.
13. Специальные функции: интегральный синус, функция Лапласа.
14. Площадь криволинейной трапеции.
15. Объём тела вращения.
16.Длина дуги плоской кривой.

5. Задания для контрольных работ

5.1. Задания к контрольной работе №1

Найти интегралы:

1. а) $\int(5x^4-\frac{1}{x^4}+2)dx$;	б) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$;	в) $\int\frac{x^2dx}{x^3+1}$;
2. а) $\int(x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+1)dx$;	б) $\int x^2\ln xdx$;	в) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-2}}dx$;
3. а) $\int(x^6-\frac{3}{x^4}+2x)dx$;	б) $\int(2x+1)\cos xdx$;	в) $\int\cos^3 x\sin xdx$;
4. а) $\int(6x^5-\frac{2}{x^8}+1)dx$;	б) $\int\ln 2xdx$;	в) $\int\frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$;
5. а) $\int(3x^5-4x\sqrt[5]{x}+2)dx$;	б) $\int(x+1)\sin xdx$;	в) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}-1}$;
6. а) $\int(3x^3-\frac{2}{x^5}-8)dx$;	б) $\int\ln(2x+1)dx$;	в) $\int\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$;
7. а) $\int\frac{x^3+2x-4x}{x}dx$;	б) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$;	в) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;
8. а) $\int(3x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}+5)dx$;	б) $\int\arcsin xdx$;	в) $\int\cos^5 xdx$;
9. а) $\int(2x^3-\frac{3}{x^4}-1)dx$;	б) $\int(x+1)e^{-2x}dx$;	в) $\int\sqrt[3]{x^3-8}x^2dx$;
10. а) $\int(6x^5-\frac{7}{x^7}+1)dx$;	б) $\int(2x-1)\cos xdx$;	в) $\int x\sqrt{x-2}dx$;
11. а) $\int(7x^6-\frac{2}{x^5}+\sqrt[3]{2})dx$;	б) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;	в) $\int\ln 5xdx$;
12. а) $\int(\frac{5}{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+5x^4)dx$;	б) $\int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx$;	в) $\int\ln(5x+7)dx$;
13. а) $\int(2-\frac{4}{\sqrt{x}}+x^5)dx$;	б) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}dx$;	в) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$;
14. а) $\int(2x^2-4\sqrt{x})dx$;	б) $\int\frac{3^x}{1+3^{2x}}dx$;	в) $\int(2x+1)e^x dx$;

15. а) $\int(7x^6-\frac{4}{x^3}+\sqrt{x})dx$;	б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$;	в) $\int x\mathrm{arctg}x dx$;
16. а) $\int\frac{x^2-4x+3}{x}dx$;	б) $\int\frac{dx}{4+2x-x^2}$;	в) $\int\sqrt{x}\ln x dx$;
17. а) $\int(4x-5x^3-\frac{1}{x^2})dx$;	б) $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}$;	в) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$;
18. а) $\int(7-\frac{2}{x}+3\sqrt{x})dx$;	б) $\int\frac{\cos x}{9+\sin^2 x}dx$;	в) $\int(1-x)\sin x dx$;
19. а) $\int(4x-\frac{2}{x^2}-3)dx$;	б) $\int e^{-8x+1}dx$;	в) $\int(3x-4)\ln x dx$;
20. а) $\int(3x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}+7)dx$;	б) $\int 2^{x^3}x^2dx\,3$;	в) $\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$;

5.2. Задания к контрольной работе №2

Найти интегралы:

1. а) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{x}$	б) $\int\frac{xdx}{9+8x-x^2}$	в) $\int\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$
2. а) $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$	б) $\int\frac{2x-3}{x^2+2x+5}dx$	в) $\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$
3. а) $\int\sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt{x}\right)^2dx$	б) $\int\frac{2x+1}{x^2+3x}dx$	в) $\int\sin 6x\cos x dx$
4. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}}$	б) $\int\frac{dx}{x^3+x^2}$	в) $\int e^{2x}\cos 5x\,dx$
5.а) $\int\frac{x+3}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$	б) $\int\frac{x-2}{x^2+3x-4}dx$	в) $\int e^x\sin 3x\,dx$
6. а) $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x}}dx$	б) $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$	в) $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$
7. а) $\int\sqrt{x^2+6x}\,dx$	б) $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$	в) $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$
8. а) $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$	б) $\int\frac{dx}{x(x^2+3)}$	в) $\int\sin 6x\sin 2x dx$
9. а) $\int\sqrt{2-x-x^2}\,dx$	б) $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$	в) $\int\sin^3 x\cos^3 x dx$

10. а) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$	б) $\int \frac{xdx}{x^2-4x+9}$	в) $\int \cos 6x \cos x dx$
11. а) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x}$	б) $\int \frac{xdx}{2x^2-6x+5}$	в) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx$
12. а) $\int \sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx$	б) $\int \frac{x^5+1}{x^3-x^2}dx$	в) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$
13. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$	б) $\int \frac{2x-5}{x^2+4x+8}dx$	в) $\int e^{2x}\cos x\,dx$
15. а) $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$	б) $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$	в) $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$
16. а) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$	б) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+4}dx$	в) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
17. а) $\int \sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx$	б) $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}$	в) $\int e^{2x}\cos 2x\,dx$
18. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$	б) $\int \frac{x-2}{x^3-4x}$	в) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$
19. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$	б) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$	в) $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$
20. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$	б) $\int \frac{3x+2}{x^2+x-3}dx$	в) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

5.3.Задания к контрольной работе №3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

1. $y = x^2 + 2x$; $y = x + 2$. 2. $y = x^2 + 4x + 3$; $y = x + 3$.
3. $y = x^2 - 6x + 10$; $y = x$. 4. $y = x^2 - 2x - 1$; $y = x - 1$.
5. $y = x^2 + 6x + 8$; $y = x + 4$. 6. $y = x^2 - 6x + 13$; $y = x + 3$.
7. $y = x^2 + 1$; $y = x + 1$. 8. $y = x^2 + 8x + 15$; $y = x + 5$.
9. $y = 3 - 2x - x^2$; $y = 1 - x$. 10. $y = x^2 - 2x + 3$; $y = 3x - 1$.
11. $y = -x^2 + 10x - 16$; $y = x + 2$. 12. $y = 2x - x^2$; $y = -x$.
13. $y = 3x^2 + 1$; $y = 3x + 7$. 14. $y = x^2 - 4x + 4$; $y = x$.
15. $y = -x^2 + 1$; $y = x - 1$. 16. $y = x^2 - 8x + 18$; $y = -2x + 18$.
17. $y = 4x - x^2$; $y = x$. 18. $y = -x^2 - 4x + 4$; $x - y + 8 = 0$.
19. $y = -x^2 - 2x + 7$; $y = x + 7$. 20. $y = x^2 - 4x + 5$; $x - y + 1 = 0$.
21. $y = (x-2)^3$; $y = 4x - 8$. 22. $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.

2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры,

расположенной в первом квадранте и ограниченной заданными параболой, прямой и осью Ox. Сделать чертеж.

1. $y=2x^2$; $y=-2x+4$.
2. $y=x^2$; $y=-x+2$.
3. $y=3x^2$; $y=-x+4$.
4. $y=\frac{1}{4}x^2$; $y=-x+3$.
5. $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=-3x+8$.
6. $y=\frac{1}{3}x^2$; $y=-3x+12$.
7. $y=4x^2$; $y=-2x+2$.
8. $y=\frac{1}{4}x^2$; $y=-\frac{1}{2}x+2$.
9. $y=4x^2$; $y=-2x+6$.
10. $y=x^2$; $y=-x+3$.
11. $y=2x^2$; $y=-3x+14$.
12. $y=\frac{1}{3}x^2$; $y=-x+6$.

3. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. Ось вращения Oy.

1. $y=\arccos\left(\frac{x}{3}\right)$; $y=\arccos x$; $y=0$.
2. $y=\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$; $y=\arcsin x$; $y=\frac{\pi}{2}$.
3. $y=x^2+1$, $y=x$, $x=0$, $y=0$.
4. $y=\sqrt{x-1}$, $y=0$, $x=0{,}5$, $y=1$.
5. $y=\ln x$, $x=2$, $y=0$.
6. $y=(x-1)^2$, $y=1$
7. $y^2=x-2$, $y=0$, $y=x^3$, $y=1$.
8. $y=x^3$, $y=x^2$.
9. $y=\arccos\left(\frac{x}{3}\right)$; $y=\arccos\left(\frac{x}{5}\right)$; $y=0$.
10. $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=0$.
11. $y=x^2-2x+1$, $x=2$; $y=0$.

4. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

1. $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$; $0\le x\le 12$.
2. $y=\ln x$; $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.
3. $y=\frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$; $0\le x\le 1$.
4. $y=e^x+6$; $\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$.

5. $y=\dfrac{1-e^{x}-e^{-x}}{2}$; $0\le x\le 3$.

6. $y=4-x^{2}$; $-2\le x\le 2$.

7. $y=\ln\dfrac{5}{2x}$; $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

8. $y=\ln\cos x$; $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$.

9. $y=e^{x}+13$; $\ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$.

10. $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}+3$; $0\le x\le 2$.

11. $y=\dfrac{x^{2}}{2}-1$; $0\le x\le\sqrt{2}$.

12. $y=\ln\sin x$; $-\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

13. $y=2-e^{x}$; $\ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$.

14. $y=1-\ln\sin x$; $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

15. $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}+3}{4}$; $0\le x\le 2$.

16. $y=\ln\left(1-x^{2}\right)$; $-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$.

17. $y=\sqrt{2x-x^{2}}-1$; $\dfrac{1}{4}\le x\le 1$.

18. $y=\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$; $0\le x\le 9$.

19. $y=4\sqrt{x-2}$; $2\le x\le 3$.

20. $y=4-\dfrac{x^{2}}{2}$; $0\le x\le 2\sqrt{2}$.

21. $y=\ln x$; $\sqrt{5}\le x\le\sqrt{11}$.

22. $y=\sqrt{4x-x^{2}}-1$; $\dfrac{1}{8}\le x\le 1$.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 22-е, переработанное.- СПб.: Изд-во «Профессия», 2001. – 432с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. 11-е издание, стер. –СПб.: Издательство "Лань", 2005. –736 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. Издание 4-е, испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 304 с.
4. Демидович В.П. Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов). - М., 1972.
5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. Учеб. пособие/ Под ред. Л.Д.Кудрявцева. Издание 2-е, переработанное.– М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 504 с.
6. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Издание 2-е, испр. и доп. – Минск: Изд-во «Вышэйшая школа», 1969.– 454 с.
7. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. – 309 с.
8. Щипачев В.С. Высшая математика. Изд. 7-е, стер.– М.:Высш.шк.,2005.–479с.

Евгений Валентинович **Круглов**
Елена Анатольевна**Таланова**

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.