

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

М.В. Иванченко

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ С БЕСПОРЯДКОМ**

Учебное пособие

Нижний Новгород
2012

УДК 537.86, 530.182

ББК 22.311

И-

И- Иванченко М.В. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ С БЕСПОРЯДКОМ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.

Цель пособия – ознакомить читателя с современными методами и результатами теории нелинейных колебаний и волн в решеточных системах с пространственным беспорядком. В центре внимания находятся явления локализации колебаний в прямом и обратном пространстве, эффекты нелинейного взаимодействия локализованных мод.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и сотрудников ННГУ, занимающихся исследованиями в области физики колебаний и решеточных систем. Для успешного усвоения материала желательно предварительное изучение дисциплин «Теория колебаний и волн», «Механика (теоретическая)».

Пособие подготовлено в рамках Конкурса учебно-методических разработок, подготовленных на основе внедрения в систему образования результатов научных исследований молодых кандидатов наук по приоритетному направлению развития ННГУ как национального исследовательского университета, а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт № 14.740.11.0075), фонда «Династия» и гранта МК-4028.2012.2.

УДК 537.86, 530.182

ББК 22.311

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2012

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Колебательно-волновая динамика линейных решеточных систем	5
1.1 Пространственно-однородные решетки	5
1.2 Пространственно-неоднородные линейные решетки	7
2 Динамика нелинейных пространственно-однородных решеток	12
2.1 Проблема Ферми-Паста-Улама	12
2.2 q -Бризеры и проблема Ферми-Паста-Улама	17
2.3 Делокализация мод в цепочках Ферми-Паста-Улама с произвольным порядком нелинейности	21
2.4 q -бризеры в многомерных решетках	29
3 Динамика нелинейных решеток со слабым пространственным беспорядком	38
3.1 Нелинейные акустические цепочки с беспорядком	39
3.2 Нелинейные оптические цепочки с беспорядком	51
3.3 q -бризеры: аномальная теплопроводность	63
4 Динамика решеток с сильным пространственным беспорядком	72
4.1 Предел сильного беспорядка	74
4.2 Многомерные решетки	78
4.3 Общий случай нелинейной системы с беспорядком	79
4.4 Численные результаты	82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	85
ЛИТЕРАТУРА	89
ПРИЛОЖЕНИЕ	96

Введение

Колебательно-волновая динамика, процессы локализации и переноса энергии в решетках осцилляторов является одной из фундаментальных проблем современной нелинейной физики [1, 2]. Интенсивные исследования в этой области, ведущиеся на протяжении более 20 лет, связаны с высокой степенью актуальности для целого спектра прикладных задач в области получения, обработки, хранения и передачи информации. Так, решетки наномеханических осцилляторов на настоящий момент представляются крайне перспективной элементной базой для миниатюрных устройств, функционирование которых связано с высокоточными измерениями, обработкой и передачей информации [3, 4]. Низкоразмерные наносистемы (нанопровода, нанотрубки, графен) характеризуются уникально высокими значениями электрической и тепловой проводимости, по сравнению с трехмерными материалами. Это вызывает беспрецедентный интерес в фотонике и оптоэлектронике, наноэлектронике и фононике [5, 6]. В экспериментальных исследованиях динамики атомарных конденсатов в оптических решетках изучаются фундаментальные квантовые эффекты в многочастичных системах, разрабатываются принципы квантовых вычислений [7, 8].

В основе современных теоретических представлений о колебательно-волновых процессах в решеточных системах лежат такие фундаментальные явления как андерсоновская локализация в линейных системах с беспорядком ([9], Нобелевская премия за 1977 год), локализация и делокализация энергии в модовом пространстве нелинейных систем без беспорядка (знаменитый парадокс Ферми-Паста-Улама [10]). В центре современных исследований - системы с одновременным присутствием беспорядка и нелинейности, как более реалистичные, так и обладающие более богатой и сложной динамикой (Б.Л. Альтшулер, И.Л. Алейнер, Д.М. Басько, А.С. Пиковский, S. Aubry, S. Fishman, S. Flach, M. Johansson, D. Krimer, S. Koidakis и др.).

Цель данного учебного пособия – дать представление о современных методах, результатах и открытых вопросах теории нелинейных колебаний и волн в решеточных системах с пространственным беспорядком.

Глава 1

Колебательно-волновая динамика линейных решеточных систем

Мы начинаем с изучения колебательно-волновых свойств линейных решеток. Хотя в физических системах линейное описание, преимущественно, является лишь аппроксимацией, базовые понятия теории колебаний и волн формулируются именно здесь. Фундаментальными особенностями линейных систем являются их интегрируемость и принцип суперпозиции. Это означает, что система с N степенями свободы имеет N интегралов (констант) движения, или, говоря другими словами, колебательных мод. Любое начальное состояние есть суперпозиция этих мод, с различными амплитудами и фазами. В любой последующий момент времени состояние системы остается суперпозицией мод, фазы которых меняются во времени. Как мы увидим, несмотря на кажущуюся простоту задачи, пространственно-временная динамика таких систем может быть совсем нетривиальной.

1.1 Пространственно-однородные решетки

Хрестоматийной моделью решетки осцилляторов является цепочка N маятников одинаковой массы связанных пружинами. Ее Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{n=1}^N \left[\frac{p_n^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_n^2}{2} + \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n)^2 \right], \quad (1.1)$$

где x_n – отклонение n -й частицы от состояния равновесия, а p_n – ее импульс. Соответствующие уравнения движения получаются из

$$\begin{cases} \dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial x_n}, \end{cases} \quad (1.2)$$

что дает

$$\begin{cases} \dot{x}_n = p_n \\ \dot{p}_n = -\omega_0^2 x_n + x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}, \end{cases} \quad (1.3)$$

или

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 x_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}. \quad (1.4)$$

Типичными граничными условиями являются нулевые $x_0 = x_{N+1} = 0$, свободные $x_0 = x_1$, $x_{N+1} = x_N$, и периодические $x_0 = x_N$, $x_{N+1} = x_1$. Также часто рассматривается случай бесконечных систем $N \rightarrow \infty$.

Будем искать решение системы (1.4) в виде плоской волны $x_n(t) = Ae^{i(\omega t - kn)}$. Подстановка дает

$$-\omega^2 + \omega_0^2 = e^{-ik} - 2 + e^{ik}, \quad (1.5)$$

или

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4 \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6), связывающее частоту плоской волны ω и ее волновое число k , называется *дисперсионным уравнением*. Поскольку система линейных дифференциальных уравнений (1.4) имеет ровно $2N$ линейно независимых решений, то любое решение (1.4) может быть представлено в виде суперпозиции N плоских волн:

$$x_n(t) = \sum_{q=1}^N \left(A_q e^{i(\omega_q t - k_q n)} + c.c. \right). \quad (1.7)$$

Конкретные значения ω_q , k_q , а также пространственная структура собственных мод определяются из граничных условий.

Так, нулевые граничные условия $x_0 = x_N = 0$ приводят к

$$\begin{cases} x_n = \sum_{q=1}^N A_q \sin(\omega_q t + \varphi_q) \sin k_q n, \\ k_q = \frac{\pi q}{N+1}, \\ \omega_q^2 = \omega_0^2 + \sin^2 \frac{\pi q}{2(N+1)} \end{cases} \quad (1.8)$$

Говоря о свойствах колебательного спектра нашей системы, необходимо отметить, что и частоты, и волновые числа лежат в ограниченном диапазоне $\omega_q \in (\omega_0, \sqrt{\omega_0^2 + 4})$, $k_q \in (0, \pi)$. (Отрицательные частоты эквивалентны обращению во времени $t \rightarrow -t$.) Это обстоятельство является фундаментальным свойством спектра пространственно-дискретных систем (решеток).

Отметим также, что, в зависимости от частоты в длинноволновом пределе $\lim_{k_q \rightarrow 0} \omega_q(k_q) = \omega_0$, спектр классифицируется как *акустический* при $\omega_0 = 0$ и как *оптический* при $\omega_0 \neq 0$. Решетки с акустическим типом спектра часто называют решетками *Ферми-Паста-Улама*, а с оптическим спектром – решетками *Клейна-Гордона*.

В терминах гамильтоновского описания, каноническое преобразование

$$\begin{cases} x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin\left(\frac{\pi qn}{N+1}\right), \\ p_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N P_q(t) \sin\left(\frac{\pi qn}{N+1}\right) \end{cases} \quad (1.9)$$

задает переход в пространство N нормальных мод с амплитудами $Q_q(t)$, импульсами $P_q(t)$ и частотами $\omega_q = 2 \sin(\pi q/2(N+1))$. Гамильтониан (1.1) при этом принимает вид

$$H = \sum_{q=1}^N \frac{P_q^2}{2} + \frac{\omega_q^2 Q_q^2}{2}, \quad (1.10)$$

а уравнения движения описывают колебания несвязанных мод-осцилляторов:

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = 0. \quad (1.11)$$

1.2 Пространственно-неоднородные линейные решетки

Как мы убедились, собственными состояниями пространственно-однородных решеток являются плоские волны. В таких системах локализованное начальное возмущение (волновой пакет) распространяется с групповой скоростью $\partial\omega/\partial k$ неограниченно по всей системе.

Ниже мы продемонстрируем, что наличие пространственных неоднородностей может кардинальным образом изменить ситуацию. Несмотря на то, что система остается линейной и интегрируемой, собственные решения могут становиться локализованными в пространстве. Если все собственные решения локализованы, то начальный волновой пакет, локализованный в прямом пространстве, будет локализован также и в модовом пространстве. Другими словами, существенно возбужденными оказываются только моды, локализованные в области начального волнового пакета. Поскольку моды являются невзаимодействующими, в ходе эволюции системы локализация будет сохраняться.

Пионерской работой в этой области является статья P.W. Anderson, 1958 [9], где было показано, что в одномерных и двумерных системах все состояния становятся локализованными при произвольно слабом пространственном беспорядке, а в трехмерных системах – если сила беспорядка превышает некоторый порог. С точки зрения переноса заряда (энергии), можно говорить о переходе металл-изолятор; в бесконечных системах электрическая проводимость и теплопроводность стремятся к нулю.

Описывая динамику электрона на кристаллической решетке, будем рассматривать приближение сильной связи, когда состояния Ванье концентрируются вблизи узлов решетки. В базисе Ванье, где $|n\rangle$ – состояние, локализованное вблизи n -го узла решетки, Гамильтониан одной частицы имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_n \varepsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_{m \in D(n)} V_{nm} |n\rangle \langle m|, \quad (1.12)$$

где $D(n)$ – множество ближайших соседей узла n . Первый член отвечает потенциальной энергии частицы в узле решетки, второй – кинетической энергии, связанной с переходами между узлами решетки. Беспорядок может реализовываться как в случайных ε_n , так и в V_{nm} (изотопический беспорядок, дефекты кристаллической решетки, примеси). Для простоты мы будем рассматривать беспорядок в потенциальной энергии, полагая $V_{nm} = 1$.

Уравнение (1.12) приводит к следующей динамике значений волновой функции на узлах решетки $\varphi_n = \langle n|m\rangle$:

$$i\dot{\varphi}_n = \varepsilon_n \varphi_n + \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}. \quad (1.13)$$

Это уравнение часто называется дискретным уравнением Шредингера (ДУШ) и может также описывать динамику невзаимодействующих Бозе-Эйнштейновских конденсатов, распространение света в оптически модулированных средах.

Стационарные решения уравнения (1.13) $\varphi_n(t) = \psi_n e^{-iEt}$ удовлетворяют системе

$$E\psi_n = \varepsilon_n \psi_n + \psi_{n+1} + \psi_{n-1}, \quad (1.14)$$

которая, по-существу, является задачей на собственные числа и вектора матрицы связи в (1.13). Собственные вектора будут являться линейными модами нашей системы, а собственные числа – их частотами (энергиями).

Подчеркнем, что задача (1.14) с математической точки зрения полностью эквивалентна задаче на собственные колебания классической цепочки осцилляторов (1.4) с соотношением частот $E = \omega_0^2 + 2 - \omega^2$.

Заметим также, что эквивалентность классической и квантовой задач имеет место только в линейном случае и в случае невзаимодействующих частиц.

Нелинейность, в общем случае, делает классическую задачу неинтегрируемой, а взаимодействие частиц искажает спектр квантовой задачи. Теория колебательно-волновых процессов в таких системах является крайне актуальной и активно исследуемой проблемой современной физики.

Не претендуя на полноту рассмотрения, покажем возникновение локализованных состояний вследствие пространственных неоднородностей в бесконечных цепочках $N \rightarrow \infty$.

Влияние одиночной пространственной неоднородности. В случае пространственно-однородной системы $\varepsilon = 0$ уравнения (1.14) имеют систему собственных решений

$$\begin{aligned}\psi_n &= \sin kn, \\ \psi_n &= \cos kn, \\ E &= 2 \cos k,\end{aligned}\tag{1.15}$$

в первой строке которой задаются антисимметричные решения ($\psi_{-n} = -\psi_n$), а во второй – симметричные ($\psi_{-n} = \psi_n$).

Рассмотрим случай одиночной пространственной неоднородности $\varepsilon_n = \varepsilon \delta_{n,0}$. Легко видеть, что антисимметричные решения $\psi_n = \sin kn$, обращающиеся в 0 в точке неоднородности $n = 0$, остаются неизменными, как и их собственные частоты (энергии). Также можно показать, что все симметричные решения с $k \neq 0$ имеют вид $\psi_n = \cos(k|n| + \phi_n)$, а частоты их претерпевают некоторый сдвиг. Заметим, что они остаются делокализованными.

Наконец, будем искать решение, экспоненциально локализованное в пространстве с центром в точке неоднородности: $\psi_n = e^{-p|n|}$. Тогда имеем (1.14):

$$\begin{cases} E = e^p + e^{-p}, & n \neq 0, \\ E = \varepsilon + 2e^{-p}. \end{cases}\tag{1.16}$$

Отсюда

$$e^{-2p} + \varepsilon e^{-p} - 1 = 0\tag{1.17}$$

и

$$\begin{cases} p = \ln \left(\frac{2}{-\varepsilon + \sqrt{4 + \varepsilon^2}} \right), \\ E = \sqrt{\varepsilon^2 + 4}. \end{cases}\tag{1.18}$$

Заметим, что частота экспоненциально локализованной моды лежит над спектром делокализованных мод: $\sqrt{\varepsilon^2 + 4} > 2$. Длина локализации моды ξ , определяемая как $\psi \propto e^{-|n|/\xi}$, задается

$$\xi^{-1} = p = \ln \left(\frac{2}{-\varepsilon + \sqrt{4 + \varepsilon^2}} \right),\tag{1.19}$$

в пределе $\epsilon \ll 1$ она масштабируется как $\xi \propto \epsilon^{-1}$, а в пределе $\epsilon \gg 1$ – как $[\ln \epsilon]^{-1}$.

Предел сильного пространственного беспорядка. Рассмотрим теперь случайное распределение $\epsilon_n \in [-W/2, W/2]$, где $W \gg 1$. Мы можем ожидать, что в данном случае будут также присутствовать собственные состояния, экспоненциально локализованные на сильных неоднородностях.

Будем искать решение (1.13), локализованное на узле $n = 0$, в виде ряда $\psi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_n^{(k)}$, где $\psi_n^{(0)} = \delta_{n,0}$, $E = \epsilon_0$ и $|\psi_{|n|}^k| \gg |\psi_{|n|+1}^k|$.

В первом приближении мы находим амплитуды в соседних с центральным узлах:

$$\psi_{\pm 1} = \frac{1}{\epsilon_0 - \epsilon_{\pm 1}}. \quad (1.20)$$

Продолжая, получаем

$$\psi_{\pm m} = \prod_{k=1}^m \frac{1}{\epsilon_0 - \epsilon_{\pm k}}. \quad (1.21)$$

Будем говорить о длине локализации как о предельной величине:

$$\xi^{-1} = - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |\psi_m|}{m}. \quad (1.22)$$

Тогда

$$\xi(\epsilon_0)^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |\epsilon_0 - \epsilon_{\pm k}| = \int \mathcal{W}(\epsilon) \ln(\epsilon_0 - \epsilon) d\epsilon. \quad (1.23)$$

Для $\mathcal{W}(\epsilon) = 1_{[-W/2, W/2]}/W$ интеграл легко вычисляется в элементарных функциях и результирующая длина локализации, вообще говоря, зависит от частоты ϵ_0 собственного состояния. В частности, в центре зоны $\epsilon_0 = 0$ получаем

$$\xi(0) = \left[\ln \frac{W}{2} \right]^{-1}, \quad (1.24)$$

что качественно согласуется с пределом сильной неоднородности в (1.19). Обратим внимание, что результат (1.24) справедлив только при $W \gg 1$.

Предел слабого беспорядка. Согласно результату Андерсона, в одномерных системах все моды становятся экспоненциально локализованными при произвольно малой величине беспорядка. В связи с этим, полезно рассмотреть предел $W \ll 1$.

Переобозначим в (1.14) $\epsilon_n = W\epsilon_n$ и рассмотрим

$$E\psi_n = W\epsilon_n\psi_n + \psi_{n+1} + \psi_{n-1}. \quad (1.25)$$

Сделав замену $R_n = \frac{\psi_n}{\psi_{n-1}}$, получим

$$R_{n+1} = (E - W\epsilon_n) - \frac{1}{R_n}. \quad (1.26)$$

Теперь длина локализации (1.22) вычисляется как

$$\xi^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |R_k|. \quad (1.27)$$

Теоретические соображения, которых мы здесь не касаемся, указывают на то, что решения системы (1.26) можно искать в виде

$$R_n = A \exp(WB_n + W^2C_n + W^3D_n + \dots), \quad (1.28)$$

где коэффициенты A, B_n, C_n, D_n, \dots не зависят от W . Подставляя (1.28) в (1.26), раскладывая в ряд Тейлора и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях W , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A = E - A^{-1} \\ AB_{n+1} = \epsilon_n - A^{-1}B_n, \\ A \left[C_{n+1} + \frac{1}{2}B_{n+1}^2 \right] = A^{-1} \left[C_n - \frac{1}{2}B_n^2 \right] \end{cases} \quad (1.29)$$

Усредняя по случайным ϵ , получаем $A = \frac{1}{2} [E \pm \sqrt{E^2 - 4}]$, $\langle B_n \rangle = 0$, $\langle B_n^2 \rangle = A^2/(12(A^4 - 1))$, и $\langle C_n \rangle = -A^2/(24(A^2 - 1)^2)$.

В результате получаем для длины локализации

$$\xi(E) = \frac{24(4 - E^2)}{W^2}. \quad (1.30)$$

Напоминаем, что это выражение получено в предположении слабого беспорядка $W \ll 1$. На практике, однако, можно использовать (1.30) для оценки по порядку величины и для $W < 6$.

В заключении заметим, что, как следует из (1.30) длина локализации может быть весьма большой при малых W . Для цепочек конечной длины это означает, что эффекты локализации в них наблюдаться не будут. При $\xi \gg N$ собственные состояния в таких системах будут делокализованы и близки к гармоническим модам пространственно-однородной системы. По отношению к фононному и электронному транспорту такие системы будут демонстрировать свойства проводников.

Глава 2

Динамика нелинейных пространственно-однородных решеток

2.1 Проблема Ферми-Паста-Улама

В 1955 Э. Ферми, Дж. Паста, и С. Улам (ФПУ) выдвинули гипотезу о нелинейном механизме термализации в кристаллических структурах и провели ряд численных экспериментов с колебательными цепочками с нелинейностью в межэлементных связях [10]. Вопреки ожиданиям, одномодовое возбуждение с частотой ω_q и волновым числом q не распределялось по всему спектру, а оставалось локализованным в начальной и нескольких соседних модах. Более того, на больших временах интегрирования наблюдалось практически полное возвращение энергии в начальную моду.

Энрико Ферми интересовался проблемой равномерного распределения энергии по степеням свободы на протяжении многих лет. Так, в своей работе 1923 года [11] он предпринял попытку усилить теорему Пуанкаре, гласящую, что, в общем случае, гамильтониан нелинейной системы не имеет других интегралов движения, кроме энергии. Предположение Ферми заключалось в том, что нелинейность обуславливает отсутствие инвариантных многообразий в фазовом пространстве, которые могли бы изолировать некоторые области последнего. Любопытно, что Колмогоров сформулировал свою знаменитую теорему о структурной устойчивости торов в конечномерных системах (известную теперь как КАМ-теорема) в 1954 – в том же году, когда ФПУ начали численные эксперименты с целью показать обратное: неизбежность перехода нелинейной системы в состояние с равно распределенной энергией из состояния одномодового возбуждения.

Система, моделировавшаяся ФПУ – цепочка N частиц одинаковой массы связанных пружинами с линейными и нелинейными членами в силе взаимо-

действия, квадратичными (т.н. α -ФПУ)

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \alpha[(x_{n+1} - x_n)^2 - (x_n - x_{n-1})^2], \quad (2.1)$$

или кубическими (β -ФПУ)

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \beta[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3], \quad (2.2)$$

где x_n - отклонение n -й частицы от состояния равновесия, а граничные условия $x_0 = x_{N+1} = 0$.

Каноническое преобразование $x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin\left(\frac{\pi q n}{N+1}\right)$ задает переход в пространство N нормальных мод с амплитудами $Q_q(t)$ и частотами $\omega_q = 2 \sin(\pi q/2(N+1))$. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\alpha}{\sqrt{2(N+1)}} \sum_{l,m=1}^N \omega_q \omega_l \omega_m B_{q,l,m} Q_l Q_m \quad (2.3)$$

для α -ФПУ модели (2.1) и

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\beta}{2(N+1)} \sum_{l,m,n=1}^N \omega_q \omega_l \omega_m \omega_n C_{q,l,m,n} Q_l Q_m Q_n \quad (2.4)$$

для β -ФПУ модели (2.2). Коэффициенты взаимодействия

$$B_{q,l,m} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m, 0} - \delta_{q \pm l \pm m, 2(N+1)}), \quad (2.5)$$

$$C_{q,l,m,n} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m \pm n, 0} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, 2(N+1)} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, -2(N+1)}) \quad (2.6)$$

задают селективную нелинейную нелокальную связь между модами. В линейном случае, в отсутствие этого взаимодействия, существуют N интегралов движения, которые отвечают энергиям линейных нормальных мод $E_q = \frac{1}{2} (\dot{Q}_q^2 + \omega_q^2 Q_q^2)$.

Исходя из теоретических соображений [11], ФПУ ожидали, что энергия, изначально сконцентрированная в низкочастотной моде q_0 , в результате нелинейного взаимодействия будет перераспределяться между остальными модами, воспроизводя при этом переход к равновесному состоянию. Однако энергия не только не перераспределялась сколько-нибудь равномерно, но и возвращалась в исходную моду с точностью до 98% через большие промежутки

времени (рис.2.1). Еще более впечатляющим казалось то, что время возвращения даже уменьшалось при увеличении энергии/коэффициента нелинейности. Объяснение ошибкой численного счета было опровергнуто более поздними численными экспериментами: улучшенная точность и большие времена интегрирования позволили пронаблюдать возвращение до 99% от начальной энергии [12].

Большой шаг в понимании явления ФПУ был сделан в [13], где был предложен критерий возникновения нелинейных резонансов, приводящих к динамическому хаосу. Было указано, что в отсутствие сильных резонансов динамика нелинейной системы может оставаться регулярной или квазирегулярной, а термализация, как следствие, отсутствовать, что и могло привести к результатам ФПУ. При превышении некоторого порога по энергии $E > E^c$ резонансы, вызванные нелинейным сдвигом частот, приводят к развитию хаотической динамики, быстрому перераспределению энергии между модами, и, в итоге, термализации. Эти предсказания нашли подтверждение в численных экспериментах [14].

Дальнейшее исследование проблемы ФПУ развивалось в двух направлениях. Аналитические оценки [15,16] и численные эксперименты [17–22] показали, что порог термализации (сильного хаоса) сохраняется и в термодинамическом пределе, отвечая конечной плотности энергии: $\lim_{N \rightarrow \infty} E/N = \varepsilon_c > 0$. Дополнительно было обнаружено существование т.н. режима слабого хаоса, в котором динамика становилась хаотической, но энергия оставалась сосредоточенной в нескольких соседних модах. Хотя аргументы общего характера говорят в пользу конечной термализации и в режиме слабого хаоса (вследствие диффузии Арнольда), уверенно этот процесс до сих пор не наблюдался в численных экспериментах, в силу крайне больших характерных временных масштабов. В отличие от порога сильного хаоса, порог слабого хаоса стремится к нулю в термодинамическом пределе.

Второе направление работ связано с исследованием характерных времен перехода к термализованному состоянию и сохраняет актуальность до настоящего времени. Можно считать установленным, что зависимость от энергии системы является степенной для сравнительно высоких значений энергии и экспоненциальной – для низких [15,23–25]. Скейлинг также сильно зависит от типа начальных условий (так, например, при коррелированности начальных фаз осцилляторов степенная зависимость от плотности энергии сменяется на аналогичную зависимость от полной энергии) [26].

Самым интригующим, пожалуй, стало открытие так называемых ‘естественных пакетов’ [15,27]. Оказалось, что между порогами слабого и сильного хаоса происходит сравнительно быстрая перераспределение части энергии из

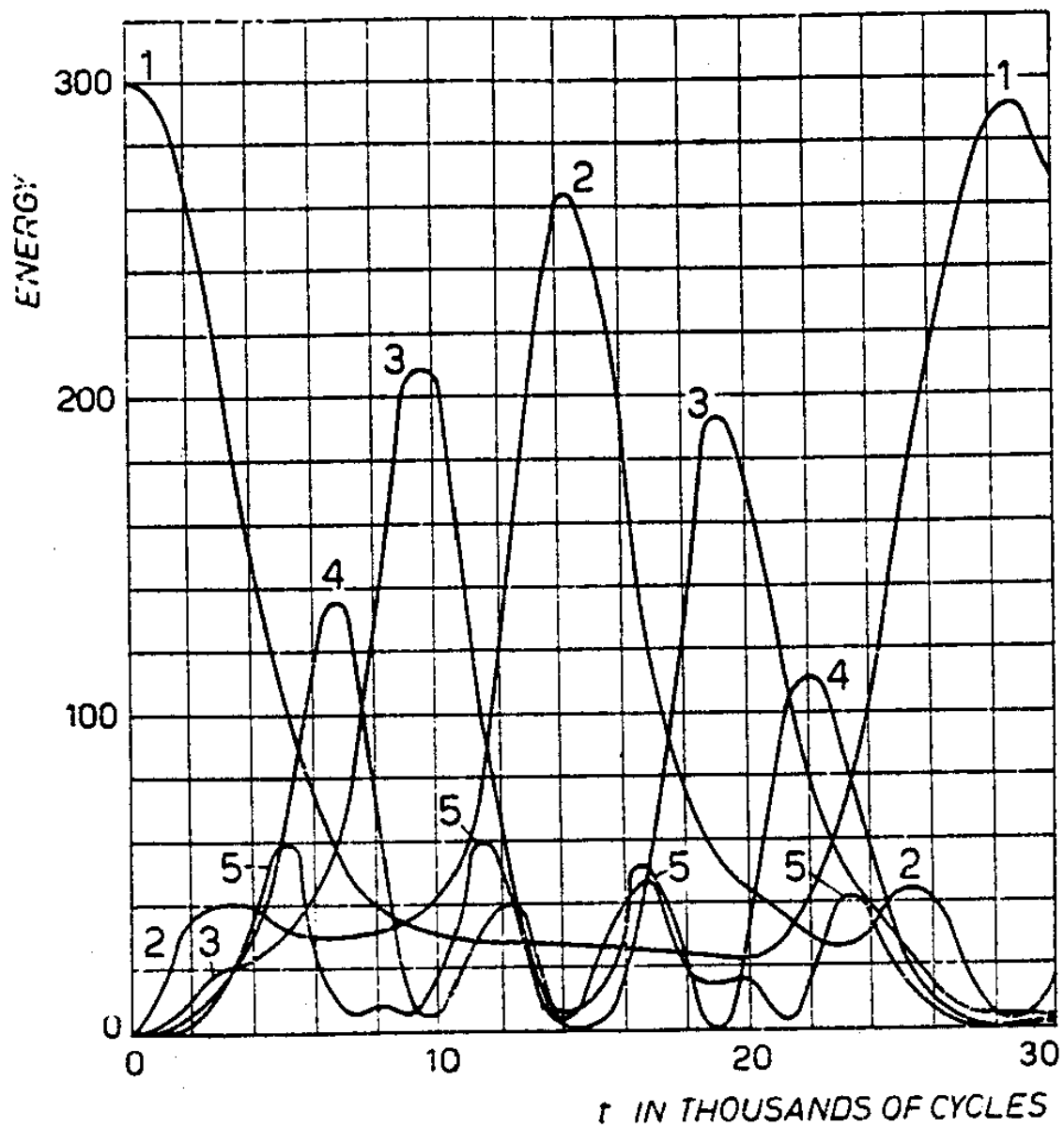


Рис. 2.1: Эволюция энергий нескольких начальных мод в численном эксперименте ФПУ с $q_0 = 1$, $\alpha = 0.25$, $N = 32$ [10]

исходной или нескольких исходных мод вверх по спектру. В формирующемся квазистационарном распределении плотность энергии падает экспоненциально с ростом номера моды. Такие пакеты, экспоненциально локализованные в модовом пространстве, характеризуются очень большим временем жизни, и часто о них говорят как о метастабильных структурах. Их разрушение происходит через перекачку энергии в некоторые избранные моды из высокочастотной части спектра, после возбуждения которых энергия распределяется уже по всему спектру. Каков механизм образования таких пакетов, чем определяется степень их экспоненциальной локализации, в чем причина их устойчивости, за счет чего в конечном итоге происходит их разрушение – оставалось неясным до последнего времени.

В заключении, следует также отметить результаты по исследованию задачи ФПУ в двумерных системах. Существенно большая вычислительная сложность долгое время препятствовала проведению численных экспериментов, однако недавно они все-таки были выполнены. Выяснилось, что, хотя некоторое ускорение процессов термализации по сравнению с одномерными системами и наблюдается, быстрое распределение энергии по спектру отсутствует при достаточно малых энергиях [28].

Резюмируя, с современной точки зрения, результат ФПУ (часто называемый проблема или парадокс ФПУ) состоит в следующем. Существует область параметров системы: энергии, линейных размеров, нелинейности, в которой низкочастотные возбуждения остаются локализованными в q -пространстве нормальных мод. Наблюдается (квази)периодическое возвращение энергии в начально возбужденные моды. Существуют т.н. пороги слабой и сильной стохастичности: колебания становятся хаотическими при превышении первого, но остаются локализованными в модовом пространстве, а быстрая дelokализация и термализация системы наблюдаются только при превышении второго [29–31].

Помимо фундаментальной проблемы термализации, нелинейные моды представляют интерес и с точки зрения динамики микро- и нано-электромеханических колебательных систем [32]. Цепочки и решетки таких осцилляторов позволяют получить широкую полосу пропускания, дисперсию и другие волновые свойства [3, 33]. Нелинейный режим работы представляется крайне привлекательным как в связи с расширением рабочего диапазона, так и в связи с потенциальной возможностью практического использования нелинейных эффектов в миниатюрных приборах. Здесь принципиальными являются вопросы о нелинейном спектре колебаний: как изменяются моды с усилением нелинейности, увеличением амплитуды колебаний; сохраняется ли локализация в модовом пространстве; каков порог по нелинейности/энергии ниже которого

спектр колебаний еще сохраняет основные свойства линейного?

В данной главе будет показано, что все основные аспекты результата ФПУ могут быть описаны в рамках одной теории – q -бризеров, точных периодических решений, являющихся продолжением линейных мод в нелинейный режим и экспоненциально локализованных в q -пространстве [34, 35]. Пороги делокализации q -бризеров также определяют границу между спектром колебаний, близких к линейным, и сильно хаотических. Будет продемонстрировано, что такие решения существуют в широком классе систем: в двумерных и трехмерных конечных и бесконечных акустических решетках, в случае произвольного порядка нелинейности [36–42].

2.2 q -Бризеры и проблема Ферми-Паста-Улама

В основу гипотезы о существовании q -бризеров – точных периодических решений систем (2.1), (2.2), локализованных в модовом пространстве – легла аналогия с дискретными бризерами: нелинейными периодическими траекториями, экспоненциально локализованными в прямом пространстве [43]. Наличие и устойчивость таких траекторий могли бы объяснить (а) отсутствие термализации на временах, доступных в численном эксперименте – если начальные условия выбраны в окрестности одной из них, и (б) природу естественных пакетов – как отражающих структуру фазового пространства вблизи q -бризеров. И действительно, устойчивые периодические траектории, экспоненциально локализованные в модовом пространстве, были найдены – как непрерывное продолжение линейных нормальных мод в нелинейную область [34, 35].

Рассмотрим сначала вопрос о принципиальной возможности продолжения линейных мод в нелинейный режим. Для этого положим $\alpha = \beta = 0$, зададим энергию $E_{q_0} = E$ в нормальной моде $q = q_0$, в то время как остальные q -осцилляторы неподвижны. Такие начальные условия отвечают периодической траектории в фазовом пространстве нашей линейной модели. Теорема Ляпунова гарантирует возможность ее продолжения в нелинейный режим при отсутствии резонансов $n\omega_{q_0} \neq \omega_{q \neq q_0}$, что, в общем случае, справедливо для конечного числа осцилляторов N [44]. Можно ожидать, что периодическая траектория останется локализованной в q -пространстве по крайней мере до некоторых критических ненулевых значений α, β .

На возможности продолжения линейных мод основан численный алгоритм отыскания q -бризеров [34, 35] (см. Приложение).

На рис.2.2 представлена эволюция энергии в низкочастотных модах при начальных условиях численного эксперимента ФПУ [10] и показаны значения

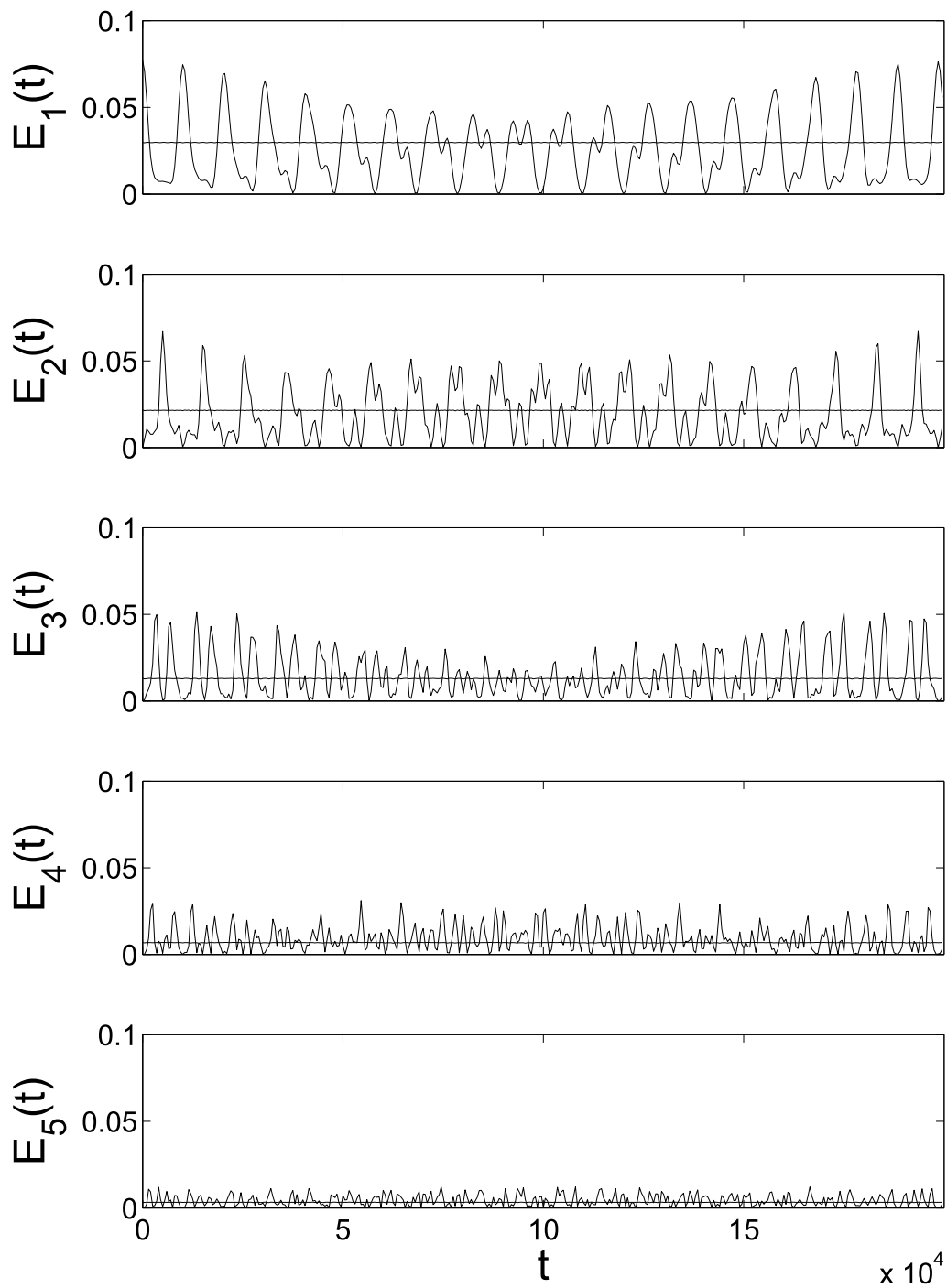


Рис. 2.2: Динамика энергий мод с номерами $q = 1, 2, 3, 4, 5$ для (i) начальных условий ФПУ [10] (осциллирующие траектории) и (ii) точного q -бризерного решения (горизонтальные линии). Здесь $\alpha = 0.25$, $E = 0.077$, $N = 32$ [34, 35]

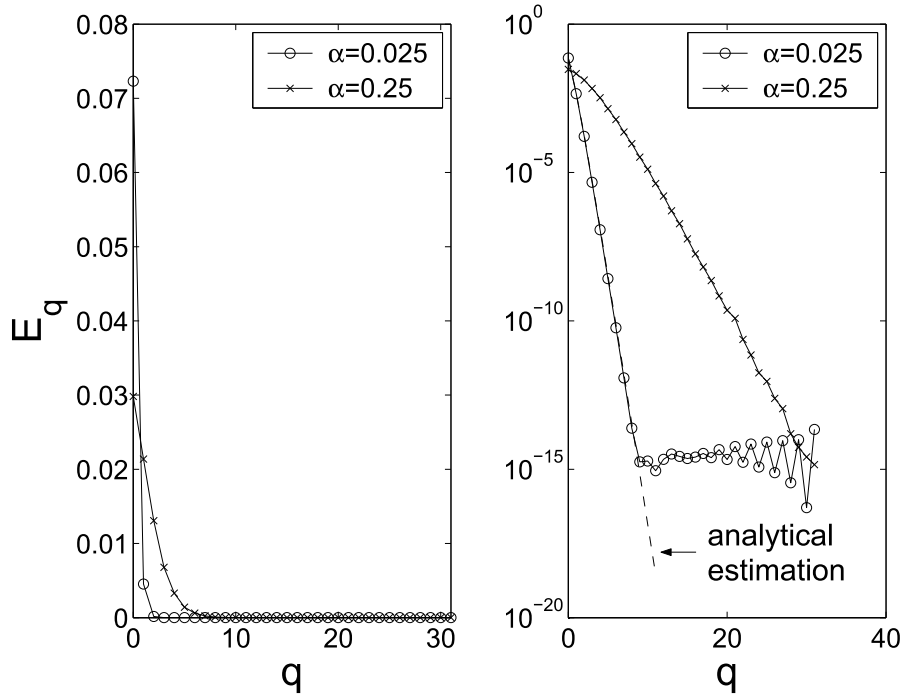


Рис. 2.3: (а) Распределение модовых энергий устойчивых q -бризеров при $E = 0.077$, $N = 32$ в зависимости от величины нелинейности α в (а) линейной и (б) логарифмической шкале. Пунктиром показана аналитическая оценка (2.7) [34]

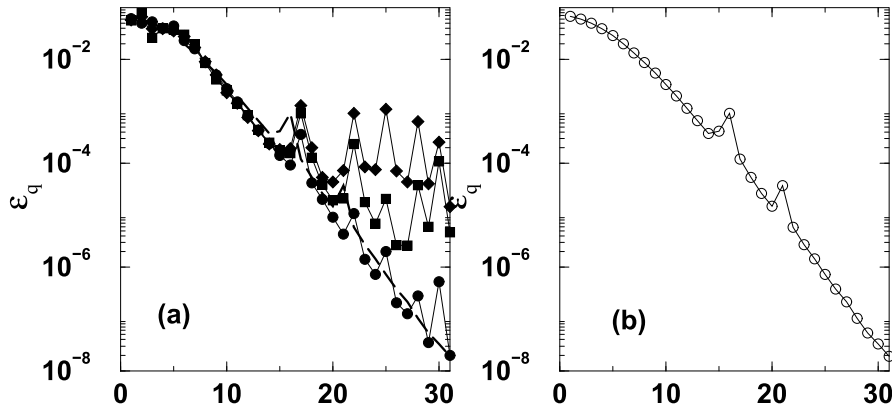


Рис. 2.4: (а) Распределения энергии в модовом пространстве для траектории ФПУ при $q_0 = 1$, $N = 31$, $\alpha = 0.33$, $E = 0.32$ в разные моменты времени. Маркеры 'окружности' соответствуют $t = 10^4$, 'квадраты' - $t = 10^5$, 'ромбы' - $t = 10^6$. Штрихован - ' q^2 -бризер из (б). (б) Распределения энергии в ' q^2 -бризере для тех же параметров, что и в случае (а) [45]

энергий, отвечающих точному q -бризерному решению с центром в низшей моде, при совпадающей энергии и остальных параметрах. На рис.2.3 приведены распределения энергий q -бризеров в модовом пространстве (в обоих случаях результаты численного счета свидетельствуют линейную устойчивость траектории).

Применение метода теории возмущения Пуанкаре-Линдштедта для низкочастотных мод модели α -ФПУ (подробные выкладки для модели β -ФПУ приведены в Приложении) приводит к оценке распределения энергий нормальных мод в q -бризере [34, 35]:

$$E_{nq_0} = \gamma^{2n-2} n^2 E_{q_0}, \quad \gamma = \frac{\alpha \sqrt{E_{q_0}} (N+1)^{3/2}}{\pi^2 q_0^2}, \quad (2.7)$$

Необходимое условие для локализации q -бризера в рамках этой оценки - $\gamma < 1$. Следовательно, уравнения (2.7) позволяют получить оценки для порога локализации и для соотношений подобия между параметрами q -бризера, оставляющими γ неизменным. Отметим, что вопрос динамической устойчивости q -бризеров, по всей видимости, не имеет прямого отношения к термализации как таковой. Действительно, если q -бризер локализован, то ощутимая неустойчивость на краях распределения энергии исключена - в противном случае соответствующие резонансы привели бы к делокализации самого q -бризера. Неустойчивость в центре распределения приведет к хаотизации динамики в центре, но в силу отсутствия резонансов на краях не приведет к делокализации.

Аналогичным образом можно получить следующую оценку распределения энергий нормальных мод q -бризера для β -ФПУ (см. Приложение):

$$E_{(2n+1)q_0} = \lambda^{2n} E_{q_0}, \quad \lambda = \frac{3\beta E_{q_0} (N+1)}{8\pi^2 q_0^2}. \quad (2.8)$$

Необходимое условие для локализации q -бризера - $\lambda < 1$. При условии $\lambda = 1$ q -бризер делокализуется, энергия быстро перераспределяется по спектру, система термализуется.

Анализируя линейную устойчивость q -бризеров, можно показать, что они становятся неустойчивыми при условии $6\beta E(N+1)/\pi^2 > 1$ [34] (более подробно - в последующих разделах). Поскольку сами решения при этом сохраняют локализацию, то траектории ФПУ не приводят к термализованному состоянию, в согласии с вышесказанным.

Легко убедиться, что теория q -бризеров исчерпывающе объясняет все особенности термализации в модельных колебательных системах. Существование локализованных в модовом пространстве периодических решений отражает локальную структуру фазового пространства. Если начальные условия

находятся вблизи q -бризера, траектория будет оставаться в некоторой его окрестности достаточно длительное время и будет характеризоваться локализацией в модовом пространстве. (Более подробно этот вопрос рассмотрен в следующем разделе.) Если q -бризер устойчив, то в некоторой его окрестности присутствуют торы с низкой эффективной размерностью; будет наблюдаться практически полное возвращение энергии в начальную моду. Если решение неустойчиво, но сохраняет локализацию – тип поведения траекторий в его окрестности отвечает слабому хаосу. Происходит быстрая эволюция распределения энергии из начальной моды к экспоненциально локализованному естественному пакету, метастабильность которого определяется локальной структурой фазового пространства (рис.2.4(a)). Результаты по проблеме ФПУ в двумерных системах объясняются в рамках этого же подхода.

Наконец, механизм разрушения естественных пакетов и термализации на очень больших временах также может быть понят с помощью анализа q -бризеров [45]. Обратим внимание на резонансные пики на краях распределений на рис. 2.4, как для траектории ФПУ, так и для q -бризеров. В работе получено количественное объяснение возникновения и расположения этих пиков. Они вызваны тем, что для соответствующих модовых чисел условие резонанса приближенно выполняется: $n\omega_{q_0} \approx \omega_{q \neq q_0}$. Легко убедиться в том, что пики возникают в верхней половине частотного спектра, а также только в случае низкочастотной затравочной моды. Именно это резонансное взаимодействие мод приводит к термализации.

2.3 Делокализация мод в цепочках Ферми-Паста-Улама с произвольным порядком нелинейности

До сих пор рассматривался узкий класс нелинейности в межэлементных связях: квадратичная и кубическая (т.н. α - и β -ФПУ). Однако, в случае нелинейности общего вида, разложение силы взаимодействия в ряд Тейлора вблизи состояния равновесия дает и члены более высокого порядка. При увеличении энергии/амплитуды колебаний эти члены могут становиться доминирующими и существенно влиять на локализацию мод, порог делокализации q -бризеров и развития сильного хаоса. Исследованию этой проблемы посвящен данный раздел.

Обобщенная модель Рассмотрим систему ФПУ с нелинейностью произвольного порядка:

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \chi[(x_{n+1} - x_n)^{\gamma-1} - (x_n - x_{n-1})^{\gamma-1}], \quad (2.9)$$

где x_n - отклонение n -й частицы от состояния равновесия, а граничные условия задаются $x_0 = x_{N+1} = 0$. Частные случаи квадратичной и кубической нелинейности $\gamma = 3$, $\gamma = 4$, известные как α - и β -ФПУ соответственно, рассмотрены выше. По аналогии, обобщенную модель (2.9) будем называть χ -ФПУ.

Как и прежде, каноническое преобразование

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin\left(\frac{\pi qn}{N+1}\right) \quad (2.10)$$

задает переход в пространство N нормальных мод с амплитудами $Q_q(t)$. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \omega_q \sum_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}=1}^N C_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}} \prod_{k=1}^{\gamma-1} \omega_{q_k} Q_{q_k}, \quad (2.11)$$

где $\omega_q = 2 \sin(\pi q/2(N+1))$ частоты нормальных мод, а коэффициенты межмодовых связей равны

$$C_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}} = \sum_{m=0}^{[\gamma/2-1]} \sum_{\pm} (-1)^m \delta_{q \pm q_1 \pm \dots \pm q_{\gamma-1}, 2m(N+1)} \quad (2.12)$$

Заметим, что модовые уравнения описывают динамику осцилляторов с нелинейной дальнедействующей связью.

Рассмотрим вопрос о продолжении линейных мод в нелинейных режим. Для этого положим $\chi = 0$, зададим энергию $E_{q_0} = E$ в нормальной моде $q = q_0$, в то время как остальные q -осцилляторы неподвижны. Такие начальные условия отвечают периодической траектории в фазовом пространстве нашей модели. Следуя [46], достаточным условием возможности продолжения является отсутствие резонансов $n\omega_{q_0} \neq \omega_{q \neq q_0}$, что, в общем случае, справедливо для конечного числа осцилляторов N [44]. Следовательно, можно ожидать, что периодическая траектория останется локализованной в q -пространстве по крайней мере до некоторого критического ненулевого значения χ .

Развивая данный подход, можно строить теорию возмущений для уравнения (2.11) по степеням малого параметра $\sigma = \frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}}$, взяв линейную моду q_0 в качестве нулевого приближения.

Локализация в системах с произвольным порядком нелинейности Будем строить теорию возмущений в случае произвольного порядка нелинейности γ . Используем точное периодическое решение линейной задачи $Q_{q_0}(t) =$

$A_0 \cos \omega_{q_0} t$, $Q_q(t) = 0$, $q \neq q_0$ в качестве нулевого приближения. Будем искать решение в виде $Q_q(t) = Q_q^{(0)}(t) + \sigma Q_q^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\sigma^2)$. Легко убедиться, что в первом порядке теории возмущений нетривиальными будут $Q_{(\kappa-1)q_0}^{(1)}(t)$, где $\kappa = 4, 6, \dots, \gamma$ для четных γ и $\kappa = 3, 5, \dots, \gamma$ для нечетных. Учитывая, что $C_{(\kappa-1)q_0, q_0, \dots, q_0} = C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}$, уравнения движения приобретают вид линейного осциллятора под действием внешней периодической силы:

$$\ddot{Q}_{(\kappa-1)q_0}^{(1)} + \omega_{(\kappa-1)q_0}^2 Q_{(\kappa-1)q_0}^{(1)} = -\omega_{(\kappa-1)q_0} C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2} [\omega_{q_0} A_0 \cos \omega_{q_0} t]^{\gamma-1} \quad (2.13)$$

Наибольший отклик будет наблюдаться на частоте $(\kappa - 1)\omega_{q_0}$, для которой условие резонанса выполнено наиболее точно. Поэтому амплитуды колебаний рассматриваемых мод будут

$$A_{(\kappa-1)q_0} \approx \frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \frac{\omega_{(\kappa-1)q_0} \left(C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}\right)^2}{2^{\gamma-2} \left[(\kappa-1)^2 \omega_{q_0}^2 - \omega_{(\kappa-1)q_0}^2\right]} \omega_{q_0}^{\gamma-1} A_0^{\gamma-1} \quad (2.14)$$

Для низкочастотных мод $q_0 \ll N$ имеем

$$(\kappa-1)^2 \omega_{q_0}^2 - \omega_{(\kappa-1)q_0}^2 \approx \frac{\omega_{(\kappa-1)q_0} \pi^3 q_0^3 (\kappa-1) \kappa (\kappa-2)}{12(N+1)^3}. \quad (2.15)$$

В результате

$$A_{(\kappa-1)q_0} \approx \frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \frac{12(N+1)^3 \left(C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}\right)^2}{2^{\gamma-2} \pi^3 q_0^3 (\kappa-1) \kappa (\kappa-2)} \omega_{q_0}^{\gamma-1} A_0^{\gamma-1}, \quad (2.16)$$

при этом частота периодического решения равна

$$\hat{\omega}_{q_0} = \omega_{q_0} \left[1 + \frac{\chi}{2^{\gamma-1}} \left(C_{\gamma-1}^{\gamma/2}\right)^2 \left(\frac{E}{N+1}\right)^{\gamma/2-1} \right], \quad (2.17)$$

Определив энергию моды как $E_q = \omega_q^2 A_q^2 / 2$, получим:

$$E_{(\kappa-1)q_0} = \lambda_{\gamma, \kappa}^2 E_{q_0}, \quad (2.18)$$

где коэффициент локализации равен

$$\lambda_{\gamma, \kappa} = \frac{3\chi \left(C_{\gamma-1}^{(\gamma-\kappa)/2}\right)^2 E_0^{\gamma/2-1}}{2^{\gamma-4} \pi^2 q_0^2 \kappa (\kappa-2) (N+1)^{\gamma/2-3}} \quad (2.19)$$

Соответствующая длина локализации в модовом пространстве $\xi_{\gamma, \kappa} : E_{(\kappa-1)q_0} = e^{(\kappa-2)q_0/\xi_{\gamma, \kappa}} E_{q_0}$ – будет при этом $\xi_{\gamma, \kappa} = -(\kappa-2)q_0 / (2 \ln \lambda_{\gamma, \kappa})$. Для более высоких

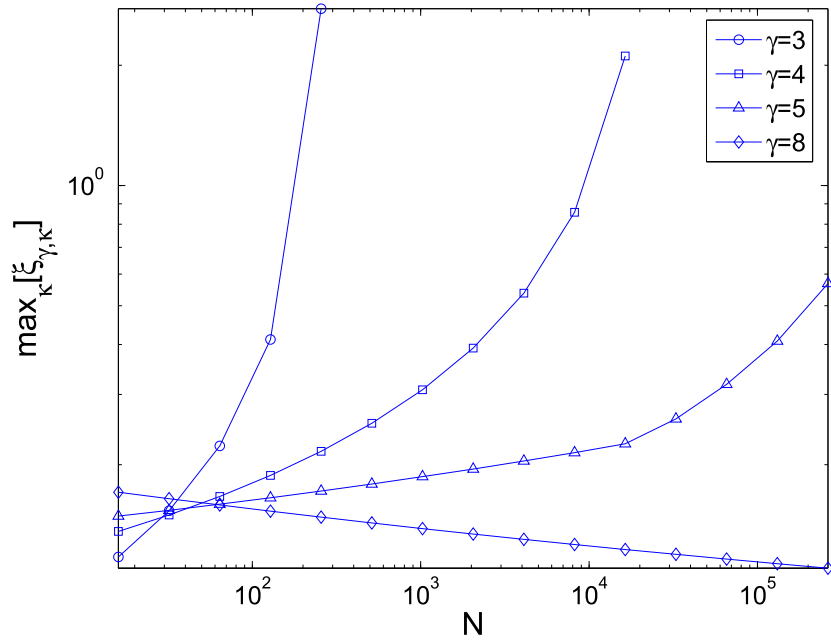


Рис. 2.5: Зависимость длины локализации, максимальной для данного γ , от размера цепочки N (2.19). Под порогом $\gamma^* = 6$ q -бризеры делокализуются с ростом N , над ним локализация усиливается

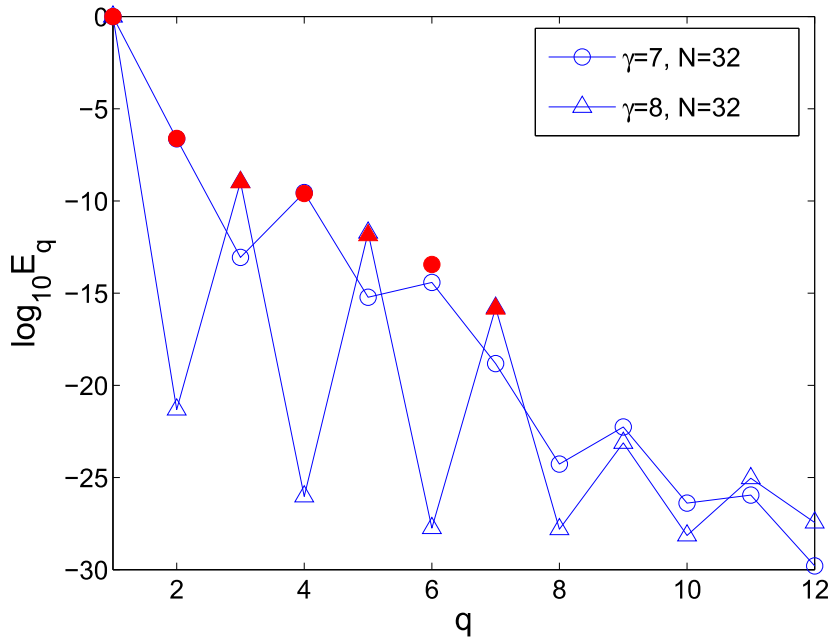


Рис. 2.6: Распределение энергии q -бризеров с $q_0 = 1$, $\chi = 0.001$, $N = 32$ в модовом пространстве для нечетной и четной нелинейностей высокого порядка: $\gamma = 7$ и $\gamma = 8$. Закрашенные символы соответствуют аналитической оценке (2.19)

порядков теории возмущений результат усложняется, так как увеличивается число мод, взаимодействие которых надо учесть. Поэтому мы ограничимся формулой (2.19), аппроксимируя дальнейший спад энергии этим законом.

Для определения порога делокализации этот результат является достаточным. Используя $\lambda_{\gamma,\kappa} = 1$ в качестве критерия, получаем, что делокализация происходит при увеличении энергии системы, нелинейности. Кроме того, возможна делокализация при увеличении N . Последнее зависит от порядка нелинейности. Так, существует порог $\gamma^* = 6$, выше которого локализация усиливается с N . Таким образом, в больших системах, а также при наличии смешанного типа нелинейности, локализация и порог делокализации определяется нелинейными членами с порядком нелинейности $\gamma < 6$. Зависимость длины локализации $\max_{\kappa}[\xi_{\gamma,\kappa}]$ от длины цепочки иллюстрируется на рис.2.5.

Численные результаты Обратимся к результатам численных экспериментов. Будем использовать стандартный алгоритм нахождения периодических траекторий (см. Приложение).

На рис.2.6 представлены q -бризеры полученные для порядков нелинейности $\gamma = 7$ и $\gamma = 8$ при $\chi = 0.001$ и длине цепочки $N = 32$. Как и предсказывается теорией, распределение энергии в модовом пространстве имеет пики в $q = 3q_0, 5q_0, \dots, (\gamma - 1)q_0$ для четных γ и $q = 2q_0, 4q_0, \dots, (\gamma - 1)q_0$ для нечетных. Аналитическая оценка профиля q -бризера (2.19) хорошо согласуется с численными результатами (закрашенные символы на рис.2.6).

Наиболее важное следствие (2.19) – делокализация q -бризеров с увеличением размеров системы N при $\gamma < 6$ и усиливающаяся локализация при $\gamma > 6$ – также находит численное подтверждение (рис.2.7, сравните изменение профилей q -бризеров для $\gamma = 4$ (модель β -ФПУ) и $\gamma = 10$ при увеличении размеров системы с $N = 32$ до $N = 64$).

Исследуем теперь процесс делокализации энергии и термализации системы из начального одномодового возбуждения. Для этого будем интегрировать динамические уравнения (2.9) с начальными условиями, отвечающими энергии $E = 1$, сконцентрированной в самой низкочастотной моде. Другие параметры системы равны $N = 1000$, $\chi = 1$, время интегрирования $t = 10^7$ составляет порядка 5000 периодов колебаний начальной моды. Эффективное число возбужденных мод характеризуется "числом возбуждения" $P = 1/(\sum_{q=1}^N e_q^2)$, где $e_q = E_q/E$ являются нормированными модовыми энергиями. (Например если число возбужденных мод равно m , их энергии совпадают, а энергии остальных мод равны нулю, то $P = m$). Эта характеристика позволяет визуализировать процесс делокализации энергии и возбуждения мод. Результаты показывают ярко выраженную термализацию системы при $\gamma < 6$ и ее отсутствие (по крайней мере, на наблюдаемых временных масштабах)

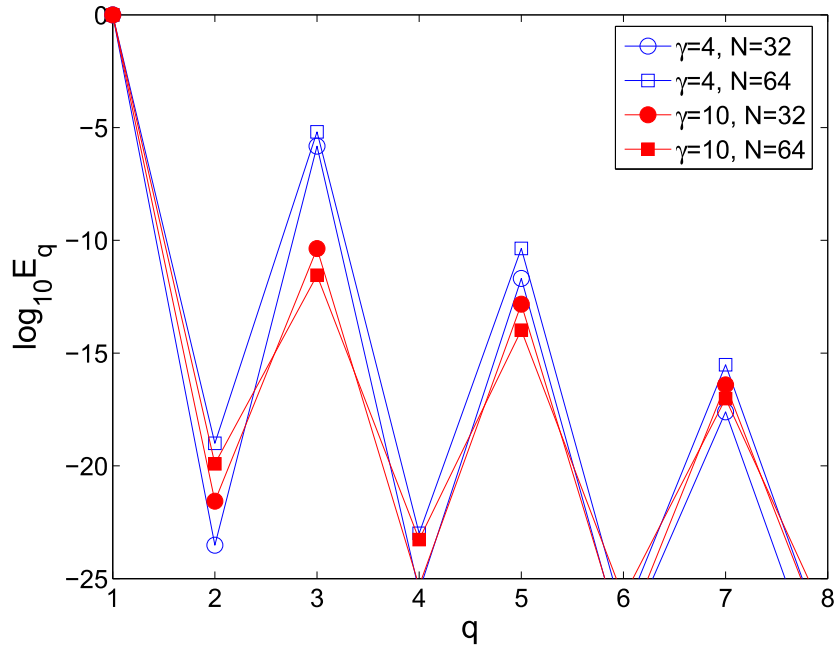


Рис. 2.7: Зависимость локализации q -бризеров от длины цепочки для степени нелинейности ниже и выше порогового значения $\gamma = 6$. Здесь $q_0 = 1$, $\chi = 0.001$, $\gamma = 4$ и $\gamma = 10$

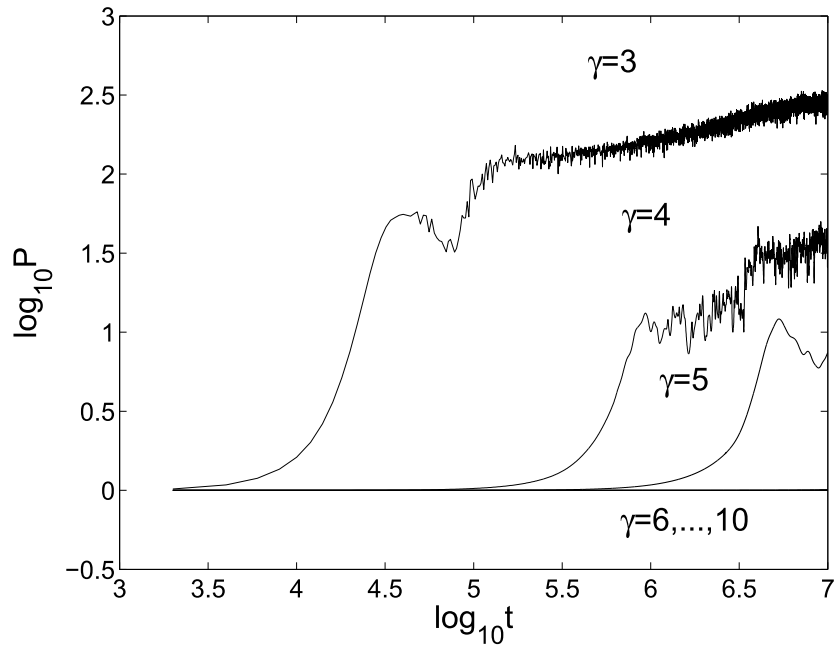


Рис. 2.8: Эволюция числа возбуждения для различных показателей нелинейности. Здесь мода $q_0 = 1$ имеет энергию $E = 1$ в начальный момент времени $t = 0$, $\chi = 1$, $N = 1000$

для нелинейностей более высокого порядка (рис.2.8).

Устойчивость. Слабый хаос Помимо режима сильного хаоса, в котором наблюдается быстрая делокализация энергии, существует так называемый режим слабого хаоса, характеризующийся хаотической динамикой возбужденных соседних мод и локализацией этого возбуждения [15]. Делокализация в таком режиме должна иметь место в силу диффузии Арнольда, однако ее характерные временные масштабы лежат за пределами современных компьютерных возможностей. Как обсуждалось выше, режиму слабого хаоса отвечает потеря устойчивости q -бризеров [34, 35, 39, 42].

Для того, чтобы получить зависимость порога слабого хаоса от порядка нелинейности в системе ФПУ, рассмотрим задачу о линейной устойчивости q -бризеров в (2.9). (Заметим, что решения сохраняют устойчивость в случае нечетных порядков $\gamma = 3$ во всей области существования локализованных q -бризерных траекторий [34, 35]). Линеаризация уравнений движения в модовых амплитудах (2.11) в окрестности q -бризерного решения $Q_q = \hat{Q}_q(t) + \xi_q(t)$ с центральной модой q_0 и частотой $\hat{\omega}_{q_0}$ дает

$$\ddot{\xi}_q + \omega_q^2 \xi_q = -\frac{\chi(\gamma-1)\omega_q}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \sum_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}=1}^N B_{q_1, \dots, q_n} \left[\prod_{k=2}^{\gamma-1} \omega_{q_k} \hat{Q}_{q_k} \right] \omega_{q_1} \xi_{q_1} \quad (2.20)$$

Для $\gamma = 4$ наиболее сильная неустойчивость возникает из-за первичного параметрического резонанса в (2.20), который дает взаимодействие центральной моды и пар резонансных мод $\tilde{q}, \tilde{p} = q_0 \pm m$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Для более высоких порядков нелинейности число резонансных комбинаций возрастает, и необходимо рассматривать резонансное взаимодействие во всех парах класса $\tilde{q}, \tilde{p} = (\kappa - 2)q_0 \pm m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $\kappa = 4, 6, \dots, \gamma - 2$. Для каждой из комбинаций (оставляя только резонансные члены в уравнениях движения) получаем:

$$\ddot{\xi}_{\tilde{q}, \tilde{p}} + \omega_{\tilde{q}, \tilde{p}}^2 \xi_{\tilde{q}, \tilde{p}} = -\nu \omega_{\tilde{q}} \omega_{\tilde{p}} \xi_{\tilde{p}, \tilde{q}} \cos[(\kappa - 2)\hat{\omega}_{q_0} t] - 2\nu h \omega_{\tilde{q}, \tilde{p}}^2 \xi_{\tilde{q}, \tilde{p}}, \quad (2.21)$$

где

$$\nu = -\frac{\chi(\gamma-1)}{2^{\gamma-3}} \left(\frac{E}{N+1} \right)^{\gamma/2-1} \left(C_{\gamma-2}^{(\gamma-\kappa)/2} \right)^2, \quad (2.22)$$

$$h = \frac{1}{4} \left[C_{\gamma-2}^{\gamma/2-1} / C_{\gamma-2}^{(\gamma-\kappa)/2} \right]^2$$

Стандартное исследование [34, 35] показывает, что первая неустойчивость возникает в результате резонансного взаимодействия в паре $\kappa = 4$ и $m = 1$ при

$$\left(C_{\gamma-2}^{\gamma/2-2} \right)^2 \frac{(\gamma-1)\chi}{2^{\gamma-5}\pi^2} \frac{E^{\gamma/2-1}}{(N+1)^{\gamma/2-3}} > 1 \quad (2.23)$$

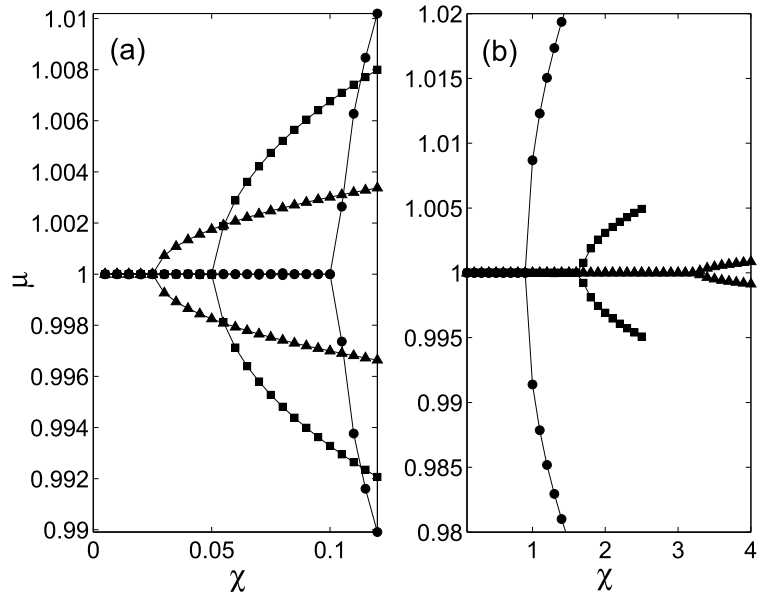


Рис. 2.9: Зависимость абсолютных величин мультипликаторов Флоке μ для q -бризерного решения от величины нелинейности при (a) $\gamma = 4$ и (b) $\gamma = 8$ ($N = 16$ – окружности, $N = 32$ – квадраты, $N = 64$ – треугольники)

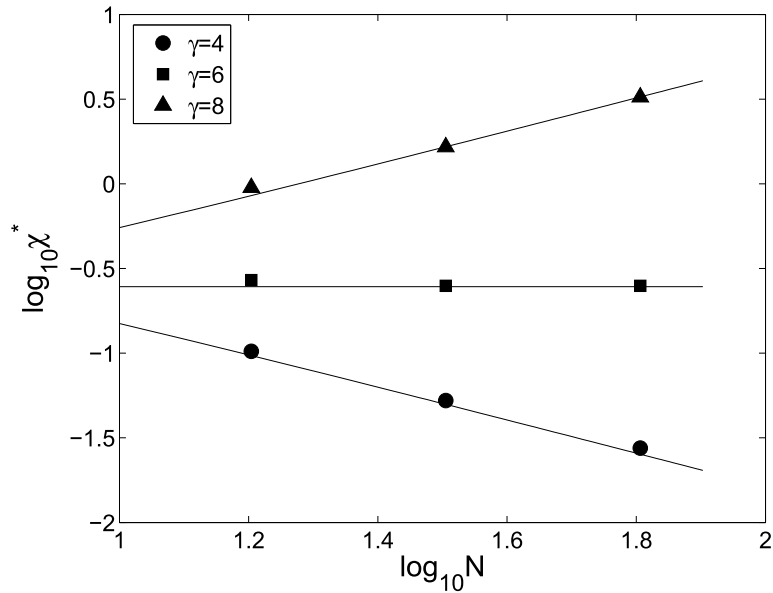


Рис. 2.10: Теоретические (2.23) (сплошные линии) и численные (маркеры) оценки зависимости порога неустойчивости от порядка нелинейности γ

Легко видеть, что зависимость порога неустойчивости χ^* от размеров системы характеризуется N тем же самым критическим значением порядка нелинейности $\gamma^* = 6$, что и порог делокализации. Для $\gamma < 6$ порог неустойчивости монотонно стремится к нулю при возрастании N ; для любого наперед заданного набора значений энергии и коэффициента нелинейности существует такая длина цепочки N , что в цепочках большего размера q -бризеры будут неустойчивыми. Напротив, для $\gamma > 6$ порог неустойчивости по коэффициенту нелинейности монотонно увеличивается с размером системы; даже если q -бризеры были неустойчивы в коротких цепочках, они становятся устойчивыми, когда размер системы превышает пороговый, определяемый соотношением (2.23). Учитывая соответствие неустойчивости q -бризеров установлению режима слабого хаоса, мы приходим к тем же свойствам зависимости порога слабого хаоса от порядка нелинейности, что и для порога сильного хаоса. А именно, в системах ФПУ с порядком нелинейности, превышающим критический, слабый хаос подавляется в длинных цепочках. В случае нелинейного потенциала связи общего вида только три низших нелинейных члена в разложении Тейлора вблизи равновесия оказывают существенное влияние и вызывают развитие режима слабого хаоса.

В заключение приведем результаты численного анализа линейной устойчивости q -бризеров. В качестве примера выберем q -бризер с центральной модой $q_0 = 3$. Будем вычислять мультипликаторы Флоке этой периодической траектории в зависимости от коэффициента нелинейности для $E = 1$, $N = 16, 32, 64$, и $\gamma = 4, 6, 8$. В соответствии с (2.23), порог неустойчивости $\max\{\mu\} > 1$ увеличивается с ростом N при $\gamma = 4$ и уменьшается при $\gamma = 8$ (рис.2.9). Численные результаты зависимости χ^* согласуются с теоретическими предсказаниями не только качественно, но и количественно (рис.2.10).

2.4 q -бризеры в многомерных решетках

В этом разделе мы рассмотрим вопросы существования, локализации в пространстве мод и устойчивости q -бризерных решений в двумерных и трехмерных решетках с акустическим спектром. Такая постановка задачи вызывает большой интерес, поскольку является более физической, чем одномерная задача. Более того, свойства q -бризеров в многомерных решетках существенно отличаются от одномерного случая.

Динамика двумерных и трехмерных решеток размером N^d ($d = 2$ и 3

соответственно) описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} (p_{\mathbf{n}}^2 + \sum_{m \in D(\mathbf{n})} [\frac{1}{2}(x_m - x_{\mathbf{n}})^2 + \frac{\beta}{4}(x_m - x_{\mathbf{n}})^4]) \quad (2.24)$$

где $x_{\mathbf{n}}(t)$ - отклонение $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ -ой частицы из исходного положения, $p_{\mathbf{n}}(t)$ - ее импульс, $D(\mathbf{n})$ - множество частиц, с которыми она связана. Используются фиксированные граничные условия: $x_{\mathbf{n}} = 0$ если $n_l = 0$ или $n_l = N + 1$ хотя бы для одной из компонент \mathbf{n} .

Используя каноническое преобразование

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{n}}(t) &= \left(\frac{2}{N+1} \right)^{d/2} \sum_{q_1, \dots, q_d=1}^N Q_{\mathbf{q}}(t) \prod_{i=1}^d \sin \left(\frac{\pi q_i n_i}{N+1} \right) \\ p_{\mathbf{n}}(t) &= \left(\frac{2}{N+1} \right)^{d/2} \sum_{q_1, \dots, q_d=1}^N P_{\mathbf{q}}(t) \prod_{i=1}^d \sin \left(\frac{\pi q_i n_i}{N+1} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

можно перейти в пространство нормальных мод с N^d координатами $Q_{\mathbf{q}}(t) \equiv Q_{q_1, \dots, q_d}(t)$ и импульсами $P_{\mathbf{q}}(t) \equiv P_{q_1, \dots, q_d}(t)$ соответственно. Пространство нормальных мод имеет координатную сетку \mathbf{q} и представляет собой d -мерную решетку, аналогично имеющейся в прямом пространстве.

Уравнения движения в пространстве мод имеют вид

$$\ddot{Q}_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}}^2 Q_{\mathbf{q}} = - \frac{16\beta}{(2N+2)^d} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}} C_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}} Q_{\mathbf{p}} Q_{\mathbf{r}} Q_{\mathbf{s}}. \quad (2.26)$$

Здесь

$$\Omega_{\mathbf{q}} = 2 \sqrt{\sum_{i=1}^d (\sin(\pi q_i / 2(N+1)))^2} \quad (2.27)$$

– частоты нормальных мод. Обратим внимание на то, что все линейные моды, кроме «диагональных» $Q_{q_1=\dots=q_d}$ являются по крайней мере d -кратно вырожденными. Коэффициенты связи $C_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}}$ описывают взаимодействие между модами, имеющее сложный, сильно нелокальный характер, аналогично одномерному случаю. Например, в двумерном случае

$$C_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}} = \omega_{q_1} \omega_{p_1} \omega_{r_1} \omega_{s_1} L_{q_1, p_1, r_1, s_1} \hat{L}_{q_2, p_2, r_2, s_2} + \omega_{q_2} \omega_{p_2} \omega_{r_2} \omega_{s_2} \hat{L}_{q_1, p_1, r_1, s_1} L_{q_2, p_2, r_2, s_2}. \quad (2.28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{q, p, r, s} &= \sum_{\pm} (\delta_{q \pm p \pm r \pm s, 0} - \delta_{q \pm p \pm r \pm s, \pm 2(N+1)}), \\ \hat{L}_{q, p, r, s} &= \sum_{\pm} (-1)^m (\delta_{q \pm p \pm r \pm s, 0} - \delta_{q \pm p \pm r \pm s, \pm 2(N+1)}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где m - число знаков "-" при переборе " \pm " вариантов. В трехмерном случае

$$C_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{s}} = \omega_{q_1}\omega_{p_1}\omega_{r_1}\omega_{s_1}L_{q_1,p_1,r_1,s_1}\hat{L}_{q_2,p_2,r_2,s_2}\hat{L}_{q_3,p_3,r_3,s_3} + \omega_{q_2}\omega_{p_2}\omega_{r_2}\omega_{s_2}\hat{L}_{q_1,p_1,r_1,s_1} \times \\ \times L_{q_2,p_2,r_2,s_2}\hat{L}_{q_3,p_3,r_3,s_3} + \omega_{q_3}\omega_{p_3}\omega_{r_3}\omega_{s_3}\hat{L}_{q_1,p_1,r_1,s_1}\hat{L}_{q_2,p_2,r_2,s_2}L_{q_3,p_3,r_3,s_3} \quad (2.30)$$

При колебаниях малой амплитуды нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь. Тогда, согласно (2.26), колебания в осцилляторах в q -пространстве происходят независимо, и в каждом из них сохраняется энергия $E_q = \frac{1}{2}(\dot{Q}_q^2 + \Omega_q^2 Q_q^2)$. Более того, только один из q -осцилляторов может находиться в возбужденном состоянии, то есть $E_q \neq 0$ только для $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_0$. Такие колебания являются тривиальными периодическими и локализованными в q -пространстве решениями (q -бризерами) для $\beta = 0$.

Как было указано выше, такие периодические траектории могут быть продолжены в область ненулевой нелинейности при фиксированной амплитуде колебаний моды q или полной энергии, поскольку при любой конечной длине цепочки выполняется условие нерезонансности $n\Omega_{q_0} \neq \Omega_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0}$. Это доказательство применимо к многомерным решеткам в случае, когда «затравочная» мода \mathbf{q} лежит на основной диагонали и $2\Omega_{\mathbf{q}} > 4$. Проверка показала, что для остальных мод с основной диагонали условие нерезонансности также выполняется. Моды, не лежащие на основной диагонали, являются, как минимум, d -кратно вырожденными, поэтому к ним теорема напрямую неприменима. С другой стороны, это вырождение снимается в решетках с анизотропией. Более того, вырождение также снимается неинтегрируемостью нелинейной системы (2.26), и дискретный набор периодических траекторий сохраняется. В численном эксперименте q -бризеры успешно наблюдаются и в изотропных решетках; сходимость численного метода к периодическим траекториям остается хорошей.

Для нахождения q -бризерных решений, а также вычисления их Флоке-спектра можно использовать те же алгоритмы, что и для одномерной цепочки (Приложение 1 к данной главе). Аналитические результаты можно получить с помощью асимптотических методов.

Локализация q -бризеров в двумерных решетках Рассмотрим сначала случай двумерной решетки $d = 2$. Численные методы позволяют получать различные симметричные (то есть с $(q_0)_1 = (q_0)_2$, Рис.2.11,2.12) и асимметричные (то есть с $(q_0)_1 \neq (q_0)_2$) q -бризеры в низкочастотной области спектра, которые экспоненциально локализованы в q -пространстве. Заметим, что, в силу симметрии четности, уравнения (2.24) являются инвариантными относительно замены $x_{\mathbf{n}} \rightarrow -x_{\mathbf{n}}$ для всех \mathbf{n} . Так, модой $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$ могут

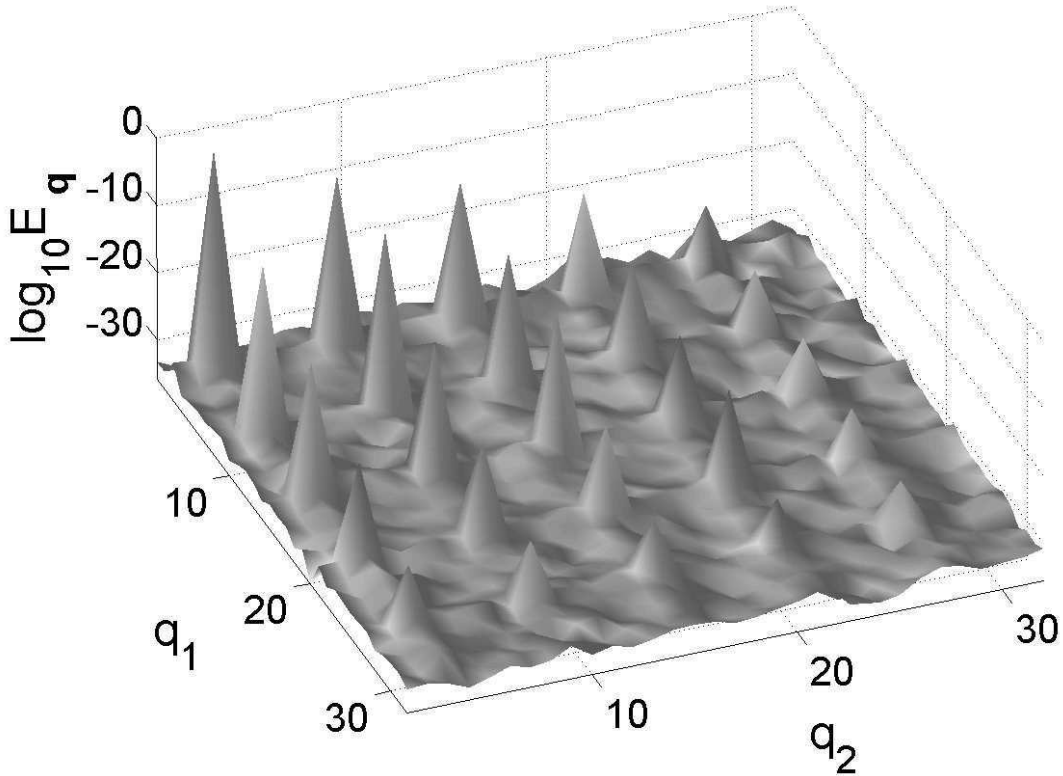


Рис. 2.11: q -бризер в случае $d = 2$ при $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$ для $\beta = 0.5$, $E_{tot} = 1.5$, $\hat{\Omega} \approx 0.403$, $N = 32$.

возбуждаться только моды с нечетными компонентами (q_1, q_2) . В отличие от случая $d = 1$, степень локализации энергии (особенно вдоль диагонали $\mathbf{q}(n) = (2n - 1)\mathbf{q}_0$) остается практически постоянной при увеличении размеров решетки (Рис.2.12).

Вырожденный частотный спектр обуславливает существование мульти- q -бризеров, то есть q -бризеров, имеющих сразу две (или более) затравочных мод. Действительно, численные методы позволяют продолжать многомодовые одночастотные периодические решения для линейной решетки $E_{\mathbf{q}} \neq 0$ for $\mathbf{q} \in S(\mathbf{q}_0)\{\mathbf{q}_0 : \Omega_{\mathbf{q}} = \Omega_{\mathbf{q}_0}\}$ в нелинейную область. Например, совокупность $\mathbf{q}_0 = (2, 3)$, $\mathbf{q}_0^* = (3, 2)$ приводит к рождению двух (асимметричных) q -бризерных решений с энергией, преимущественно сконцентрированной в одной из двух затравочных мод, и двух симметричных q -бризеров с одинаковой энергией в каждой из затравочных мод, но разной фазировкой колебаний (в фазе и в противофазе).

Построив асимптотическое разложение для решения (2.26) по степеням малого параметра $\sigma = \beta/(N + 1)^2$, можно исследовать структуру q -бризерного решения $\hat{Q}_{\mathbf{q}}(t)$ с затравочной модой в низкочастотном конце спектра \mathbf{q}_0 . Энергии мод на диагонали q -бризера $\mathbf{q}_0, 3\mathbf{q}_0, \dots, (2n + 1)\mathbf{q}_0, \dots \ll (N, N)$ оказыва-

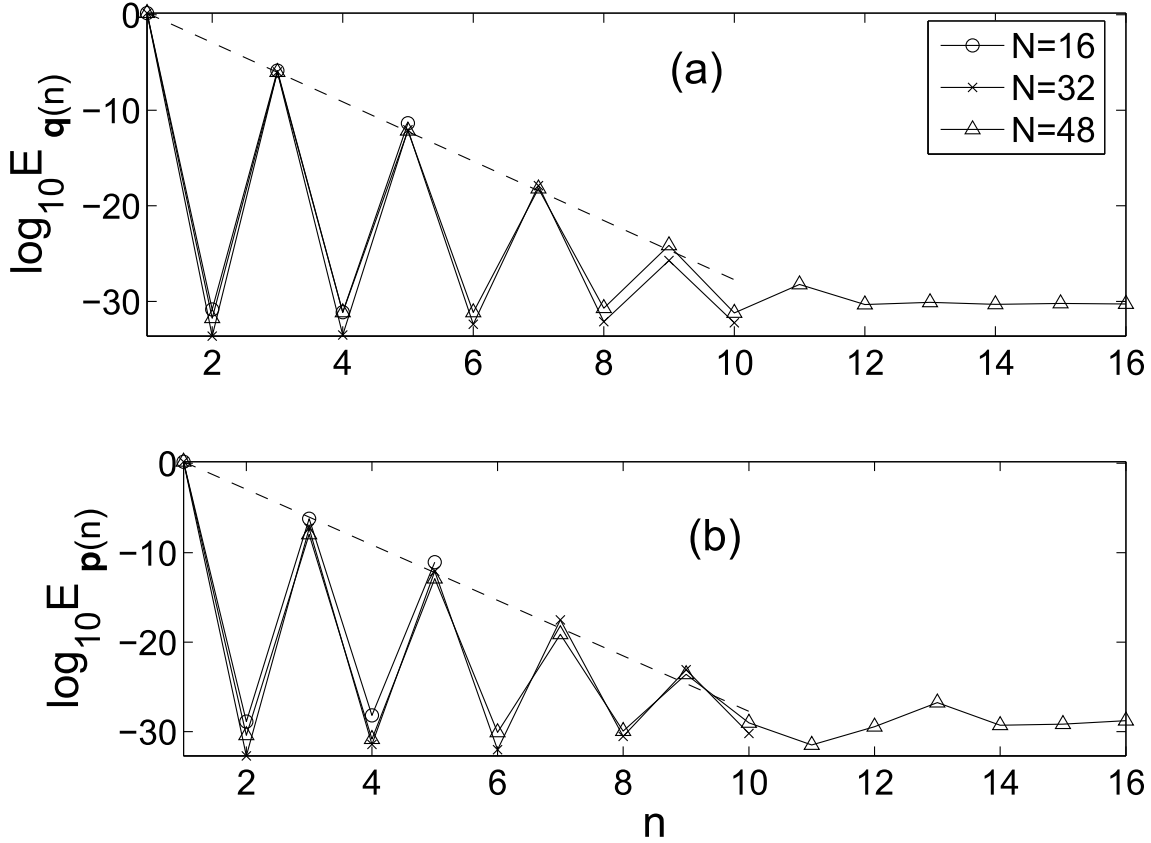


Рис. 2.12: Энергии нормальных мод вдоль (а) диагонали $\mathbf{q}(n) = (2n - 1)\mathbf{q}_0$ и (б) боковой стороны $\mathbf{p}(n) = ((q_{0,1}, (2n - 1)q_{0,2})$ для q -бризера с $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$, $\beta = 0.5$, $E_{tot} = 1.5$, $N = 16, 32, 48$ и аналитическая оценка (2.31) (штрихованная линия).

ются экспоненциально локализованы:

$$E_{(2n+1)\mathbf{q}_0} = \lambda_d^{2n} E_{\mathbf{q}_0}, \quad \lambda_d = \frac{3\beta E_{\mathbf{q}_0} N^{2-d}}{2^{2+d} \pi^2 |\mathbf{q}_0|^2}. \quad (2.31)$$

Штрихованные линии на Рис.2.12(а) задаются формулами (2.31) и обнаруживают очень хорошее согласование с результатами численного эксперимента. Распределение энергии между остальными модами q -бризера значительно сложнее, однако локализация вдоль диагонали (2.31) дает хорошую оценку (Рис.2.12(б)). Отметим, что локализация вдоль диагонали слабее, чем по другим направлениям, по крайней мере для больших N . Таким образом, структура q -бризера в q -пространстве обладает следующими свойствами: (i) степень локализации остается постоянной при неограниченном увеличении размеров решетки и неизменных остальных параметрах, в отличие от одномерной цепочки, где q -бризеры делокализуются с $\lambda \propto (N + 1)$, (ii) в пределе постоянной плотности энергии $\varepsilon = E_{\mathbf{q}_0}/(N + 1)^2$ и волнового вектора q -бризера $\kappa_0 = \mathbf{q}_0/(N + 1)$ степень локализации остается постоянной при $N \rightarrow \infty$ (аналогично одномерному случаю), (iii) при меньших β , $E_{\mathbf{q}_0}$ и больших \mathbf{q}_0 q -

бризеры становятся более компактными. Эти результаты согласуются с соображениями о масштабной инвариантности q -бризеров в системе ФПУ [40, 41].

Устойчивость q -бризеров в двумерных решетках Исследуем устойчивость найденных q -бризерных решений. Для этого линеаризуем уравнения в малой окрестности этой траектории и вычислим собственные значения (мультипликаторы) и собственные вектора соответствующей симплектической Флоке-матрицы. Напомним, что периодическая траектория является неустойчивой, если имеются мультипликаторы, лежащие вне единичной окружности.

Обратимся сначала к результатам численных экспериментов. Зависимость абсолютных значений мультипликаторов для симметричных $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$ и асимметричных $\mathbf{q}_0 = (2, 3)$ q -бризеров от параметра нелинейности β для двумерных решеток различного размера N приведена на Рис.2.13. Аналогично одномерному случаю, q -бризеры являются устойчивыми при достаточно слабой нелинейности. Когда β превышает определенный порог β^* , несколько мультипликаторов покидают единичную окружность (равное число оказывается вне и внутри нее), и q -бризер становится неустойчивым. Принципиальным отличием от одномерного случая является то, что порог неустойчивости β^* быстро возрастает с увеличением размеров решетки Рис.2.13(a). Для ряда решеток большого размера (реализуемых в численном эксперименте) с $N = 20, 30, 40$ (не показаны на Рис.2.13(a)) было проверено, что q -бризер с $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$ сохраняет устойчивость по крайней мере до $\beta = 10.0$. Для малых N зависимость $\beta^*(N)$ может быть немонотонной (Рис.2.13(b)). Также, она может быть чувствительна к конкретному затравочному волновому вектору \mathbf{q}_0 , сравните Рис.2.13(a) и (b).

Аналитическое исследование устойчивости q -бризеров выполняется аналогично одномерному случаю. Используя стандартный подход теории возмущений можно аппроксимировать частоту q -бризерного решения как

$$\hat{\Omega} = \Omega_{\mathbf{q}_0}(1 + 9h\rho) + O(\mu^2), \quad (2.32)$$

где $h = 3\beta E_{\mathbf{q}_0}/(N + 1)^2$ - малый параметр, а $\rho = (w_{(\mathbf{q}_0)_1}^2 + w_{(\mathbf{q}_0)_2}^2)/\Omega_{\mathbf{q}_0}^4$. Линеаризуем далее уравнения движения (2.26) вблизи q -бризера:

$$Q_q = \hat{Q}_q(t) + \xi_q \quad (2.33)$$

Получим:

$$\ddot{\xi}_q + \Omega_q^2 \xi_q = -4h(1 + \cos 2\hat{\Omega}t) \sum_p C_{q, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0, p} / \Omega_{\mathbf{q}_0}^2 \xi_p + O(h^2) \quad (2.34)$$

Наиболее сильная неустойчивость, вызванная параметрическим резонансом

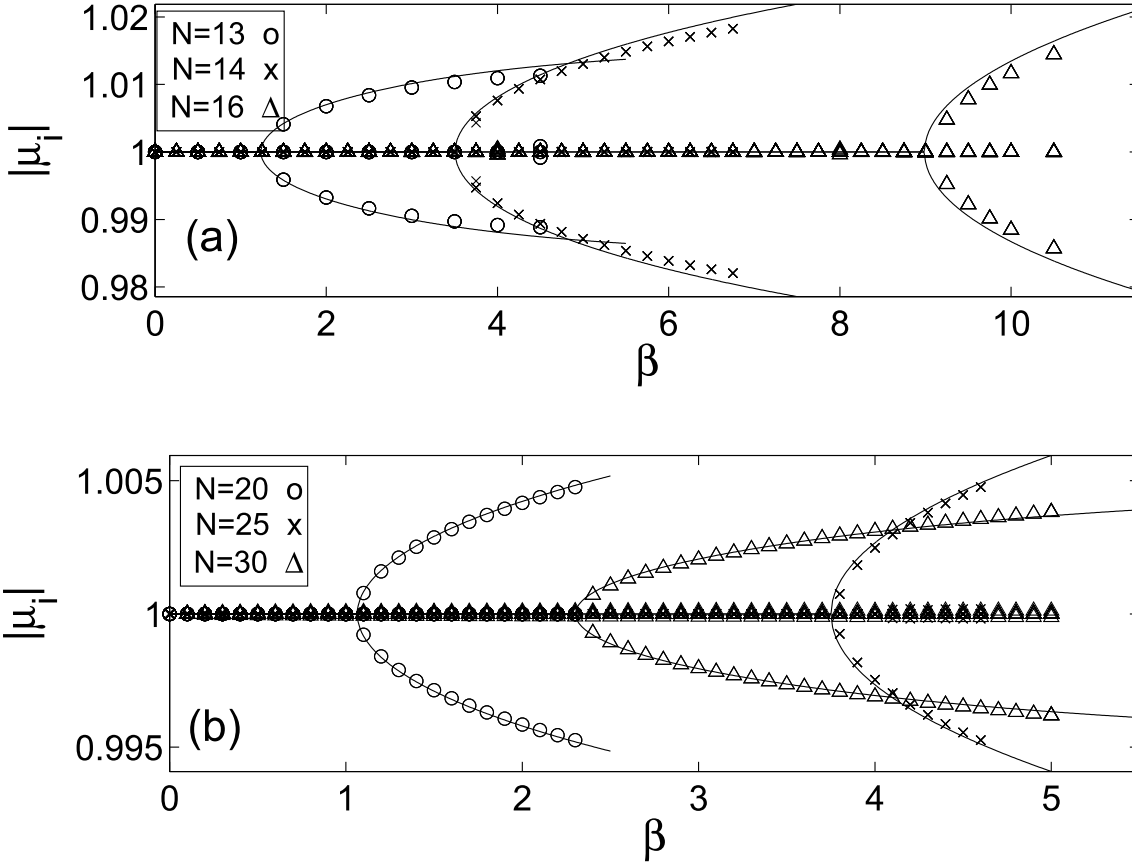


Рис. 2.13: Абсолютные величины собственных значений Флоке (маркеры) и аналитические кривые (сплошные линии) для q -бризеров с полной энергией $E_{tot} = 1.5$ и (а) $\mathbf{q}_0 = (3, 3)$, $N = 13, 14, 16$ (неустойчивости соответствуют $\mathbf{k} = (1, 2)$ и $\mathbf{k} = (2, 1)$) и (б) $\mathbf{q}_0 = (2, 3)$, $N = 20, 25, 30$ (неустойчивости соответствуют $\mathbf{k} = (1, 1)$ для $N = 20, 25$ и $\mathbf{k} = (1, 2)$ для $N = 30$).

первого порядка в уравнении (2.34), развивается при взаимодействии пар резонансных мод $\mathbf{q} + \mathbf{p} = 2\mathbf{q}_0$ при ненулевом векторе $\mathbf{k} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}$.

Критерий данной неустойчивости имеет следующий вид:

$$0.25B^2W_qW_p - (\delta W_qW_p - 2(A_pW_q + A_qW_p))^2 > 0, \quad (2.35)$$

а абсолютные значения мультипликаторов, покидающих при этом единичную окружность, равны

$$|\mu| = 1 \pm \frac{2\pi h\Omega_{q_0}}{\hat{\Omega}W_qW_p} \sqrt{0.25B^2W_qW_p - [\delta W_qW_p - 2(A_pW_q + A_qW_p)]^2} \quad (2.36)$$

Здесь

$$W_{q,p} = \frac{\Omega_{q,p}}{\Omega_q + \Omega_q}, \quad h\delta = \frac{2\hat{\Omega} - \Omega_q - \Omega_q}{\Omega_q + \Omega_q}, \quad (2.37)$$

$$A_{q,p} = \frac{\omega_{q_1,p_1}^2 \omega_{(q_0)_1}^2 + \omega_{q_2,p_2}^2 \omega_{(q_0)_2}^2}{\Omega_{q_0}^4}, \quad B = \frac{\omega_{q_1} \omega_{p_1} \omega_{(q_0)_1}^2 + \omega_{q_2} \omega_{p_2} \omega_{(q_0)_2}^2}{\Omega_{q_0}^4}$$

Бифуркационные значения и величина мультипликаторов в окрестности резонанса хорошо согласуются с численными результатами. (Рис.2.13). Для того, чтобы проанализировать полученные зависимости, предположим, что $|k_{1,2}| \ll (q_0)_{1,2} \ll N$ и получим приближенное выражение

$$\begin{aligned} 3\beta^* E_{q_0}/(N+1)^2 &= 8(\Omega_q + \Omega_p - 2\Omega_{q_0})/\Omega_{q_0} \\ &\approx 8 \left(\frac{(q_0)_2 k_1 - (q_0)_1 k_2}{q_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Эта оценка объясняет следующие основные свойства наблюдаемой неустойчивости. Первой развивается неустойчивость с \mathbf{k} , которое минимизирует выражение $|(q_0)_2 k_1 - (q_0)_1 k_2|$. Это приводит к немонотонной и разрывной зависимости $\beta^*(\mathbf{q}_0, N)$ для малых решеток. Эта величина монотонно возрастает с увеличением N пока \mathbf{k} неизменно (Рис.2.13(a)); когда \mathbf{k} изменяется, β^* сокращается скачком (Рис.2.13(b)). Кроме того, порог неустойчивости масштабируется по закону $\beta^* \propto q_0^{-2}$ и $\beta^* \propto N^2$.

Существование и устойчивость q -бризеров в трехмерных решетках

q -Бризеры были обнаружены и в трехмерных решетках (Рис.2.14). Строя q -бризерные решения методом теории возмущений в виде разложения по степеням малого параметра, можно показать, что для низкочастотной затравочной моды \mathbf{q}_0 локализации энергии нормальных мод по «основному» направлению $3\mathbf{q}_0, \dots, (2n+1)\mathbf{q}_0, \dots \ll (N, N, N)$ задается уравнением (2.31) с $d=3$. Эта зависимость хорошо аппроксимирует структуру q -бризера $\mathbf{q}_0 = (3, 3, 3)$, найденную численно (Рис.2.15). В отличие от двумерного случая, радиус локализации уменьшается с увеличением размеров решетки $\lambda_{3d} \propto (N+1)^{-1}$. При постоянной плотности энергии $\varepsilon = E/(N+1)^3$ и волновом векторе q -бризера $\mathbf{\kappa}_0$ степень локализации не зависит от размеров решетки, как и в решетках низшей размерности. Несмотря на трудности в численном исследовании устойчивости q -бризеров в достаточно больших трехмерных решетках, вызванные ограниченной производительностью вычислительной техники, аналитическое исследование было выполнено. Оказалось, что при фиксированной полной энергии решетки $\beta^* \propto (N+1)^3$ и не увеличивается при фиксированных плотности энергии ε и волновом числе \mathbf{q}_0 . Также можно ожидать чувствительную зависимость порога неустойчивости от номера затравочной моды q -бризера и размера решетки при малых N .

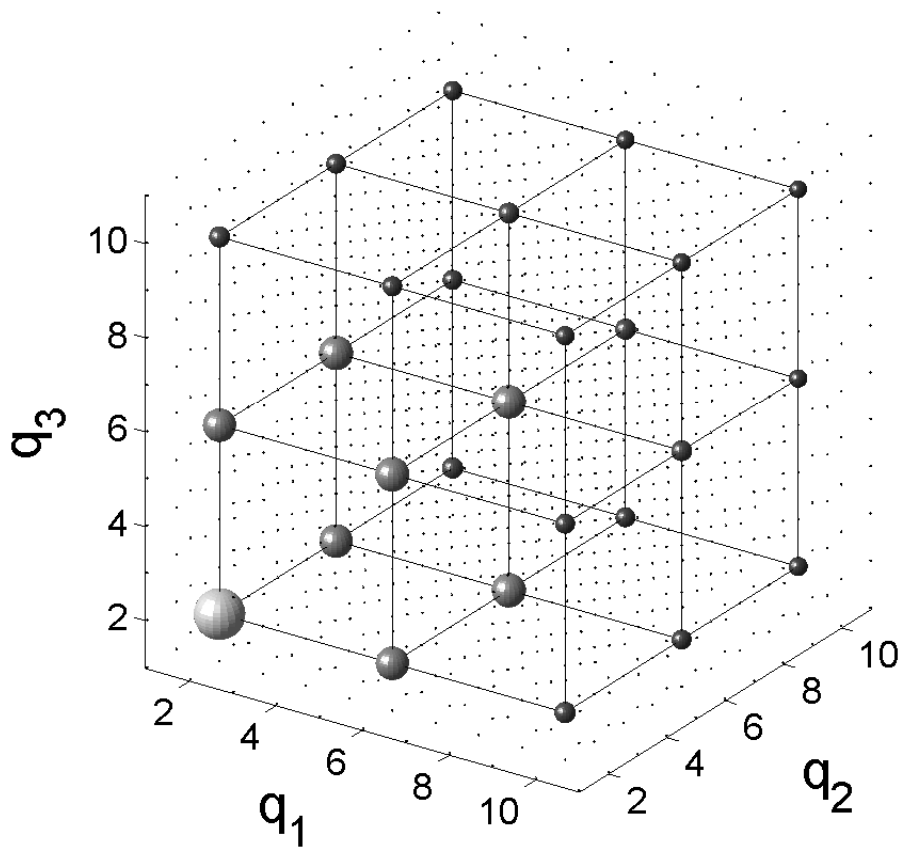


Рис. 2.14: Структура q -бризера с $\mathbf{q}_0 = (2, 2, 2)$ в трехмерной решетке при $N = 11$, $\beta = 0.5$, $E_{tot} = 1.5$, $\hat{\Omega} \approx 0.897$. Размер сфер прямо пропорционален десятичному логарифму энергии нормальных мод $E_{\mathbf{q}}$.

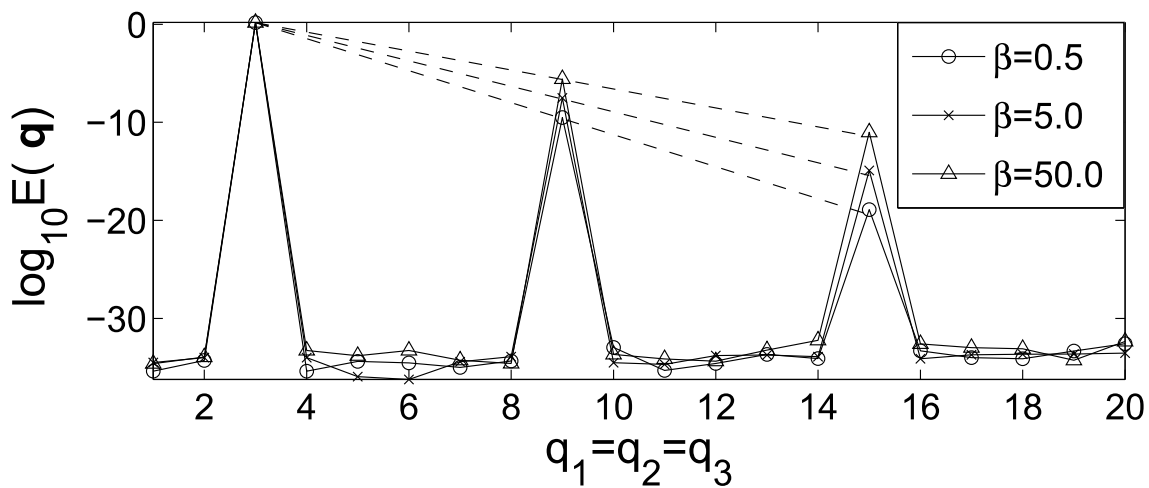


Рис. 2.15: Энергии нормальных мод вдоль ведущего направления $\mathbf{q}(n) = (2n + 1)\mathbf{q}_0$ при $\mathbf{q}_0 = (3, 3, 3)$, $E_{tot} = 1.5$, $N = 20$ и аналитическая оценка (2.31) (штрихованные линии).

Глава 3

Динамика нелинейных решеток со слабым пространственным беспорядком

Нелинейность и беспорядок являются неотъемлемыми свойствами дискретных распределенных систем, определяющими целый ряд фундаментальных физических явлений, таких как термализация, теплопроводность, распространение волновых пакетов, рассеяние фононов и электронов. Главную роль в этих процессах играют колебательные моды. Как показано в предыдущей главе, нелинейность приводит к взаимодействию нормальных мод, однако не всегда достаточна для эффективного перераспределения энергии. Так, при достаточно слабой нелинейности, линейные моды могут быть продолжены в нелинейный режим как точные периодические решения – q -бризеры – экспоненциально локализованные в модовом пространстве. Только делокализация этих траекторий при увеличении энергии делает возможным достаточно быстрый обмен энергии между модами. Пространственные неоднородности, беспорядок, обладают противоположным эффектом. Беспорядок приводит к деформации гармонических мод, их экспоненциальной (андерсоновской) локализации в прямом пространстве [9].

В то время как влияние нелинейности и беспорядка по-отдельности изучены достаточно глубоко, их *одновременное* влияние на колебательно-волновую динамику по-прежнему практически неизвестно. В настоящее время этот пробел активно восполняется, в первую очередь, для систем с сильным беспорядком и слабой нелинейностью. Доказана возможность продолжения андерсоновских мод в нелинейный режим [47–50], исследуются закономерности распространения волновых пакетов в классических и полуклассических модельных системах [51–55], света в оптических решетках [56], продемонстрирована локализация Бозе-Эйнштейн конденсатов в неоднородных потенциалах [8].

Вместе с тем, неисследованными остаются вопросы делокализации и переноса энергии в системах с *сильной нелинейностью и слабым беспорядком*. Помимо фундаментальной значимости существует целый набор эксперимен-

тальных и прикладных задач, стимулирующих развитие теории. Микро и наноэлектромеханические осцилляторы являются перспективной элементной базой для микроинструментов [32]. Их решеточные структуры открывают возможности для обработки широкополосных сигналов, использования волновых явлений, например, дисперсии [3, 4, 33]. Вызывает интерес расширение рабочего диапазона в нелинейную область, в которой эффекты нелинейности будут контролируемо малы; более того, существуют предложения по использованию нелинейных эффектов. В то же время, технологические достижения позволяют достичь уменьшения разброса параметров при производстве, что, в конечном итоге, уменьшает степень пространственной неоднородности. На атомарных масштабах представляет интерес задача о поверхностных колебательных модах в нанокластерах, которые, как считается, могут обуславливать селективные каталитические свойства структур из атомов золота [57].

Целью этой главы является обобщение теории q -бризеров на случай нелинейных акустических и оптических решеточных систем со слабым пространственным беспорядком, определение совместного влияния нелинейности и беспорядка на делокализацию q -бризеров. В основе используемого подхода – продолжение q -бризеров в область малого, но конечного беспорядка, и статистический анализ сконструированных решений. Основными вопросами будут являться зависимость порогов делокализации и устойчивости от силы беспорядка, а также зависимость от конкретных реализаций беспорядка, в частности, возможности управления величиной порогов с помощью пространственных неоднородностей [39, 58, 59].

3.1 Нелинейные акустические цепочки с беспорядком

Делокализация в системе β -Ферми-Паста-Улама

Рассмотрим цепочку β -ФПУ, состоящую из N идентичных осцилляторов, с пространственным беспорядком в коэффициентах линейной связи и нелинейностью четвертой степени, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N p_n^2 + \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{1}{2} (1 + D\kappa_n) (x_n - x_{n-1})^2 + \frac{\beta}{4} (x_n - x_{n-1})^4 \right] \quad (3.1)$$

где $x_n(t)$ – отклонение n -ой частицы из состояния равновесия, $p_n(t)$ – ее импульс, $x_0 = x_{N+1} = 0$, случайные коэффициенты независимы и равномерно распределены: $\kappa_n \in [-1/2, 1/2]$, $\langle \kappa_n \kappa_m \rangle = \sigma_\kappa^2 \delta_{n,m}$, $\sigma_\kappa^2 = 1/12$. Как и прежде,

каноническое преобразование

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin\left(\frac{\pi q n}{N+1}\right) \quad (3.2)$$

задает связь с обратным пространством N модовых переменных $Q_q(t)$, которые являются точными решениями с частотами

$$\omega_q = 2 \sin \frac{\pi q}{2(N+1)}$$

в линейном случае.

Используя это преобразование как замену переменных в нелинейной системе с беспорядком, получаем

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_q (P_q^2 + \omega_q^2 Q_q^2) + \frac{\beta}{8(N+1)} \sum_{q,p,r,s} C_{q,p,r,s} \omega_q \omega_p \omega_r \omega_s Q_q Q_p Q_r Q_s + \\ & + \frac{D}{2} \sum_{q,p} \omega_q \omega_p K_{q,p} Q_q Q_p, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где коэффициенты межмодовой связи, вызванные нелинейным взаимодействием, задаются

$$C_{q,l,m,n} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m \pm n, 0} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, 2(N+1)} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, -2(N+1)}), \quad (3.4)$$

а беспорядком –

$$K_{q,p} = \frac{2}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^{N+1} \kappa_n \cos \frac{\pi q(n-1/2)}{N+1} \cos \frac{\pi p(n-1/2)}{N+1}. \quad (3.5)$$

Уравнения движения в модовых переменных выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = & -\frac{\beta}{2(N+1)} \sum_{p,r,s}^N C_{q,p,r,s} \omega_q \omega_p \omega_r \omega_s \\ & \times Q_p Q_r Q_s - \frac{D}{\sqrt{N+1}} \sum_p^N \omega_q \omega_p K_{q,p} Q_p. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Видно, что эффективными параметрами нелинейности и беспорядка являются $\nu = \beta/(N+1)$, $d = D/\sqrt{N+1}$. Это означает, что в больших цепочках связь между модовыми осцилляторами может оставаться слабой, несмотря на то, что величина параметров нелинейности и беспорядка может быть большой

по сравнению с 1. Далее мы предполагаем малость эффективных параметров $\nu, d \ll 1$ и работаем в рамках теории возмущений (что, как уже было отмечено, не накладывает явных ограничений на коэффициенты нелинейности и беспорядка).

Исследование состоит из двух этапов. Выберем сначала q -бризерное решение для упорядоченной нелинейной системы $\nu \neq 0, d = 0$. Зафиксируем конкретную реализацию беспорядка $\{\kappa_n\}$ и построим для нее асимптотическую теорию возмущений по малым параметрам $\{\nu, d\}$. Изучим затем статистические свойства найденного решения.

(Заметим, что в качестве базиса можно использовать и набор андерсоновских мод линейной системы с беспорядком. Выбор гармонических мод в данном случае удобен для аналитических исследований. Вообще говоря, теория q -бризеров может быть сформулирована и для мод в системе с беспорядком, принципиальная возможность продолжения которых в нелинейный режим была показана Albanese и Froehlich [47–50]. В следующей главе такой подход будет применен для анализа теплопроводности и неравновесных процессов переноса энергии в системах с сильным беспорядком.)

Непрерывное продолжение q -бризеров от нелинейных пространственно-однородных систем $\beta, D \neq 0$ к неоднородным $\beta \neq 0, D = 0$ аналогично переходу от линейного режима $\beta \neq 0, D = 0$ к нелинейному $\beta = D = 0$ [34]. В случае $\nu, d \ll 1$ и малых амплитуд колебаний q -осцилляторы взаимодействуют слабо, и их «гармоническая» энергия $E_q = \frac{1}{2} (\dot{Q}_q^2 + \omega_q^2 Q_q^2)$ остается постоянной с хорошей точностью на небольших временах. (Заметим, что возбуждение колебаний только в одном из q -осцилляторов отвечает точному периодическому решению линейной задачи $\beta = D = 0$, локализованному в модовом пространстве.

Для $d = 0$ эти периодические траектории могут быть продолжены в нелинейный режим $\beta \neq 0$ при фиксированной энергии [34] благодаря отсутствию точных резонансов $n\omega_{q_0} \neq \omega_{q \neq q_0}$ (n целочисленно) для любой конечной длины цепочки [45], что является необходимым условием теоремы Ляпунова [44]. Эти же соображения распространяются и на случай с беспорядком, поскольку спектр остается нерезонансным, по крайней мере для достаточно малых $d \ll 1$ [47–50].

Приведем сначала результаты численного продолжения q -бризеров [58]. Во всех случаях полная энергия была $E = 1$; усреднение проводилось по 100 реализациям беспорядка. Усредненные профили распределения энергии в модовом пространстве для полученных q -бризеров показаны на Рис.3.1. Распределение имеет две характерные части: экспоненциально локализованный

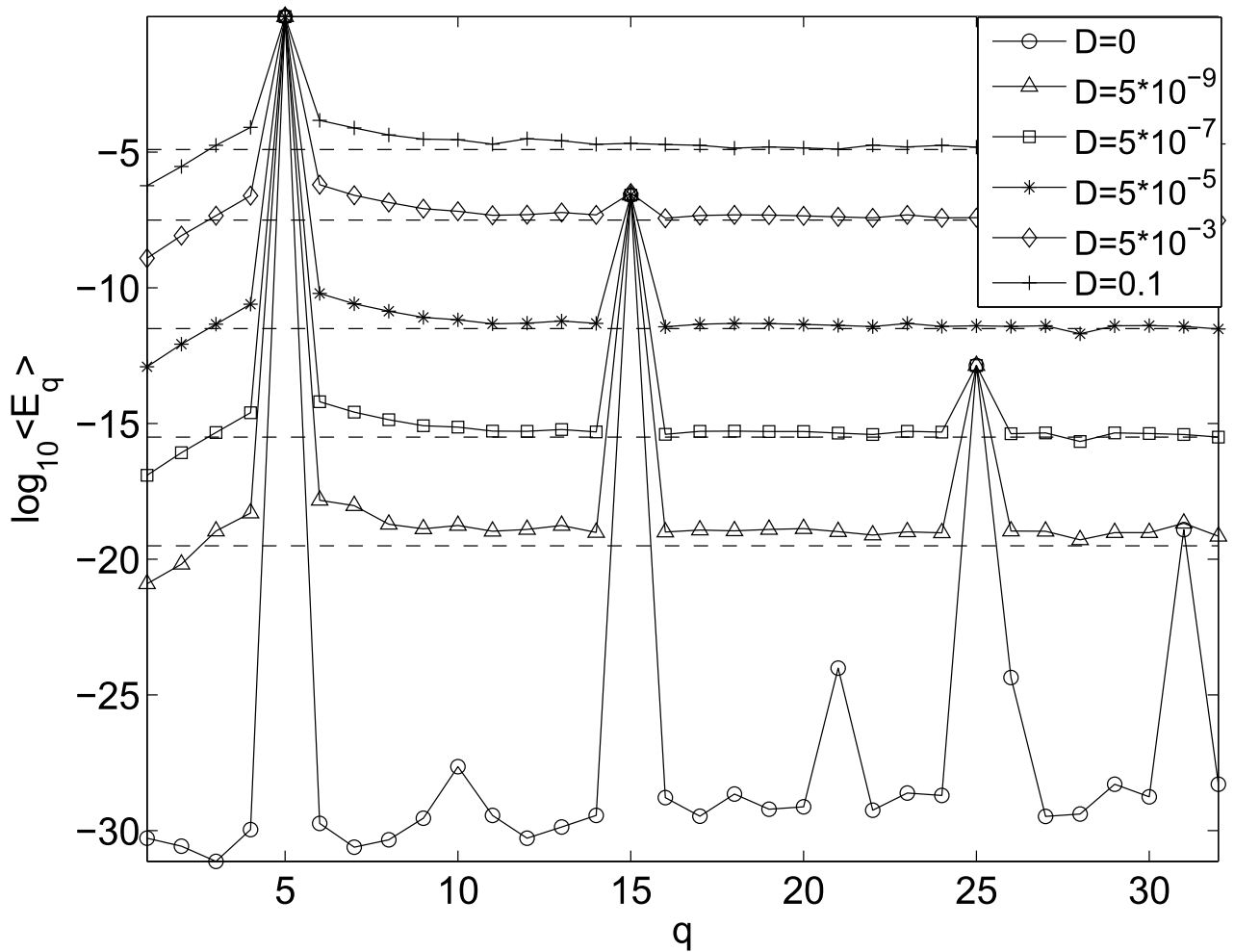


Рис. 3.1: Усредненное распределение энергий q -бризеров в модовом пространстве для $q_0 = 5, \beta = 0.01, N = 32$ в зависимости от силы беспорядка. Штрихованные линии дают теоретическую оценку (3.13).

профиль вблизи центральной моды q_0 и практически горизонтальное плато в области высоких энергий. Таким образом, даже слабый беспорядок приводит, формально, к делокализации решения в модовом пространстве.

Ясно, однако, что слабая делокализация не изменяет структуру q -бризера в прямом пространстве существенным образом, не меняет его динамические свойства, по крайней мере, на достаточно больших временах. Поэтому особый интерес представляет переход к «сильной» делокализации. Численные данные показывают, что высота плато растет по мере увеличения коэффициента беспорядка D , поглощая локализованную часть. Так, для $\beta = 0.01, q_0 = 5, N = 32$ плато достигает локализованного E_{3q_0} в районе $D = 0.01$, однако энергии центральной моды E_{q_0} не достигнет даже при $D \sim 2$, если произвести интерполяцию. Это означает, что, по крайней мере, некоторые q -бризеры могут быть продолжены и в область сильного беспорядка.

Обратимся теперь к аналитическим результатам [58]. Вспомним, что для

$D = 0$ q -бризерное решение $\hat{Q}_q^{NL}(t)$ с низкочастотной центральной модой q_0 может быть найдено в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра ν [34]. Энергии мод $q_0, 3q_0, \dots, (2n+1)q_0, \dots \ll N$ имеют вид

$$E_{(2n+1)q_0}^{NL} = \lambda^{2n} E_{q_0}, \quad \lambda = \frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 q_0^2}, \quad (3.7)$$

а частота периодических колебаний равна $\omega^{NL} = \omega_{q_0}(1 + 9/4\nu E_{q_0})$.

Будем строить теорию возмущений для нелинейного уравнения (3.6) по малому параметру d , представляя решение в виде ряда

$$\hat{Q}_q(t) = Q_q^{(0)}(t) + dQ_q^{(1)}(t) + \dots, \quad (3.8)$$

а его частоту как

$$\hat{\omega} = \omega^{(0)} + d\omega^{(1)} + \dots, \quad (3.9)$$

где $Q_q^{(0)}(t) = \hat{Q}_q^{NL}(t)$ и $\omega^{(0)} = \omega^{NL}$.

В первом порядке теории возмущений уравнение (3.6) дает уравнения осциллятора под действием внешнего периодического сигнала:

$$\ddot{Q}_q^{(1)} + \omega_q^2 Q_q^{(1)} = -\omega_q \omega_{q_0} K_{q,q_0} Q_{q_0}^{(0)}. \quad (3.10)$$

Легко видеть, что все моды становятся возбужденными уже в первом порядке теории возмущений, в отличие от пространственного-однородного случая, рассмотренного в предыдущей главе. Более того, амплитуда мод тем больше, чем ближе их частоты к ω_{NL} :

$$A_q^{(1)} = -\frac{\omega_q \omega_{q_0}}{\omega_q^2 - \omega_{NL}^2} K_{q,q_0} A_{q_0}, \quad q \neq q_0. \quad (3.11)$$

Из уравнения для моды q_0 следует поправка к частоте колебаний

$$\hat{\omega} = \omega_{q_0}(1 + 9/4\nu E_{q_0} + d/2K_{q,q_0}). \quad (3.12)$$

В силу $\langle K_{q,q_0} \rangle = 0$ усреднение по ансамблю реализаций приводит к исчезновению поправок первого порядка малости $\langle A_q^{(1)} \rangle = \langle \omega^{(1)} \rangle = 0$. Дисперсия, однако, остается ненулевой, так как ненулевыми будут поправки для каждой конкретной реализации $\{\kappa_n\}$. Для среднего вклада в энергию мод E_q^{DO} имеем

$$\langle E_q^{DO} \rangle \approx \frac{d^2 E_{q_0} \omega_q^4}{2(\omega_q^2 - \omega_{q_0}^2)^2} \langle K_{q,q_0}^2 \rangle = \frac{d^2 E_{q_0} \sigma_\kappa^2 \omega_q^4}{2(\omega_q^2 - \omega_{q_0}^2)^2}. \quad (3.13)$$

Рассмотрим сначала колебания в высокочастотных модах с $q \gg q_0$, где в численных экспериментах наблюдалось практически горизонтальное плато

(см. Рис.3.1). Принимая во внимание, что в этой части спектра $\omega_q \sim 2 \gg \omega_{q_0}$, получаем

$$\langle E_q^{DO} \rangle \approx \frac{1}{2} d^2 E_{q_0} \sigma_\kappa^2 = \frac{D^2}{2(N+1)} E_{q_0} \sigma_\kappa^2. \quad (3.14)$$

Как видим, энергия высокочастотных мод действительно не зависит от модового числа в первом приближении. Данная оценка хорошо согласуется с численно полученными значениями для разных D (горизонтальные штрихованные линии на Рис.3.1).

Граница между локализованной частью q -бризера и плато отвечает условию

$$\langle E_{(2n+1)q_0}^{DO} \rangle = E_{(2n+1)q_0}^{NL}. \quad (3.15)$$

В приближении $\frac{2nq_0}{N} \ll 1$ получаем

$$q_c \approx \left(\frac{\ln \frac{D\sigma_\kappa^2}{2(N+1)}}{\ln \lambda} + 1 \right) q_0, \quad (3.16)$$

где $\lambda = \frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 q_0^2}$, что означает лишь относительно медленный логарифмический рост плато при увеличении D .

Отсюда мы также получаем необходимое условие локализации q -бризера, потребовав, чтобы суммарная энергия в высокочастотных модах оставалась много меньшей, чем энергия в центральной низкочастотной моде: $\sum_{q \gg q_0} E_q^{DO} \ll E_{q_0}$, что в итоге дает

$$D \ll D^* = \sqrt{2}/\sigma_\kappa, \quad (3.17)$$

что для нашего случайного распределения с $\sigma_\kappa = \frac{1}{12}$ дает $D^* \approx 5$, к чему максимально допустимое значение коэффициента $D = 2$ уже близко. Будем говорить о нарушении (3.17) как о режиме сильного беспорядка, при котором все q -бризеры делокализуются в модовом пространстве, независимо от размеров системы (здесь мы полагаем, что нелинейность достаточно мала, чтобы обеспечить локализацию соответствующего q -бризера в системе без беспорядка). Этот режим ожидается в нашей модели при $D > 1$.

Заметим, что, поскольку амплитуды мод и энергии соотносятся как $A_q = \sqrt{2E_q/\omega_q}$, $\omega_q \sim q/N$ амплитуды низкочастотных мод много больше амплитуд высокочастотных мод, даже когда их энергии одного порядка. Поэтому q -бризеры, полученные в рамках теории возмущения, могут существовать и в режиме сильного беспорядка, однако энергия их будет делокализована в модовом пространстве.

Рассмотрим теперь колебания в соседней с центральной моде. Здесь амплитуда и энергия будут наибольшими, вследствие близости частот. Учитывая,

что $q_0 \ll N$, получим:

$$\omega_{q_0+1}^2 - \omega_{q_0}^2 \approx 2\omega_{q_0}(\omega_{q_0+1} - \omega_{q_0}) \approx 2\omega_{q_0} \frac{\pi}{N+1}. \quad (3.18)$$

Отсюда

$$\langle E_{q+1}^{DO} \rangle \approx \frac{1}{8\pi^2} d^2 \sigma_\kappa^2 \omega_{q_0}^2 (N+1)^2 E_{q_0}, \quad (3.19)$$

критерий сходимости решения в виде теории возмущения $\frac{E_{q_0+1}}{E_{q_0}} \ll 1$ принимает вид

$$q \ll q^* = \frac{\sqrt{8}}{D\sigma_\kappa} \sqrt{N+1}. \quad (3.20)$$

Следовательно, в цепочках, для которых $q^* \gg N$, а именно, с размерами, не превосходящими

$$N \ll \frac{2}{D\sigma_\kappa}, \quad (3.21)$$

все q -бризеры являются локализованными в модовом пространстве (разумеется, при условии их исходной локализации в нелинейной системе без беспорядка), а их профиль и динамические свойства практически не изменены беспорядком. Этот режим будем называть пренебрежимо малым беспорядком.

В достаточно больших цепочках существует граница между локализованными и делокализованными в модовом пространстве решениями, задаваемая (3.20). С одной стороны, число локализованных q -бризеров увеличивается с размерами системы как $\propto \sqrt{N}$. С другой стороны, общая доля этих мод падает как $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Над границей зоны локализованных q -бризеров локализация может сохраняться в некотором слабом варианте (не экспоненциальная). Интересно отметить, что в линейной системе с беспорядком метод передаточных матриц позволяет показать, что для мод с номерами $q > \sim \sqrt{N}$ характерна экспоненциальная локализация в прямом пространстве [60]. Таким образом, q^* задает границу между q -бризерами и андерсоновскими модами в нелинейных системах с беспорядком.

Обратим внимание на то, что нелинейность также может приводить к делокализации, если $\lambda = \frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 q_0^2} > 1$. Записав зависимость от волнового числа q -бризера в явном виде, получим нижнюю границу зоны локализованных q -бризеров:

$$q^{**} = \sqrt{\frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2}}. \quad (3.22)$$

Таким образом, q -бризеры с центральными модами внутри интервала $[q^{**}, q^*]$ являются локализованными, а вне его - делокализованными в модовом пространстве. Поскольку и нижняя, и верхняя границы масштабируют как \sqrt{N}

с увеличением размеров системы, так же масштабирует и число локализованных q -бризеров.

Легко видеть, что при достаточно больших величинах нелинейности и беспорядка возможна ситуация, когда $q^{**} > q^*$, а именно, при

$$\beta E_{q_0} D^2 > \frac{64\pi^2}{3\sigma_\kappa^2}. \quad (3.23)$$

Делокализация всех q -бризеров – принципиально совместный эффект беспорядка и нелинейности, дающий верхнюю границу существования квазигармонических колебательно-волновых решений в системе.

Устойчивость q -бризеров в системе β -Ферми-Паста-Улама

Численное исследование линейной устойчивости периодических траекторий строится на линеаризации динамики системы в их окрестности и определении собственных значений $\theta_i, i = \overline{1, 2N}$ соответствующей симплектической матрицы Флоке [34, 58]. Критерием устойчивости q -бризера является $|\theta_i| = 1, \forall i$.

В численных экспериментах фиксировалось случайное распределение $\{\kappa_n\}$, затем для каждого β из возрастающей последовательности при $D = 0$ методом, изложенным в предыдущей главе, находился q -бризер, наконец, с помощью того же численного метода это решение продолжалось в область ненулевых коэффициентов беспорядка.

На Рис.3.2(а) представлена зависимость минимальных и максимальных абсолютных значений мультипликаторов Флоке θ_i q -бризеров от коэффициента нелинейности β при $q_0 = 6, N = 64$ для нескольких значений D и двух реализаций беспорядка $\{\kappa_n\}$. Примечательно, что, в то время как порог неустойчивости по параметру нелинейности монотонно зависит от D , он может не только уменьшаться (что вполне ожидаемо), но и увеличиваться, в зависимости от конкретной реализации $\{\kappa_n\}$. Более того, реализации, улучшающие устойчивость, также часты, как и ухудшающие, по-видимому, давая близкий к нулю средний сдвиг порога неустойчивости. Наблюдаемое отклонение средней величины порога $\langle \beta^* \rangle$ от его значения в отсутствие беспорядка β_0^* много меньше, чем дисперсия этой величины (Рис.3.2(б)). Последняя растет с увеличением коэффициента беспорядка D по закону, близкому к линейному, достигая $\sigma_{\beta^*} \approx 0.25\beta_0^*$, как видно для $q_0 = 6, N = 64$ (Рис.3.2(б); заметим, что для больших D зависимость перестает быть линейной в силу естественного ограничения $\beta^* > 0$).

Исследуем устойчивость q -бризеров аналитически. Линеаризация дает

$$\ddot{\xi}_q + \omega_q^2 \xi_q = -\frac{3}{2} \nu \omega_q \sum_{p,r,s} C_{q,p,r,s} \omega_p \omega_r \omega_s \hat{Q}_r \hat{Q}_s \xi_p - d \omega_q \sum_p \omega_p K_{p,q} \xi_p. \quad (3.24)$$

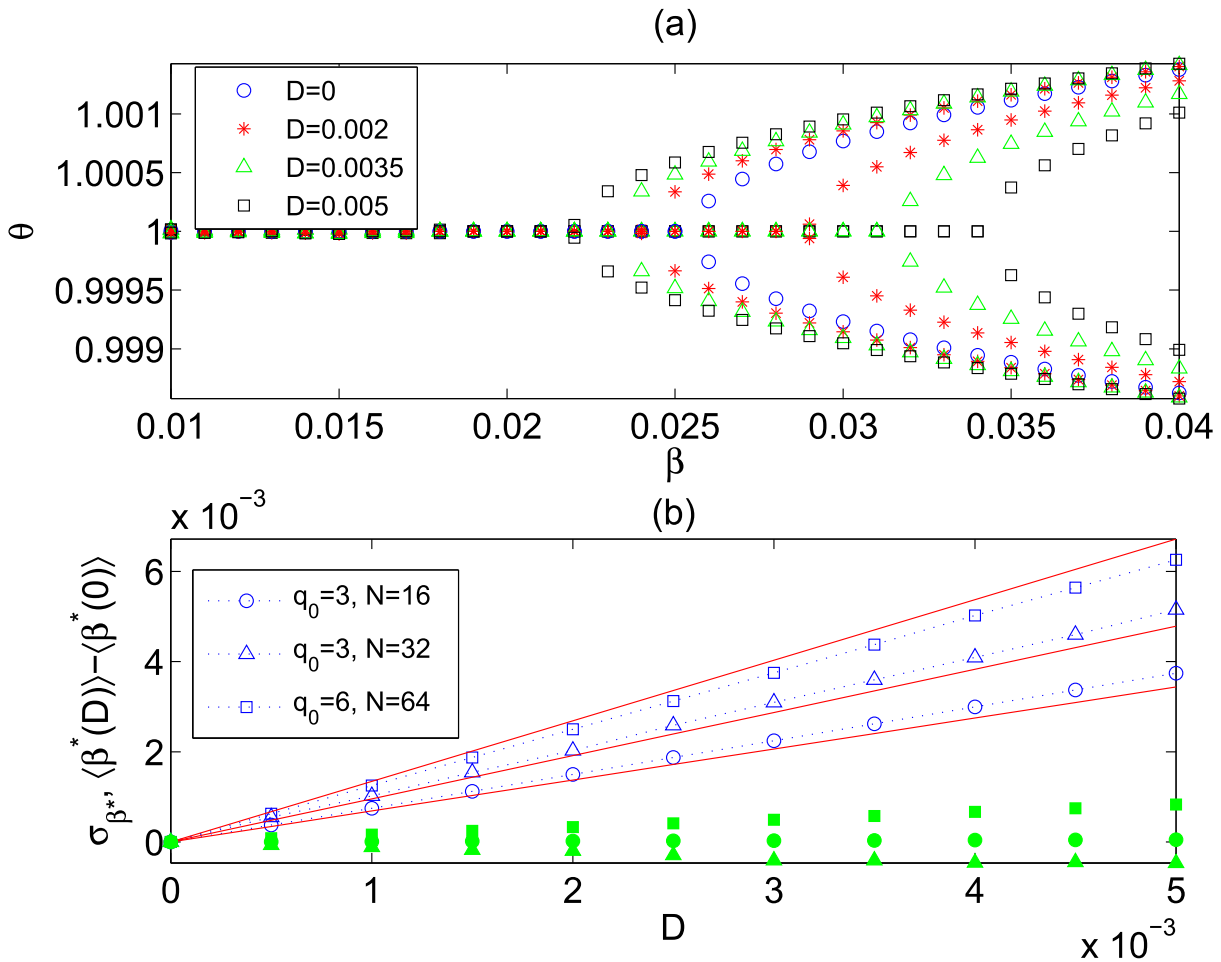


Рис. 3.2: (а) Максимальные и минимальные абсолютные величины собственных значений матрицы Флоке при $q_0 = 6, N = 64$ для двух различных реализаций $\{\kappa_n\}$ в зависимости от коэффициента нелинейности β . Для одной из реализаций порог неустойчивости по коэффициенту нелинейности увеличивается с ростом коэффициента беспорядка D , для другой – уменьшается. (б) Не закрашенные символы, пунктирная линия: зависимость дисперсии величины порога неустойчивости σ_{β^*} от коэффициента беспорядка. Сплошные линии показывают теоретические оценки (3.26). Закрашенные символы: $\langle \beta^*(D) \rangle - \langle \beta^*(0) \rangle$.

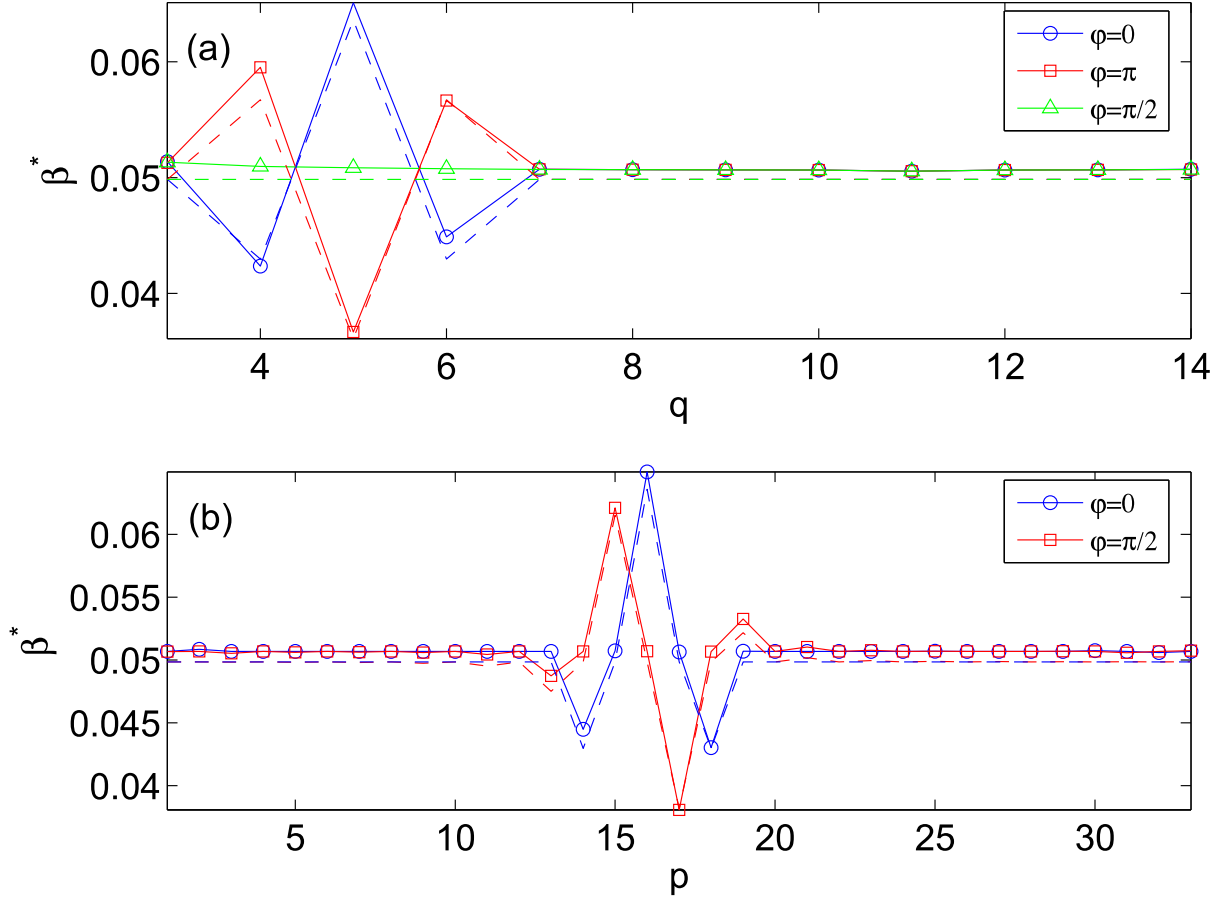


Рис. 3.3: Устойчивость q -бризеров в случае пространственно-гармонической модуляции коэффициента линейной связи: $N = 32, D = 0.0025$ и (a) $p = 10$, меняется центральная мода q , (b) центральная мода фиксирована $q = 8$, изменяется волновое число модуляции p . Штрихованные линии показывают теоретические предсказания.

Предполагая параметры нелинейности и беспорядка достаточно малыми, чтобы обеспечивалась локализация q -бризера в модовом пространстве, запишем:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_q + \omega_q^2 \xi_q &= -3\nu\omega_q E_{q_0} \cos^2(\hat{\omega}t) \sum_p C_{q,q_0,q_0,p} \omega_p \xi_p \\ &- d\omega_q \sum_p \omega_p K_{p,q} \xi_p + O(\nu^2, \nu d, d^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Самая сильная неустойчивость в этом уравнении определяется основным параметрическим резонансом для тройки мод $\omega_{q_0+1} + \omega_{q_0-1} \approx 2\omega_{q_0}$. Стандартный анализ позволяет получить порог неустойчивости по коэффициенту нелинейности β^*

$$\beta^* = \beta_0^* \left(1 - \frac{2d(N+1)^2}{\pi^2} \Delta K \right), \quad (3.26)$$

его среднее по ансамблю значение

$$\langle \beta^* \rangle = \beta_0^*, \quad (3.27)$$

и дисперсию

$$\sigma_{\beta^*} = \frac{2\sigma_{\kappa} D \sqrt{N+1}}{E_{q_0}}, \quad (3.28)$$

где $\beta_0^* = \frac{\pi^2}{6E_{q_0}(N+1)}$ – величина порога в отсутствие беспорядка, а $\Delta K = K_{\tilde{q},\tilde{q}} - 2K_{q_0,q_0} + K_{\tilde{p},\tilde{p}}$. Эти результаты хорошо согласуются с численными (Рис.3.2(b)).

Управление устойчивостью q-бризеров в системе β -Ферми-Паста-Улама

Мы уже убедились, что одни реализации беспорядка могут увеличивать порог неустойчивости по параметру нелинейности, а другие – уменьшать (Рис.3.2). Зададимся теперь вопросом: какие именно пространственные неоднородности благоприятствуют устойчивости, а какие – нет? Более того, можно ли управлять устойчивостью q-бризеров за счет выбора неоднородностей?

Часть уравнения (3.26), зависящая от распределения $\{\kappa_n\}$, с учетом (3.5), может быть преобразована к виду

$$\Delta K = -\frac{4}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^{N+1} \kappa_n \cos \frac{\pi 2q_0(n-0.5)}{N+1} \sin^2 \frac{\pi(2n-1)}{2(N+1)}. \quad (3.29)$$

Это выражение *линейно* по коэффициентам κ_n . Таким образом, мы можем представить последнее в виде суммы пространственных гармоник, вклад которых в величину порога неустойчивости будет аддитивен.

Рассмотрим пространственно-периодическую неоднородность

$\kappa_n = 0.5 \cos \left(\frac{\pi p(n-0.5)}{N+1} + \varphi \right)$, где p – ее волновое число, а φ – пространственная фаза. Естественно ожидать, что выражение ΔK будет максимально, и, соответственно, максимальным будет порог неустойчивости, когда $p = 2q_0$. В самом деле, элементарные тригонометрические преобразования дают $\Delta K = 0.5\sqrt{N+1} \cos \varphi$ в этом случае. Таким образом, максимально возможное значение порога неустойчивости достигается при $\varphi = 0$ и равно

$$\beta_{max}^* = \beta_0^* \left(1 + \frac{D(N+1)^2}{\pi^2} \right). \quad (3.30)$$

Обратим внимание на выраженную чувствительность порога неустойчивости к пространственной фазе φ . Так, порог неустойчивости равен своему значению в пространственно-однородной системе $\beta^* = \beta_0^*$ при $\varphi = \pm\pi/2$. Минимальное значение порога неустойчивости

$$\beta_{min}^* = \beta_0^* \left(1 - \frac{D(N+1)^2}{\pi^2} \right) \quad (3.31)$$

соответствует $\varphi = -\pi$.

Каково влияние пространственной модуляции с $p = 2q_0$ на соседние q -бризеры с центральными модами $q'_0 = q_0 \pm 1$? Несложно установить, что абсолютная величина сдвига будет в два раза меньше и противоположна по знаку. Например для $\varphi = 0$ получаем минимум

$$\beta^* = \beta_0^* \left(1 - \frac{D(N+1)^2}{2\pi^2} \right). \quad (3.32)$$

Рассмотрим теперь зависимость порога неустойчивости q -бризера с центральной модой q_0 от пространственной фазы неоднородностей, близких к $p = 2q_0$. В то время, как для $p = 2q_0$ максимум и минимум отвечают $\varphi = 0, \pi$, а нулевой сдвиг имеет место при $\varphi = \pm\pi/2$, для $p = 2q_0 \pm 1$, напротив, нулевой сдвиг происходит при $\varphi = 0, \pi$, а минимум и максимум – при $\varphi = \pm\pi/2$:

$$\beta^* = \beta_0^* \left(1 \mp \frac{8D(N+1)^2}{3\pi^3} \right). \quad (3.33)$$

Теоретические предсказания находят подтверждение в численных экспериментах (Рис.3.3). Действительно, в зависимости от фазы φ , пространственно-гармоническая модуляция коэффициентов линейной связи с волновым числом $p = 2q_0$ может значительно увеличить порог неустойчивости, понизить, либо оставить неизменным (Рис.3.3(a)). Модуляции с волновыми числами $p = 2q_0 \pm 2$ изменяют порог с обратным знаком и на примерно вдвое меньшую величину для одних и тех же φ . Модуляции с волновыми числами $p = 2q_0 \pm 1$ – лишь немного слабее, чем модуляция с $2q_0$, но со сдвигом $\pi/2$ по φ (Рис.3.3(b)). Обратим внимание на то, что модуляции с волновыми числами, отстоящими дальше от $2q_0$, имеют незначительный эффект. Таким образом, устойчивость q -бризера с центральной модой q_0 практически полностью определяется *пространственными гармониками* $\{\kappa_n\}$ с волновыми числами в диапазоне $p \in [2q_0 - 2, 2q_0 + 2]$.

Эти результаты указывают на возможность управления потоком энергии между модами. Например, создавая периодическую модуляцию линейной связи, можно вызвать неустойчивость определенных q -бризеров и либо ускорить процессы делокализации энергии, либо стабилизировать другие q -бризеры, в которые энергия будет перекачиваться. Эти q -бризеры, в свою очередь, могут также быть дестабилизированы желаемым образом. В экспериментах модуляция констант связи может быть осуществлена, к примеру, путем нагрева лазерным лучом, аналогично технике, примененной для управления положением дискретных бризеров в микроэлектромеханических колебательных структурах [33].

3.2 Нелинейные оптические цепочки с беспорядком

Цепочка дискретных нелинейных уравнений Шредингера (ДНУШ) является математической моделью целого ряда физических систем и процессов, среди которых распространение света в фотонных решетках [56], динамика Бозе-Эйнштейн конденсатов в оптических потенциалах [8]. Она также описывает цепочку Клейна-Гордона в приближении малых медленных амплитуд, которая является парадигматической моделью колебательных систем с оптическим спектром [61]. Развив теорию q -бризеров в нелинейных системах с беспорядком для пространственно-дискретных систем с акустическим спектром (ФПУ), решим аналогичную задачу для оптических колебаний.

Делокализация в цепочке дискретных нелинейных уравнений Шредингера

Цепочка ДНУШ задается гамильтонианом

$$H = \sum_n \left((1 + D\kappa_n)\psi_{n-1}\psi_n^* + (1 + D\kappa_{n+1})\psi_{n+1}\psi_n^* + \frac{\mu}{2}|\psi_n|^4 \right). \quad (3.34)$$

Динамические уравнения получаются путем дифференцирования

$$i\dot{\psi}_n = \partial H / \partial \psi_n^*, \quad (3.35)$$

что дает

$$i\dot{\psi}_n = (1 + D\kappa_n)\psi_{n-1} + (1 + D\kappa_{n+1})\psi_{n+1} + \mu|\psi_n|^2\psi_n \quad (3.36)$$

Здесь ψ является комплексной скалярной величиной, которая может описывать мало-амплитудную динамику классических колебательных цепочек [61], плотность вероятности облака холодных атомов в оптической решетке [62], или амплитуду электромагнитной волны, распространяющейся в оптическом волноводе [63]. Будем использовать нулевые граничные условия: $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$. Параметры μ и D регулируют силу нелинейности и беспорядка соответственно, реализации беспорядка задаются случайными некоррелированными равномерно распределенными $\kappa_n \in [-1/2, 1/2]$, $\langle \kappa_n \kappa_m \rangle = \sigma_\kappa^2 \delta_{n,m}$, $\sigma_\kappa^2 = 1/12$.

Помимо полной энергии в системе ДНУШ существует второй интеграл движения – норма $B = \sum_n |\psi_n|^2$. Легко видеть, что вариации параметра нелинейности μ строго эквивалентны изменению нормы B . Поэтому в дальнейшем мы полагаем норму равной единице $B = 1$, а в качестве управляющего параметра используем коэффициент нелинейности.

Каноническое преобразование позволяет перейти в пространство нормальных мод линейной задачи $Q_q(t)$:

$$\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_q^N Q_q(t) \sin \frac{\pi q n}{N+1}, \quad (3.37)$$

частоты которые равны

$$\Omega_q = -2 \cos \frac{\pi q}{N+1}. \quad (3.38)$$

Динамические уравнения для модовых амплитуд имеют вид

$$i\dot{Q}_q + \Omega_q Q_q = \frac{\rho}{2} \sum_{p,r,s} G_{q,p,r,s} Q_p Q_r Q_s^* + d \sum_p V_{q,p} Q_p, \quad (3.39)$$

где мы полагаем малыми новые эффективные параметры нелинейности и беспорядка $\rho = \frac{\mu}{N+1}$, $d = \frac{D}{\sqrt{N+1}}$.

Коэффициенты межмодовой связи, возникающей за счет нелинейности, равны

$$G_{q,p,r,s} = \sum_{\pm} (-1)^{(\pm p)(\pm r)(\pm s)} (\delta_{q \pm p \pm r \pm s, 0} + \delta_{q \pm p \pm r \pm s, \pm 2(N+1)}), \quad (3.40)$$

а коэффициенты взаимодействия, индуцированного беспорядком, записываются как

$$V_{q,p} = \frac{2}{\sqrt{N+1}} \times \sum_{n=1}^{N-1} \kappa_n \left(\sin \frac{\pi q n}{N+1} \sin \frac{\pi p(n+1)}{N+1} + \sin \frac{\pi q(n+1)}{N+1} \sin \frac{\pi p n}{N+1} \right). \quad (3.41)$$

В случае пространственно-однородной системы, q-бризеры являются точными периодическими решениями вида $\psi_n(t) = \phi_n \exp(i\Omega t)$ с частотой Ω и не зависящими от времени амплитудами ϕ_n , локализованными в модовом пространстве [64]. В q -амплитудах решение также можно представить в виде $Q_q(t) = A_q \exp(i\Omega t)$, где амплитуды A_q также пространственно-независимы и связаны с амплитудами в прямом пространстве каноническим преобразованием (3.37). Норма моды определяется как $B_q = |A_q|^2$.

Будем исследовать обратимые во времени траектории, модовые амплитуды которых A_q действительны и являются решениями замкнутой системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\Omega_q - \Omega) A_q = \frac{\rho}{2} \sum_{p,r,s} G_{q,p,r,s} A_p A_r A_s^* + d \sum_p V_{q,p} A_p, \\ \sum_q |A_q|^2 - B = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Как и в случае с системой ФПУ, наш подход к анализу пространственно-неоднородных систем состоит из двух этапов. Во-первых, ищется q -бризерное решение пространственно-однородной нелинейной задачи [64]. Во-вторых, фиксируется конкретная реализация беспорядка $\{\kappa_n\}$, а d используется в качестве управляющего параметра. Вместе с эффективным параметром нелинейности они предполагаются малыми: $\rho, d \ll 1$. Затем строится асимптотическое решение по малому параметру d , статистические свойства которого впоследствии анализируются.

Продолжение q -бризеров от нелинейной пространственно-однородной задачи $\mu \neq 0, D = 0$ к неоднородной $\mu, D \neq 0$ аналогично продолжению от гармонической $\mu = D = 0$ к нелинейной пространственно-однородной $\mu \neq 0, D = 0$ [64]. В пределе малых амплитуд и слабого беспорядка взаимодействием между q -осцилляторами можно пренебречь, а их нормы $B_q = |Q_q|^2$ считать интегралами движения. Одиночные возбуждения q -осцилляторов ($B_q \neq 0$ только при $q \equiv q_0$) являются нормальными модами и компактно локализованы в q -пространстве при $\beta = D = 0$.

В пространственно-однородной цепочке эти периодические траектории могут быть продолжены в нелинейный режим $\beta \neq 0$ при фиксированной энергии путем решения системы алгебраических уравнений (3.42) [64]. Существование действительных корней следует из теоремы о неявных функциях [65], в силу отсутствия резонансов $\Omega_{q_0} \neq \Omega_{q \neq q_0}$. Это справедливо и для $d \ll 1$, поскольку спектр собственных значений остается нерезонансным с вероятностью 1 [47]. В численных экспериментах удавалось продолжить q -бризеры в область $\beta, D \neq 0$ для всех сгенерированных случайных распределений κ .

Характерные профили нормы в модовом пространстве для низкочастотных q -бризеров, из средней части спектра и высокочастотных представлены на Рис.3.4-3.6. Наблюдается переход между экспоненциальной локализацией, типичной для пространственно-однородной среды, и более слабым спаданием нормы, вызванным пространственной неоднородностью. Экспоненциальная локализация сохраняется вблизи центральной моды, если беспорядок достаточно мал. Ширина зоны экспоненциальной локализации уменьшается при увеличении беспорядка.

Построим асимптотическое решение для q -бризера. Будем предполагать, что эффективные параметры беспорядка и нелинейности малы $\rho, d \ll 1$. В качестве нулевого приближения выберем точное q -бризерное решение для нелинейной системы без беспорядка A_q^{NL} для мод $q_0, 3q_0, \dots, (2n+1)q_0, \dots \ll N$

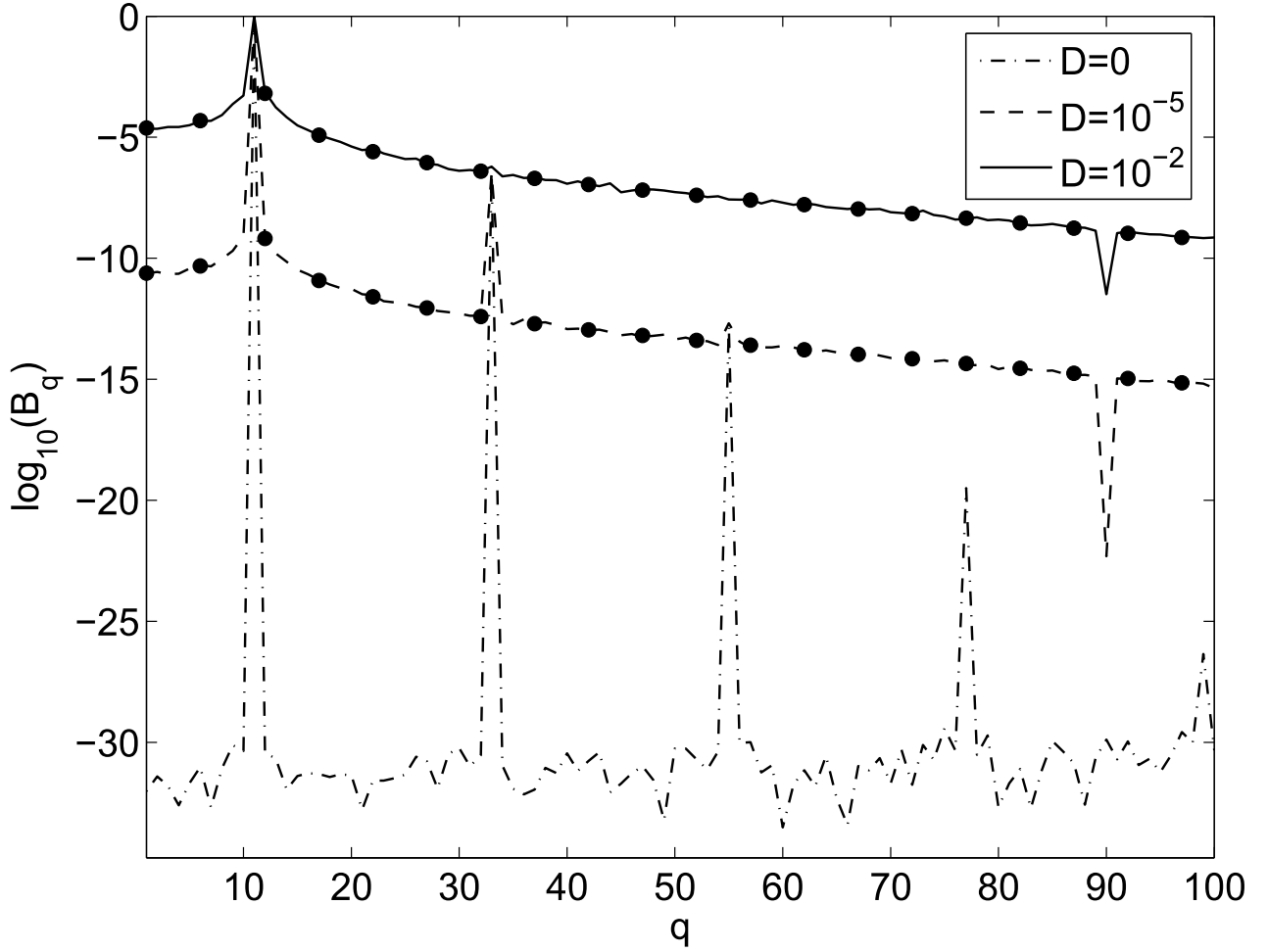


Рис. 3.4: Изменение средних норм мод q -бризеров при увеличении силы беспорядка, $\mu = 0.1$, $N = 100$ для низкочастотной центральной моды $q_0 = 11$. Закрашенные окружности соответствуют аналитической оценке (3.56)

в ведущем порядке теории возмущений по ρ [64]:

$$A_{(2n+1)q_0}^{NL} = (-1)^n \gamma^n A_{q_0}, \quad \gamma = \frac{\mu(N+1)}{16\pi^2 q^2} B_{q_0}, \quad (3.43)$$

$$\Omega^{NL} = \Omega_{q_0} - \frac{\rho}{2} A_{q_0}^2$$

Будем теперь искать асимптотическое разложение по малому параметру $d \ll 1$:

$$\begin{aligned} \hat{A}_q &= A_q^{(0)} + dA_q^{(1)} + O(d^2, \rho d), \\ \hat{\Omega} &= \Omega^{(0)} + d\Omega^{(1)} + O(d^2, \rho d), \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $A_q^{(0)} = A_q^{NL}$, $\Omega_q^{(0)} = \Omega_q^{NL}$. Подставляя в уравнение (3.42), получаем:

$$A_q^{(1)} = \frac{V_{q,q_0}}{\Omega_q - \Omega_{q_0}} A_{q_0}, \quad q \neq q_0, \quad \Omega^{(1)} = -V_{q_0,q_0}. \quad (3.45)$$

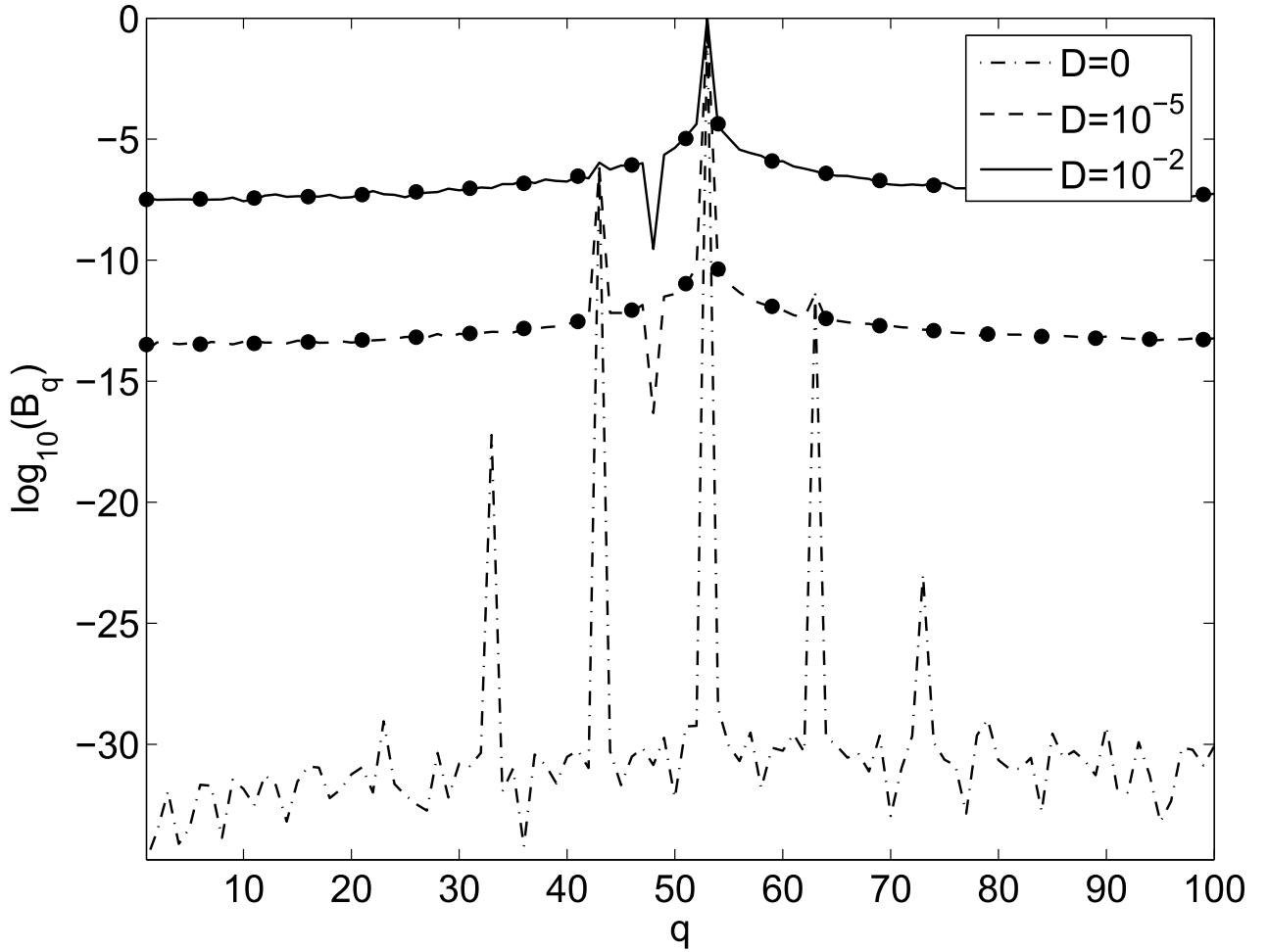


Рис. 3.5: Изменение средних норм мод q -бризеров при увеличении силы беспорядка, $\mu = 0.1, N = 100$ для центральной моды из середины спектра $q_0 = 53$. Закрашенные окружности соответствуют аналитической оценке (3.56)

Усреднение поправок к нормам мод $B_q^{DO} = \left| dA_q^{(1)} \right|^2$, вносимых неоднородностями, по ансамблю реализаций беспорядка дает

$$\langle B_q^{DO} \rangle = \frac{2d^2 \sigma_\kappa^2 (1 + \Omega_q \Omega_{q_0} / 4)}{(\Omega_q - \Omega_{q_0})^2} B_{q_0}. \quad (3.46)$$

Сопоставление с численными результатами показывает, что данная оценка хорошо аппроксимирует поправки к профилям q -бризеров, возникающие за счет беспорядка (Рис.3.4-3.6). Вместо экспоненциальной локализации наблюдается спадание по степенному закону $\langle B_q^{DO} \rangle \propto (q - q_0)^{-2}$.

Оценим теперь границу разрушения локализации в модовом пространстве. В качестве критерия возьмем равенство норм центральной и соседних мод

$$\frac{\langle B_{q_0} \rangle}{\langle B_{q_0 \pm 1} \rangle} = 1. \quad (3.47)$$

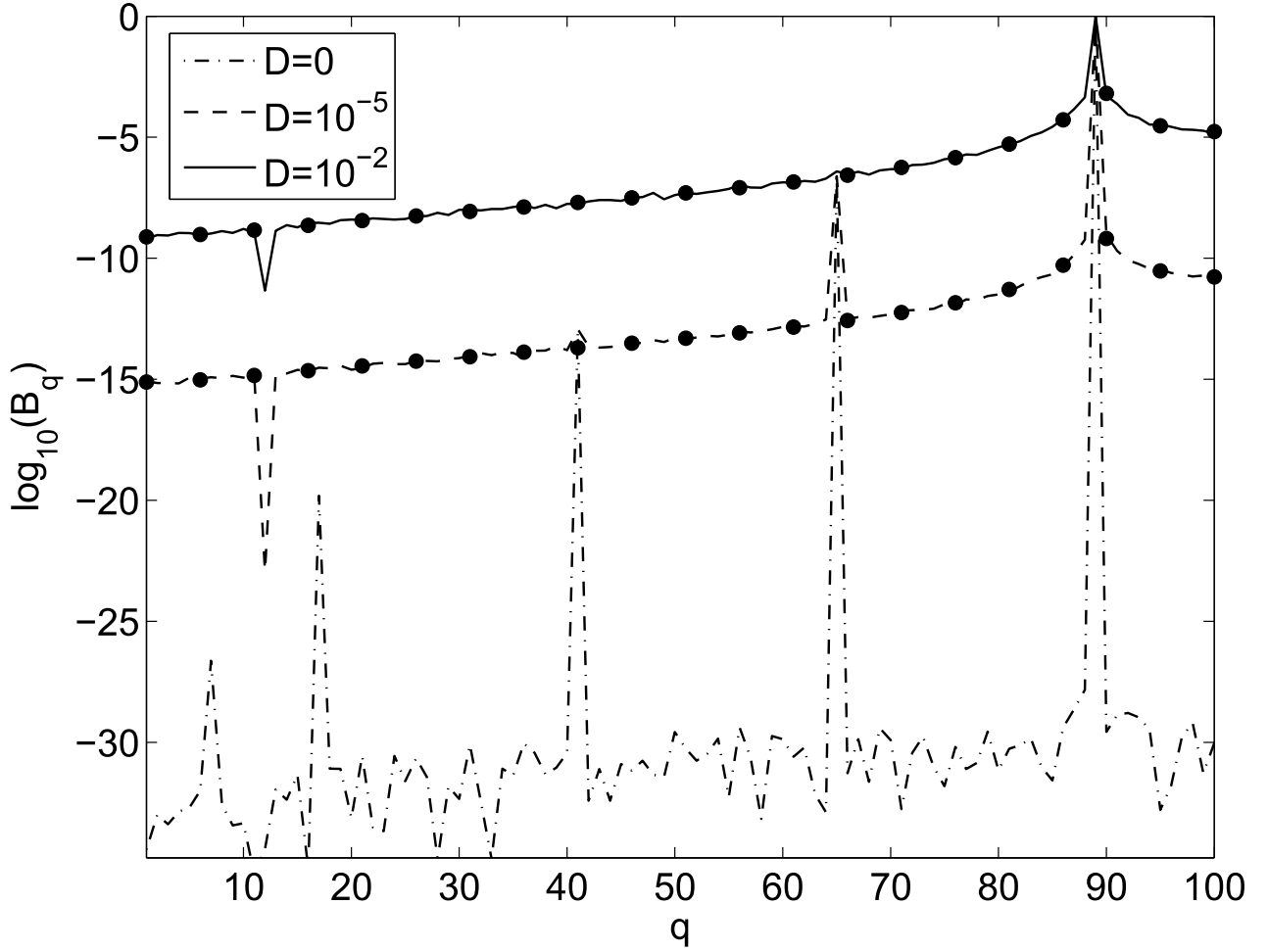


Рис. 3.6: Изменение средних норм мод q -бризеров при увеличении силы беспорядка, $\mu = 0.1$, $N = 100$ для высокочастотной центральной моды $q_0 = 89$. Закрашенные окружности соответствуют аналитической оценке (3.56)

Результат зависит от области спектра, которой принадлежит центральная мода. Для низких частот $q \ll N$ имеем

$$(\Omega_q - \Omega_{q_0})^2 \approx \frac{4\pi^4 q^2}{(N+1)^4}, \quad (3.48)$$

что дает

$$q^* = 2\pi^2 \sigma_\kappa D (N+1)^{3/2}. \quad (3.49)$$

Это означает, что моды $q < q^*$ будут делокализованы в модовом пространстве. Самая быстрая делокализующаяся мода имеет порог $\sigma_\kappa D \ll \frac{\pi}{2(N+1)^{3/2}}$. Аналогичный результат можно получить и для высокочастотных q -бризеров, с заменой $q \rightarrow N - q$.

В средней части спектра $q \sim N/2$ разность между соседними частотами в спектре равна

$$(\Omega_q - \Omega_{q_0})^2 \approx \frac{4\pi^2}{(N+1)^2}. \quad (3.50)$$

Теперь критерий делокализации принимает вид

$$\sigma_{\kappa} D \gg \sqrt{2\pi} / \sqrt{(N+1)}. \quad (3.51)$$

Это означает, что q -бризеры с центром в одной моде делокализуются, если сила беспорядка превышает некоторый порог, зависящий от размеров системы. (Отметим, что делокализация в модовом пространстве может рассматриваться как признак андерсоновской локализации в прямом пространстве.)

Устойчивость q -бризеров в цепочке дискретных нелинейных уравнений Шредингера с беспорядком

Будем рассматривать линейную устойчивость q -бризеров по отношению к классу малых комплексных возмущений $\zeta_q(t)$ [64]:

$$Q_q(t) = (\hat{A}_q + \zeta_q(t)) \exp(i\Omega t). \quad (3.52)$$

Необходимым условием устойчивости является неположительность всех собственных значений линеаризованного уравнения.

В численных экспериментах мы исследуем устойчивость уравнений в прямом пространстве (3.36). В дальнейшем будем рассматривать q -бризеры только из низкочастотной и средней областей спектра, оставляя более сложный случай $q_0 > N/2$ (при $D = 0$ порог неустойчивости по параметру нелинейности меняется нерегулярно в зависимости от q_0 , как показывают численные эксперименты [64]) для будущих исследований.

Оказывается, что неустойчивость развивается при увеличении нелинейности аналогичным образом в пространственно-однородных системах и в системах с пространственным беспорядком. Однако будет ли порог μ^* выше или ниже по сравнению с пространственно-однородным случаем, зависит от конкретной реализации беспорядка (Рис.3.7). Среднее по реализациям значение $\langle \mu^* \rangle$ близко к величине порога в системе без беспорядка μ_0^* . Напротив, дисперсия σ_{μ^*} возрастает, показывая близкую к линейной зависимость от D (Рис.3.7, отклонения от линейной зависимости наблюдаются, когда вероятность того, что порог неустойчивости μ^* окажется близок к нулю, становится существенной).

Исследуем устойчивость q -бризеров аналитически [59].¹

Рассмотрим q -бризер с центральной модой $q_0 < N/2$. Поскольку q -бризеры являются стационарными решениями ДНУШ, аналитическая задача сводит-

¹Отметим, что существует довольно обширная литература по устойчивости бризеров и солитонов в ДНУШ [61, 66, 67]. В отличие от q -бризеров, эти решения локализованы в прямом пространстве и их частоты находятся вне линейного спектра. Попытки непрерывного продолжения от нелинейного пространственно-однородного случая к линейному пространственно-неоднородному (или к q -бризерам [64]) демонстрировали бифуркации, меняющие устойчивость периодических решений [47]. Таким образом, устойчивость бризеров и q -бризеров в ДНУШ различна.

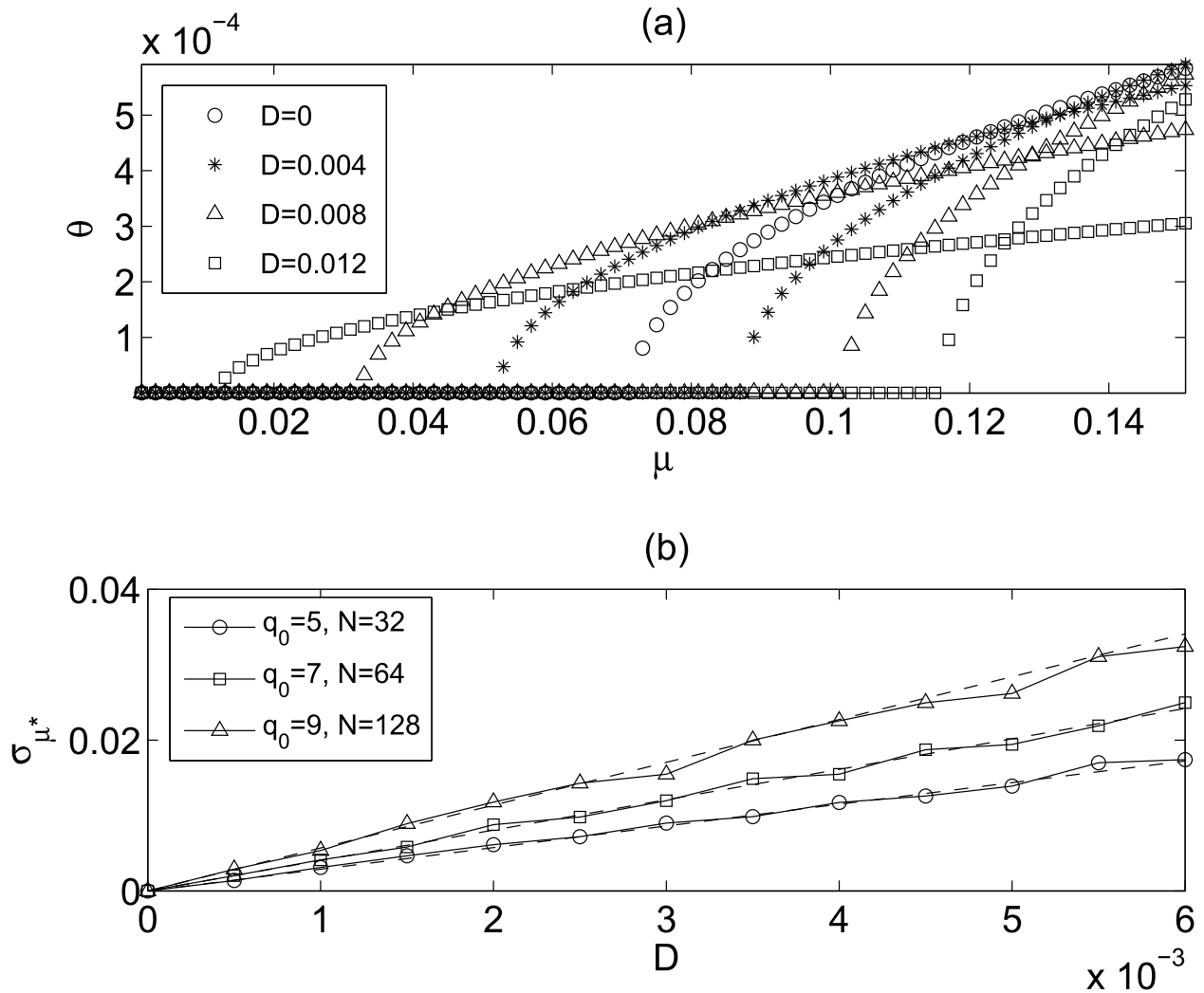


Рис. 3.7: (а) Максимальные собственные значения θ q -бризеров при $q_0 = 15, N = 128$ для двух различных реализаций беспорядка $\{\kappa_n\}$ в зависимости от коэффициента нелинейности при нескольких значениях коэффициента беспорядка D . Для одной из реализаций беспорядка порог неустойчивости увеличивается с увеличением D , для другой – уменьшается. (б) Зависимость дисперсии порога устойчивости σ_{μ^*} от D . Сплошные линии показывают теоретическую оценку (3.56)

ся к исследованию устойчивости многомерного состояния равновесия. Линеаризуем уравнения движения для малых возмущений согласно (3.52):

$$i\dot{\zeta}_q = (\hat{\Omega} - \Omega_q)\zeta_q + \frac{\rho}{2}B_{q_0} \sum G_{q,q_0,q_0,p}(\zeta_p^* + 2\zeta_p) + d \sum V_{q,p}\zeta_p + O(d^2, \rho^2, d\rho). \quad (3.53)$$

По аналогии со случаем системы ФПУ [34] предположим (и позднее подтвердим, сравнив результаты с численными), что собственные вектора, отвечающие самой сильной неустойчивости, практически полностью лежат в подпространстве $\{\zeta_q = 0 : q \neq q_0 \pm 1\}$. Таким образом, получаем более простую задачу об устойчивости тривиального состояния равновесия системы двух комплексных линейных уравнений (сохраняя члены порядка малости $O(\rho, d)$):

$$\begin{aligned} i\dot{\zeta}_{q_0-1} &= (\hat{\Omega} - \Omega_{q_0-1} + dV_{q_0-1,q_0-1})\zeta_{q_0-1} + \\ &+ \frac{1}{2}\rho B_{q_0}(\zeta_{q_0+1}^* + 2\zeta_{q_0+1}) + dV_{q_0-1,q_0+1}\zeta_{q_0+1}, \\ i\dot{\zeta}_{q_0+1} &= (\hat{\Omega} - \Omega_{q_0+1} + dV_{q_0+1,q_0+1})\zeta_{q_0+1} + \\ &+ \frac{1}{2}\rho B_{q_0}(\zeta_{q_0-1}^* + 2\zeta_{q_0-1}) + dV_{q_0-1,q_0+1}\zeta_{q_0-1} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Стандартный анализ для случая пространственно-однородной цепочки $d = 0$ дает бифуркационную точку и критерий неустойчивости q -бризера:

$$\mu > \mu_0^* = \frac{\pi^2 |\Omega_{q_0}|}{2B_{q_0}(N+1)}. \quad (3.55)$$

Таким образом, порог неустойчивости по параметру нелинейности в отсутствии беспорядка обратно пропорционален норме q -бризера и длине цепочки.

В случае системы с пространственным беспорядком, $d \neq 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \mu^* &\approx \mu_0^* \left(1 - \frac{d}{\pi^2 |\Omega_{q_0}|} \Delta V_{q_0,q_0} \right), \\ \langle \mu^* \rangle &\approx \mu_0^*, \\ \sigma_{\mu^*} &\approx \frac{D\sigma_\kappa \sqrt{3(N+1)}}{B_{q_0}}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где

$$\Delta V_{q_0,q_0} = V_{q_0-1,q_0-1} - 2V_{q_0,q_0} + V_{q_0+1,q_0+1}. \quad (3.57)$$

Аналитические результаты хорошо согласуются с численными (Рис.3.7). Заметим, что увеличение размеров цепочки не только уменьшает среднее

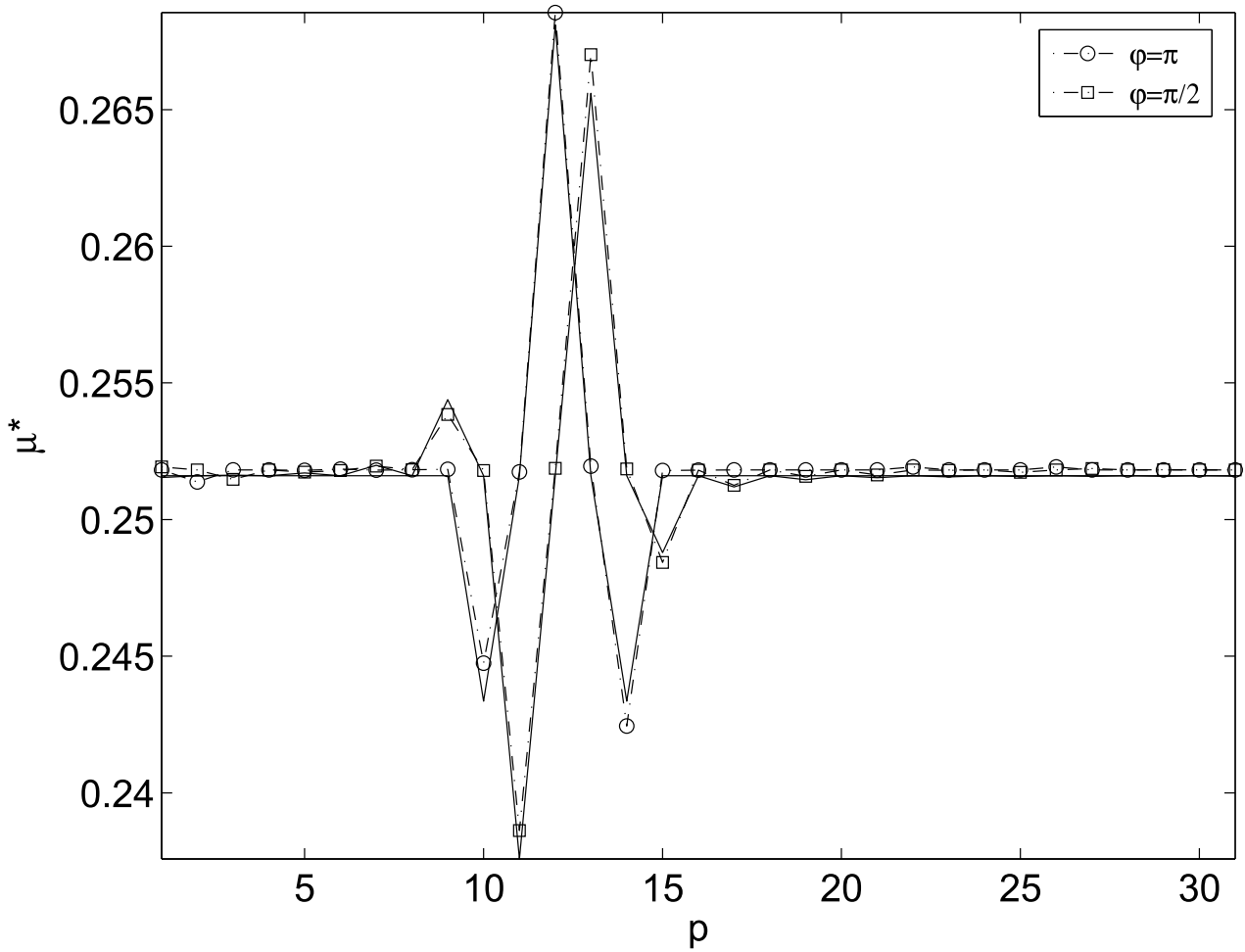


Рис. 3.8: Порог неустойчивости q -бризеров при $q_0 = 10$, $N = 32$ и гармонической пространственной неоднородности $\kappa_n = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi p(n+1/2)}{N+1} + \varphi\right)$. Штрих-пунктирные линии с символами – результаты численного исследования устойчивости уравнения (3.36), а сплошные линии – теоретические оценки

значение порога неустойчивости (близкое к его величине в отсутствии беспорядка), но и увеличивает его дисперсию. Таким образом, в системах достаточно большого размера q -бризеры будут терять устойчивость при очень малых величинах нелинейности с вероятностью близкой к вероятности того, что $\Delta V_{q_0, q_0}$ окажется отрицательной для конкретной реализации беспорядка, т.е. к $1/2$ в нашем случае.

Полезно провести параллель для развития неустойчивости между цепочкой ДНУШ без беспорядка и ее непрерывным пределом – нелинейным уравнением Шредингера (НУШ):

$$i\partial_t\psi = \partial_{xx}^2\psi + \mu|\psi|^2\psi. \quad (3.58)$$

Эта интегрируемая система [68] имеет семейство решений в виде плоских

ВОЛН

$$\psi = \psi_0 e^{i(\theta x + \omega t)}, \quad \omega = \theta^2 - \mu |\psi_0|^2, \quad (3.59)$$

которые могут рассматриваться как пространственно-непрерывные аналоги q -бризеров. Они являются модуляционно неустойчивыми [69] по отношению к малым возмущениям вида

$$\xi_1(t) e^{i(\theta-k)x} + \xi_2(t) e^{i(\theta+k)x}, \quad k \leq \sqrt{2\mu} |\psi_0|. \quad (3.60)$$

Экстраполируя этот результат на случай ДНУШ, можно предположить, что неустойчивыми являются те q -бризеры, соседние моды которых $q_0 \pm 1$ находятся внутри полосы неустойчивости. Точкой бифуркации тогда являлась бы

$$\mu_{cont} \approx \frac{\pi^2}{4B_0(N+1)^2}. \quad (3.61)$$

Легко видеть, что, в отличие от фактического значения μ_0^* , этот порог не зависит от частоты и волнового вектора. Кроме того, не выполняется предельный переход к $\mu_0^* \propto (N+1)^{-1}$ при $N \rightarrow \infty$, $\theta = \frac{q}{N+1} = const$. Более высокий порог неустойчивости в ДНУШ объясняется требованиями более точного частотного резонанса, что, в свою очередь, проистекает из пространственной дискретности и конечных размеров системы.

Управление устойчивостью q -бризеров в цепочке дискретных нелинейных уравнений Шредингера

Развивая идею об управлении устойчивостью q -бризеров путем задания определенных пространственных неоднородностей, предложенную в предыдущем разделе для системы с акустическим спектром колебаний (ФПУ), рассмотрим эту проблему для системы ДНУШ.

Поправка к бифуркационному значению параметра нелинейности в формуле (3.56), определяемая пространственной неоднородностью системы, может быть преобразована к виду

$$\Delta V_{q_0, q_0} = \frac{8}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^{N-1} \kappa_n \left(\cos \frac{\pi q_0 (2n+1)}{N+1} \sin^2 \frac{\pi (2n+1)}{2(N+1)} + O(N^{-2}) \right). \quad (3.62)$$

Заметим, что это выражение линейно по коэффициентам κ_n , и, следовательно, можно рассматривать κ_n как сумму пространственных гармоник, поправки к порогу неустойчивости от которых аддитивны в $\Delta V_{q_0, q_0}$.

Рассмотрим пространственно-гармоническую неоднородность

$$\kappa_n = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi p (n+1/2)}{N+1} + \varphi \right), \quad (3.63)$$

где φ – некоторый сдвиг пространственной фазы. Естественно ожидать, что наибольшие по абсолютной величине поправки $\Delta V_{q_0, q_0}(p, \varphi)$ будут иметь место при $p = 2q_0$. Легко видеть, что в этом случае

$$\Delta V_{q_0, q_0} \approx \sqrt{N+1} \cos \varphi. \quad (3.64)$$

Отсюда следует, что точка бифуркации достигает своих максимальных и минимальных значений при $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$ соответственно:

$$\mu^* \approx \mu_0^* \left(1 \pm \frac{D(N+1)^2}{\pi^2 |\Omega_{q_0}|} \right). \quad (3.65)$$

В то же время, поправка будет нулевой при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Аналогично, для неоднородностей с ближайшими волновыми числами $p = 2q_0 \pm 1$ получаем

$$\mu^* \approx \mu_0^* \left(1 \pm \frac{8D(N+1)^2}{3\pi^3 |\Omega_{q_0}|} \sin \varphi \right), \quad (3.66)$$

что дает относительный сдвиг по φ на $-\frac{\pi}{2}$ несколько меньшие поправки. Для неоднородностей с $p = q_0 \pm 2$ можно получить

$$\mu^* \approx \mu_0^* \left(1 + \frac{D(N+1)^2}{2\pi^2 |\Omega_{q_0}|} \cos \varphi \right), \quad (3.67)$$

что характеризуется сдвигом по пространственной фазе φ на π и в два раза меньшими поправками. Можно показать, что неоднородности с волновыми числами еще более отличающимися $2q_0$ дают все меньшие поправки к порогу неустойчивости q -бризера.

Эти результаты хорошо согласуются с численными (Рис.3.8). Резюмируя, порог неустойчивости q -бризера с центральной модой q_0 определяется, в основном, пространственными гармониками неоднородностей $\{\kappa_n\}$ с волновыми числами в диапазоне $p \in [2q_0 - 2, 2q_0 + 2]$. Эта зависимость сильно отличается от интуитивно ожидаемой: предположительно доминирующего влияния пространственной гармоники с волновым числом $p = q_0$, совпадающим с волновым числом q -бризера. Примечательна ярко выраженная зависимость от пространственной фазы гармоники: для одного и того же p можно получить противоположные по знаку поправки к порогу неустойчивости. Этот эффект можно объяснить как следствие деформации линейного спектра под влиянием неоднородности, поскольку $\Delta V_{q_0, q_0}$ является ничем иным как разностью частотных сдвигов линейных мод (3.45). Этот сдвиг, в свою очередь, определяется граничными условиями, которые также влияют и на нелинейное межмодовое взаимодействие.

Эти результаты указывают на возможность управления потоком энергии между модами. Создавая периодическую модуляцию линейной связи, можно вызвать неустойчивость определенных q -бризеров и либо ускорить процессы делокализации энергии, либо стабилизировать другие q -бризеры, в которые энергия будет перекачиваться. Эти q -бризеры, в свою очередь, могут также быть дестабилизированы желаемым образом. Перспективными представляются эксперименты с динамикой волн света и материи в оптических решетках с управляемой неоднородностью, аналогично недавним, обнаружившим в них андерсоновскую локализацию [8, 56].

3.3 q -бризеры: аномальная теплопроводность

Отклонения от нормальной теплопроводности (от закона Фурье) в низкоразмерных системах с недавних пор стало объектом экспериментальных и прикладных исследований в контексте нанотрубок, твердотельных термических выпрямителей и фоновых волноводов [5]. Аномальная теплопроводность впервые наблюдалась в экспериментах с углеродными и бор-нитридными нанотрубками. Была получена степенная зависимость коэффициента теплопроводности от длины нанотрубки $\mathcal{K} \propto N^\alpha$, $\alpha \sim 0.5 - 0.6$ [70]. Другим объектом, где ожидается присутствие аномальной теплопроводности, являются нанопровода [6]. И для нанотрубок, и для нанопроводов было показано, что основным каналом переноса энергии являются фононы. Рассеяние фононов обусловлено беспорядком (дефектами в структуре кристаллической решетки) и нелинейностью (межатомных связей). Численные эксперименты, проведенные с реалистичными моделями нанотрубок, указывают на то, что и беспорядок [71], и нелинейность [72] могут приводить к возникновению аномальной теплопроводности. Вместе с тем, сложный колебательный спектр и присутствие множества параметров крайне затрудняют анализ механизмов аномальности, а тем более – совместного влияния беспорядка и нелинейности.

Цепочки связанных осцилляторов, где полный импульс является интегралом движения, широко используются в качестве качественных моделей для изучения аномальной теплопроводности [60, 73–75]. Несмотря на интенсивные исследования и существенный прогресс в общетеоретическом понимании этого явления, основные количественные характеристики до сих пор являются предметом дебатов, оценки разнятся в пределах $\alpha \sim 0.25 \div 0.45$ [76–83]. Более того, внимание оставалось сосредоточенным на линейных системах с беспорядком и на нелинейных системах без беспорядка.

Математическая модель

Будем рассматривать цепочку ФПУ- β длиной N с беспорядком в коэффициентах линейной связи и ангармоничностью четвертой степени в потенциале взаимодействия:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N p_n^2 + \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{1}{2} (1 + D\kappa_n) (x_n - x_{n-1})^2 + \frac{\beta}{4} (x_n - x_{n-1})^4 \right] \quad (3.68)$$

где $x_n(t)$ обозначает отклонение n -го осциллятора из состояния равновесия, $p_n(t)$ – его импульс, $\kappa_n \in [-1/2, 1/2]$ случайные некоррелированные равномерно распределенные величины, $\langle \kappa_n \kappa_m \rangle = \sigma_\kappa^2 \delta_{n,m}$. Граничные условия – фиксированные: $x_0 = x_{N+1} = 0$.

Используется один из стандартных методов измерения коэффициента теплопроводности, в котором осцилляторы, находящиеся на концах цепочки, взаимодействуют с термостатами, создающими градиент температуры и поток тепла вдоль цепочки [76]. В данном случае выбрана модель Нозе-Хувер, которая задается добавочными членами $-\zeta_\pm \dot{x}_{1,N}$ в уравнениях движения первого и последнего осцилляторов, а переменные состояния термостатов описываются уравнениями

$$\dot{\zeta}_\pm = \frac{\dot{x}_{1,N}^2}{T_\pm} - 1. \quad (3.69)$$

Поток тепла вдоль цепочки определяется как усредненная по времени величина [76, 77]

$$j = -\frac{1}{2} \sum_n (\dot{x}_{n+1} + \dot{x}_n) [(1 + D\kappa_{n+1})(x_{n+1} - x_n) + \beta(x_{n+1} - x_n)^3]. \quad (3.70)$$

Коэффициент теплопроводности вычисляется по формуле

$$\mathcal{K} = \frac{jN}{T_+ - T_-} \quad (3.71)$$

и усредняется по случайным реализациям беспорядка. В качестве параметра системы используется средняя температура $T = \frac{T_+ + T_-}{2}$, которая связана со средней плотностью энергии в цепочке $\langle E_n \rangle = k_B T = T$. В дальнейшем мы полагаем $k_B = 1$ и $\frac{T_+ - T_-}{T} = 0.5$.

Поскольку моды, экспоненциально локализованные в прямом пространстве, экспоненциально слабо взаимодействуют с термостатами на концах цепочки, ожидается, что преимущественный вклад в теплопроводность будут давать делокализованные моды. Для анализа этого вклада в присутствии нелинейности мы можем использовать теорию q -бризеров в базисе этих мод, получить зависимость «границы подвижности» от размеров системы, а также

порог сильного хаоса по энергии, выше которого эта граница разрушается. В результате мы сможем выявить зависимость режимов теплопроводности от температуры системы и ее размеров.

Как было показано выше, условием существования q -бризера с центром в моде q_0 является

$$q_0 \ll q_c = \frac{2\sqrt{2}(N+1)^{1/2}}{D\sigma_\kappa}. \quad (3.72)$$

Низкочастотные длинноволновые моды с волновыми числами $q_0 \ll q_c$ деформируются под действием беспорядка слабо и имеют вид

$$\hat{z}_{q_0 n} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \left(\sin \frac{\pi q_0 n}{N+1} - d \sum_{p \neq q_0} \frac{\omega_{q_0} \omega_p}{\omega_{q_0}^2 - \omega_p^2} K_{q_0, p} \sin \frac{\pi p n}{N+1} \right), \quad (3.73)$$

оставаясь при этом делокализованными в прямом пространстве. Как было указано выше, беспорядок приводит к андерсоновской (экспоненциальной) локализации высокочастотных мод в прямом пространстве, откуда следует, что q_c задает «границу подвижности». Моды с $q_0 \ll q_c$ делокализованы и обеспечивают распространение волновых пакетов с групповой скоростью ($v_{gr} \sim 1$); моды с $q_0 > q_c$ отвечают возбуждениям, экспоненциально локализованным в прямом пространстве и практически не участвуют в распространении волновых пакетов.

Заметим, что в коротких цепочках и/или при слабом беспорядке *все* моды могут быть делокализованы. Это происходит при $q_c \geq N$, что, с учетом (3.72), дает

$$N \leq \frac{8}{D^2 \sigma_\kappa^2}. \quad (3.74)$$

Режимы теплопроводности В линейных системах каждая из мод дает свой специфичный вклад в теплопроводность, поскольку взаимодействие между модами отсутствует. Строгий анализ показывает, что (в случае фиксированных границ) делокализованные моды дают вклад $j \propto N^{-3/2}$ в поток тепла, что приводит к $\mathcal{K} \propto N^{-1/2}$ для коэффициента теплопроводности [76, 77]. В случае свободных границ обмен энергией с термостатами более эффективен, и в результате получается $j \propto N^{-1/2}$ и $\mathcal{K} \propto N^{1/2}$. Вклад локализованных мод экспоненциально мал: $j \propto \exp(-\xi/N)$, где ξ – их характерная длина локализации.

Как мы установили в предыдущем разделе, низкочастотные моды могут быть продолжены в нелинейный режим, оставаясь экспоненциально локализованными в модовом пространстве и делокализованными в прямом. Естественно ожидать, что при малой нелинейности теплопроводность будет по-прежнему определяться этими слабо взаимодействующими модами. В связи

с этим, закономерным является вопрос о пороге разрушения q -бризеров, который будет определять переход к режиму сильного взаимодействия мод, сильного хаоса, доминирования эффектов нелинейности над эффектами беспорядка.

Поскольку взаимодействие с термостатами приводит к возбуждению всех мод, то, даже пренебрегая взаимодействием с андерсоновскими модами, мы должны рассматривать не отдельную q -бризерную траекторию, а движение на траектории, близкой к $s \ll q_c$ -мерному тору. По аналогии с построением q -бризера как продолжения точного периодического решения можно строить и s -мерные q -торы, продолжая тор, образованный первыми s линейными модами системы с беспорядком в нелинейный режим, что было ранее сделано для пространственно-однородного случая в [84]. Эти объекты также будут локализованы в модовом пространстве:

$$E_p/E_0 \propto (\lambda_T)^{2p}, \quad \lambda_T = \beta N E_0/s \quad (3.75)$$

где E_0 и E_p – средние энергии мод $\overline{1, s}$ и $\overline{(2p-1)s+1, (2p+1)s}$ [84]. Делокализация этих торов в модовом пространстве происходит при $\lambda_T > 1$. Принимая $s \propto q_c$ получаем, таким образом, следующее выражение для порога сильного хаоса:

$$N_c \propto \frac{1}{D^2 \sigma_\kappa^2 \beta^2 E_0^2}. \quad (3.76)$$

Когда нелинейность не превосходит порога сильного хаоса, можно говорить о трех основных каналах теплопроводности (Рис.3.9). (I) Делокализованные в прямом пространстве моды обеспечивают баллистический транспорт энергии, получаемой в результате непосредственного взаимодействия с термостатами, как и в линейном случае. Сила взаимодействия с термостатами и поток тепла, переносимый отдельной модой пропорциональны квадрату амплитуды этой моды на концах цепочки $j_q \propto \hat{z}_{q,n=1,N}^2$ (так называемое входное сопротивление) [76, 77]. Отсюда, например, получим уже приведенное без объяснения выражение для фиксированных границ $j = \sum_{q < q_c} j_q \propto N^{-3/2}$ и $\mathcal{K} \propto N^{-1/2}$. (II) Вследствие нелинейности экспоненциально локализованные в пространстве андерсоновские моды начинают взаимодействовать и, как ожидается, давать диффузионный вклад, отвечающий нормальной теплопроводности с $\mathcal{K}(T)$ независимым от N [85, 86]. (III) Нелинейность также открывает третий канал теплопроводности, уменьшая входное сопротивление для делокализованных мод. Это происходит путем термализации локализованных мод, которые, в свою очередь, взаимодействуют с делокализованными модами по всей длине цепочки, нивелируя влияние граничных условий.

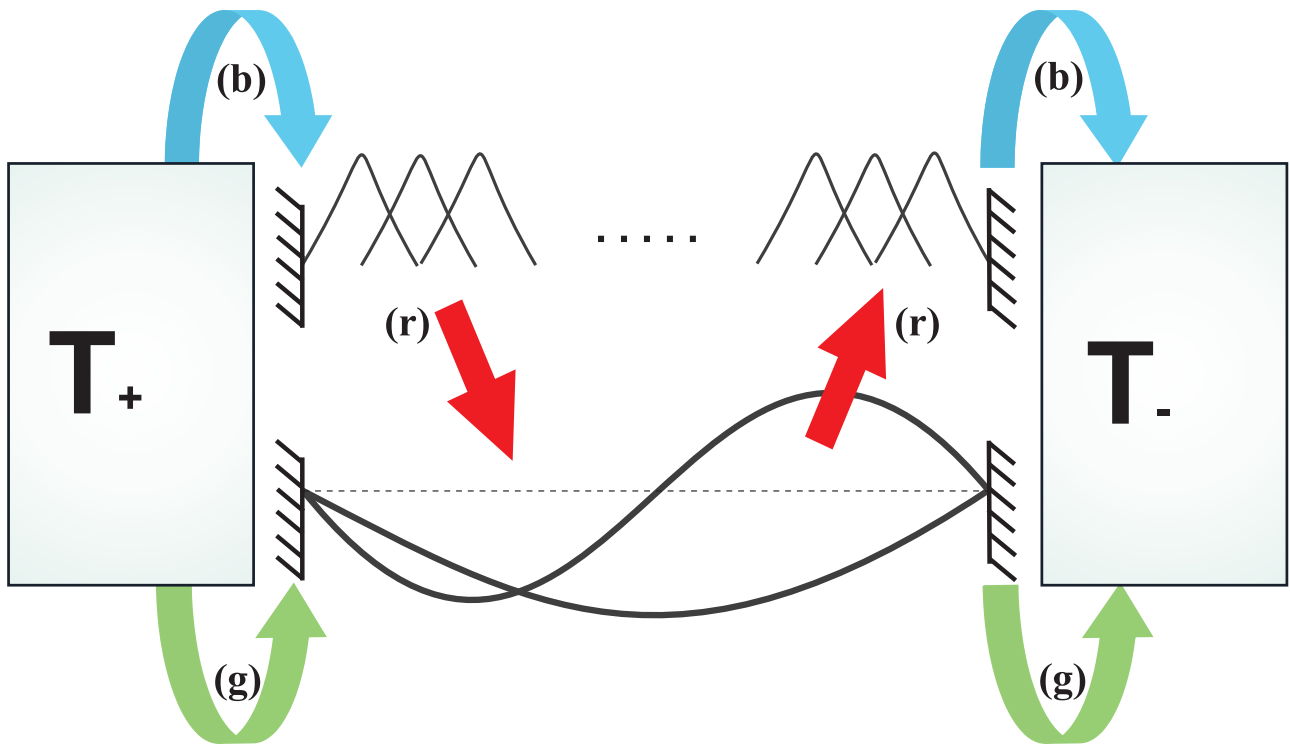


Рис. 3.9: Схематическое представление каналов теплопроводности. Жирными черными линиями показаны делокализованные в прямом пространстве моды, а тонкими черными линиями – локализованные. Стрелки, помеченные (b) и (g) иллюстрируют поток энергии в каналы локализованных и делокализованных мод, возникающий вследствие непосредственного взаимодействия с термостатами. Оба канала переносят поток тепла, причем последний более эффективно. Нелинейное взаимодействие вызывает поток тепла через локализованные моды в делокализованные (стрелки с символом (r)), что отвечает третьему каналу теплопроводности.

Первый канал теплопроводности (I) доминирует только когда средняя температура T очень мала, равно как и размер цепочки N . Поток тепла через второй канал теплопроводности (II) можно оценить используя подход, развитый недавно для анализа расплывания волновых пакетов в цепочках типа Клейн-Гордона, где при достаточном размере системы все моды являются локализованными в прямом пространстве [87]. Предсказывается, что для заданной плотности энергии (что соответствует некоторой температуре) коэффициент диффузии (а, следовательно, и коэффициент теплопроводности) растет с температурой как $\mathcal{K} \sim T^2$ для $T > T_{cr}$ и $\mathcal{K} \sim T^4$ для $T < T_{cr}$. Здесь T_{cr} – некоторое пороговое значение температуры, определяющееся, в том числе, и используемой моделью цепочки. Важно отметить, что теплопроводность

через этот канал не зависит от размеров системы. Таким образом, второй канал начнет доминировать над первым, когда $N > N_{12}(T)$, где $N_{12}(T)$ – некоторая возрастающая функция температуры. В численном эксперименте при $N \approx N_{12}(T)$ должен наблюдаться переход к нормальной теплопроводности.

Поток тепла через третий канал теплопроводности можно оценить следующим образом. Предположим, что $\mathcal{O}(N)$ сильно локализованных андерсоновских мод ($\xi_q = \mathcal{O}(1)$) однородно распределены вдоль цепочки, $E_q = T$, и обмениваются теплом с делокализованной модой q_0 , в начале «холодной» $E_{q_0} = 0$. Эволюция этой моды будет приближенно описываться уравнением

$$\ddot{Q}_{q_0} + \omega_{q_0}^2 Q_{q_0} \approx \beta \sum_{p>q_c} I_{q_0,p} T^{3/2} \zeta(t), \quad (3.77)$$

где $\zeta(t)$ является δ -коррелированным гауссовским шумом с единичной дисперсией. В этом случае

$$\langle \dot{Q}_{q_0}^2 \rangle \propto \beta^2 \omega_{q_0}^2 T^3 t. \quad (3.78)$$

Следовательно, поток тепла в делокализованную моду равен

$$J_{q_0} \propto \beta^2 \omega_{q_0}^2 T^3. \quad (3.79)$$

Экстраполируя этот результат на задачу о теплопроводности, можно получить следующие выражения для потока тепла

$$J = \sum_{q_0 < q_c} J_{q_0} \propto \beta^2 T^3 N^{-1/2} \quad (3.80)$$

и коэффициента теплопроводности

$$\mathcal{K} \propto N^{1/2}. \quad (3.81)$$

Таким образом, мы предполагаем существование перехода от нормальной теплопроводности к аномальной $\alpha \approx 0.5$ при некотором $N > N_{23}(T)$.

При дальнейшем увеличении размеров системы $N > N_{sst}$ будет достигнут порог сильного хаоса (3.76), $E_0 \equiv T$. Тогда делокализованные моды начнут сильно взаимодействовать друг с другом, нелинейность будет разрушать андерсоновскую локализацию, наступит режим сильной турбулентности, описываемый в рамках ренормгруппового анализа и теории связанных мод, которые предсказывают аномальную теплопроводность с показателем в интервале $\alpha \sim 1/3 \dots 2/5$.

Подводя итог, из анализа эффективности каналов теплопроводности следует, что, в зависимости от размеров системы, доминирующий вклад в транспорт тепла дают:

- для $N < N_{12}$ – баллистические делокализованные моды, энергия в которые закачивается непосредственно из термостатов, при этом $\alpha \approx -1/2$;
- для $N_{12} < N < N_{23}$ – локализованные андерсоновские моды, взаимодействующие друг с другом и дающие диффузионный транспорт и нормальную теплопроводность $\alpha \approx 0$;
- для $N_{23} < N < N_{sst}$ – баллистические делокализованные моды, энергия в которые закачивается из термостатов через локализованные моды, при этом теплопроводность аномальная: $\alpha \approx 1/2$;
- для $N_{sst} < N$ – сильно взаимодействующие и деформированные длинноволновые моды, система находится в режиме сильного хаоса, теплопроводность аномальная с $\alpha \approx 1/3 \dots 2/5$.

Численные результаты

Обратимся теперь к результатам математического моделирования. Динамические уравнения решались путем численного интегрирования от нулевого момента времени до конечного, которое варьировалось от 10^6 для самых коротких цепочек до $2 \cdot 10^7$ для самых длинных. Усреднение производилось, соответственно, по числу реализаций в пределах от 100 до 3. Во всех численных экспериментах были фиксированы параметры $\beta = D = 1$. Поскольку ограничения, накладываемые существующими вычислительными мощностями, не позволяют пронаблюдать все предсказанные выше переходы меняя только длину цепочки, изменялась также и температура T . (Необходимо отметить, что результаты требуют осторожной интерпретации, так как оценить влияние конечных размеров системы и остаточных переходных процессов (которые могут присутствовать даже после огромных времен интегрирования, отведенных на переход системы в состояние, близкое к равновесному) на настоящий момент представляется невозможным.)

При $T = 10^{-4}$ наблюдается доминирование канала теплопроводности I с $\alpha < 0$ (Рис.3.10). Для больших температур (как, например, для $T = 0.001$) во всем доступном диапазоне N наблюдается нормальная теплопроводность, что указывает на доминирование канала андерсоновских мод. При $T = 0.004$ наблюдается переход от нормальной к аномальной теплопроводности, то есть доминированию III канала теплопроводности; показатель теплопроводности при этом равен $\alpha \approx 0.52$ для больших N , причем α еще немного увеличивается при увеличении температуры. Этот режим отвечает баллистическому транспорту энергии низкочастотными модами, локализованными в прямом пространстве, энергия в которые поступает из термостатов через андерсоновские моды.

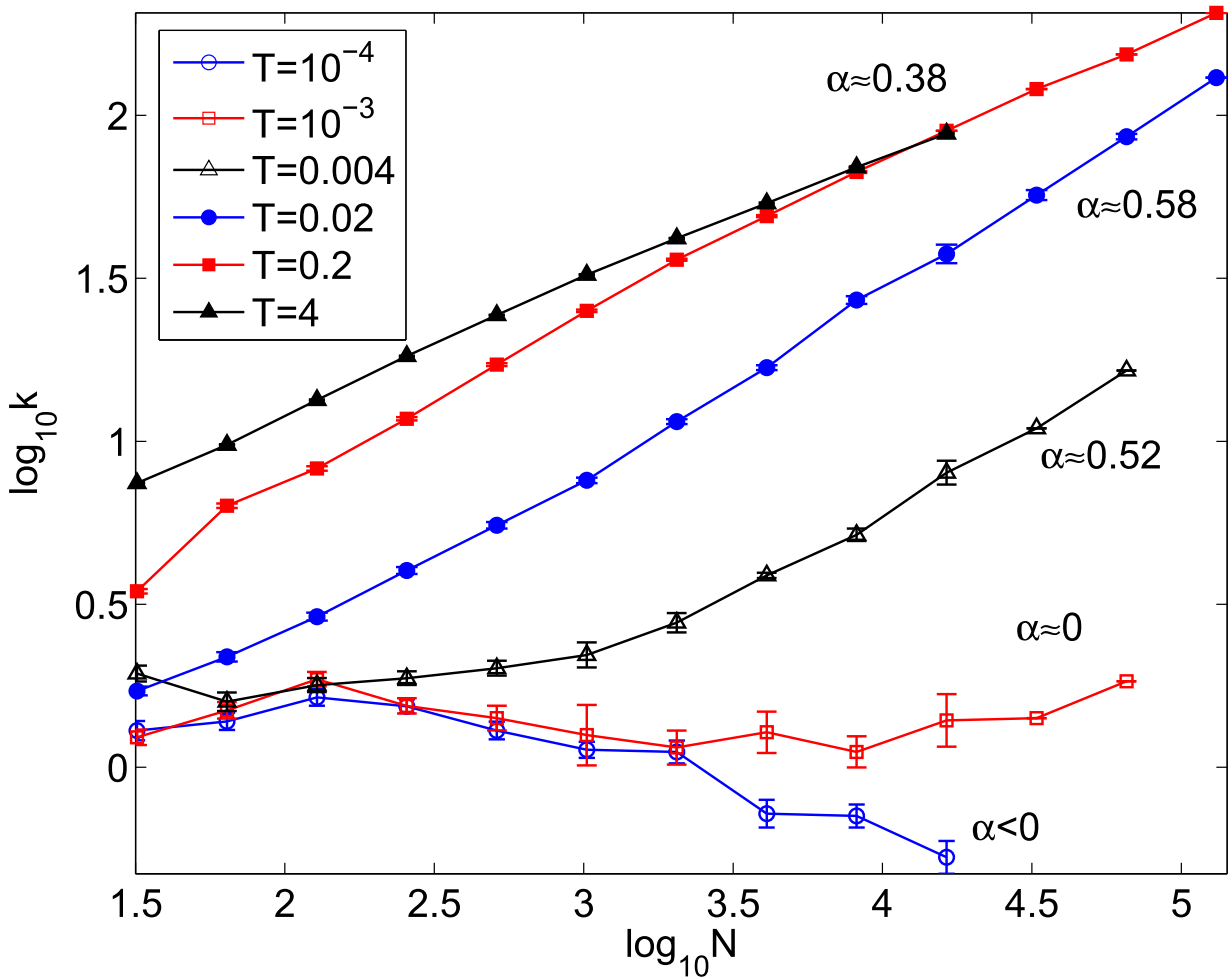


Рис. 3.10: Зависимость усредненного коэффициента теплопроводности от длины цепочки в двойном логарифмическом масштабе для различных средних температур и фиксированных $\beta = D = 1$. Рядом с графиками указаны наклоны аппроксимирующих прямых. Также показана статистическая погрешность.

Для того, чтобы подтвердить, что наблюдаемая аномальная теплопроводность связана с делокализованными баллистическими модами, модифицируем модель, добавив для каждого осциллятора случайный квадратичный потенциал $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \Omega_n^2 x_n^2$, $\Omega_n \in [0; \omega_0]$ (3.68). Это приводит к образованию щели в районе нулевой частоты в спектре линейных колебаний и нарушает сохранение полного момента импульса. В системах такого типа все моды становятся локализованными в прямом пространстве, если сила беспорядка превышает некоторый порог. Действительно, в согласии с теоретическими аргументами, численные результаты свидетельствуют об отсутствии аномальной теплопроводности в этом случае (Рис.3.11). Канал диффузионной теплопроводности также оказывается затронут (вследствие усилившейся локализации андерсоновских мод), однако становится доминирующим.

Наконец, наблюдается переход к режиму аномальной теплопроводности, в

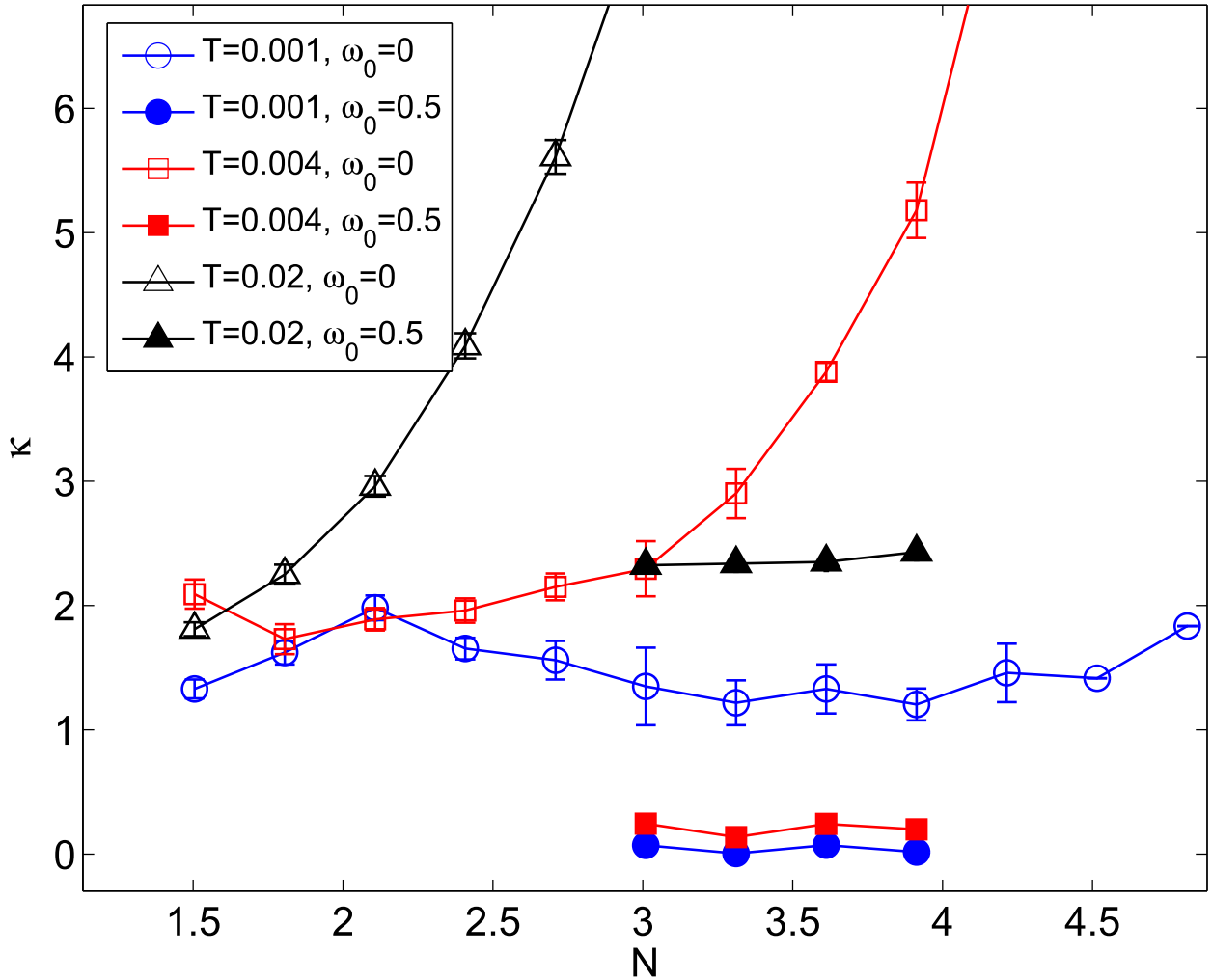


Рис. 3.11: Зависимость коэффициента теплопроводности от размера системы в моделях без и с добавочным собственным потенциалом осцилляторов (соответственно, незакрашенные и покрашенные символы).

котором доминирующими оказываются эффекты нелинейности; при этом $\alpha \approx 0.38$ ($T = 0.2$, Рис.3.10). Следует отметить, что зависимость коэффициента теплопроводности \mathcal{K} от температуры в этом режиме перестает наблюдаться. Так же как и другие переходы, этот переход смещается в сторону меньших N при увеличении температуры T , а при $T = 4$ является единственным в наблюдаемом диапазоне размеров цепочки.

Заметим, что точка перехода $N_c(T)$ может быть приближенно определена как точка пересечения линейной аппроксимации зависимости $\mathcal{K}(N)$ для $T = 4$ и линейной аппроксимации $\mathcal{K}(N)$ в области $\alpha \sim 0.5$ для другой, более низкой, температуры. Из этих соображений для температур $T = 0.02$ и $T = 0.2$ можно получить $N_c(0.02) \approx 5.8 \cdot 10^5$ и $N_c(0.2) \approx 4.5 \cdot 10^3$, что хорошо согласуется с теоретической зависимостью для порога сильного хаоса $N_c \propto T^{-2}$ (3.76).

Глава 4

Динамика решеток с сильным пространственным беспорядком

Андерсоновская локализация в нелинейных системах

Фундаментальным и ключевым явлением в *линейных* системах с пространственным беспорядком является уже обсуждавшаяся ранее андерсоновская локализация, в широком смысле понимаемая как экспоненциальная локализация линейных мод пространственно-неоднородных колебательных систем [9]. Действительно, если с вероятностью 1 линейные моды являются экспоненциально локализованными в прямом пространстве, то любое начальное возбуждение конечного размера экспоненциально локализовано в пространстве андерсоновских мод. Взаимодействие между модами в линейном случае отсутствует, поэтому их начальные энергии сохраняются во времени. Эффективно возбужденными окажутся и будут оставаться только те моды, амплитуды которых заметно отличны от нуля в области начального возбуждения. В результате, начальный волновой пакет останется локализованным в исходной области пространства.

Нелинейность, неизбежная в реальных физических системах, приводит к взаимодействию между андерсоновскими модами. Закономерен вопрос, сохраняется ли андерсоновская локализация в нелинейных системах с беспорядком, или начальное возбуждение будет делокализовываться с отличной от нуля вероятностью для сколь угодно малой, но конечной нелинейности?

Ответ на этот вопрос до сих пор оставался неизвестным, несмотря на многочисленные работы в данной области. Так, J. Fröhlich, T. Spencer, и С.Е. Wayne показали, что для класса нелинейных решеток с конечным радиусом взаимодействия андерсоновских мод (так называемая модель ФСВ) можно построить продолжение бесконечномерных торов из линейного режима в нелинейный [88]. Из этого следует, что для достаточно слабой нелинейности существует область фазового пространства, обладающая конечной мерой, начальные условия, принадлежащие которой, будут находиться на то-

ре, а соответствующие траектории – отвечать колебаниям локализованным в прямом пространстве решетки. Исходя из этого был сделан вывод о существовании андерсоновской локализации в нелинейных системах класса ФСВ. Здесь, однако, следует отметить, что неясным остается вопрос о равномерности продолжения торов и зависимости порога их существования по силе нелинейности/энергии от различных факторов.

Недавно М. Johansson, G. Kopidakis, и S. Aubry предприняли попытку выйти за рамки жесткого ограничения класса ФСВ систем и представили аналитические и численные свидетельства в пользу продолжения торов в нелинейный режим в системе ДНУШ [89]. Им удалось получить нижнюю границу для вероятности отсутствия резонансов для квазипериодических колебаний и показать, что она конечна для достаточно малой энергии начального волнового пакета. Более того, была высказана гипотеза, что и для больших начальных энергий неизбежна конечная локализация, когда расплывание волнового пакета неизбежно приведет к уменьшению плотности энергии и эффективной нелинейности.

Также было введено понятие динамической локализации [52], которая определялось как время, в течение которого начальный волновой пакет останется локализованным. Этот подход, однако, не позволяет сделать определенных выводов о конечной локализации либо делокализации пакета.

Наконец в численных экспериментах было получено, что точечные возбуждения оставались локализованными в течение всего времени наблюдения, если их энергия была достаточно мала [51]. Подобные численные результаты, однако, всегда оставляют открытым вопрос о эволюции на больших временных масштабах.

В данном разделе будет дан ответ на вопрос об андерсоновской локализации в нелинейных системах. Построив теорию q -бризеров в базисе андерсоновских мод, мы покажем, что существует конечная вероятность того, что локализованное решение нелинейной системы (периодическое или квазипериодическое во времени) разрушается для произвольно малой нелинейности, либо, что полностью эквивалентно, энергии. Таким образом, для произвольно малой нелинейности/энергии существует конечная вероятность делокализации начального возбуждения. Верхняя граница для вероятности локализации уменьшается экспоненциально с возрастанием энергии пакета/коэффициента нелинейности. Более того, для произвольно малой энергии/нелинейности средняя по ансамблю длина локализации пакета стремится к бесконечности, что также свидетельствует об отсутствии андерсоновской локализации.

4.1 Предел сильного беспорядка

Парадигматической моделью для описания динамики Бозе-Эйнштейн конденсата в оптических решетках (где локализация недавно наблюдалась экспериментально [8]) является решетка осцилляторов Клейн-Гордона (КГ) (и ее полуклассический аналог — цепочка дискретных нелинейных уравнений Шредингера (ДНУШ)), в которой длина локализации линейных мод уменьшается по мере увеличения беспорядка. Сначала мы рассмотрим предел сильного беспорядка, поскольку именно в этом случае следует ожидать наиболее выраженные свойства андерсоновской локализации. Этот предел реализуется в модели ФСВ [88], в которой линейные моды являются компактными точечными возбуждениями, частоты колебаний которых случайные величины. Помимо прочего, напомним, что в этой модели (в отличие от КГ или ДНУШ) возможность продолжения торов в нелинейный режим является доказанной [88].

Уравнения движения d -мерной решетки классических осцилляторов со случайным гармоническим потенциалом и нелинейной связью задаются гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left[p_{\mathbf{n}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{n}} x_{\mathbf{n}}^2 + \frac{1}{\gamma} \sum_{\mathbf{m} \in D(\mathbf{n})} (x_{\mathbf{m}} - x_{\mathbf{n}})^{\gamma} \right], \quad (4.1)$$

где $x_{\mathbf{n}}$ — отклонение $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ -го осциллятора из состояния равновесия, $p_{\mathbf{n}}$ — ее импульс, $D(\mathbf{n})$ — множество его соседей, случайные величины $\varepsilon_{\mathbf{n}} \in [1/2, 3/2]$ являются равномерно распределенными. Преимущественно мы будем рассматривать случай $d = 1$ и нелинейность $\gamma = 4$, указывая в специальных случаях иные значения в явном виде.

Как обсуждалось выше, в линейных системах возбуждения, локализованные в прямом пространстве, также локализованы и в модовом. Для того, чтобы локализация сохранялась и в нелинейных системах, начальные условия должны лежать на регулярных траекториях, также отвечающих колебаниям, локализованным в прямом пространстве (будь то периодические или квазипериодические траектории). Напротив, если начальные условия находятся в хаотическом слое, то это неизбежно приведет к неограниченному движению в фазовом пространстве и делокализации волнового пакета. Таким образом, ключевым вопросом является вероятность существования *локализованных* периодических траекторий и торов. Как мы увидим в дальнейшем, для того, чтобы показать разрушение Андерсоновской локализации достаточно получить верхние грани для этих вероятностей. Более того, поскольку

в центрах торов находятся периодические траектории, само существование последних является необходимым условием существования первых.

В работах [47] было показано, что андерсоновские моды могут быть продолжены в нелинейную область, отвечая, при достаточно малых нелинейностях, локализованным в прямом пространстве траекториям. Остается однако неизвестным, равномерно ли продолжают эти траектории, до какого предела, и какая доля из них может быть продолжена до заданной величины энергии/нелинейности.

Андерсоновские моды, продолженные в нелинейный режим, являются, по сути, q -бризерами. Принципиальным отличием от q -бризеров, рассмотренных в предыдущих главах является то, что данные локализованы не только в модовом, но и в прямом пространстве. Тем не менее, подход к построению и исследованию свойств таких периодических решений, использованный ранее, применим и для теории q -бризеров в базисе андерсоновских мод.

Будем строить точное периодическое решение системы (4.1), локализованное на осцилляторе с номером $n = n_0$. (Для удобства здесь и в дальнейшем будем фиксировать коэффициент нелинейности и использовать полную энергию в качестве малого параметра. Обратим внимание, что изменение полной энергии в (4.1) полностью эквивалентно изменению параметра нелинейности.)

Воспользуемся методами теории возмущений, представляя точное решение в виде разложения $x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_n^{(k)}(t)$ в пределе малых амплитуд, и выбрав моду линейной задачи $x_n^{(0)}(t) = A_n \cos(\sqrt{\varepsilon_n} t) \delta_{n_0, n}$ в качестве нулевого приближения. Полагая $\varepsilon_{n_0} = 1$ без нарушения общности, в ведущем порядке теории возмущений получаем следующее выражение для амплитуд колебаний осцилляторов:

$$x_{n_0 \pm m}(t) = A_{n_0 \pm m} \cos t, \quad A_{n_0 \pm m} = \frac{3A_{n_0 \pm (m-1)}^3}{4(\varepsilon_{n_0 \pm m} - 1)}. \quad (4.2)$$

Условием сходимости решения (4.2) является спадание амплитуд по мере удаления от центра q -бризера:

$$\left| \frac{A_{n_0 \pm m}}{A_{n_0 \pm (m-1)}} \right| = \frac{3A_{n_0 \pm (m-1)}^2}{4|\varepsilon_{n_0 \pm m} - 1|} < \frac{1}{\kappa}, \quad \kappa > 1. \quad (4.3)$$

Ясно, что вероятность того, что это условие будет выполнено для осциллятора с номером $n_0 \pm m$ определяется величиной его случайного потенциала $\varepsilon_{n_0 \pm m}$ и амплитудой колебаний соседнего осциллятора:

$$\mathcal{P}_{\pm m} = 1 - \frac{3}{2} \kappa A_{n_0 \pm (m-1)}^2 \geq 1 - \frac{3}{2} \kappa^{3-2m} A_{n_0}^2. \quad (4.4)$$

Вероятность получить локализованное периодическое во времени решение в бесконечной цепочке

$$\mathcal{P} = \prod_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_m^2 \quad (4.5)$$

ограничена сверху вероятностью того, что амплитуды осцилляторов, соседних с центральным, будут меньше, чем A_{n_0} :

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_{-1} = (1 - 3\kappa E)^2 = \mathcal{P}^+, \quad (4.6)$$

а снизу – вероятностью получить по крайней мере экспоненциально спадающий профиль в бесконечной системе

$$\mathcal{P} \geq \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2} \kappa^{3-2m} A_{n_0}^2 \right)^2 \geq \left(1 - \frac{3\kappa E}{1 - \kappa^{-2}} \right)^2 = \mathcal{P}^-, \quad (4.7)$$

где $3\kappa E \ll 1$, а $E = A_{n_0}^2/2$ – энергия центрального элемента.

Отсюда следует, что построить периодическое решение, локализованное на одном осцилляторе, невозможно при $E > 1/3$. Для меньших энергий вероятность делокализации (а, следовательно, и расплывания волнового пакета) всегда остается конечной и отличной от нуля для произвольно малой энергии, завися от E линейно. Говоря о вероятности делокализации точечного начального возбуждения, очевидно, что она больше, чем вероятность делокализации q -бризера, поскольку начальные условия находятся лишь в окрестности периодической траектории. Для локализации будет необходимо, чтобы начальные условия лежали на локализованном бесконечномерном торе.

Сделаем два замечания. Во-первых, для того, чтобы начальные условия, отвечающие точечному возбуждению, действительно находились в ближней окрестности локализованного q -бризера, необходима сильная локализация последнего: $\kappa \gg 1$. В этом случае верхняя и нижняя грани практически совпадают $\mathcal{P} \approx \mathcal{P}^{\pm}$. Во-вторых, условие (4.6) может быть также получено из критерия нелинейного резонанса Израилева-Чирикова [13], свидетельствуя о связи между нелинейным резонансом, генерацией хаоса и делокализацией.

Распространена гипотеза, что расплывание волнового пакета неизбежно должно остановиться со временем (или, по крайней мере, сильно замедлиться), когда плотность энергии, а, следовательно, и эффективная нелинейность, достаточно уменьшится, что приведет систему к квазилинейному пределу, где андерсоновская локализация будет доминировать. Для того, чтобы подтвердить или опровергнуть это предположение, будем строить и исследовать вероятность существования многомодовых квазипериодических решений.

Будем искать точное решение системы (4.1), локализованное на L осцилляторах/модах и отвечающее бесконечномерному тору. Легко видеть, что вероятность существования максимальна для «разреженных» решений, в которых наиболее возбужденные осцилляторы разделены большими промежутками, состоящими из практически невозбужденных (для таких решений минимизируются поправки теории возмущений, или, что эквивалентно, вероятности резонансов). Рассмотрим подобное разреженное решение, состоящее из L центров возбуждения, каждый из которых обладает энергией E/L , и разделенное по крайней мере двумя невозбужденными осцилляторами в качестве нулевого приближения теории возмущений. В первом порядке проблема сводится к L независимым задачам о q -бризерах, поэтому, принимая во внимание (4.6), получаем следующую верхнюю границу для вероятности локализации:

$$\mathcal{P}_L = \left(1 - \frac{3\kappa E}{L}\right)^{2L}. \quad (4.8)$$

(Заметим, что можно получать решения и в более высоких порядках теории возмущений, выбирая более разреженные решения в качестве нулевого приближения. Тогда можно получить и нижнюю грань для вероятности существования такого решения, экспоненцируя (4.7) по аналогии с (4.8)).

Несложно убедиться, что \mathcal{P}_L является монотонно возрастающей функцией L с предельной вероятностью локализации для бесконечно широкого пакета

$$\mathcal{P}_\infty = e^{-6\kappa E}. \quad (4.9)$$

Ключевым результатом здесь является то, что верхняя граница вероятности существования локализованного решения зависит от полной энергии, а не от ее пловности. Согласно формуле (4.8), расплывание пакета, если оно началось, в принципе, может остановиться, когда размер пакета достигнет некоторого L , однако вероятность того, что делокализация остановится, убывает экспоненциально быстро с увеличением энергии. Легко показать, что формула (4.9) также справедлива для неоднородного распределения энергии между L осцилляторами – центрами возбуждения.

Еще раз подчеркнем, что для остановки расплывания пакета существуют дополнительные требования, еще более снижающие вероятность (4.9) этого события: (i) отсутствие резонансов более высокого порядка и (ii) принадлежность начальных условий области регулярных траекторий.

Рассмотрим волновые пакеты, которые начинают распространяться из начального состояния точечного возбуждения и останавливаются в состоянии с L эффективно возбужденными осцилляторами, $6\kappa E \ll 1$. Тогда

$$\mathcal{F}(L) = \mathcal{P}_L / \mathcal{P}_\infty \quad (4.10)$$

может рассматриваться как функция распределения вероятности для случайной величины L . Используя разложение

$$\mathcal{P}_L = e^{-6\kappa E} (1 - 9\kappa^2 E^2/L + \mathcal{O}(E^3/L^2)) \quad (4.11)$$

получаем формулу для плотности вероятности распределения

$$\mathcal{W}(L) = d_L \mathcal{F}(L) = 9\kappa^2 E^2/L^2 - \mathcal{O}(E^3/L^2). \quad (4.12)$$

Отсюда, вычисляя среднее число эффективно возбужденных осцилляторов в локализованном волновом пакете

$$\langle L \rangle = \int_1^\infty L \mathcal{W}(L) dL, \quad (4.13)$$

получаем расходящуюся для произвольно малого значения энергии, иными словами, бесконечную длину локализации, что также указывает на разрушение андерсоновской локализации при произвольно малой энергии / нелинейности.

4.2 Многомерные решетки

Обобщим полученные результаты на случай произвольного порядка нелинейности γ в гамильтониане (4.1) и размерности решетки d . Используя технику построения q -бризеров и критерий их локализации, можно получить объемные \mathcal{P}_V и поверхностные \mathcal{P}_S вероятности существования разреженного локализованного решения с линейным размером L . Поскольку объем и поверхность ограничивающей области масштабируют как $V \propto L^d$ и $S \propto L^{d-1}$, а критерий локализации содержит $(E/V)^{\gamma/2-1}$, соответствующие вероятности локализации равны

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_V &= \left(1 - \frac{\kappa_V E^{\gamma/2-1}}{V^{\gamma/2-2}} \frac{1}{V} \right)^{2dV}, \\ \mathcal{P}_S &= \left(1 - \frac{\kappa_S E^{\gamma/2-1}}{S^{(d\gamma/2-2d+1)/(d-1)}} \frac{1}{S} \right)^{(d-1)S}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\kappa_{V,S}$ – некоторые константы. Зависимость этих вероятностей от объема и площади поверхности области локализации, равно как и предел бесконечного размера полностью определяются балансом нелинейности и размерности системы. В случае нелинейности высокого порядка ($\gamma > 4$) андерсоновская локализация может выживать и в нелинейных системах, поскольку $\lim_{V \rightarrow \infty} \mathcal{P}_V = 1$ для любых E . Тем не менее, вопрос о существовании бесконечномерных тордов

и их мере в фазовом пространстве системы остается открытым. Для нелинейностей малого порядка ($\gamma < 4$) вероятность существования локализованных решений $\lim_{V \rightarrow \infty} \mathcal{P}_V = 0$ для любых E , что означает, что любое начальное возбуждение будет почти наверняка делокализовываться. Более того, для $\gamma < 2$ даже периодические траектории, локализованные на одном осцилляторе, не существуют для произвольно малых значений энергии/нелинейности. Интригующим свойством поверхностной вероятности \mathcal{P}_S является уменьшение с увеличением площади поверхности области локализации S при $\gamma < 4 - 2/d$, что может указывать на динамическую неустойчивость последней.

4.3 Общий случай нелинейной системы с беспорядком

Рассмотрим теперь общий случай нелинейной системы с беспорядком, линейные моды которой не компактны, а лишь экспоненциально локализованы и взаимодействуют по типу все-со-всеми (хотя далекие в пространстве моды взаимодействуют экспоненциально слабо). Для этого будем использовать модель Клейн-Гордона, гамильтониан которой имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_n \left[p_n^2 + \varepsilon_n x_n^2 + \frac{1}{4} x_n^4 + \frac{1}{\gamma} \sum_{m \in D(n)} (x_m - x_n)^2 \right], \quad (4.15)$$

где все величины и параметры имеют тот же смысл, что и в модели ФСВ.

Обозначим пространственные компоненты ν -й линейной моды как A_n^ν , а квадрат ее частоты (собственное значение линейной задачи) – как ω_ν^2 . Каноническое преобразование $u_n = \sum_\nu Q_\nu A_n^\nu$, $p_n = \sum_\nu P_\nu A_n^\nu$ задает переход в пространство нормальных мод. Уравнения движения в модовом пространстве принимают вид

$$\ddot{Q}_\mu = -\omega_\mu^2 Q_\mu - \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} I_{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} Q_{\nu_1} Q_{\nu_2} Q_{\nu_3}, \quad (4.16)$$

где $I_{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} = \sum_n A_n^\mu A_n^{\nu_1} A_n^{\nu_2} A_n^{\nu_3}$ – интегралы перекрытия мод.

Как и ранее, будем строить регулярные периодические / квазипериодические траектории методами теории возмущений и определять вероятность существования таких траекторий. Расходимость теории возмущений эквивалентна возникновению первичных резонансов.

Начнем с построения точного периодического решения – q -бризера – с центром в моде ν_0 , используя эту моду в качестве нулевого приближения: $Q_{\nu_0}^{(0)} = A_0 \cos(\bar{\omega}_{\nu_0} t)$ и $Q_{\nu \neq \nu_0}^{(0)} = 0$, где принят во внимание нелинейный сдвиг

частоты

$$\bar{\omega}_{\nu_0} = \omega_{\nu_0} + \frac{3}{4} I_{\nu_0 \nu_0 \nu_0 \nu_0} A_0^2 / \omega_{\nu_0}. \quad (4.17)$$

В первом порядке поправки к модам $\mu \neq \nu_0$ имеют следующий вид:

$$Q_\mu = A_\mu \cos \bar{\omega}_{\nu_0} t, \quad A_\mu \approx \frac{3}{4} \frac{I_{\mu, \nu_0, \nu_0, \nu_0} A_0^3}{\omega_\mu^2 - \bar{\omega}_{\nu_0}^2}. \quad (4.18)$$

Теория возмущений теряет сходимость при $|A_\mu/A_0| \geq 1/\kappa$, где $\kappa > 1$ – некоторая константа. Вероятность, с которой это происходит, равна

$$\mathcal{P}_{\nu_0 \mu}^- = \text{Prob}(|\omega_\mu^2 - \bar{\omega}_{\nu_0}^2| < \frac{3}{4} \kappa I_{\mu, \nu_0, \nu_0, \nu_0} A_0^2). \quad (4.19)$$

Для того, чтобы вычислить эту вероятность, необходимо знать плотность вероятности для расстояния между собственными значениями линейной задачи $\mathcal{W}(s)$, $s \equiv \omega_\mu^2 - \omega_{\nu_0}^2$. На настоящий момент ее асимптотическое поведение $s \rightarrow \infty$ практически неизучено. Существует гипотеза, что, по аналогии с гауссовскими ортогональными матрицами, для которых доказано явление «отталкивания уровней» [90], зависимость будет линейная $\mathcal{W}(s) \propto s$. Напротив, результаты систематических численных экспериментов свидетельствуют о конечном пределе плотности вероятности $\mathcal{W}(0) = D > 0$ [91].

Поскольку аналитические результаты в этой области отсутствуют, исследуем обе возможности. Если справедливо второе, то, в полной аналогии со случаем ФСВ, $\mathcal{P}_{\nu_0 \mu}^-$ (нижняя граница для вероятности делокализации) возрастает линейно с энергией $E \sim A_0^2$. Это приводит к тем же самым качественным результатам, что и в случай ФСВ.

Рассмотрим противоположную возможность: предположим, что отталкивание уровней присутствует и в нашей задаче. Тогда плотность вероятности разности близких собственных значений имеет вид $\mathcal{W}(s) \propto s$, а вероятность делокализации q -бризера становится квадратичной по энергии $\mathcal{P}_{\nu_0 \mu}^- \sim C I_{\mu \nu_0 \nu_0 \nu_0} I_{\nu_0 \nu_0 \nu_0 \nu_0} E^2$. Соответственно, вероятность локализации ограничивается сверху

$$\mathcal{P}_{\nu_0}^+ = \prod_{\mu} (1 - \mathcal{P}_{\nu_0 \mu}^-) \approx 1 - C E^2, \quad (4.20)$$

где C – некоторая константа. Таким образом, для конечной, пусть и произвольно малой энергии существует ненулевая вероятность делокализации q -бризера, что в свою очередь гарантирует делокализацию соответствующего волнового пакета.

Подчеркнем, что такая оценка вероятности локализации q -бризера (i) сделана в допущении эффекта отталкивания уровней и (ii) является завышенной для вероятности локализации волнового пакета, поскольку существова-

ние пермодической траектории еще не гарантирует существования семейства торов вокруг нее и попадания начальных условий в эту область.

Одной из причин разрушения торов вокруг периодической траектории может являться потеря устойчивости. Для исследования устойчивости q -бризера линейаризуем уравнения движения (4.16) вблизи точного решения $\bar{Q}_\nu(t)$ с центральной модой ν_0 , обозначая $Q_\nu(t) = \bar{Q}_\nu(t) + \xi_\nu(t)$:

$$\ddot{\xi}_\mu = -\omega_\mu^2 \xi_\mu - 3 \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} I_{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} Q_{\nu_1} Q_{\nu_2} \xi_{\nu_3}. \quad (4.21)$$

Оттлакивание уровней применимо только к парам собственных значений линейной задачи, в то время как плотность вероятность точного резонанса в триплетах $\omega_\mu + \omega_\nu = 2\omega_{\nu_0}$ остается конечной. Оставляя в линейаризованных уравнениях только резонансные члены, получаем уравнения Матье

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_\mu &= -(\omega_\mu^2 + \frac{3}{2} I_{\mu\nu_0\nu_0\mu}) \xi_\mu - \frac{3}{2} I_{\mu\nu_0\nu_0\nu} A_{\nu_0}^2 \cos(2\bar{\omega}_{\nu_0} t) \xi_\nu, \\ \ddot{\xi}_\nu &= -(\omega_\nu^2 + \frac{3}{2} I_{\nu\nu_0\nu_0\nu}) \xi_\nu - \frac{3}{2} I_{\nu\nu_0\nu_0\mu} A_{\nu_0}^2 \cos(2\bar{\omega}_{\nu_0} t) \xi_\mu. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Стандартный для q -бризеров анализ дает следующий критерий неустойчивости:

$$\left| \frac{2\Delta\omega}{A^2} - \frac{3}{2\omega_\nu\omega_\mu} (\omega_{\nu_0} I_{\nu_0\nu_0\nu_0\nu_0} - \omega_\mu I_{\mu\nu_0\nu_0\mu} - \omega_\nu I_{\nu\nu_0\nu_0\nu}) \right| < \frac{3}{2} |I_{\mu\nu_0\nu_0\nu}|, \quad (4.23)$$

где $\Delta\omega = \omega_\mu + \omega_\nu - 2\omega_{\nu_0}$. Поскольку плотность вероятности точного обращения в ноль для выражения слева конечна (и $\propto V^{-1}$, где V – средний объем локализации линейной моды), вероятность того, что неравенство выполняется, равна

$$\mathcal{P}_{\nu\nu_0\mu}^u \approx C' |I_{\mu\nu_0\nu_0\nu}| E/V. \quad (4.24)$$

Отсюда для вероятности отсутствия неустойчивости в локализационном объеме имеем:

$$\mathcal{P}_{\nu_0}^s = \prod (1 - \mathcal{P}_{\nu\nu_0\mu}^u) \approx 1 - \hat{C} \langle |I_{\mu\nu_0\nu_0\nu}| \rangle E. \quad (4.25)$$

Следовательно, вероятность неустойчивости q -бризера зависит от энергии линейно. Поэтому, линейно зависит и вероятность делокализации волновых пакетов, также как и в пределе сильного беспорядка ФВС системы.

Рассмотрим многомодовые (а следовательно, многочастотные) возбуждения. Легко видеть, что если хотя бы две возбужденные моды эффективно взаимодействуют (то есть находятся в одном локализационном объеме), то становятся возможными триpletные резонансы. Как указывалось выше, tripletные резонансы не подвержены отталкиванию уровней, поэтому вероятность

делокализации многомодового решения будет линейно зависеть от E . Таким образом, как и в случае модели ФСВ, разреженные многомодовые решения будут минимизировать вероятность делокализации. Нижняя граница для вероятности делокализации (и верхняя граница для вероятности локализации) задается произведением соответствующих вероятностей для q -бризеров. Для L эффективно возбужденных мод в разреженном волновом пакете, где E/L – энергия каждой моды, получаем

$$\mathcal{P}_L^+ = (1 - C(E/L)^2)^L. \quad (4.26)$$

Заметим, что такие локализованные решения могли бы, в принципе, существовать для произвольно большой полной энергии с вероятностью сколько угодно близкой к 1, если они достаточно разрежены, ввиду того, что $\mathcal{P}_\infty^+ = 1$.

Однако верхняя для устойчивости таких решений имеет другой скейлинг:

$$\mathcal{P}_L^s = \left(1 - \hat{C}E/L\right)^L, \quad (4.27)$$

давая $\mathcal{P}_\infty^s = \exp(-\hat{C}E)$ независимо от того, насколько разреженным является решение.

Таким образом, верхняя граница для вероятности существования устойчивого q -бризера в области малых энергий является линейной зависимостью и обращается в ноль при превышении некоторого порога по энергии. Она также является верхней границей для вероятности существования бесконечномерных торов вокруг этих периодических траекторий, а также вероятности локализации волновых пакетов. Для многомодовых решений, в том числе и разреженных, характер зависимости аналогичен.

Резюмируя, характеристики делокализации волновых пакетов в пределе сильного беспорядка (система ФСВ) и в общем случае (система КГ) совпадают (вне зависимости от влияния эффекта расталкивания уровней на статистику модовых частот).

4.4 Численные результаты

Для иллюстрации аналитических результатов приведем результаты численных экспериментов, полученных Т.В. Лаптевой. В них проводилось численное моделирование эволюции одномодовых начальных возбуждений с энергией E в системах ФСВ (4.1) и КГ (4.15) с параметрами $d = 1$, $\gamma = 4$. Случайные величины $\varepsilon_n \in [1/2, 3/2]$ имели равномерное распределение. Численное интегрирование дифференциальных уравнений проводилось до момента времени $t_{end} = 10^9$. Для того чтобы характеризовать ширину волнового пакета,

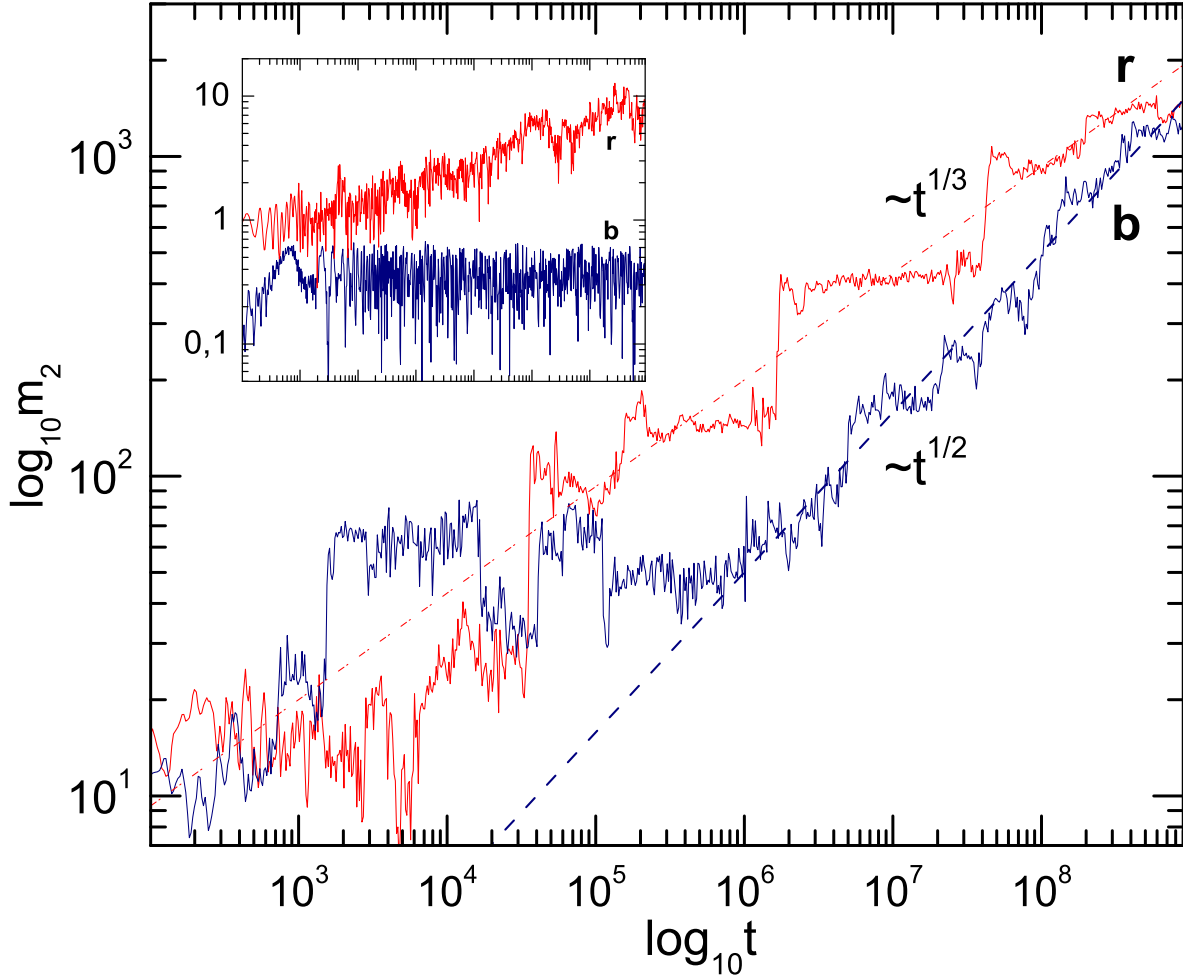


Рис. 4.1: Делокализация и расходимость второго момента распределения энергии для различных реализаций беспорядка, $E = 1$. Вставка: делокализирующиеся и локализованные реализации для различных реализаций беспорядка при одной энергии $E = 0.05$. Результаты получены Т.В. Лаптевой.

вычислялись его второй момент распределения $m_2 = \sum_n (n - \bar{n})^2 E_n / E$, где $\bar{n} = \sum_n n E_n / E$ – «центр масс» пакета, и число возбуждения $P = 1 / \sum_n (E_n / E)^2$, соответствующее числу эффективно возбужденных осцилляторов [51–55].

Было обнаружено, что расплывание пакета в модели ФСВ сильно зависит от реализации беспорядка. Для достаточно больших энергий второй момент варьируется в довольно широком диапазоне $m_2 \propto t^{1/3} - t^{1/2}$ (Рис.4.1, $E = 1$). При достаточно малых энергиях для некоторых реализаций беспорядка наблюдается локализация (Рис.4.1, вставка, $E = 0.05$), а расплывающиеся волновые пакеты делокализируются медленнее.

Упорядочив реализации в порядке возрастания чисел возбуждения в конечный момент времени t_{end} получаем разбиение на группы с локализацией и делокализацией (Рис.4.2). В согласии с теоретическими предсказаниями, уче-

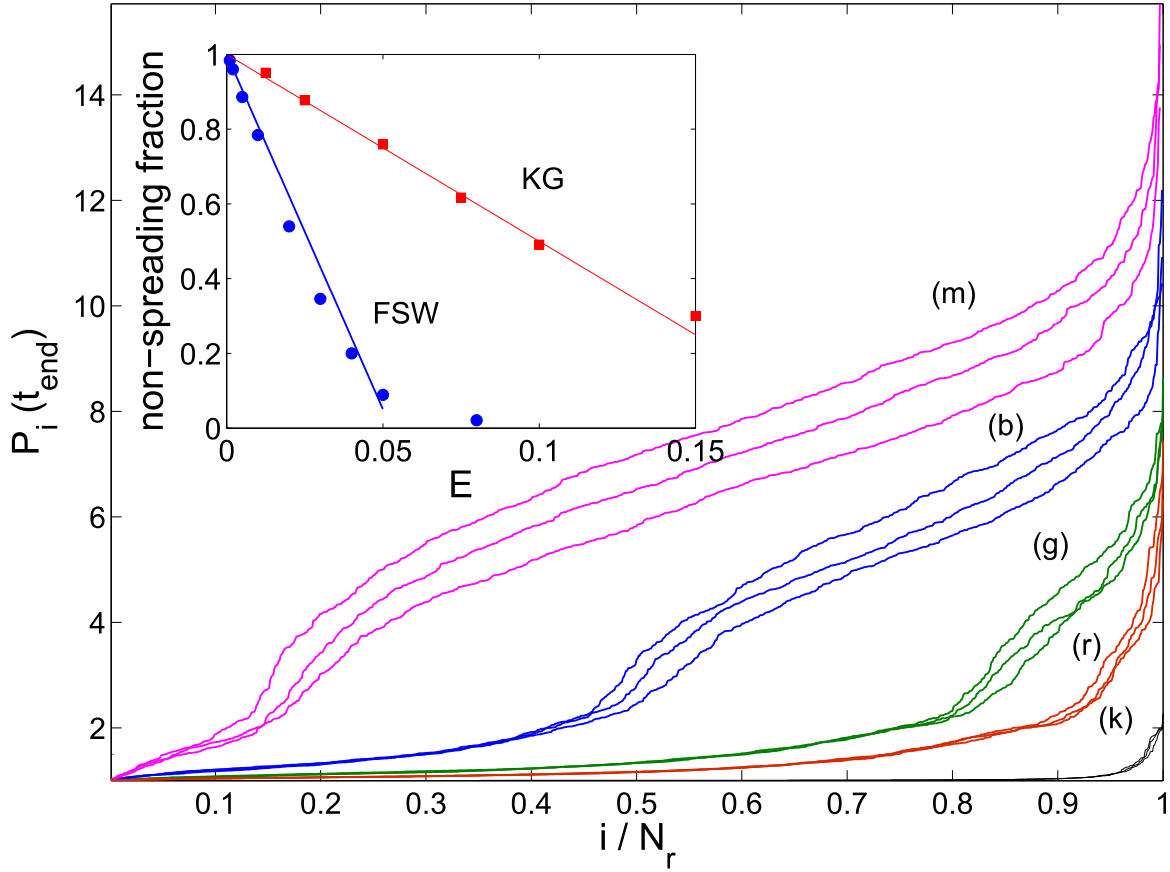


Рис. 4.2: Число возбуждения для различных реализаций i при $t = 10^8, 5 \cdot 10^8, 10^9$ (снизу вверх) для $E = 0.08$, (m), $E = 0.05$, (b), $E = 0.03$, (g), $E = 0.02$, (r), $E = 0.002$, (k). Вставка: доля реализаций, в которых возбуждение осталось локализованным на одном осцилляторе ($P(t_{\text{end}}) < 1.2$): численные результаты показаны символами, теоретические оценки для системы ФСВ (4.28) и линейная аппроксимация $P(t_{\text{end}}) = 1 - 5E$ для системы КГ показаны сплошными линиями. Результаты получены Т.В. Лаптевой.

Увеличение энергии начального возбуждения увеличивает долю делокализации. Примем, что волновой пакет остается локализованным в одном осцилляторе (в одной моде для системы КГ), если его конечное число возбуждений не превышает $P(t_{\text{end}}) < 1 + \alpha = 1.2$. Учитывая, что $P \approx 1 + 2(E_{\nu_0-1} + E_{\nu_0+1})/E_{\nu_0}$ для сильно локализованных возбуждений, (4.4) позволяет оценить долю таких реализаций:

$$\mathcal{P} \approx 1 - 6\sqrt{\frac{2}{\alpha}}E. \quad (4.28)$$

Зависимость доли реализаций, для которых волновой пакет остается локализованным, от энергии демонстрирует спадание близкое к линейному, и находится в хорошем качественном и количественном согласии с аналитической оценкой (4.28) (Рис.4.2, вставка). Для системы КГ мы также наблюдаем линейный спад, согласующийся с теоретической оценкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы дали обзор современных актуальных проблем и подходов к исследованию локализации колебаний и распространения волн в динамических решетках с нелинейной связью и беспорядком, обсудили приложения к задачам процессов теплопроводности и распространения волновых пакетов в низкоразмерных физических решеточных системах.

Мы построили теорию q -бризеров – точных периодических решений, экспоненциально локализованных в модовом пространстве, которая является весьма эффективным инструментом решения подобных задач. Проведен анализ условий их неустойчивости и делокализации, показана роль в процессах обмена энергией между взаимодействующими модами, решена проблема перехода от локализации к делокализации энергии. Приведен численный алгоритм их отыскания и определения устойчивости в цепочках с произвольным порядком нелинейности с применением параллельного программирования (стандарт MPI).

Теория q -бризеров распространяется и на случай пространственного беспорядка. Получены зависимости порогов делокализации и развития неустойчивости q -бризеров от силы беспорядка. Обнаружено принципиальное различие между системами с акустическими и оптическими спектрами: в первом случае существует зона локализованных низкочастотных q -бризеров, во втором наличие пространственного беспорядка приводит к исчезновению подобной зоны при увеличении размеров системы. Выявленная зависимость порога неустойчивости от конкретной реализации беспорядка позволила сформулировать метод управления устойчивостью q -бризеров за счет создания пространственных неоднородностей определенного вида.

Теория q -бризеров в нелинейных системах с беспорядком была применена для изучения режимов теплопроводности в нелинейных цепочках с беспорядком. Было предсказано существование переходов между режимами изолятора, нормальной теплопроводности и двух видов аномальной в зависимости от размеров системы и средней энергии. Численные эксперименты, проведенные с применением средств высокопроизводительных вычислений, подтвердили теоретические выводы.

Было продемонстрировано, что теория q -бризеров применима не только к системам с гармоническими линейными модами. Теория q -бризеров, построенная в базисе андерсоновских мод, впервые продемонстрировала разрушение андерсоновской локализации и возможность делокализации волновых пакетов при произвольно слабой нелинейности.

Среди открытых вопросов коллективной нелинейной динамики систем с беспорядком, хотелось бы выделить следующие. Крайне актуальным с точки зрения нелинейной физики низкоразмерных наноструктур является разработка теории q -бризеров в двух и трехмерных нелинейных решетках с беспорядком для выявления механизмов и режимов теплопроводности, анализа зависимости от размерности системы, на существование которой указывают недавние эксперименты с графеновыми структурами. Важным вопросом является делокализация и распространение волновых пакетов в трехмерных нелинейных решетках с беспорядком, в линейном пределе которых существует порог локализации андерсоновских мод по силе беспорядка. Сопутствующие численные эксперименты по моделированию двух и трехмерных колебательных решеток очень трудоемки и требуют использования параллельного программирования и высокопроизводительных вычислений; создание таких инструментов также представляет крайне важную и актуальную задачу.

Благодарности. Автор благодарит В.Д. Шалфеева, С. Флаха, О.И. Канакова, Т.В. Лаптеву, К.Г. Мишагина, S. Aubry, S. Lepri, D. Krimer, N. Li, D. Vodifelt за плодотворные научные обсуждения в тематической области работы.

Литература

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. - Гидродинамика. 2006. Vol. VI.
3. Buks E., Roukes M. Electrically tunable collective response in a coupled micromechanical array // J. Micromech. Sys. 2002. Vol. 11. P. 802.
4. Zalalutdinov M., et al. Two-dimensional array of coupled nanomechanical resonators // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 88. P. 143504.
5. Chang C., et al. Solid-state thermal rectifier // Science. 2006. Vol. 314. P. 1121.
6. Schwab K., et al. Measurement of the quantum of thermal conductance // Nature. 2000. Vol. 404. P. 974.
7. Nonlinearities in Periodic Structures and Metamaterials, Ed. by Denz C., Flach S., Kivshar Y.S. Springer: Berlin, 2009. Vol. 150 of Springer Series in Optical Sciences.
8. Billy J., et. al. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder // Nature. 2008. Vol. 453. P. 891.
9. Anderson P. Absence of diffusion in certain random lattices // Phys. Rev. 1958. Vol. 109. P. 1492.
10. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of Nonlinear Problems // Los Alamos Report. 1955. Vol. LA-1940.
11. Fermi E. Evidence that a mechanic normal system is generally quasi-ergodic // Phys. Z. 1923. Vol. 24. P. 261.
12. Tuck J. // Los Alamos Report. 1968. Vol. LA-3990.

13. Izrailev F. M., Chirikov B. V. Statistical properties of a non-linear string // Soviet. Phys. Dokl. 1966. Vol. 11. P. 30.
14. Izrailev F., Khasamutdinov A., Chirikov B. Numerical experiments on the statistical behaviour of dynamical systems with a few degrees of freedom // Comput. Phys. Commun. 1973. Vol. 5. P. 11.
15. Luca J. D., Lichtenberg A., Lieberman M. A. Time scale to ergodicity in the Fermi–Pasta–Ulam system // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 283.
16. Shepelyansky D. Low-energy chaos in the Fermi-Pasta-Ulam problem // Non-linearity. 1997. Vol. 10. P. 1331.
17. Bocchierri P., Scotti A., Bearzi B., Loigner A. Anharmonic Chain with Lennard-Jones Interaction // Phys. Rev. A. 1970. Vol. 2. P. 2013.
18. Galgani L., Scotti A. Planck-like Distributions in Classical Nonlinear Mechanics // Phys. Rev. Lett. 1972. Vol. 28. P. 1173.
19. Patrascioiu A. Blackbody Radiation Law: Quantum or Classical Explanation? // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 1897.
20. Kantz H. Vanishing stability thresholds in the thermodynamic limit of non-integrable conservative systems // Physica D. 1989. Vol. 39. P. 322.
21. Kantz H., Livi R., Ruffo S. Equipartition thresholds in chains of anharmonic oscillators // J. Stat. Phys. 1994. Vol. 76. P. 627.
22. Casetti L., Cerruti-Sola M., Pettini M., Cohen E. The Fermi-Pasta-Ulam problem revisited: Stochasticity thresholds in nonlinear Hamiltonian systems // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 6566.
23. Ullmann K., Lichtenberg A., Corso G. Energy equipartition starting from high-frequency modes in the Fermi-Pasta-Ulam beta oscillator chain // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 2471.
24. Luca J. D., Lichtenberg A. Transitions and time scales to equipartition in oscillator chains: Low-frequency initial conditions // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 026206.
25. Berchiolla L., Giorgilli A., Paleari S. Exponentially long times to equipartition in the thermodynamic limit // Physics Letters A. 2004. Vol. 321. P. 147.
26. Benettin G., Livi R., Ponno A. The Fermi-Pasta-Ulam Problem: Scaling Laws vs. Initial Conditions // J. Stat. Phys. 2009. Vol. 135. P. 873.

27. Giorgilli A., Paleari S., Penati T. Local chaotic behaviour in the Fermi-Pasta-Ulam system // *Discr. Cont. Dyn. Sys. B.* 2005. Vol. 5. P. 991.
28. Benettin G. Time scale for energy equipartition in a two-dimensional FPU model // *Chaos.* 2005. Vol. 15. P. 015108.
29. Ford J. The Fermi-Pasta-Ulam problem: Paradox turns discovery // *Phys. Rep.* 1992. Vol. 213. P. 271.
30. The Fermi-Pasta-Ulam problem - The first fifty years / Ed. by R. Campbell D.K., Zaslavsky G.M. Vol. 15 of Focus issue, *Chaos*, 2005.
31. Berman G., Izrailev F. The Fermi-Pasta-Ulam problem: Fifty years of progress // *Chaos.* 2005. Vol. 15. P. 015104.
32. K.L. Ekinici M. R. Nanoelectromechanical systems // *Rev. Sci. Instr.* 2005. Vol. 76. P. 061101.
33. Sato M., Hubbard B., Sievers A. Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78. P. 137.
34. Flach S., Ivanchenko M., Kanakov O. q-Breathers and the Fermi-Pasta-Ulam problem // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 064102.
35. Flach S., Ivanchenko M., Kanakov O. q-breathers in Fermi-Pasta-Ulam chains: Existence, localization, and stability // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 036618.
36. Ivanchenko M., Kanakov O., Mishagin K., Flach S. q-Breathers in finite two- and three-dimensional nonlinear acoustic lattices // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. P. 025505.
37. Ivanchenko M. q-Breathers and thermalization in acoustic chains with arbitrary nonlinearity index // *Письма в ЖЭТФ.* 2010. Т. 92. С. 405.
38. Иванченко М. В. Модовая локализация в цепочках Ферми-Паста-Улама с произвольным порядком нелинейности // *Изв. ВУЗов Прикладная Нелинейная Динамика.* 2011. Т. 19. С. 55.
39. Иванченко М. В. Q-бризеры: от парадокса Ферми-Паста-Улама до аномальной теплопроводности // *Изв. ВУЗов Прикладная Нелинейная Динамика.* 2011. Т. 19. С. 73.
40. Kanakov O., Flach S., Ivanchenko M., K.G. Mishagin Scaling properties of q-breathers in nonlinear acoustic lattices // *Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 365. P. 416.

41. Flach S., Kanakov O., Mishagin M., K.G.and Ivanchenko. q-Breathers in FPU-Lattices - Scaling and Properties for Large Systems // Int. J. Mod. Phys. B. 2007. Vol. 21. P. 3925.
42. Flach S., Ivanchenko M., Kanakov O., Mishagin K. Periodic orbits, localization in normal mode space and the Fermi-Pasta-Ulam problem // Am. J. Phys. 2008. Vol. 76. P. 453.
43. Flach S., Willis C. Discrete breathers // Phys. Rep. 1998. Vol. 295. P. 181.
44. Lyapunov M. The General Problem of Stability of Motion. Taylor & Francis, London, 1992.
45. Conway J., Jones A. Trigonometric diophantine equations // Acta Arith. 1976. Vol. XXX. P. 229.
46. MacKay R., Aubry S. Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 1623.
47. Albanese C., Froehlich J. Perturbation theory for periodic orbits in a class of infinite dimensional Hamiltonian systems // Comm. Math. Phys. 1991. Vol. 138. P. 193.
48. Archilla J., MacKay R., Martin J. Discrete breathers and Anderson modes: two faces of the same phenomenon? // Physica D. 1999. Vol. 134. P. 406.
49. Kopidakis G., Aubry S. Intraband discrete breathers in disordered nonlinear systems. I. Delocalization // Physica D. 1999. Vol. 130. P. 155.
50. Kopidakis G., Aubry S. Intraband discrete breathers in disordered nonlinear systems. II. Localization // Physica D. 2000. Vol. 139. P. 247.
51. Pikovsky A., Shepelyansky D. Destruction of Anderson localization by a weak nonlinearity // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 094101.
52. Fishman S., Krivolapov Y., Soffer A. On the problem of dynamical localization in the nonlinear Schrödinger equation with a random potential // J. Stat. Phys. 2008. Vol. 131. P. 843.
53. Flach S., et al. Universal spreading of wave packets in disordered nonlinear systems // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. P. 024101.
54. Skokos C., et al. Delocalization of wave packets in disordered nonlinear chains // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. P. 056211.

55. Lapteva T., et al. The crossover from strong to weak chaos for nonlinear waves in disordered systems // EPL. 2010. Vol. 91. P. 30001.
56. Shwartz T., et al. Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices // Nature. 2007. Vol. 446. P. 52.
57. Li Z., et al. Three-dimensional atomic-scale structure of size-selected gold nanoclusters // Nature. 2008. Vol. 451. P. 46.
58. Ivanchenko M. q-Breathers in finite lattices: nonlinearity and weak disorder // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. P. 175507.
59. Ivanchenko M. q-Breathers in Discrete Nonlinear Schroedinger arrays with weak disorder // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 89. С. 170.
60. Ishii K. Localization of eigenstates and transport phenomena in the one-dimensional disordered system // Suppl. Prog. Theor. Phys. 1973. Vol. 53. P. 77.
61. Kivshar Y., Peyrard M. Modulational Instabilities in Discrete Lattices // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46. P. 3198.
62. Morsch O., Oberthaler M. Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices // Rev. Mod. Phys. 2006. Vol. 78. P. 179.
63. Kivshar Y., Agrawal G. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. Elsevier, Amsterdam, 2003.
64. Mishagin K., Kanakov O., Ivanchenko M., Flach S. q-breathers in discrete nonlinear Schroedinger lattices // New J. Phys. 2008. Vol. 10. P. 073034.
65. Dieudonne J. Foundations of Modern Analysis. New York: Academic, 1999.
66. Flach S., Gorbach A. Discrete Breathers: Advances in Theory and Applications // Phys. Rep. 2008. Vol. 467. P. 1.
67. Laedke E., Spatschek K., Turitsyn S. Stability of discrete solitons and quasi-collapse to intrinsically localized modes // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. P. 1055.
68. Zakharov V., Shabat A. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media (Differential equation solution for plane self focusing and one dimensional self modulation of waves interacting in nonlinear media) // Sov. Phys. JETP. 1972. Vol. 34. P. 62.

69. Benjamin T., Feir J. The disintegration of wave trains on deep water // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 27. P. 417.
70. Chang C., et al. Breakdown of Fourier's law in nanotube thermal conductors // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101. P. 075903.
71. Stoltz G., Lazzeri M., Mauri F. Thermal transport in isotopically disordered carbon nanotubes: a comparison between Green's functions and Boltzmann approaches // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2009. Vol. 21. P. 245302.
72. Savin A., Hu B., Kivshar Y. Thermal conductivity of single-walled carbon nanotubes // *Phys. Rev. B.* 2009. Vol. 80. P. 195423.
73. Payton D., Rich M., Visscher W. Lattice thermal conductivity in disordered harmonic and anharmonic crystal models // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 160. P. 706.
74. Jackson E., Pasta J., Waters J. Thermal conductivity of one-dimensional lattices // *J. Comput. Phys.* 1968. Vol. 2. P. 207.
75. Prosen T., Campbell D. Momentum conservation implies anomalous energy transport in 1D classical lattices // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 2857.
76. Lepri S., Livi R., Politi A. Thermal conduction in classical low-dimensional lattices // *Phys. Rep.* 2003. Vol. 377. P. 1.
77. Dhar A. Heat transport in low-dimensional systems // *Adv. Phys.* 2008. Vol. 57. P. 457.
78. Matsuda H., Ishii K. Localization of Normal Modes and Energy Transport in the Disordered Harmonic Chain // *Suppl. Prog. Theor. Phys.* 1970. Vol. 45. P. 56.
79. Narayan O., Ramaswamy S. Anomalous heat conduction in one-dimensional momentum-conserving systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. P. 200601.
80. Lepri S. Relaxation of classical many-body Hamiltonians in one dimension // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 7165.
81. Dhar A. Heat conduction in the disordered harmonic chain revisited // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 3554.
82. Casati G., Prosen T. Anomalous heat conduction in a one-dimensional ideal gas // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 015203.
83. Lee-Dadswell G., Nickel B., Gray C. Thermal conductivity and bulk viscosity in quartic oscillator chains // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. P. 031202.

84. Christodoulidi H., Efthymiopoulos C., Bountis T. Energy localization on q-tori, long-term stability, and the interpretation of Fermi-Pasta-Ulam recurrences // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 016210.
85. Casati G., et al. One-dimensional classical many-body system having a normal thermal conductivity // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 1861.
86. Hu B., Li B., Zhao H. Heat conduction in one-dimensional nonintegrable systems // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 3828.
87. Flach S., Li N., Ivanchenko M. Thermal conductivity of nonlinear waves in disordered chains // Pramana - J. Phys. 2011. Pp. P-9050.
88. Froehlich J., Spencer T., Wayne C. Localization in disordered, nonlinear dynamical systems // J. Stat. Phys. 1986. Vol. 42. P. 247.
89. Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. KAM tori in 1D random discrete nonlinear Schrödinger model? // Europhys. Lett. 2010. Vol. 91. P. 50001.
90. Evers F., Mirlin A. Anderson transitions // Rev. Mod. Phys. 2008. Vol. 80. P. 1355.
91. Krimer D., Flach S. Statistics of wave interactions in nonlinear disordered systems // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. P. 046221.
92. Гергель В. П., Стронгин Р. Г. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2003.

Приложение

А. Численное нахождение q-бризеров и исследование их устойчивости. Параллельная реализация для больших цепочек.

Разработанный численный алгоритм решает задачу продолжения точных периодических траекторий линейной системы в нелинейную область для произвольных потенциалов взаимодействия в цепочке и собственных колебаний осцилляторов, а также не содержит ограничений на вид (свойства) этих периодических траекторий. В данном случае моделировалась система Ферми-Паста-Улама с произвольным порядком нелинейности в потенциале взаимодействия и уравнениях движения (2.9)

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \chi[(x_{n+1} - x_n)^{\gamma-1} - (x_n - x_{n-1})^{\gamma-1}]. \quad (4.29)$$

Напомним, что в модовых переменных $x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{q=1}^N Q_q(t) \sin\left(\frac{\pi q n}{N+1}\right)$ эти уравнения имеют вид связанных Q-осцилляторов (2.11):

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\chi}{[2(N+1)]^{\gamma/2-1}} \omega_q \sum_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}=1}^N C_{q_1, \dots, q_{\gamma-1}} \prod_{k=1}^{\gamma-1} \omega_{q_k} Q_{q_k}, \quad (4.30)$$

Последовательный алгоритм. Алгоритм численного отыскания q-бризеров основан на возможности продолжения мод линейной задачи в нелинейных режим. Реализация численного метода использует тот факт, что периодическая траектория отвечает неподвижной точке в отображении, задаваемом текущей Пуанкаре в многомерном фазовом пространстве.

В качестве нулевого приближения выберем q_0 -ю линейную моду. Зададим следующие начальные условия:

$$Q_{q \neq q_0}(0) = 0, \quad \dot{Q}_q(0) = 0, \quad Q_{q_0}(0) = \sqrt{2E}/\omega_{q_0}. \quad (4.31)$$

Сконструируем отображение $\vec{y} \equiv \{x_q\}$ на себя путем интегрирования уравнений динамики до момента, когда $\dot{x}_s(t) = 0$, $x_s(t) > 0$, $s = [(N+1)/2q_0]$:

$$\vec{y}^{n+1} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y}^n). \quad (4.32)$$

Периодические траектории системы (4.29), (4.30) являются неподвижными точками этого отображения. Векторная функция

$$\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y}) - \vec{y} \quad (4.33)$$

используется для вычисления матрицы монодромии

$$\mathcal{N} = \partial \mathcal{G}(\vec{y})_i / \partial y_j. \quad (4.34)$$

Итерации

$$\vec{y}' = \vec{y} - \mathcal{N}^{-1}\vec{\mathcal{G}}(\vec{y}) \quad (4.35)$$

продолжаются до достижения требуемой точности ε :

$$\|\vec{\mathcal{F}}(\vec{y}) - \vec{y}\|/\|\vec{y}\| < \varepsilon, \quad (4.36)$$

где $\|\vec{y}\| = \max[|y_i|]$. Из системы уравнений

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = \mathcal{N}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.37)$$

находится новая стартовая точка \vec{r}' и дополнительно корректируется отклонение энергии системы от заданного полного значения E .

Заметим, что если наши начальные условия находятся на периодической траектории, то матрица монодромии будет являться матрицей Флоке для этой траектории, собственные числа которой представляют собой мультипликаторы и определяют ее линейную устойчивость. В нашем случае мультипликаторы вычисляются как собственные числа матрицы монодромии, полученной на последней итерации.

Параллельный алгоритм

Основной проблемой численного анализа является возрастание трудоемкости вычислений с увеличением размеров решетки. Так, последовательный алгоритм позволяет получать q -бризерные решения для цепочек длиной не более нескольких сотен элементов за приемлемое время вычислений. Анализ их устойчивости является еще более трудоемкой задачей. Размер реальных физических систем гораздо больше; например, нанотрубки имеют порядка десятков тысяч атомов в длину. С необходимостью исследования моделей, близких к реальным, и связана актуальность разработки численных методов отыскания периодических траекторий и исследования их устойчивости с использованием параллельного программирования.

Оценим вычислительную трудоемкость последовательного алгоритма для цепочки длиной N . На практике сходимость вычислительного метода начинает сильно зависеть от размера системы только при относительно больших значениях нелинейности/энергии системы, примерно соответствующих делокализации q -бризера в модовом пространстве. Тогда число итераций может существенно возрастать, либо сходимость исчезает. Мы будем работать в режиме хорошей локализации и быстрой сходимости, что, на практике, означает не более 5 – 10 итераций для достижения относительной ошибки в определении координат неподвижной точки отображения Пуанкаре менее 10^{-7} .

Каждая итерация состоит из двух основных этапов: (а) интегрирование системы и $2N$ N -мерных векторов возмущений на периоде времени между

последовательными пересечениями и (б) решение линейной системы уравнений методом Гаусса. Первый этап имеет сложность $O(N^3)$, поскольку размерность интегрируемой полной системы (4.29) и линеаризованной системы возмущений равна $2N(2N + 1)$, а время интегрирования растет как период линейной моды $q_0: \frac{2\pi}{\omega_{q_0}} \sim N$. Второй этап также имеет сложность $O(N^3)$. В целях ускорения вычислений будем масштабировать номер центральной моды q_0 с увеличением N : $\frac{q_0}{N} = \text{const}$, так что трудоемкость первого этапа сокращается до $O(N^2)$, помня, вместе с тем, о фактической сложности исходной задачи.

Все численные эксперименты проводились на кластере ННГУ, общей производительностью 2.7 терафлопс, в составе 64 двухпроцессорных серверов на основе процессоров Intel Xeon 5150 2,66 GHz, 4GB DDR2-667 FB-DIMM RAM, 80 GB HDD, 2-х Gigabit Ethernet. Результаты сопоставления вычислительных затрат первого и второго этапов итерации последовательного алгоритма (T_{mm}, T_g) представлены на Рис.4.3. Они согласуются с теоретическими оценками и показывают, что основные вычислительные затраты приходятся на интегрирование исходной и линеаризованных систем в исследовавшемся диапазоне N . Это обусловило реализацию параллельного алгоритма только для первого этапа итерации. Параллельная реализация метода Гаусса является решенной задачей [92] и может быть также использована при необходимости.

Первый этап итерации является очень удобной для распараллеливания задачей, поскольку состоит в интегрировании исходной системы и $2N$ независимо эволюционирующих возмущений. Сбалансированная нагрузка и полное исключение затрат на коммуникацию между p процессами достигается разбиением задачи на p независимых частей, каждая из которых представляет собой интегрирование системы (4.29) в совокупности с порядка $[2N/p]$ линеаризованных систем размерностью $2N$ каждая. После завершения процедуры интегрирования конечные состояния векторов возмущений собираются в основном процессе, где в рамках последовательной части алгоритма вычисляется новая точка на секущей Пуанкаре. Таким образом, вычислительная сложность численного метода с применением параллельного программирования будет порядка $4N^2/p + aN^3$, где $a \ll 1$, поэтому ускорение может быть весьма близко к p , а эффективность — к 1.

Проведем анализ эффективности реализации этого алгоритма на языке программирования C++ в стандарте MPI.

Рассмотрим сначала зависимость времени, затрачиваемого на вычисление матрицы Ньютона и решения линейной системы, от размеров системы для параллельного алгоритма, выполняемого на 64 процессорах (Рис.4.3). Видно, что этап интегрирования существенно ускоряется и приближается по поряд-

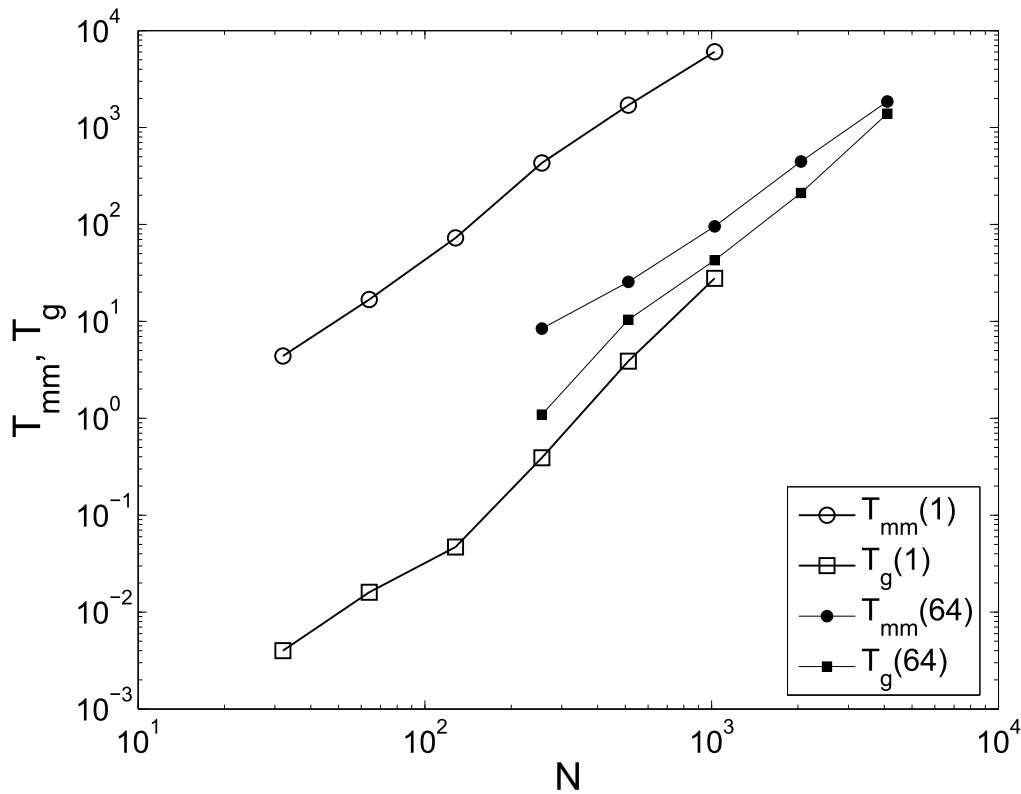


Рис. 4.3: Зависимость времени выполнения этапов алгоритма от размерности задачи и числа процессов p

ку малости к времени решения линейной системы. Последнее слегка увеличивается за счет затрат на сборку матрицы монодромии и рассылку нового значения стартовой точки другим процессам для следующей итерации метода.

Зафиксируем теперь размер системы $N = 256$ и $q_0 = 24$ и будем исследовать зависимость ускорений для одного этапа итерации S_{mm} и полного времени работы алгоритма S_f , а также соответствующих эффективностей (E_{mm}, E_f) [92]. Как следует из результатов, представленных на Рис.4.4, ускорение близко к максимальному, а эффективность — к 1 для сравнительно небольшого числа процессов. Для числа процессов порядка 100 потеря эффективности становится заметной. Сравнение временных затрат на этапы интегрирования и решения линейной системы показывает, что этот эффект вызван уменьшением первых вследствие распараллеливания.

Обсудим, в заключение, физическое содержание численных результатов. Впервые удалось найти точные периодические решения, локализованные в пространстве линейных мод — q -бризеры — в нелинейных цепочках размером более тысячи осцилляторов. Полученные профили распределения энергии в модовом пространстве для $\gamma = 4$ (Рис.4.5) согласуются с теоретически

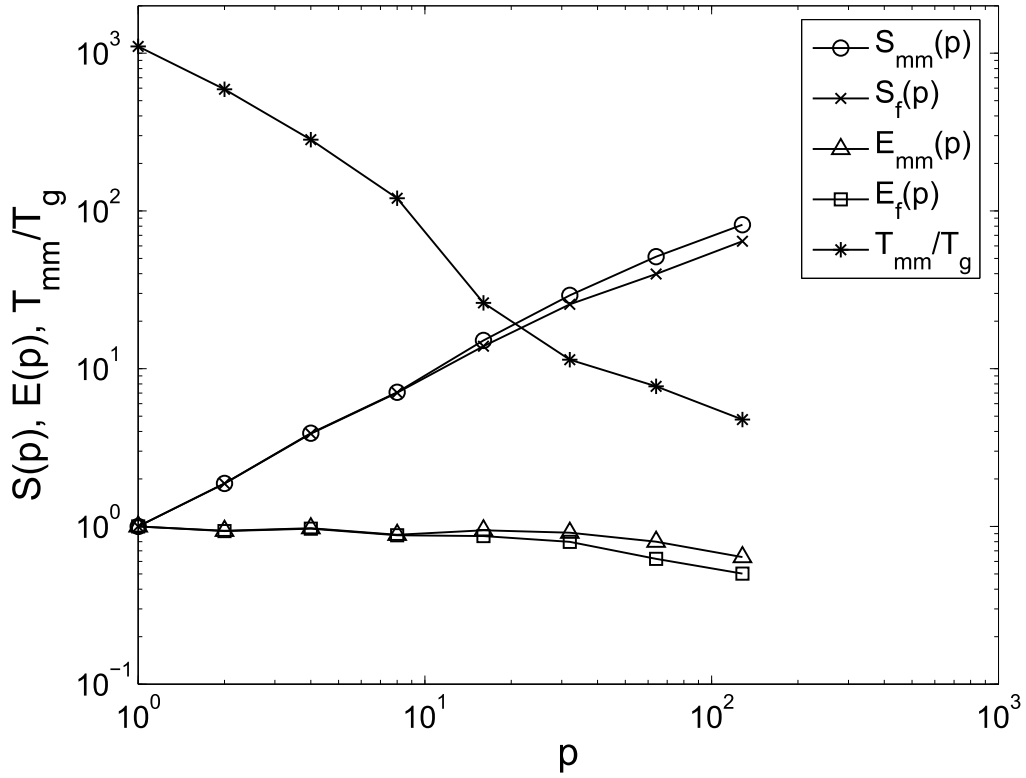


Рис. 4.4: Зависимость ускорения и эффективности параллельного алгоритма для времени вычисления матрицы Ньютона и полного времени решения задачи от числа процессов

предсказанной зависимостью:

$$E_{(2n+1)q_0} = \lambda^{2n} E_{q_0} \quad (4.38)$$

где

$$\lambda = \frac{3\chi E_{q_0}}{8(N+1)\omega_{q_0}^2} \approx \frac{3\chi E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 q_0^2} \quad (4.39)$$

Получены численные результаты по устойчивости данных решений, которые свидетельствуют о линейной неустойчивости для $N = 2048, 4096$, что согласуется с теоретическим результатом для порога неустойчивости $6\chi E(N+1)/\pi^2 > 1$, что при данных значениях параметров дает $N > 1644$.

В. Теория возмущений для q-бризеров на примере системы β -Ферми-Паста-Улама

Приведем подробную методику исследования локализации q-бризеров на примере системы β -ФПУ.

Напомним динамические уравнения в пространстве линейных мод:

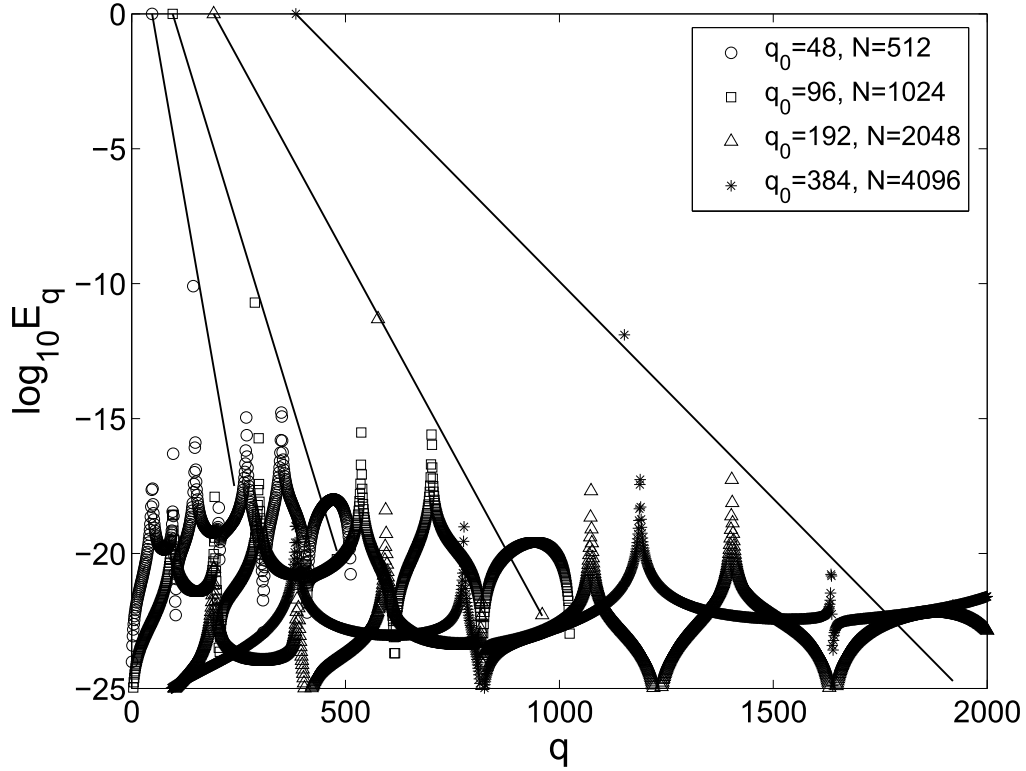


Рис. 4.5: Распределение энергии q -бризеров в пространстве нормальных мод в зависимости от размеров системы и номера центральной моды. Сплошными линиями показана теоретическая оценка (4.38),(4.39)

$$\ddot{Q}_q + \omega_q^2 Q_q = -\frac{\beta}{2(N+1)} \sum_{l,m,n=1}^N \omega_q \omega_l \omega_m \omega_n C_{q,l,m,n} Q_l Q_m Q_n \quad (4.40)$$

где коэффициенты межмодовых связей задаются как

$$C_{q,l,m,n} = \sum_{\pm} (\delta_{q \pm l \pm m \pm n, 0} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, 2(N+1)} - \delta_{q \pm l \pm m \pm n, -2(N+1)}). \quad (4.41)$$

Будем строить асимптотическую теорию возмущения для точного периодического q -бризерного решения как разложение по степеням малого параметра β :

$$Q_q = Q_q^{(0)} + \beta Q_q^{(1)} + \beta^2 Q_q^{(2)} + \dots \quad (4.42)$$

Возьмем линейную моду q_0 в качестве нулевого приближения:

$$Q_q^{(0)} = A_q \delta_{q,q_0} \cos \omega_q t \quad (4.43)$$

Отметим, что мы не будем решать самосогласованную задачу, а рассмотрим решение, взятое в нулевом приближении, как внешнюю периодическую силу, действующую на другие гармоники. Нашей целью будет нахождение

первого ненулевого члена в разложении (4.42) для каждой возбуждаемой моды, подразумевая, что последующие поправки по амплитуде и частоте будут более высокого порядка малости.

Используем метод математической индукции для доказательства того, что только нечетные гармоники центральной моды будут существенным образом возбуждены, а также определим их энергии. В первом порядке теории возмущений $q \neq q_0$:

$$\ddot{Q}_q^{(1)} + \omega_q^2 Q_q^{(1)} = -\frac{1}{8(N+1)} \left[4\omega_{q_0}^3 \omega_q \left(Q_{q_0}^{(0)} \right)^3 C_{q,q_0,q_0,q_0} \right] \quad (4.44)$$

Поскольку $C_{q,q_0,q_0,q_0} = \delta_{q,3q_0}$, только третья гармоника станет возбуждена в первом порядке теории возмущения. Динамика ее амплитуды описывается уравнением

$$\ddot{Q}_{3q_0}^{(1)} + \omega_{3q_0}^2 Q_{3q_0}^{(1)} = -\frac{1}{2(N+1)} \omega_{q_0}^3 \omega_{3q_0} \left(Q_{q_0}^{(0)} \right)^3 \quad (4.45)$$

Подставляя $Q_{q_0}^{(0)} = A_{q_0} \cos \omega_{q_0} t$ в уравнение (4.45), получаем

$$\ddot{Q}_{3q_0}^{(1)} + \omega_{3q_0}^2 Q_{3q_0}^{(1)} = -\frac{1}{8(N+1)} \omega_{q_0}^3 \omega_{3q_0} A_{q_0}^3 (\cos 3\omega_{q_0} t + 3 \cos \omega_{q_0} t) \quad (4.46)$$

Поскольку третья гармоника $3\omega_{q_0}$ намного ближе к собственной частоте ω_{3q_0} , чем ω_{q_0} , низкочастотной составляющей вынуждающей силы можно пренебречь.

Будем искать решение в виде $Q_{3q_0}^{(1)} = A_{3q_0} \cos 3\omega_{q_0}$; получим:

$$A_{3q_0} = -\frac{1}{8(N+1)} \frac{\omega_{q_0}^3 \omega_{3q_0} A_{q_0}^3}{\omega_{3q_0}^2 - 9\omega_{q_0}^2} \quad (4.47)$$

Вспоминая, что спектр линейных частот имеет вид $\omega_q = 2 \sin \frac{\pi q}{2(N+1)}$, в области $q \ll N$ используем $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ и получаем

$$\omega_{3q_0}^2 - 9\omega_{q_0}^2 \approx -6\omega_{q_0}^4 \quad (4.48)$$

Отсюда вытекает $A_{3q_0} = \frac{A_{q_0}^3}{16(N+1)}$ и $E_{3q_0} = \frac{1}{2} \omega_{3q_0}^2 \beta^2 A_{3q_0}^2 = \frac{9}{64} \frac{\beta^2}{(N+1)^2}$. Окончательно, получаем

$$\begin{aligned} Q_{3q_0} &= \beta A_{3q_0} \cos 3\omega_{q_0} t \\ E_{3q_0} &= \frac{1}{2} 9\omega_{q_0}^2 \beta^2 A_{3q_0}^2 \\ E_{3q_0} &= \lambda^2 E_{q_0}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

где

$$\lambda = \frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 q_0^2} \quad (4.50)$$

Действуя в рамках индукции, полагаем, что для мод $(2m+1)q_0$, $m = 0, 1, \dots, n-1$ колебания и энергия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{(2m+1)q_0} &= \beta^m A_{(2m+1)q_0} \cos(2m+1)\omega_{q_0} t, \\ E_{(2m+1)q_0} &= \frac{1}{2} \omega_{(2m+1)q_0}^2 \beta^{2m} A_{(2m+1)q_0}^2, \\ E_{(2m+1)q_0} &= \lambda^{2m} E_{q_0}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Тогда для моды $(2n+1)k_0$ динамические уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{(2n+1)q_0} + \omega_{(2n+1)q_0}^2 Q_{(2n+1)q_0} = \\ - \frac{1}{2(N+1)} \sum_{l,m,p \neq n} \omega_{(2n+1)q_0} \omega_{(2l+1)q_0} \omega_{(2m+1)q_0} \omega_{(2p+1)q_0} \\ Q_{(2l+1)q_0} Q_{(2m+1)q_0} Q_{(2p+1)q_0} C_{(2n+1)q_0, (2l+1)q_0, (2m+1)q_0, (2p+1)q_0} \\ \delta_{2l+1+2m+1+2p+1, 2n+1} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Подставим $Q_{\gamma q_0} = A_{\gamma q_0} \cos \gamma \omega_{q_0} t$, и, учитывая, что $C_{(2n+1)q_0, (2l+1)q_0, (2m+1)q_0, (2(n-l-m-1)+1)q_0} = 1$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{(2n+1)q_0} + \omega_{(2n+1)q_0}^2 Q_{(2n+1)q_0} = \\ - \frac{1}{2(N+1)} \sum_{l,m,p \neq n} \omega_{(2n+1)q_0} \omega_{(2l+1)q_0} \omega_{(2m+1)q_0} \omega_{(2p+1)q_0} \\ A_{(2l+1)q_0} A_{(2m+1)q_0} A_{(2p+1)q_0} \cos(2l+1)\omega_{q_0} t \cos(2m+1)\omega_{q_0} t \cos(2p+1)\omega_{q_0} t \\ \delta_{2l+1+2m+1+2p+1, 2n+1} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Сохраняя только резонансные слагаемые, с частотой, наиболее близкой к $\omega_{(2n+1)q_0}$, получаем:

$$\cos(2l+1)\omega_{q_0} t \cos(2m+1)\omega_{q_0} t \cos(2p+1)\omega_{q_0} t \Rightarrow \frac{1}{4} \cos(2n+1)\omega_{q_0} t \quad (4.54)$$

Будем искать решение уравнения (4.53) в виде

$$Q_{(2n+1)q_0} = A_{(2n+1)q_0} \cos(2n+1)\omega_{q_0} t \quad (4.55)$$

Тогда для амплитуды отклика получим:

$$A_{(2n+1)q_0} = -\frac{1}{8(N+1)} \frac{\omega_{(2n+1)q_0}}{\omega_{(2n+1)q_0}^2 - (2n+1)^2 \omega_{q_0}^2} \sum_{l,m,p \neq n} \omega_{(2l+1)q_0} \omega_{(2m+1)q_0} \omega_{(2p+1)q_0} A_{(2l+1)q_0} A_{(2m+1)q_0} A_{(2p+1)q_0} \delta_{2l+1+2m+1+2p+1, 2n+1} \quad (4.56)$$

Пользуясь $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ снова, находим

$$\omega_{(2n+1)q_0}^2 - (2n+1)^2 \omega_{q_0}^2 \approx -\frac{1}{3} n(n+1)(2n+1)^2 \omega_{q_0}^4 \quad (4.57)$$

Теперь уравнение (4.56) приобретает вид

$$A_{(2n+1)q_0} = \frac{3}{8(N+1)} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)\omega_{q_0}^3} \sum_{l,m,p \neq n} \omega_{(2l+1)q_0} \omega_{(2m+1)q_0} \omega_{(2p+1)q_0} A_{(2l+1)q_0} A_{(2m+1)q_0} A_{(2p+1)q_0} \delta_{2l+1+2m+1+2p+1, 2n+1} \quad (4.58)$$

Учитывая уравнение (4.51)

$$\omega_{(2m+1)q_0} A_{(2m+1)q_0} = \beta^{-m} \sqrt{2E_{(2m+1)q_0}}, \quad m = 0, \dots, n, \quad (4.59)$$

получаем

$$\beta^{-n} \sqrt{2E_{(2n+1)q_0}} = \frac{3}{8(N+1)} \frac{1}{n(n+1)\omega_{q_0}^2} \sum_{l,m,p \neq n} \beta^{-m-l-p} \sqrt{8E_{(2l+1)q_0} E_{(2m+1)q_0} E_{(2p+1)q_0}} \delta_{2l+1+2m+1+2p+1, 2n+1} \quad (4.60)$$

Алгебраические преобразования дают

$$\sqrt{E_{(2n+1)q_0}} = \frac{3}{4(N+1)} \frac{1}{n(n+1)\omega_{q_0}^2} \sum_{l,m,p \neq n} \beta^{n-m-l-p} \sqrt{E_{(2l+1)q_0} E_{(2m+1)q_0} E_{(2p+1)q_0}} \delta_{2l+1+2m+1+2p+1, 2n+1} \quad (4.61)$$

Подставляя $E_{(2m+1)q_0} = \lambda^{2m} E_{q_0}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$ из (4.51), получаем

$$\sqrt{E_{(2n+1)q_0}} = \frac{3}{4(N+1)} \frac{1}{n(n+1)\omega_{q_0}^2} \sum_{l,m,p \neq n} \beta^{n-m-l-p} \lambda^{m+l+p} E_{q_0}^{3/2} \delta_{2l+1+2m+1+2p+1, 2n+1} \quad (4.62)$$

Принимая во внимание, что $\delta_{2l+1+2m+1+2p+1,2n+1} = \delta_{l+m+p+1,n}$, находим

$$\sqrt{E_{(2n+1)q_0}} = \lambda^{n-1} \frac{3\beta}{4(N+1)} \frac{E_{q_0}^{3/2}}{n(n+1)\omega_{q_0}^2} \sum_{l,m,p \neq n} \delta_{2l+1+2m+1+2p+1,2n+1} \quad (4.63)$$

Используя

$$\sum_{l,m,p \neq n} \delta_{2l+1+2m+1+2p+1,2n+1} = \frac{1}{2}n(n+1), \quad (4.64)$$

получаем окончательное выражение

$$\sqrt{E_{(2n+1)q_0}} = \lambda^{n-1} \frac{3\beta}{8(N+1)} \frac{E_{q_0}^{3/2}}{\omega_{q_0}^2} = \lambda^{n-1} \frac{3\beta}{8(N+1)} \frac{E_{q_0}}{\omega_{q_0}^2} \sqrt{E_{q_0}} = \lambda^n \sqrt{E_{q_0}} \quad (4.65)$$

Таким образом,

$$E_{(2n+1)q_0} = \lambda^{2n} E_{q_0} \quad (4.66)$$

где

$$\lambda = \frac{3\beta E_{q_0}}{8(N+1)\omega_{q_0}^2} \approx \frac{3\beta E_{q_0}(N+1)}{8\pi^2 q_0^2} \quad (4.67)$$

что завершает доказательство по индукции.

Михаил Васильевич **Иванченко**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ С БЕСПОРЯДКОМ**

Учебное пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.