МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся
по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес – информатика» (профиль подготовки
«Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса»)

Нижний Новгород
2016

УДК 338.27
ББК 65.23
К 20

К 20 Прогнозирование социально-экономических процессов: Учебно-методическое пособие. // Автор-составитель: Капитанова О.В. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 74 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор **А.К. Любимов**

В учебно-методическом пособии рассматриваются теоретические основы прогнозирования социально-экономических процессов, различные методы прогнозирования временных рядов, в том числе декомпозиционный анализ, адаптивные модели и ARIMA модели.

Содержание пособия соответствует программе дисциплины «Основы социально-экономического прогнозирования», преподаваемой студентам Нижегородского госуниверситета, обучающимся по направлению «Бизнес – информатика» (профиль подготовки «Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса»).

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
Института экономики и предпринимательства ННГУ,
к.э.н., доцент **Е.Н. Летягина**

УДК 338.27
ББК 65.23

Содержание

Введение

Целями освоения дисциплины Б1.В.ОД.13 «Основы социально-экономического прогнозирования», преподаваемой студентам бакалавриата по направлению «Бизнес – информатика» (профиль подготовки «Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса») являются изучение роли прогнозирования в принятии управленческих решений и формирование навыков анализа социально-экономических процессов с помощью эконометрических, статистических и экономико-математических методов и моделей.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование у выпускника следующих компетенций:

- способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-18);
- способность разрабатывать бизнес-планы по созданию новых бизнес-проектов на основе инноваций в сфере ИКТ (ПК-26);
- способность осуществлять разработку и исследование математических моделей поддержки принятия решений в экономике и бизнесе (ДПК-1).

Прогнозирование является неотъемлемой частью процесса управления любой социально-экономической системы, начиная от домохозяйства и фирмы и заканчивая государством и мировой экономикой. В прогнозировании применяются методы и модели различных дисциплин, включая теорию вероятностей и математическую статистику, эконометрику и анализ данных. Грамотный выбор методов и моделей для построения планов и прогнозов позволяет обеспечить высокую эффективность принимаемых решений и определить оптимальные пути достижения поставленных целей.

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются основные понятия прогнозирования и планирования, классификация прогнозов, методологические принципы их построения, этапы прогнозирования и его роль при принятии управленческих решений. Также приводится описание основных методов прогнозирования: методов экспертных оценок, методов аналогий и методов математического моделирования. Большая часть учебно-методического пособия посвящена описанию временных рядов. В том числе их предварительному анализу, выявлению тренда и сезонной компоненты, адаптивным моделям, моделям стационарных и нестационарных временных рядов и их идентификации, проверке адекватности и точности построенных моделей, а также прогнозированию на основе регрессионных моделей.

Глава 1. Прогнозирование социально-экономических процессов

1.1. Роль прогнозирования в принятии управленческих решений

Трудно представить какой-либо из этапов развития цивилизации без попыток прогнозирования событий в природе и обществе. Термин «прогностика» для специальной области познания путем прогнозирования возник еще в глубокой древности. Достаточно известная книга «Прогностика» древнегреческого исследователя и врача Гиппократа была написана более двух тысяч лет назад. Он считал, что предвидение будущего – это искусство, основанное не только на наблюдениях и приметах, но и на интуиции и субъективном мнении человека, делающего прогноз.

Следующим существенным этапом в развитии прогнозирования был Дельфийский оракул в Древней Греции, в основе предсказаний которого лежали астрология и ясновидение. Процесс предсказания включал несколько стадий. У истоков прогноза стоял оракул, который на вопрос клиента давал ответ в форме слов-иносказаний. Далее жрецы расшифровывали иносказания и в письменной подробной форме излагали свое толкование. Затем вариант предсказания направлялся в Совет старейшин, который давал свою оценку и детализировал ранее полученный прогноз.

Благодаря арабским историкам аль-Бируни и Ибн Халдуну появилась теория циклических круговоротов в истории, которая подтвердила возможность достоверного предсказания будущего. Дальнейшее развитие пророчества, предсказания, прогнозы получили в Шумерском государстве. Они создавались на основе эвристических методов, метафор и символов, наблюдения за звездами и природными явлениями. Особое место уделялось провоцированию и толкованию знамений. Составление пророчества определенном этапе истории стало профессией, причем весьма популярной, что следует из большого количества синонимов, ее обозначающих: пророки, футурологи, прорицатели, оракулы, предсказатели, ясновидящие, астрологи, прогнозисты, возвещающие, прозорливцы и т.д. Важность знания будущего подкреплялась тем, что прогностиков считали приближенными к божественной мысли и к правителям мира сего.

Но наибольшую известность среди всех работ в области прогнозирования приобрели предсказания Нострадамуса, который в своей книге описал в иносказательной форме более 900 предсказаний – катренов, которые можно «подогнать» к различным историческим событиям. Тем не менее, современная наука не отрицает способности творческого предвидения будущего как некой природной способности.

Развитие прогностики на современном этапе характеризуется поистине беспрецедентными масштабами прогнозирования. Прогнозы создаются как на уровне глобальных экономических, экологических или технических систем (в мировом масштабе, масштабе глобальных научных направлений, межотраслевых комплексов, отдельных стран, регионов и отраслей), но и на уровне отдельных предприятий и домашних хозяйств. Каждый из нас осмысленно или бессознательно размышляет о возможных ситуациях и проблемах, прогнозирует последствия своих решений и действий, делает предположения о возможном развитии событий в будущем.

Однако прогнозов, основанных на интуиции сегодня уже недостаточно. В настоящее время необходимо развитие прогнозирования как науки, основанной на объективных закономерностях и применении математических методов и моделей, а также на обработке первичных данных с помощью информационных технологий.

Роль прогнозирования в современной России значительно возрастает в связи с ускорением НТП, усложнением управленческих задач, отсутствием стабильности и большой степенью неопределенности. При принятии управленческих решений прогнозирование выступает первоосновой (рис. 1.1), поскольку оно направлено на предсказание результатов и последствий внедрения принятых стратегий. Прогноз выявляет неопределенности в системе, определяет факторы, способствующие или препятствующие достижению поставленных задач. В условиях ограниченной точности параметров развития прогноз позволяет описать альтернативы, положительные и негативные тенденции, возможные противоречия и определяет условия, способствующие достижению намеченных целей.

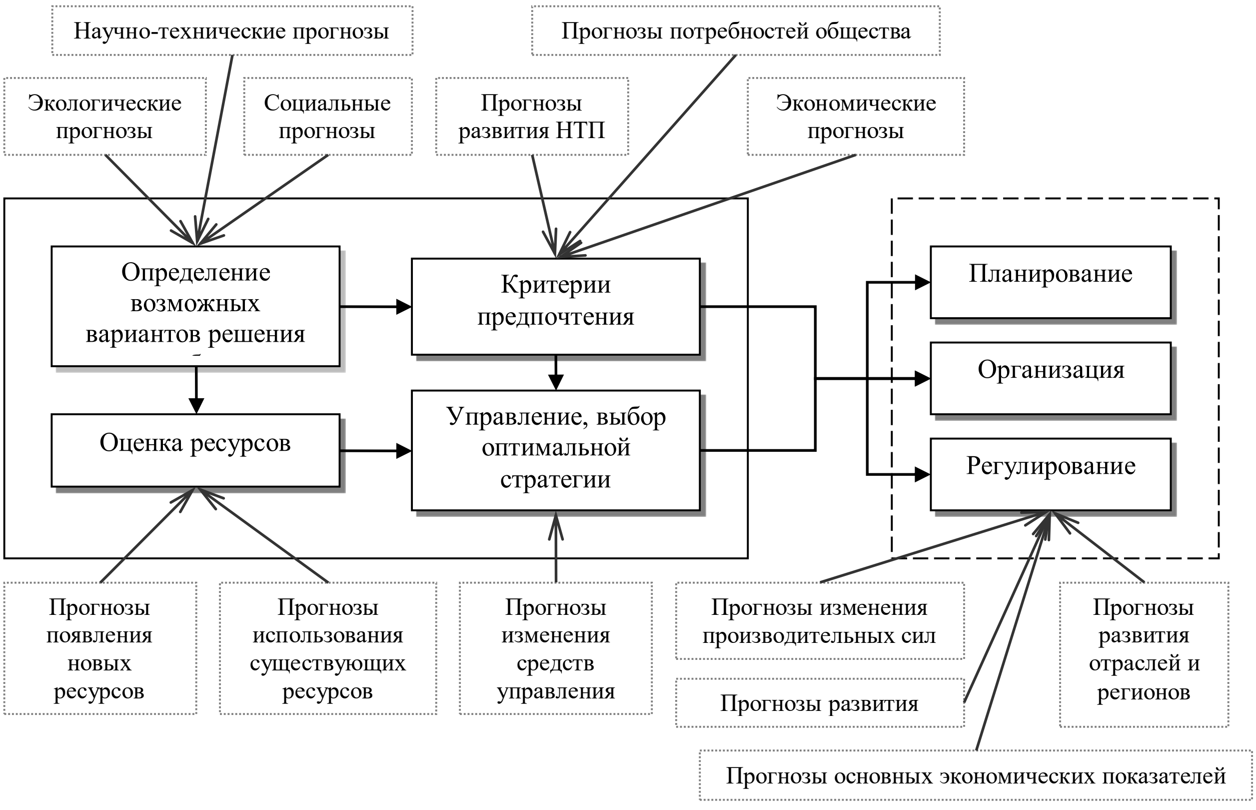

Рис. 1.1. Роль прогнозирования в принятии управленческих решений
(Источник: [Ромашова И.Б., 2000])

1.2. Основные понятия прогнозирования

Прогноз – это количественное, вероятностное, научно-обоснованное суждение о возможном будущем состоянии системы или явления и (или) о возможных альтернативах и сроках их реализации. Таким образом, прогнозирование является способом научного предвидения, в рамках которого применяется как сформированный ранее опыт, так и текущие предположения для определения будущих событий.

Обзор основных понятий, концепций и методов прогнозирования можно найти в [Бестужев-Лада И.В., Наместникова Г.А., 2002; Лапыгин Ю.Н., 2009; Лугачев М.И., Ляпунов Ю.П., 1999; Лукашин Ю.П., 2003; Мотышина М.С., 2001; Найденков В.И., 2004]. В рамках данной работы рассмотрены только наиболее важные и общие моменты, раскрывающие суть прогностики как науки.

Сущность процесса прогнозирования состоит в том, что ученый-прогностик с помощью определенного инструментария и специальных методов исследует и анализирует имеющиеся в его распоряжении данные об изучаемом явлении в текущий момент, о возможных, наблюдавшихся ранее, динамических закономерностях для исследуемой системы, о контексте и окружающей среде объекта. Он также ставит своей целью превратить полученную информацию в систему знаний о поведении объекта или его будущем состоянии с определенной степенью достоверности. Всё это позволяет выявить тенденции или оценить возможные изменения в социально-экономических процессах, их вероятность и альтернативы, что позволяет сделать принятие управленческого решения обоснованным.

Наука, которая изучает способы и законы прогнозирования, называется прогностикой. Также существует термин предвидение, который расширяет понятие прогнозирования – это опережающее отображение действительности, основанное на познании законов природы, общества и мышления.

В зависимости от характера воздействия и степени конкретности на ход изучаемых процессов и явлений можно выделить четыре основных понятия предвидения, которые упорядочены по степени конкретности:

1. Гипотеза характеризует научное предвидение на уровне общей теории, закономерности. На уровне гипотезы дается качественная характеристика объекта, выражающая общие закономерности его поведения.
2. Предсказание – это предвидение таких событий, количественная характеристика которых невозможна или затруднена.
3. Прогноз по сравнению с гипотезой имеет большую определенность и позволяет характеризовать будущее также и с количественной стороны.
4. План – это постановка точно определенных целей и предвидение конкретных детальных событий исследуемого объекта. В плане зафиксированы пути и средства достижения поставленных задач.

Прогнозы являются обоснованными суждениями о вероятности наступления одного или нескольких событий (о возможных состояниях процесса, явления). Так как предмет предположения может быть реализован только в будущем, невозможно сделать прогноз со 100%-ной гарантией (надежностью). Естественно практически невозможно учесть все возможные изменения прогнозного фона (окружающей среды) в одном прогнозном предположении, поэтому причины возможных ошибок в прогнозах полностью исключить нельзя.

Прогноз является не только вероятностным, но и многовариантным. В случае, когда имеется несколько путей развития событий, создается несколько возможных сценариев. Сценарий – это описание будущего, составленное с учетом правдоподобных положений относительно определенной совокупности условий будущего развития. Обычно прогноз включает несколько сценариев: например, пессимистический, оптимистический и оптимально-реалистический.

Длительность интервала времени от момента, когда заканчиваются статистические данные, до момента, к которому относится прогноз, называется периодом упреждения прогноза. Он зависит от множества разнообразных факторов, в том числе от особенностей и специфики изучаемого объекта, от длины временного ряда, от интенсивности изменения показателей и от продолжительности действия выделенных тенденций и закономерностей.

Основными функциями прогнозирования социально-экономических систем являются:

1. Анализ процессов и тенденций.
2. Исследование связей социально-экономических явлений в развитии объекта прогнозирования в конкретных условиях в определенном периоде.
3. Оценка объекта прогнозирования.
4. Выявление альтернатив развития.
5. Оценка последствий принимаемых решений.
6. Накопление научного материала для обоснованного выбора решений.

Следует отметить, что отечественные ученые относятся к прогностике более прагматически, чем западные коллеги, которые обязательно подчеркивают, что прогнозирование является в большей степени искусством, чем наукой. Степень субъективности в прогнозировании весьма велика, хотя современная наука опирается на объективно обусловленные тенденции в качестве основы для прогнозирования.

1.3. Планирование

Прогнозирование тесно связано с планированием и является необходимой предпосылкой плановых расчетов.

Главная характерная особенность планирования – определенность и директивность заданий. Таким образом, наибольшую конкретность и определенность предвидение приобретает при написании планов.

План и прогноз представляют собой взаимно дополняющие друг друга понятия, но отождествлять их нельзя. Характер прогноза является, в первую очередь, информационным и познавательным, тогда как план носит сугубо определенный, детерминированный характер. В прогнозе нет обязательных показателей и адресатов, а также он не предполагает обязательных действий или решений. План же требует предварительного обоснования целей, анализа доступных ресурсов, разработки точных норм. Он также обычно состоит из набора обязательных заданий, для которых устанавливаются ответственные за их исполнение.

Прогнозирование может существовать отдельно от планирования, хотя часто является составной его частью. Большинство социально-экономических процессов не всегда поддается планированию, но является объектом прогнозирования.

Практика развитых стран свидетельствует, что прогнозирование является информационно-аналитической основой не только для планирования, но и для любого другого управленческого решения: мотивационного, организационного, контролирующего и т.д.

1.4. Классификация прогнозов

Выделяют следующие типы квалификации прогнозов:

1. по направленности
   a. поисковые – прогноз нацелен на определение всего диапазона возможных изменений прогнозного объекта (рис. 1.2)

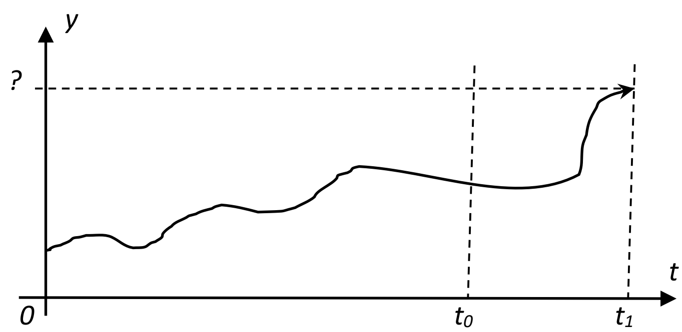

Рис. 1.2. Поисковый прогноз

   b. нормативные – прогноз отражает необходимое или желаемое состояние прогнозного объекта, определенные нормы и идеальные представления тех или иных параметров (рис. 1.3)

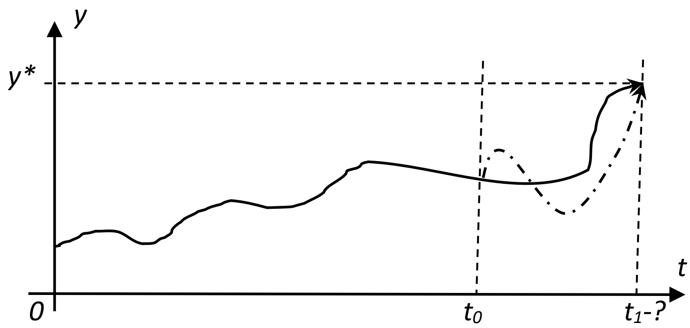

Рис. 1.3. Нормативный прогноз

2. по времени упреждения
    a. дальнесрочные – свыше 15 лет
    b. долгосрочные – свыше 5 лет
    c. среднесрочные – 3-5 лет
    d. краткосрочные – 1-3 года
    e. текущие – до 1 года
    f. оперативные – до 1 месяца
3. по используемым методам
    a. экспертные
    b. модельные
    c. экстраполяционные
4. по содержанию
    a. социально-политические
    b. естественнонаучные
    c. финансово-экономические
    d. технико-технологические
    e. психологические и т.п.
5. по степени включенности прогнозов в систему управления предприятием
    a. активные – прогнозные оценки встроены в процесс принятия решения на предприятии
    b. пассивные
6. по степени детализации
    a. общие
    b. детализированные
7. по степени вероятности будущих событий
    a. вариантные – описываются несколько вариантов будущего развития событий (рис. 1.4)
    b. инвариантные – вероятность прогнозируемого события велика, и прогноз включает только один вариант развития событий.

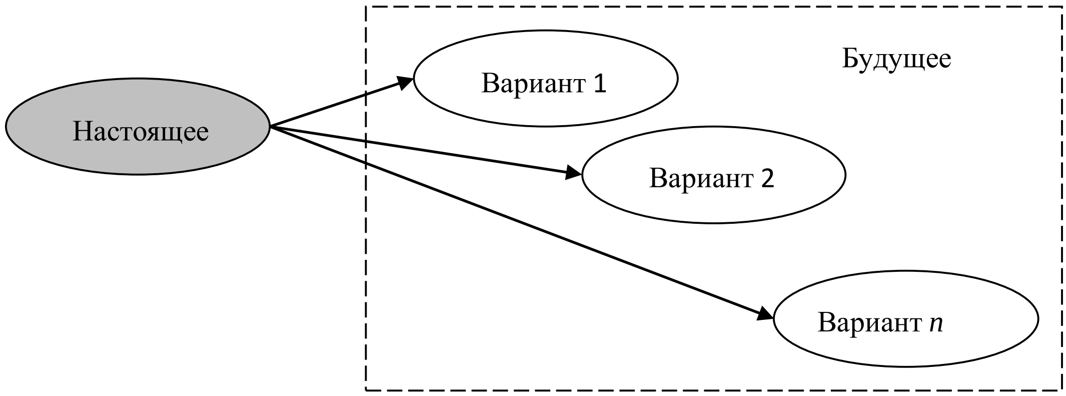

Рис. 1.4 Вариантный прогноз

8. по способу представления результатов (рис. 1.5)
   a. точечный – такое предсказание будущего содержит единственное значение исследуемого показателя
   b. интервальный – это такой прогноз, в котором определяется некоторый диапазон значений (интервал) изучаемого показателя

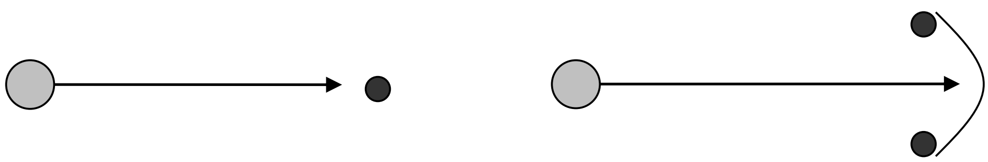

Рис. 1.5. Точечный и интервальный прогнозы

9. по характеру прогнозных оценок
   a. количественные – результат численного моделирования
   b. качественные – словесное описание, рисунки, графики
   c. структурные – взаимосвязи и взаимозависимости
10. по сложности объекта прогнозирования
   a. сверхсложные – следует учитывать взаимосвязи между всеми переменными
   b. сложные – следует учитывать взаимосвязи и совместное влияние нескольких переменных
   c. простые – следует учитывать парные взаимосвязи
   d. сверхпростые – отсутствуют существенные взаимосвязи между переменными
11. по периодичности проведения
   a. дискретные - разовые
   b. непрерывные – постоянно корректируются

12. по масштабности объекта
    a. глобальные – общие тенденции в мировом масштабе
    b. макроэкономические – общие тенденции для экономики страны в целом
    c. структурные – межрегиональные и межотраслевые
    d. региональные – прогноз для регионов
    e. отраслевые
    f. микроэкономические – для отдельных предприятий и производств

1.5. Этапы прогнозирования

Практически для любой разновидности прогнозов можно выделить типовые этапы процесса прогнозирования

1. Предпрогнозная ориентация. На этом этапе формулируется и описывается объект прогнозирования; выделяется предмет; выполняется постановка проблемы и определяются цели и задачи прогноза.
2. Первичное моделирование предполагает построение некоторой начальной модели предмета исследования как системы количественный, качественных и структурных показателей. Также на этом этапе выдвигаются рабочие гипотезы, определяется ретроспектива (время начала прогнозирования) и перспектива (время упреждения прогноза), выбирается метод, структура и способ организации прогнозного исследования.
3. Информационный этап заключается в сборе данных об изменениях в прогнозном фоне, выявлении плюсов и минусов прогнозируемой системы, сборе и накоплении статистики по развитию изучаемой системы и систем-аналогов.
4. Аналитический этап подразумевает диагностику текущего состояния системы и определение перспектив и тенденций ее развития, анализ проблем и выявление основных противоречий внутри системы, оценку возможностей системы и ее чувствительности к колебаниям прогнозного фона, анализ альтернативных путей развития системы, оценку необходимых ресурсов и их источников (при необходимости).
5. Вторичное моделирование включает построение нормативной и/ или поисковой модели прогнозируемой системы.
6. Этап контроллинга предполагает верификацию (проверку надежности) результатов, их сопоставление с иными моделями и предположениями экспертов.
7. Итоговый этап заключается в разработке рекомендаций по управлению и планированию изучаемой системы, оформлении результатов в виде отчета и т.д.

1.6. Методологические принципы

Разработка прогнозов и планов основывается на следующих методологических принципах:

1. принцип альтернативности – требует проведения многократных прогнозных разработок (альтернатив) и выбора среди них наилучшего варианта;
2. принцип наблюдаемости – обеспечивает исследователя достоверными и по возможности достаточными статистическими данными;
3. принцип системности – предполагает разделение любой системы на множество подсистем, и исследование в ее рамках количественных и качественных закономерностей в соответствии с общей целью системы;
4. принцип непрерывности – прогнозы и планы различных временных аспектов должны быть согласованны между собой;
5. принцип согласованности – требует оптимального сочетания нормативных и поисковых прогнозов;
6. принцип целенаправленности и приоритетности – каждый план и прогноз должен быть направлен на достижение определенных целей, а в качестве приоритетов должны выделяться те отрасли экономики и социально-экономические проблемы, от решения которых зависит развитие экономики в целом;
7. принцип верифицируемости – определение достоверности, точности и обоснованности прогнозов, исследование факторов, от которых зависит качество прогнозирования;
8. принцип комплексности – предполагает рассмотрение всех сторон объекта исследования в его взаимосвязи с другими процессами и явлениями;
9. принцип социальной ориентации – предполагает приоритетность социальных проблем;
10. принцип прагматизма – устанавливает необходимость практического использования прогнозов, повышения их эффективности, уменьшения затрат на проведение самого прогностического процесса;
11. принцип оптимальности – выбор наилучшего (в каком-либо смысле) решения. Решение данной задачи тесно связано с выбором критерия оптимальности;
12. принцип адекватности – экономико-математические модели, используемые в процессе прогнозирования, должны быть адекватны реальным процессам, затраты на прогнозирование должны быть адекватны его качеству;
13. принцип адресности – состоит в выполнении прогнозов для определенных будущих пользователей
14. принцип сбалансированности и пропорциональности – подразумевает соблюдение общеэкономических, межотраслевых, внутриотраслевых, территориальных и внешнеэкономических пропорций, а также согласованность частных прогнозов;
15. принцип параллельности – проведение работ по прогнозированию различными службами государства (предприятия) происходит параллельно с

целью сокращения времени сбора и обработки исходной информации и выполнения самого прогноза;

16. принцип прямоточности – предусматривает строго целесообразную передачу информации от одного исполнителя другому по кратчайшему пути;
17. принцип автоматичности – является одним из основных для сокращения времени и затрат на сбор и обработку исходных данных и выполнение прогнозирования;
18. принцип адаптивности – заключается в приспособлении методов и параметров прогнозирования к факторам внешней и внутренней среды объекта как системы, к конкретной ситуации;
19. принцип сочетания отраслевого и регионального аспектов – требует, чтобы отраслевые планы и прогнозы разрабатывались с учетом интересов данной территории и рационального использования местных ресурсов.

Глава 2. Методы прогнозирования

Следует отметить, что не существует единого, универсального метода прогнозирования. Его выбор обусловлен в первую очередь спецификой прогнозируемых ситуаций и изучаемых систем. Рассмотрим некоторые методы более подробно.

2.1. Методы экспертных оценок

Эти методы основаны на выявлении и обобщении различных высказываний и мнений экспертов, то есть ученых, специалистов, потребителей и иных людей, которые обладают достаточными знаниями и квалификацией в изучаемой сфере, а также могут интуитивно чувствовать правильное решение. Конечно, экспертные оценки, включают значительный элемент субъективизма, так как основаны на субъективных методах познания. Уровень точности, надежности и достоверности итоговых оценок во многом зависит от количества экспертов, степени их компетентности в рассматриваемых вопросах, методов проведения экспертизы, согласованности различных мнений и других факторов.

Следует отметить, что наиболее эффективными методы экспертных оценок оказываются тогда, когда исследуемые процессы трудно формализовать и описать количественно, а также в ситуациях, когда временные и финансовые ресурсы сильно ограничены.

В зависимости от количества участников экспертные оценки делят на индивидуальные и коллективные. Индивидуальные оценки предполагают работу одного специалиста, при этом объем работы может быть достаточно большим и кропотливым. Примером такой оценки может быть рецензия на статью или научную работу. Обсуждение проблемы коллективом экспертов дает более объективные результаты, однако в этом случае возникает проблема сопоставимости заключений экспертов и вопрос о получении общего заключения комиссии экспертов. В качестве примера можно привести заключение медицинской комиссии о годности призывника к службе в армии. Следует также отметить, что на выводы и объективность экспертной комиссии существенно влияют правила обработки оценок экспертов.

Одним из наиболее известным методом экспертных оценок является **метод Дельфи**. Название его связано с древнегреческим Дельфийским оракулом, когда жрицы храма (пифии) произносили непонятные слова – «пророчества», а жрецы – «переводчики» их расшифровывали, отвечая на вопросы клиентов – паломников. В современном мире метод Дельфи характеризуется тремя особенностями: анонимность экспертов; использование результатов предыдущего тура опроса; статистическая характеристика группового ответа. Таким образом, эксперты на каждом этапе работают независимо друг от друга, предлагая свои оценки для поставленной проблемы. После этого анкеты или ответы собираются, выбирается только информация, непосредственно относящаяся к цели, и статистически усредняется. Экспертам, ответы которых сильно отклоняются от средних значений, предъявляется требование обосновать оценки после предъявления средних значений. Среднее значение и обоснования предъявляются всем экспертам. Эта последовательность повторяется примерно три-четыре раза.

Еще одним методом коллективной экспертной оценки является м**етод коллективной генерации идей** (метод «мозговой атаки», «мозгового штурма»). Существует несколько вариантов реализации данного метода, но основные требования на первом этапе остаются неизменными: запрет оценки выдвигаемых идеи, ограничением времени одного выступления с допущением многократных выступлений одного участника, фиксация всех выдвинутых идей. Рассмотрим несколько вариантов:

1. Самый простой вариант – на заседании ведущий поочередно опрашивает каждого участника и просит предлагать варианты решения поставленной проблемы. Каждый из них заносится в список и нумеруется. Оценка идей и их критика не допустимы. Очень важным является создание творческой и свободной обстановки, в которой все эксперты могут беспрепятственно выдвигать идеи и предложения. В том случае, когда активность экспертов низкая, будет лучше завершить заседание и перенести его на другую дату. Это позволит идеям «созреть».

2. «Мозговой штурм» по круговой системе. Группа экспертов разбивается на подгруппы из 3-4 человек. Каждый записывает по 2 или 3 идеи на листах бумаги. Затем внутри подгруппы осуществляется обмен этими листами. Другие участники развивают записанные на них идеи и, возможно, дополняются их новыми. Такой обмен осуществляется 3 раза, после чего в подгруппе создается сводный перечень выдвинутых идей. Далее вся группа в целом рассматривает отчеты о работе, проделанной в подгруппах.

В первых двух случаях получаются достаточно большие списки возможных решений поставленной задачи. Выбор же может осуществляться как голосованием группы экспертов, так и быть оставлен на усмотрение руководства.

3. Метод деструктивно отнесенной оценки. Оптимальный размер группы в этом случае составляет 10-15 человек. Группа может состоять либо из лиц примерно одного ранга (если участники знакомы между собой), либо из лиц разного ранга (если они не знакомы). Специализация в проблемной области не является необходимым условием отбора экспертов. Ведущий описывает проблемную ситуацию и знакомит экспертов с правилами проведения мозговой атаки:

- четкость и сжатость высказываний;
- недопустима критика и скептические замечания;
- каждый эксперт может выступать много раз, но не подряд
- нельзя зачитывать заранее составленный список.

Ведущий принимает пассивное участие, следя за соблюдением правил и создавая непринужденную обстановку. Продолжительность непосредственно мозгового штурма не менее 20 минут и не более 1 часа. Все высказанные идеи фиксируются, затем систематизируются, группируются и упорядочиваются от более общих к более частным. Далее все идеи подвергаются критике с точки зрения препятствий на пути к их осуществлению, также на этом этапе могут высказываться контридеи. Для подведения результатов ведущий составляет список практически применимых идей.

Также к методам экспертных оценок относят **метод сценариев**, который обладает рядом различий с вышеописанными методами. Он предполагает установление последовательности событий при различных прогнозных фонах. То есть метод сценариев включает два этапа:

- построение достаточно полного набора сценариев;
- прогнозирование в рамках каждого отдельного сценария с целью достижения целей исследования.

В разработке сценария принимает участие группа специалистов. Поэтому всегда возникает неопределенность, связанная с субъективностью их суждений. Чем больше степень согласованности мнений экспертов, тем ниже степень неопределенности, а значит выше ценность сценария. Целью сценария является выявление общего результата влияния отдельных прогнозов и учет их взаимодействия. Обычно рассматривают случаи, когда ситуация будет развиваться наихудшим, наилучшим или средним (в каком-либо смысле) образом.

Более подробную информацию о методах экспертных оценок и математических методах их анализа можно найти в [Орлов А.И., 2009].

2.2. Методы аналогий

Данная группа методов позволяет использовать ранее известные методы для анализа будущих схожих ситуаций. Можно выделить два вида аналогий.

Метод исторических аналогий используется для прогнозирования объектов, которые имеют похожие по природе объекты, находящиеся на более высоком этапе своего развития. Однако следует помнить, что очень трудно определить настоящие аналогии от случайных, а также что метод основан не на неизбежности полного повторения событий, а на допущении, что если прогнозный фон не изменится, то наиболее вероятно повторение основных событий.

Метод математических аналогий основан на установлении аналогии математических описаний процессов различных по природе объектов с последующим использованием математического описания одного для прогнозирования другого. Например, модель роста числа изобретений по аналогии с процессом биологического размножения.

2.3. Методы математического моделирования

Модель – это упрощенное представление системы (процесса или теории), предназначенное для улучшения нашей способности понимать, предсказывать и возможно контролировать поведение системы [Neelamkavil F., 1987].

Качество или количество информации, которая содержится в каждой модели, сильно различается, однако их общей характеристикой является то, что они помогают оценить результаты действий в реальной жизненной ситуации без совершения действий по изменению ситуации (то есть без экспериментов над реальной системой). Процесс построения модели называется **моделированием**. Модель не является реальной системой, она не может обладать всеми ее свойствами, поэтому ошибки моделирования неизбежны.

Математические модели – это набор математических и логических взаимосвязей между различными элементами системы.

Среди методов математического моделирования можно выделить следующие, которые могут применяться для прогнозирования социально-экономических явлений:

- Методы математического программирования
- Эконометрические и статистические методы
- Методы принятия решений
- Методы исследования операций
- Методы имитационного моделирования
- Методы нейросетевого моделирования
- Системно-динамические методы
- Методы оптимального управления
- Методы сетевого моделирования
- Методы матричного моделирования

Наиболее часто для прогнозирования социально-экономических процессов используются статистические и эконометрические методы. Статистические наблюдения в социальных и экономических исследованиях обычно делаются регулярно через равные отрезки времени и представляются в виде временных рядов. Статистические и эконометрические методы предполагают построение и испытание многих моделей для каждого временного ряда, их сравнение на основе статистических показателей качества и отбор лучшей для прогнозирования. Среди этих методов следует выделить прогнозную экстраполяцию трендом, метод огибающих кривых, адаптивные методы, регрессионные методы, методы анализа временных рядов. Понятие временного ряда, их декомпозиционный анализ и другие методы анализа временных рядов будут подробно рассмотрены ниже.

Глава 3. Временные ряды и их предварительный анализ

Среди основных задач прогнозирования видное место занимает описание изменений показателей во времени, изучение динамики развития социально-экономических процессов [Льюис Х.Д., 1986].

3.1. Классификация временных рядов и основные правила их построения

Временной ряд (в некоторых источниках, например, [Дуброва Т.А., 2003], ряд динамики, time series) – это последовательность значений статистического показателя (признака), упорядоченная во времени. Отдельные наблюдения временного ряда в момент t называются уровнями ряда y_t.

В качестве значения времени могут использоваться либо определенные моменты времени (даты), либо отдельные периоды (дни, недели, месяцы, кварталы, годы и т.д.). Таким образом, временные ряды по характеру временного параметра можно разделить на моментные и интервальные, соответственно.

Моментный временной ряд описывает значение показателя по состоянию на определенный момент времени. В качестве примера можно привести численность работников на предприятии, стоимость основных фондов или курсы валют (табл.3.1).

Табл. 3.1. Пример моментного временного ряда

Дата	1 января	1 февраля	1 марта	1 апреля	1 мая	1 июня
Численность рабочих на предприятии	230	231	235	232	240	245

В **интервальном временном ряду** уровень ряда описывает значение показателя за определенный период времени. Например, объем продаж предприятия за месяц, валовой внутренний продукт или количество отработанных человеко-часов в месяц (табл.3.2).

Табл. 3.2. Пример интервального временного ряда

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Объем продаж фирмы, в тыс. руб.	335	327	313	319	329	338

Временные ряды могут иметь не равноотстоящие во времени уровни (табл. 3.3):

Табл. 3.3. Пример временного ряда с не равноотстоящими во времени уровнями

Год	1996	1999	2001	2002	2005	2006
Затраты предприятия на R&D, в тыс. руб.	515	213	846	915	734	1123

В качестве уровней временного ряда встречаются абсолютные, относительные и средние значения. Так как относительные и средние значения не наблюдаются на практике, а получаются в результате некоторых вычислений, такие временные ряды называют производными (табл.3.4).

Табл. 3.4. Пример производного временного ряда

Месяц	Затраты, в тыс. руб.	Число рабочих дней в месяце	Среднесуточные затраты, в тыс. руб.
Январь	247	18	13,72
Февраль	232	20	11,6
Март	254	20	12,7
Апрель	260	22	11,82
Май	252	20	12,6
Июнь	244	20	12,2

Следует отметить, что интервальные временные ряды обладают важным свойством – они являются аддитивными – то есть их уровни можно складывать, получая осмысленные результаты. Если складывать уровни моментного ряда, то смысла в результатах не будет в силу элементов повторного счета. Об этом свойстве следует помнить при работе с временными рядами. Иногда для моментных временных рядов рассчитываются разности уровней, которые характеризуют изменение показателя за период времени.

На практике, особенно в бухгалтерии, часто приходится сталкиваться с временными рядами с нарастающими итогами, когда уровень ряда учитывает не только значение за текущий период, но и значения за предыдущие периоды (табл. 3.5). Такие временные ряды для проведения эконометрического анализа следует привести к интервальным рядам с помощью последовательных разностей.

Табл. 3.5. Пример временного ряда с нарастающими итогами

Месяц	Прибыль предприятия, в тыс. руб.	
	за месяц	с начала года
Январь	246	246
Февраль	315	561
Март	284	845
Апрель	290	1135
Май	272	1407
Июнь	307	1714

Уровни ряда могут принимать случайные и детерминированные значения. Естественно, для эконометрического анализа используются временные ряды со случайными значениями уровней. Примером детерминированного временного ряда является последовательный набор данных о количестве дней в месяцах.

В отличие от пространственных данных уровни временного ряда как правило не являются статистически независимыми и одинаково распределенными. Поэтому в используемых эконометрических методах и моделях есть ряд особенностей, позволяющих это учитывать.

Успешность статистического анализа развития экономических процессов во времени во многом зависит от правильности их построения. В частности, очень важна длительность интервала между соседними уровнями ряда. Например, невозможно исследовать месячные сезонные колебания по квартальным или посуточным данным. Слишком короткие временные ряды могут значительно сузить группу применимых методов и моделей, а слишком длинные временные ряды усложнить вычисления. Также следует помнить о сопоставимости уровней ряда. Причиной несопоставимости данных в разные периоды времени могут быть изменение цен в разные периоды времени (для устранения этого на практике все уровни ряда пересчитываются в сопоставимых ценах базового периода), территориальные изменения (например, присоединение Крыма к РФ), структурные изменения (слияние и поглощение предприятий), изменение методик расчета показателей (например, смена классификатора ОКОНХ на классификатор ОКВЭД).

Уровни временных рядов могут содержать аномальные значения («выбросы»), которые могут возникать из-за ошибок двух типов. Ошибки I-го рода возникают при сборе, записи и передаче информации: например, внесение данных не в тот столбец или пропущенная цифра. Такие ошибки называют также устранимыми. Ошибки II-го рода называют неустранимыми и связывают с объективными причинами – катастрофами, войнами, революциями, природными явлениями, кризисами и т.д.

Выявление таких аномальных уровней – это необходимый этап предварительной обработки данных. В случае ошибок I-го рода следует заменять «выбросы» реальными или расчетными значениями с целью устранения искаженности в результатах моделирования. В случае ошибок II-го рода, когда аномальные значения отображают реальное положение дел, их можно тоже заменять расчетными при построении модели, но при расчете возможных отклонений фактических значений от полученных по модели использовать реальные показатели.

Изучение и прогнозирования социально-экономических процессов практически невозможно представить без анализа временных рядов – хронологической последовательности значений статистического показателя. Предварительный анализ временного ряда включает визуальный анализ графика временного ряда, а также определение аномальных уровней временных рядов. Для этого может быть использован метод Ирвина [Федосеев В.В., 2005]. Для уровней временного ряда рассчитываются статистики:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y};\ t = 2,3,\ldots,n, \tag{3.1}$$

где среднеквадратическое отклонение σ_y рассчитывается в свою очередь с использованием формул:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}{n-1}};\ \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}. \tag{3.2}$$

Расчетные значения λ_2, λ_3 и т.д. сравниваются с табличными значениями критерия Ирвина λ_α, и если они оказываются больше табличных, то соответствующее значение y_t уровня ряда считается аномальным. Значения критерия Ирвина для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$, т.е. с 5%-ной ошибкой, приведены в таблице:

Таблица 3.6. Табличные значения критерия Ирвина (для уровня значимости 5%)

n	2	3	10	20	30	60	100
λ_α	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

После выявления аномальных уровней ряда обязательно определение причин их возникновения. Если можно их устранять, то можно заменить аномальный уровень средним арифметическим двух соседних уровней ряда, либо соответствующим значением по кривой, аппроксимирующей данный временной ряд.

3.2. Показатели изменения уровней временных рядов

При анализе изменений явления во времени на практике часто определяются средние показатели, в том числе средний уровень ряда. Средний уровень – это важная обобщающая характеристика для рядов динамики, изменение которых стабилизировалось в исследуемом периоде и при этом подвержено ощутимым случайным колебаниям [Дуброва Т.А., 2003]. Средний уровень ряда определяется по-разному для моментных и интервальных рядов, при этом следует обратить внимание на то, какие – равноотстоящие или не равноотстоящие во времени – уровни наблюдаются во временном ряду. Для интервальных временных рядов с равноотстоящими во времени уровнями расчет среднего уровня проводится по формуле простой средней арифметической:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}, \tag{3.3}$$

где n – число уровней или длина ряда; y_t – уровень временного ряда ($t = 1,2,\ldots,n$).

В случае интервальных временных рядов с не равноотстоящими во времени уровнями для расчета среднего уровня используется формула взвешенной средней арифметической, где в качестве весовых коэффициентов используется продолжительность интервалов времени между уровнями (число периодов времени, при которых значение уровня не изменяется):

$$\bar{y} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t t}{\sum\limits_{t=1}^{n} t}, \tag{3.4}$$

где t – число периодов времени, при которых значение уровня y_t не изменяется.

Для моментных временных рядов с равноотстоящими во времени уровнями средний уровень (так называемая средняя хронологическая) находится по формуле:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_n}{2} + \sum\limits_{t=2}^{n-1} y_t}{n-1}, \tag{3.5}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – уровни временного ряда; y_1 и y_n - соответственно начальный и конечный уровни ряда; n - число уровней или длина ряда.

В случае моментных временных рядов с не равноотстоящими во времени уровнями средний уровень определяется по формуле средней хронологической взвешенной:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \ldots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i}, \tag{3.6}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – уровни временного ряда; t_i – продолжительность интервала времени между соседними уровнями.

Для примера рассчитаем по данным из табл. 3.7. средний уровень ряда по формуле (3.6):

Табл. 3.7. Моментный временной ряд с не равноотстоящими во времени уровнями

Дата	1 января 2007г.	1 марта 2007г.	1 июня 2007г.	1 октября 2007 г.	1 января 2008г.
Численность безработных	1300	1250	1380	1370	1350

$$\bar{y} = \frac{(1300+1250)\cdot 2 + (1250+1380)\cdot 3 + (1380+1370)\cdot 4 + (1370+1350)\cdot 3}{2\cdot(2+3+4+3)} = \frac{32150}{24} \approx 1340 \qquad (3.7)$$

На практике для количественной оценки динамики явлений широко применяются следующие основные аналитические показатели:

- **Абсолютный прирост** равен разности двух сравниваемых уровней и характеризует изменение показателя за определенный промежуток времени.
- **Темпы роста** характеризует отношение двух сравниваемых уровней ряда, как правило, выраженное в процентах. Темп роста всегда положителен. Если темп роста равен 100%, то значение уровня не изменилось, если меньше 100%, то значение уровня понизилось, больше 100% - повысилось.
- **Темпы прироста** характеризует абсолютный прирост в относительных величинах. Определенный в процентах темп прироста показывает, на сколько процентов изменился сравниваемый уровень по отношению к уровню, принятому за базу сравнения.

Причем каждый из указанных показателей может быть трех видов:

- Цепной;
- Базисный;
- Средний.

В основе расчета этих показателей динамики лежит сравнение уровней временного ряда (табл. 3.8). Если сравнение осуществляется с одним и тем же уровнем, принятым за базу сравнения, то эти показатели называются **базисными**. В качестве базы сравнения выбирается либо начальный уровень временного ряда, либо уровень, с которого начинается новый этап развития. Если сравнение осуществляется при переменной базе, и каждый последующий уровень сравнивается с предыдущим, то вычисленные таким образом показатели называются **цепными**.

Табл. 3.8. Показатели динамики временного ряда

Вид показателя	Абсолютный прирост	Темп роста, %	Темп прироста, %
Цепной	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	$T_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} 100\%$	$K_t = T_t - 100\%$
Базисный	$\Delta y_t^б = y_t - y_б$	$T_t^б = \frac{y_t}{y_б} 100\%$	$K_t^б = T_t^б - 100\%$
Средний	$\Delta \bar{y} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$	$\bar{T} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} 100\%$	$\bar{K} = \bar{T} - 100\%$

Средний абсолютный прирост – это обобщающая характеристика скорости изменения исследуемого показателя во времени (скорость – прирост в единицу времени). **Средний темп роста** – обобщающая характеристика динамики, отражающая интенсивность изменения уровней ряда. Он показывает, сколько в среднем процентов последующий уровень составляет от предыдущего на всем периоде наблюдения. Однако данный показатель имеет существенный недостаток, так как не принимаются во внимание промежуточные уровни. При наличии сильных осцилляций использование для статистического анализа среднего геометрического темпа роста может привести к ошибкам в результате искажения тенденции временного ряда. Эту проблему можно решить, например, используя следующую формулу:

$$\overline{T} = \sqrt[n-1]{\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_1}}100\%, \qquad (3.8)$$

где $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_n$ – сглаженные по уравнению тренда начальный и конечный уровни временного ряда (тренд или кривая роста учитывает в себе промежуточные значения). Средний темп роста, вычисляемый по последней формуле, будет более точно характеризовать изменение изучаемого экономического явления за рассматриваемый интервал времени.

Описание временного ряда с помощью среднего абсолютного прироста соответствует его представлению в виде прямой, проведенной через две крайние точки. В этом случае, чтобы получить прогноз на L шагов вперед (L – период упреждения), достаточно воспользоваться следующей формулой:

$$\hat{y}_{n+L} = y_n + L\Delta\overline{y}, \qquad (3.9)$$

где y_n - фактическое значение в последней n-ой точке ряда (конечный уровень ряда); $\hat{y}_{n+L}$ - прогнозное значение $(n+L)$-го уровня ряда; $\Delta\overline{y}$ - значение среднего абсолютного прироста, рассчитанное для временного ряда $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Очевидно, что такой подход к получению прогнозного значения корректен, если характер развития близок к линейному. На такой равномерный характер развития могут указывать примерно одинаковые значения цепных абсолютных приростов.

Применение среднего темпа роста (и среднего темпа прироста) для описания динамики ряда соответствует его представлению в виде показательной или экспоненциальной кривой, проведенной через две крайние точки. Поэтому использование этого показателя в качестве обобщающего целесообразно для тех процессов, изменение динамики которых происходит с примерно постоянным темпом роста. В этом случае прогнозное значение на L шагов вперед может быть получено по формуле:

$$\hat{y}_{n+L} = y_n \overline{T}^L, \qquad (3.10)$$

где $\hat{y}_{n+L}$ - прогнозное значение $(n+L)$-го уровня ряда; y_n - фактическое значение в последней n-ой точке ряда (конечный уровень ряда); $\bar{T}$ - средний темп роста, рассчитанный для ряда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (не в %-ном выражении)

К недостаткам среднего прироста и среднего темпа роста следует отнести то, что они учитывают лишь конечный и начальный уровни ряда, исключая влияние промежуточных уровней. Тем не менее, эти показатели имеют весьма широкую область применения, что объясняется простотой их расчета. Они могут быть использованы как приближенные, простейшие способы прогнозирования, предшествующие более глубокому количественному и качественному анализу.

Глава 4. Декомпозиционный анализ временных рядов

4.1. Аддитивные и мультипликативные модели

Уровни временного ряда формируются под воздействием достаточно большого количества факторов. Их условно можно разделить на три группы:

- факторы, формирующие тенденцию ряда;
- факторы, формирующие циклические (и/или сезонные) колебания ряда;
- случайные факторы.

Таким образом, уровни временного ряда можно записать в виде:

$$Y_t = f(T_t, S_t, C_t, \varepsilon_t) \tag{4.1}$$

где T_t - тенденция (тренд); S_t - сезонная составляющая; C_t - циклическая составляющая; ε_t - случайная (несистематическая) компонента.

Любой ряд можно представить в виде композиции этих составляющих. Однако следует отметить, что операция декомпозиции временного ряда, несомненно полезная для моделирования изучаемого явления и допустимая с математической точки зрения, может в некоторых случаях ввести в заблуждение. Например, предположение о независимом влиянии указанных компонент является неоправданным с практической точки зрения. Однако в ряде случаев разложение временного ряда на компоненты позволяет существенно упростить понимание механизмов развития социально-экономических процессов.

Тенденция – это устойчивое, систематическое изменение значений временного ряда в течение достаточно долгого периода. Определение тенденции не является строгим, поскольку включает понятие «достаточно долгий». Очевидно, что для разных явлений длительность такого периода будет различной, поэтому то, что сейчас воспринимается, как тенденция, может на самом деле оказаться частью колебательного процесса с большим периодом колебаний. Об этом следует помнить при построении моделей. В экономике трендом считают ту тенденцию, которая формируется под воздействием следующих факторов:

- технологическое и экономическое развитие;
- рост потребления и изменение его структуры;
- изменение демографических характеристик популяции и т.д.

Сезонная компонента описывает регулярные изменения, обусловленные влиянием на изучаемое явление (наблюдаемое значение показателя) некоторых, внешних по отношению к этому явлению факторов, действующих с заранее известной периодичностью. Типичными примерами сезонного эффекта являются колебание цен на сельскохозяйственную продукцию, потребление сезонных товаров, объем продаж перед праздниками и т.д. Основной принцип анализа сезонных компонент заключается в переходе от сравнения всех значений ряда между собой к сравнению значений через определенный период времени, что позволяет снизить оценку вариации временного ряда около его среднего значения (продажи в декабре этого года сравнивают с продажами в декабре прошлого).

Циклическая компонента имеет больший период колебаний, чем сезонная, т.е. изменения временного ряда являются достаточно плавными и заметными для того, чтобы включить их в случайную составляющую, но их нельзя отнести ни к тренду, ни к периодической сезонной компоненте. Примерами могут служить циклы деловой активности, демографические, инвестиционные и другие циклы. В экономических временных рядах редко предоставляется возможность для выявления и анализа циклической компоненты, так как ряды экономических показателей часто оказываются слишком короткими, для таких исследований. Циклические показатели изучались во временных рядах, относящихся к естественным наукам. Например, во многих явлениях установлена цикличность, связанная с солнечной активностью (период – 11 лет).

Если из временного ряда удалить тренд и периодические составляющие, то останется нерегулярная (случайная) компонента. Для ее описания используются методы теории вероятности и математической статистики. Факторы, под действием которых формируется случайная компонента, разделяются на два вида: факторы резкого, внезапного действия, и текущие факторы.

Факторы первого вида (стихийные бедствия, эпидемии, войны, кризис и т.д.), как правило, вызывают более значительные отклонения. Иногда такие отклонения называют катастрофическими колебаниями. Факторы второго вида вызывают случайные колебания, являющиеся результатом действия большого числа причин, влияние каждой из которых незначительно, но суммарный эффект достаточно ощутим.

С математической точки зрения выделяют три основных формы декомпозиции временного ряда:

- **Аддитивной моделью** временного ряда называется представление ряда в виде суммы компонент:
$$Y_t = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t \qquad (4.2)$$
- **Мультипликативной моделью** временного ряда называется представление ряда в виде произведения компонент:
$$Y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot \varepsilon_t \qquad (4.3)$$
- Модель смешанного типа:
$$Y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t + \varepsilon_t \qquad (4.4)$$

Следует заметить, что в процессе формирования значений уровней каждого временного ряда не обязательно участвуют одновременно все компоненты. Однако наличие случайной составляющей предполагается во всех случаях.

Решение любой задачи по прогнозированию и анализу временных рядов начинается с построения графика исследуемого показателя. Иногда уже на этом этапе можно определить характер колебаний. Отличительная особенность аддитивной модели (рис. 4.1) заключается в том, что амплитуда сезонных колебаний остается примерно постоянной, неизменной во времени.

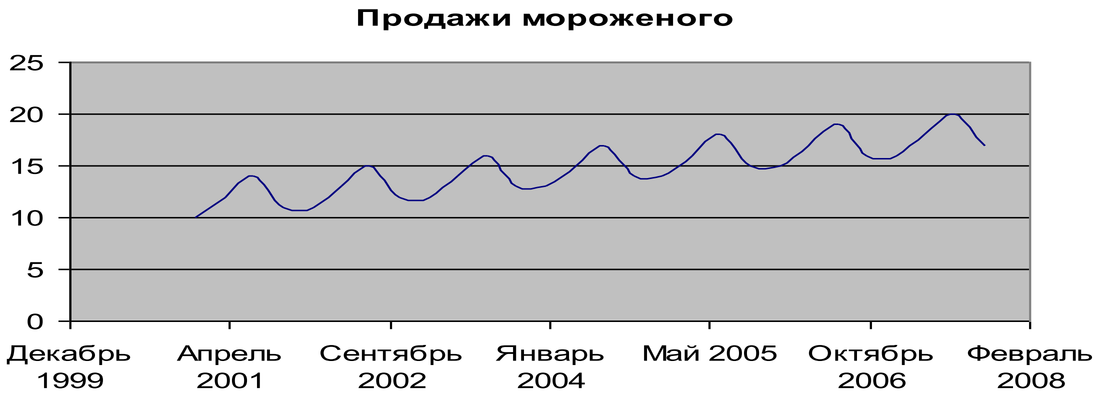

Рис. 4.1. Аддитивный временной ряд

Для мультипликативной модели амплитуда колебаний будет увеличиваться или уменьшаться (рис. 4.2).

Рис. 4.2. Мультипликативный временной ряд

4.2. Моделирование тенденции временного ряда

Для определения наличия тренда в исходном временном ряду применяется несколько методов, рассмотрим два из них.

4.2.1. Метод проверки разности средних уровней

Реализация этого метода состоит из четырех этапов:

1. Временной ряд разбивается на две примерно равные по числу уровней части: в первой части n_1 первых уровней временного ряда, во втором - n_2 остальных уровней временного ряда ($n_1 + n_2 = n$).

2. Для каждой из этих частей вычисляют средние значения и дисперсии:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1};\ \sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1};\ \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n} y_t}{n_2};\ \sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n} (y_t - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1}; \quad (4.5)$$

3. Проверяем однородность дисперсий обеих частей ряда с помощью F-критерия Фишера, то есть сравниваем расчетное значение критерия:

$$F = \begin{cases} \sigma_1^2 / \sigma_2^2 & \text{если} \quad \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 / \sigma_1^2 & \text{если} \quad \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases} \quad (4.6)$$

с табличным значением критерия Фишера F_α с заданным уровнем значимости α. Величина 1-α называется доверительной вероятностью. Если расчетное значение F меньше табличного F_α, то гипотеза о равенстве дисперсий принимается и переходят к четвертому этапу. Если расчетное значение F больше или равно F_α, то гипотеза о равенстве дисперсий отклоняется и делается вывод, что данный метод для определения наличия тренда ответа не дает.

4. Проверяем гипотезу об отсутствии тренда с использование t-критерия Стьюдента. Для этого определяем расчетное значение критерия Стьюдента по формуле:

$$t = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (4.7)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение разности средних:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (4.8)$$

Если расчетное значение t меньше табличного значения статики Стьюдента t_α с заданным уровнем значимости α и числом степеней свободы $n_1 + n_2 - 2$, то гипотеза принимается, то есть тренда нет, в противном случае тренд есть. Данный метод применим только для временных рядов с монотонной тенденцией.

4.2.2. Метод Фостера-Стьюарта

Этот метод обладает большими возможностями и дает более надежные результаты. Кроме тренда самого ряда, он позволяет установить наличие тренда дисперсии временного ряда: если тренда дисперсии нет, то разброс уровней ряда постоянен, если дисперсия увеличивается, то ряд «раскачивается» и т.д.

Реализация метода также содержит четыре этапа.

1. Производим сравнение каждого уровня исходного временного ряда, начиная со второго уровня, со всеми предыдущими, при этом определяю две числовые последовательности:

$$k_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \text{ больше всех предыдущих уровней;} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$l_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \text{ меньше всех предыдущих уровней;} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (4.9)$$

$$t = 2, 3, \ldots, n$$

2. Вычисляем величины s и d:

$$s = \sum_{t=2}^{n}(k_t - l_t); \; d = \sum_{t=2}^{n}(k_t + l_t) \qquad (4.10)$$

Величина *s*, характеризующая изменение временного ряда, принимает значение от *–(n-1)* (ряд монотонно убывает) до *(n-1)* (ряд монотонно возрастает). Величина *d* характеризует изменение дисперсии уровней временного ряда и изменяется от 0 (все уровни ряда равны) до *(n-1)* (ряд монотонный или с чередованием подъемов и падений уровней).

3. Проверяем гипотезу, можно ли считать случайным:

1. отклонение величины *d* от величины μ – математического ожидания величины *d* для ряда, в котором уровни расположены случайным образом;
2. отклонение величины *s* от 0.

Эта проверка проводится с использованием расчетных значений t-критерия Стьюдента для дисперсии и для средней:

$$t_d = \frac{|d - \mu|}{\sigma_1}; \; \sigma_1 = \sqrt{2\sum_{t=2}^{n} 1/t - 4\sum_{t=2}^{n} 1/t^2}\,; \; t_s = \frac{|s - 0|}{\sigma_2}; \; \sigma_2 = \sqrt{2\sum_{t=2}^{n} 1/t}\,. \qquad (4.11)$$

где μ – математическое ожидание величины *d*, определенной для ряда, в котором уровни расположены случайным образом; σ_1 - среднеквадратическое отклонение для величины *d*; σ_2 - среднеквадратическое отклонение для величины *s*.

Значения параметров μ, σ_1, σ_2 можно найти в статистических таблицах []:

Табл. 4.1. Табличные значения параметров

n	10	20	30	40
μ	3,858	5,195	5,990	6,557
σ_1	1,288	1,677	1,882	2,019
σ_2	1,964	2,279	2,447	2,561

4. Расчетные значения t_d и t_s сравнивают с табличными значениями критерия Стьюдента с заданным уровнем значимости t_α. Если расчетное значение меньше табличного, то гипотеза об отсутствии соответствующего тренда принимается, в противном случае тренд есть.

4.2.3. Сглаживание временных рядов

Очень часто уровни временных рядов в экономике колеблются, поэтому тенденция развития экономического явления во времени скрыта случайными отклонениями уровней в ту или иную сторону. С целью более четко выявить тенденцию развития исследуемого процесса производят сглаживание (выравнивание) временных рядов.

Методы сглаживания делят на две основные группы:

- **Аналитические методы** основаны на представлении временного ряда некоторой известной с точностью до параметров функцией, для оценки которой используются методы регрессионного анализа. При этом моделируется значение уровня временного ряда y_t в зависимости от времени t.
- **Алгоритмические (механические) методы** основаны на усреднении наблюдаемых соседних значений временного ряда.

4.2.4. Аналитическое сглаживание

Одним из способов моделирования тенденции временного ряда является аналитическое выравнивание временного ряда, т.е. построение аналитической функции, которая характеризует зависимость уровней ряда от времени (тренд). Для формализации можно использовать различные виды функции:

- линейную,

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t \tag{4.12}$$

- полиномиальную,

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots \tag{4.13}$$

- экспоненциальную,

$$y = ae^{bt},\ \hat{y}_t = ab^t,\ \hat{y}_t = k + ab^t \tag{4.14}$$

- обратную,

$$\hat{y}_t = a + \frac{b}{t};\ \hat{y}_t = \frac{1}{a+bt};\ \hat{y}_t = \frac{t}{a+bt} \tag{4.15}$$

- степенную

$$y = at^b \tag{4.16}$$

- логарифмическая

$$\hat{y}_t = a + b\ln t \tag{4.17}$$

- S-образные кривые роста

$$\hat{y}_t = ka^{b^t} \text{ (кривая Гомперца)},\ \hat{y}_t = \frac{k}{1+ae^{-bt}} \text{ (кривая Перла-Рида)} \tag{4.18}$$

- и др.

Использование экспоненциальных кривых роста предполагает, что дальнейшее развитие зависит от достигнутого уровня, например, прирост зависит от значения функции. График гиперболы соответствует процессу насыщения рынка, то есть первоначальный рост со временем замедляется и процесс стабилизируется. Логарифмическая кривая используется если изучаемый процесс приводит к замедлению роста какого-то показателя, но при этом рост не прекращается, не стремится к какому-либо ограниченному пределу. S-образные кривые роста используются для моделирования процессов, которые сначала растут медленно, затем ускоряются, а затем снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу.

Параметры трендов можно оценить с помощью стандартного метода наименьших квадратов, используя в качестве объясняющей переменной время $t=1, 2, ..., n$, а в качестве объясняемой переменной – фактические уровни временного ряда y_t. Для нелинейных спецификаций применяется процедура линеаризации.

Для выявления наилучшего уравнения тренда определяются параметры основных видов тренда, которые сравниваются в линеаризованном виде по скорректированным коэффициентам детерминации. Однако здесь следует быть очень аккуратным, поскольку при прогнозировании могут возникать значительные погрешности для больших значений t вследствие ошибок спецификации.

Параметры линейного и экспоненциального трендов имеют наиболее простую экономическую интерпретацию. Для линейного тренда вида $y_t=a+bt$, a – это начальный уровень временного ряда в момент времени $t=0$, b– средний за период абсолютный прирост уровня ряда. Для экспоненциального тренда $y_t=ab^t$, a – это также начальный уровень временного ряда в момент времени $t=0$, величина e^b – это средний за единицу времени коэффициент роста уровней ряда.

4.2.5. Алгоритмические методы

В алгоритмических методах большое значение придается последним данным. Это свойство модели называется адаптивностью. Также данные методы обладают свойством рекурсивности, то есть каждое значение определяется исходя из всех или нескольких предыдущих данных.

Одним из таких методов является **метод скользящих средних**, который описывается следующей формулой:

$$\hat{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k}}{k} \qquad (4.19)$$

То есть значение уровня временного ряда равно среднему k предыдущих значений, число k называется порядком скользящего среднего. Обычно является нечетным.

Существует еще один вариант формулы:

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i}{k}, \; t > p, \; p = \frac{k-1}{2} \qquad (4.20)$$

Первый вариант формулы удобнее использовать для построения прогноза. Однако такие модели могут использоваться только для краткосрочного прогнозирования.

В большинстве случаев уместнее предполагать, что более старые значения оказывают меньше влияния, чем последние. В этом случае уместно применять **метод взвешенных скользящих средних**, общая формула которого имеет вид:

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} a_i y_i}{\sum_{i=t-p}^{t+p} a_i} \qquad (4.21)$$

где a_i - это вес, приписываемый уровню ряда, находящемуся на расстоянии i от момента t. Веса рассчитываются для различных степеней аппроксимирующих полиномов и различных интервалов сглаживания с помощью метода наименьших квадратов. Например, для полиномов 2 и 3-го порядков числовая последовательность весов при интервале сглаживания $k=5$ имеет вид (-3; 12; 17; 12; -3).

Метод экспоненциально взвешенных скользящих средних является одним из разновидностей метода взвешенных скользящих средних. Предполагается, что новое значение определяется совокупностью предыдущих значений, влияние которых ослабевает в геометрической прогрессии. Так как сумма коэффициентов должна давать единицу, то для достаточно больших k модель может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= (1-\alpha)y_{t-1} + (1-\alpha)\alpha y_{t-2} + (1-\alpha)\alpha^2 y_{t-3} + \ldots + (1-\alpha)\alpha^{k-1} y_{t-k} + \ldots = \\ &= (1-\alpha)y_{t-1} + \alpha\hat{y}_{t-1}\end{aligned} \qquad (4.22)$$

Чем ближе α к нулю, тем быстрее модель «забывает» прошлые данные и тем больший вес имеет самая последняя информация. С другой стороны, когда α приближается к единице, то веса при y_i распределены более равномерно и, следовательно, график модели будет выглядеть более сглаженным.

Временной ряд, полученный после применения процедуры скользящих средних, также содержит случайную составляющую $\hat{\varepsilon}_t$, однако ее влияние будет сглажено и поэтому выражено не так явно. Очевидно, что уменьшение дисперсии случайных колебаний зависит от интервала сглаживания k.

Рассмотрим аддитивную модель исходного временного ряда, в которой случайная компонента ε_t удовлетворяет следующим свойствам:

$$M[\varepsilon_t] = 0, \; M[\varepsilon_t \varepsilon_{t\pm\tau}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при} \quad \tau = 0 \\ 0 & \text{при} \quad \tau \neq 0 \end{cases} \qquad (4.23)$$

т.е. случайные остатки взаимно некоррелированны и гомоскедастичны.

Пусть длина интервала сглаживания $k = 2p + 1$, тогда весовые коэффициенты для каждого активного участка могут быть представлены в виде:

$$a_{t-p}, a_{t-p+1}, \ldots, a_{t-1}, a_t, a_{t+1}, \ldots, a_{t+p-1}, a_{t+p} \tag{4.24}$$

Эти же весовые коэффициенты будут использоваться для определения оценки случайной составляющей в центральной точке активного участка:

$$\hat{\varepsilon}_t = \sum_{i=t-p}^{t+p} a_i \varepsilon_i \tag{4.25}$$

Можно записать математическое ожидание и дисперсию сглаженных остатков в виде:

$$M[\hat{\varepsilon}_t] = 0, \; D[\hat{\varepsilon}_t] = \sigma^2 \sum_{i=t-p}^{t+p} a_i^2 \tag{4.26}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t+\tau}) = M[&(a_{t-p}\varepsilon_{t-p} + a_{t-p+1}\varepsilon_{t-p+1} + \ldots + a_{t+p-1}\varepsilon_{t+p-1} + a_{t+p}\varepsilon_{t+p}) \times \\ \times &(a_{t-p+\tau}\varepsilon_{t-p+\tau} + a_{t-p+1+\tau}\varepsilon_{t-p+1+\tau} + \ldots + a_{t+p-1+\tau}\varepsilon_{t+p-1+\tau} + a_{t+p+\tau}\varepsilon_{t+p+\tau})] \end{aligned} \tag{4.27}$$

Учитывая взаимную некоррелированность исходных случайных остатков, последнее выражение можно представить в виде:

$$\operatorname{cov}(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t+\tau}) = \sigma^2 \sum_{i=t-p}^{t+p-\tau} a_i a_{i+\tau} \tag{4.28}$$

Перейдем к коэффициенту автокорреляции порядка τ (для случайных остатков $\hat{\varepsilon}_t$, отстоящих друг от друга на τ тактов времени):

$$\rho_\tau = \frac{\operatorname{cov}(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t+\tau})}{\sigma^2 \sum\limits_{i=t-p}^{t+p} a_i^2} = \frac{\sum\limits_{i=t-p}^{t+p-\tau} a_i a_{i+\tau}}{\sum\limits_{i=t-p}^{t+p} a_i^2}, \text{ где } \tau = 1; 2; \ldots 2p. \tag{4.29}$$

Таким образом, коэффициенты автокорреляции для произвольного сглаженного ряда будут отличны от нуля вплоть до порядка $\tau = 2p$, а коэффициенты более высоких порядков будут равны нулю. То есть производные ряды, будучи более гладкими по сравнению с исходными, могут содержать систематические колебания, вызванные лишь усреднением случайных составляющих. Этот вывод получил название эффекта Слуцкого-Юла, по имени ученых, впервые обративших внимание на этот факт.

Особенность **метода экспоненциального сглаживания** заключается в том, что в процедуре нахождения сглаженного уровня вес наблюдения уменьшается по мере удаления его от момента времени, для которого определяется сглаженное значение уровня временного ряда.

$$\hat{y}_t = (1-\alpha) y_t + \alpha \hat{y}_{t-1} \tag{4.30}$$

где α – параметр сглаживания.

Метод экспоненциального сглаживания получается из метода экспоненциально взвешенного скользящего среднего путем сдвига исходных данных на единицу времени.

Выбор параметра сглаживания представляет достаточно сложную проблему. В отдельных случаях Браун предлагал определять величину α исходя из длины сглаживаемого ряда:

$$\alpha = \frac{2}{n+1} \tag{4.31}$$

На практике часто используются значения от 0.1 до 0.3 (необоснованно).

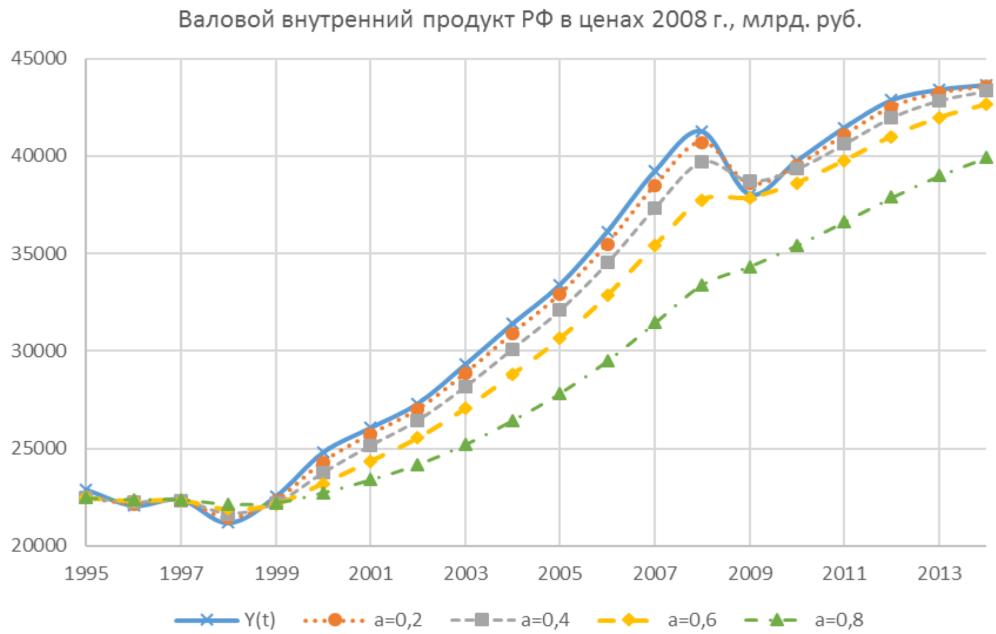

Рис. 4.3. Выбор параметра сглаживания при экспоненциальном сглаживании

Существует и более строгий подход: поскольку каждая экспоненциальная модель определяется своим значением α, то можно рассматривать всю совокупность экспоненциальных моделей для данного ряда данных. Таким образом, α считается параметром модели и можно найти оптимальное значение α, которое минимизирует сумму квадратов остатков. Однако для такого анализа необходимо использовать программные средства.

Что касается начального значения $\hat{y}_0$, то в конкретных задачах его берут или равным значению первого уровня ряда y_1, или равным средней арифметической нескольких первых членов ряда, например:

$$\hat{y}_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{4.32}$$

Такой выбор значения $\hat{y}_0$ обеспечивает хорошее согласование сглаженного и исходного ряда для первых уровней. При экспоненциальном сглаживании не теряют ни начальные, ни конечные уровни сглаживаемого временного ряда.

Выделяют также метод двойного экспоненциального сглаживания, которая получается посредством двойного применения метода экспоненциального сглаживания. То есть сначала метод экспоненциального сглаживания применяется к исходным данным, а затем – к смоделированным значениям, полученным на первом этапе. При этом повторном применении метода можно взять другое значение α.

4.2.6. Метод последовательных (переменных) разностей

Этот метод позволяет определить порядок аппроксимирующего полинома.

Если ряд в качестве неслучайной составляющей содержит постоянный член, то ряд, полученный путем вычисления разностей первого порядка $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, не будет содержать эту неслучайную константу. Чтобы исключить линейный тренд необходимо вычислить последовательные разности второго порядка $\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$. В общем случае, если ряд описывается полиномом степени *p-1*, то ряд составленный из последовательных разностей порядка p: $\Delta^p y_t = \Delta^{p-1} y_t - \Delta^{p-1} y_{t-1}$ - будет содержать только случайную составляющую.

Последовательность действий следующая: вычисляем последовательные разности первого порядка (p=1) и определяем величину s^2 по формуле:

$$s^2 = \frac{\frac{1}{(n-p)} \sum_{t=p+1}^{n} \left(\Delta^p y_t\right)^2}{C_{2p}^{p}} \tag{4.33}$$

Затем вычисляем разности второго порядка и также определяем величину s^2. Если величины s^2 уменьшаются, то повторяем вычисления, увеличив порядок разности на единицу. Продолжая вычисления, на некотором шаге мы обнаружим, что при дальнейшем возрастании порядка разности очередные значения s^2 практически не отличаются друг от друга (в пределах ошибок вычисления выборочных оценок). Это указывает на то, что систематическая компонента из анализируемого ряда исключена, а степень полинома на единицу меньше порядка разностей на шаге процедуры, начиная с которого s^2 остается постоянной. Значение s^2, полученное на последнем шаге, будет оценкой выборочной дисперсии случайной составляющей первоначального ряда.

4.3. Моделирование сезонных колебаний временного ряда

Если под сглаживанием временного ряда понималось получение оценки $T_t + S_t$ $(T_t \cdot S_t)$, то под фильтрацией компонент понимается процесс получения оценок T_t, S_t, и ε_t. Рассмотрим в рамках данной работы два основных направления фильтрации компонент временного ряда: статистическую и итерационную. Также в литературе можно найти информацию про спектральные и гармонические методы фильтрации.

4.3.1. Статистическая фильтрация

Рассмотрим методику построения аддитивной и мультипликативной модели временного ряда, предложенную в [Елисеева И.И. и др., 2004]. Этот процесс включает следующие шаги:

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней:
    a. уровни ряда суммируются последовательно за каждые 4 квартала со сдвигом на один момент времени;
    b. итого за 4 квартала делится на 4 и получаются скользящие средние, которые не содержат сезонной компоненты;
    c. полученные значения приводятся к текущему моменту времени, для чего находится среднее значение из двух последовательных скользящих средних – центрированные скользящие средние.
2. Расчет значений сезонной компоненты S:
    a. оценки сезонной компоненты находятся для аддитивной (мультипликативной) модели как разность (частное) между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними;
    b. рассчитываются средние оценки сезонной компоненты за каждый квартал по всем годам;
    c. сезонные воздействия за период должны взаимопогашаться, т.е. в аддитивной (мультипликативной) модели сумма значений сезонной компоненты должны быть равна нулю (четырем);
    d. в случае невыполнения указанного условия следует определить корректирующий коэффициент. В аддитивной модели найденная сумма делится на 4. В мультипликативной модели 4 следует разделить на рассчитанную сумму;
    e. скорректированные значения сезонной компоненты рассчитываются как разность между ее средней оценкой и корректирующим коэффициентом в аддитивной модели; как произведение средних оценок на корректирующий коэффициент в мультипликативной модели.
3. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных $T+E=Y-S$ в аддитивной или $T{\cdot}E=Y/S$ в мультипликативной модели.
4. Аналитическое выравнивание уровней $(T+E)$ или $(T{\cdot}E)$ (см. пункт 9.4.2) и расчет значений T с использованием полученного уравнения.
5. Расчет полученных по модели абсолютных ошибок: $E=Y-(T+S)$ для аддитивной модели и $E=Y/(T{\cdot}S)$ для мультипликативной модели.

Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, то их можно использовать для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

Мультипликативные индексы сезонности используются в том случае, когда по мере повышения среднего уровня динамики увеличиваются абсолютные отклонения, вызванные сезонностью. В отличие от аддитивных индексов сезонности, которые имеют абсолютную величину, мультипликативные отражают относительное отклонение каждого периода сезона от средней величины.

4.3.2. Итерационные методы фильтрации

Итерационные методы фильтрации основаны на многократном применении центрированных скользящих средних и одновременной оценке сезонной компоненты в каждом цикле.

Одним из наиболее простых методов итерационной фильтрации является **метод Четверикова**, этапы которого заключается в следующем:

1. Эмпирический ряд сглаживается по методу центрированных скользящих средних. Выпадающие значения либо восстанавливаются экстраполированием выровненного ряда, либо остаются в стороне при последующей стадии работ.

Получаются предварительная оценка тренда $y'_t = T'_t$ и отклонения эмпирического ряда от выровненного: $l_t = y_t - y'_t$, $t = \overline{1,n}$ или $l_{ij} = y_{ij} - y'_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n_0}$.

2. Для каждого года i вычисляют σ_i - среднеквадратическое отклонение, на которое и делят затем отдельные месячные (квартальные) отклонения соответствующего года:

$$\tilde{l}_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sigma_i}, \text{ где } \sigma_i = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_0} l_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^{n_0} l_{ij} \right)^2 \Big/ n_0}{n_0 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.34}$$

3. Из «нормированных» таким путем отклонений вычисляется предварительная средняя сезонная волна:

$$V_j^1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tilde{l}_{ij}}{m} \tag{4.35}$$

4. Средняя предварительная сезонная волна умножается на среднеквадратическое отклонение каждого года и вычитается из эмпирического ряда:

$$T_{ij}^1 = y_{ij} - V_j^1 \sigma_i \qquad (4.36)$$

5. Получающийся таким образом ряд, лишенный предварительной сезонной волны, вновь сглаживается с помощью скользящих средних (для месячных данных по пяти или семи точкам в зависимости от интенсивности мелких конъюнктурных колебаний и продолжительности более крупных). В результате получается новая оценка тренда $T_t^{(2)}$.

6. Отклонения эмпирического ряда y_t от ряда $T_t^{(2)}$, полученного в пункте 5

$$l_t^{(2)} = y_t - T_t^{(2)}, \qquad (4.37)$$

вновь подвергаются аналогичной обработке по пунктам 2 и 3 для выявления окончательной средней сезонной волны.

7. Исключение окончательной сезонной волны проводится после умножения средней сезонной волны на k_i - коэффициент напряженности сезонной волны:

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_0} l_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}}{\sum_{j=1}^{n_0} \varepsilon_{ij}^2} \qquad (4.38)$$

где $l_{ij}^{(2)}$ - выровненные значения ряда, ε_{ij} - случайная компонента ($\varepsilon_{ij} = l_{ij}^{(2)} - V_j^{(2)}$).

Описанный метод был разработан Четвериковым в 1928 году и позволяет исключать влияние сезонных волн переменной структуры.

В **методе Шискина-Эйзенпресса**, кроме центрированной скользящей средней, на втором и последующих этапах итерационной процедуры применяются более сложные пятнадцати- и двадцатиодноточечные скользящие Спенсера. Они имеют соответственно следующий вид:

$$y'_{1t} = \frac{\begin{array}{c} -3y_{t-7} - 6y_{t-6} - 5y_{t-5} + 3y_{t-4} + 21y_{t-3} + 46y_{t-2} + 67y_{t-1} + 74y_t + \\ + 67y_{t+1} + 46y_{t+2} + 21y_{t+3} + 3y_{t+4} - 5y_{t+5} - 6y_{t+6} - 3y_{t+7} \end{array}}{320} \qquad (4.39)$$

$$y'_{2t} = \frac{\begin{array}{c} -y_{t-10} - 3y_{t-9} - 5y_{t-8} - 5y_{t-7} - 2y_{t-6} + 6y_{t-5} + 18y_{t-4} + 33y_{t-3} + \\ + 47y_{t-2} + 57y_{t-1} + 60y_t + 57y_{t+1} + 47y_{t+2} + 33y_{t+3} + 18y_{t+4} + 6y_{t+5} - \\ - 2y_{t+6} - 5y_{t+7} - 5y_{t+8} - 3y_{t+9} - y_{t+10} \end{array}}{350} \qquad (4.40)$$

Скользящие средние Спенсера позволяют получать точные оценки тренда, выраженного полиномами до третьей степени включительно.

Рассмотрим теперь собственно метод Шискина-Эйзенпресса.

1. Исходный ряд выравнивается центрированными скользящими средними. Делается это, как и в методе Четверикова, с той целью, чтобы не исказить сезонную компоненту V_t. Если бы мы использовали другую

скользящую среднюю, то это могло бы привести к искажению амплитуды и формы сезонной волны.

2. Рассчитывают остаточные значения:

$$l_t = y_t - y'_t \text{ или } l_{ij} = y_{ij} - y'_{ij} \tag{4.41}$$

Вычисляют средние значения остаточного ряда в целом по ряду $\bar{l}$ и по месяцам (кварталам) $\bar{l}_j$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{l}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{m} l_{ij}}{m} \\ \bar{l} &= \frac{\sum_{j=1}^{n_0} \bar{l}_j}{n_0} \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

3. Находится предварительная оценка средней сезонной волны:

$$\hat{V}_j^1 = \bar{l}_j - \bar{l} \tag{4.43}$$

и строится новый ряд, относительно свободный от сезонной компоненты:

$$\hat{T}_{ij}^1 = y_{ij} - \hat{V}_j^1 \tag{4.44}$$

4. К ряду T_{ij} применяется двадцатиодноточечное сглаживание скользящими средними Спенсера, получаем ряд $\hat{T}_{ij}^2$.

5. Находится улучшенная оценка сезонной компоненты:

$$\hat{V}_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (y_{ij} - \hat{T}_{ij}^2)}{m} \tag{4.45}$$

Глава 5. Адаптивные методы прогнозирования

В статистических методах прогнозирования финансовых и экономических показателей обычно выдвигается гипотеза, что основные факторы и тенденции прошлого периода сохранятся на период прогноза или что можно обосновать и учесть направление их изменения в рассматриваемой перспективе. Надежды здесь возлагаются на инерционность экономических и финансовых систем. Между тем в большинстве случаев подвижность этих явлений возрастает, возрастает быстрота реакции фондовых и товарно-сырьевых рынков на правительственные решения или новые социально-политические условия.

Наибольшей инерционностью обладают макроэкономические характеристики, но и они стали весьма подвижными. В настоящее время исследователь часто имеет дело с новыми явлениями с короткими статистическими рядами или со старыми явлениями, претерпевающими коренные изменения. Поэтому при использовании информации для построения моделей встает вопрос о преемственности данных. Устаревшие данные при моделировании часто оказываются бесполезными и даже вредными. К тому же статистическое описание процесса редко может удовлетворить, потому что необходимо знать, не как развивается процесс в среднем, а как будет развиваться его тенденция, существующая в данный момент. Значит надо строить модели, опираясь в основном на малое количество самых свежих данных. В этом случае альтернативой статистическому обоснованию модели может быть наделение ее адаптивными свойствами.

5.1. Сущность адаптивных методов

Цель адаптивных методов заключается в построении самокорректирующихся (самонастраивающихся) моделей, которые способны отражать изменяющиеся во времени условия, учитывать информационную ценность различных членов временной последовательности и давать достаточно точные оценки будущих членов данного ряда. Отличие адаптивных моделей от других прогностических моделей состоит в том, что они отражают текущие свойства ряда и способны непрерывно учитывать эволюцию динамических характеристик изучаемых процессов. Именно поэтому такие модели предназначены, прежде всего, для краткосрочного прогнозирования.

На временной ряд воздействуют в разное время различные факторы. Одни из них по тем или иным причинам ослабляют свое влияние, другие воздействуют активнее. Таким образом, реальный процесс протекает в изменяющихся условиях, составляющих его внешнюю среду, в которой он приспосабливается, адаптируется. А модель в свою очередь, адаптируется к ряду, представляющему этот процесс. Поскольку мы рассматриваем нестационарные ряды, то модель всегда будет находиться в динамике.

Адаптация в таких моделях слагается из небольших дискретных сдвигов. В основе процедуры адаптации лежит метод проб и ошибок. Последовательность процесса адаптации в основном выглядит следующим образом. Пусть модель находится в некотором исходном состоянии (т.е. определены текущие значения ее коэффициентов) и по ней делается прогноз. Выжидаем, пока истечет одна единица времени (шаг моделирования), и анализируем, насколько далек результат, полученный по модели, от фактического значения ряда. Ошибка прогнозирования через обратную связь поступает на вход системы и используется моделью в соответствии с ее логикой для перехода из одного состояния в другое, с целью большего согласования своего поведения с динамикой ряда. На изменения ряда модель должна отвечать «компенсирующими» изменениями. Затем делается прогноз на следующий момент времени, и весь процесс повторяется. Таким образом, адаптация осуществляется рекуррентно с получением каждой новой фактической точки временного ряда.

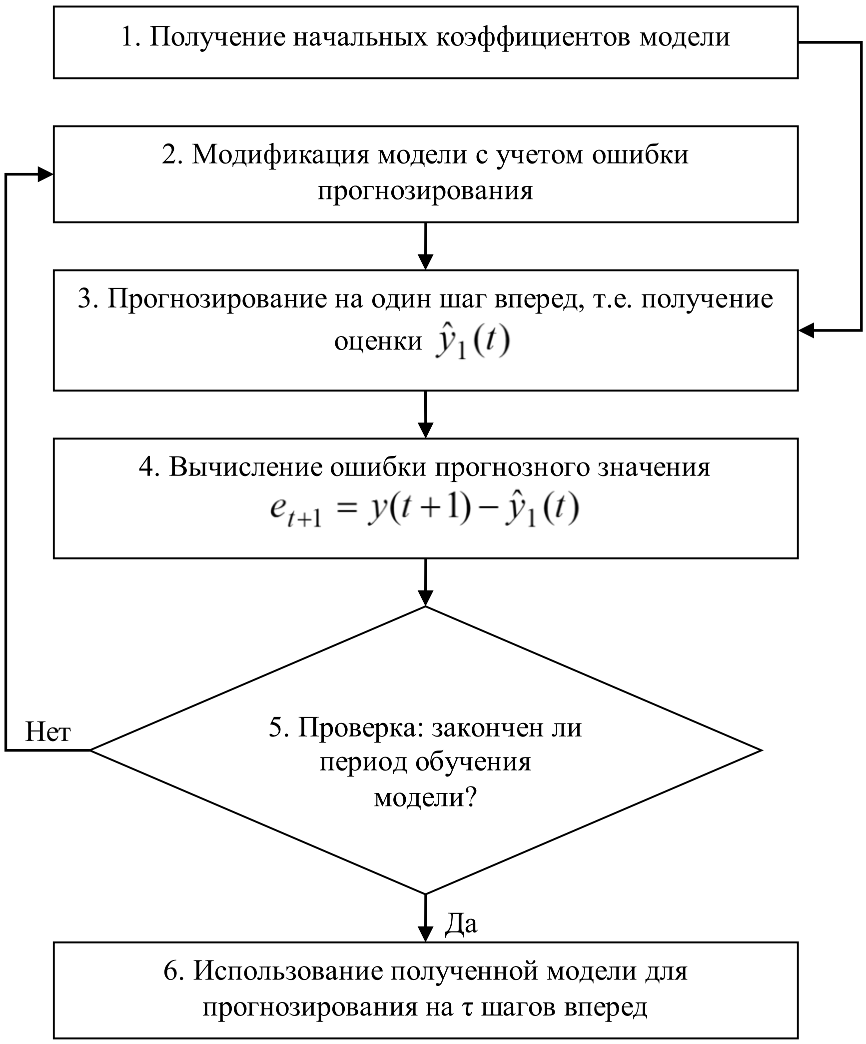

Рис. 5.1. Адаптивное прогнозирование: этапы

Быстроту реакции модели на изменения в динамике процесса характеризует так называемый параметр адаптации. Процесс «обучения» модели состоит в выборе наилучшего параметра адаптации на основе проб на ретроспективном материале. При наличии тенденции в стохастическом процессе наилучшей реакцией модели является определенный компромисс между двумя крайними ситуациями, обеспечивающий отражение тенденции и одновременно фильтрацию случайных отклонений от нее. По тому, насколько хорошо модель поддается «обучению», можно судить о ее способности адекватно отражать закономерности данного временного ряда. После выбора параметра адаптации самообучение модели происходит в процессе переработки новых статистических данных.

В силу простоты каждой отдельно взятой модели и ограниченности исходной информации нельзя ожидать, что какая-либо одна адаптивная модель годится для прогнозирования любого ряда, любых вариаций поведения. Адаптивные модели достаточно гибки, однако не являются универсальными. Поэтому при построении и объяснении конкретных моделей необходимо учитывать наиболее вероятные закономерности развития реального процесса, динамические свойства ряда соотносить с возможностями модели.

У истоков адаптивного направления лежит простейшая модель экспоненциального сглаживания. Модификации и обобщения этой модели привели к появлению целого семейства адаптивных моделей [Дж. Бокс, Г. Дженкинс, 1974; Лукашин Ю.П., 1997; Лукашин Ю.П., 2003]. Экспоненциальное сглаживание является простейшим вариантом самообучающейся модели. Вычисления просты и выполняются рекуррентно.

5.2. Адаптивные полиномиальные модели

Если для прогнозирования временного ряда, имеющего ярко выраженную линейную тенденцию, использовать экспоненциальное сглаживание, то модель, как правило, будет давать смещенные прогнозы, т.е. систематическую ошибку. Для таких временных рядов целесообразно использовать модели линейного роста, также применяющие процедуру экспоненциального сглаживания.

В этих моделях прогноз может быть получен с помощью следующего выражения:

$$\hat{y}_{\tau}(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}\tau \tag{5.1}$$

где $\hat{a}_{1,t}$ и $\hat{a}_{2,t}$ - текущие оценки коэффициентов; τ - время упреждения прогноза.

В табл. 5. представлены три модели данного типа: двухпараметрическая модель Ч. Хольта, однопараметрическая модель Р. Брауна и трехпараметрическая модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса, отличающиеся рекуррентными выражениями для пересчета текущих оценок коэффициентов (параметры адаптации или параметры экспоненциального сглаживания $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta < 1$).

Табл. 5.1. Адаптивные полиномиальные модели

Название модели	Оценка коэффициентов
Модель Ч. Хольта	$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1})$ $\hat{a}_{2,t} = \alpha_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}$
Модель Р. Брауна	$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + (1-\beta^2)e_t$ $\hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + (1-\beta^2)e_t$
Модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса	$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}) + \alpha_3(e_t - e_{t-1})$ $\hat{a}_{2,t} = \alpha_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}$

В эконометрических пакетах чаще представлена модель Ч. Хольта с возможностью выбора оптимальных параметров по критерию минимума среднеквадратической ошибки путем перебора по сетке возможных значений. Рекуррентные формулы для оценки коэффициентов по этой модели могут быть преобразованы к следующему виду, явно показывающему зависимость «корректирующего воздействия» от величины ошибки:

$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + \alpha_1 e_t;\ \hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + \alpha_1\alpha_2 e_t \qquad (5.2)$$

где $e_t = y_t - \hat{y}_1(t-1)$ - ошибка прогноза.

Из данного представления видно, что модель Брауна является частным случаем модели Хольта. при этом единственный параметр β играет роль коэффициента дисконтирования наблюдений. Модель Бокса-Дженкинса является развитием модели Хольта и включает разность ошибок, однако практические исследования показали, что оценка коэффициента при разности ошибок в большинстве случаев близка к нулю.

5.3. Адаптивные модели сезонных явлений

Многие экономические временные ряды содержат периодические сезонные колебания. В зависимости от характера этих колебаний их делят на два класса: мультипликативные и аддитивные:

1. $y_t = a_{1,t} f_t + \varepsilon_t$
2. $y_t = a_{1,t} + g_t + \varepsilon_t$

где $a_{1,t}$ - характеристика тенденции развития; $g_t, g_{t-1}, \ldots, g_{t-l+1}$ - аддитивный сезонный фактор; $f_t, f_{t-1}, \ldots, f_{t-l+1}$ - мультипликативный сезонный фактор; l - число фаз в полном сезонном цикле (12 или 4); ε_t - неавтокоррелированный шум с нулевым математическим ожиданием.

Очевидно, что можно составить множество адаптивных сезонных моделей, перебирая различные комбинации типов тенденций в сочетании с сезонными эффектами аддитивного и мультипликативного вида. Выбор той или иной модели будет продиктован характером динамики исследуемого процесса.

Рассмотрим модель с линейным характером тенденции и мультипликативным сезонным эффектом. Эта модель представляет собой объединение двухпараметрической модели линейного роста Хольта и сезонной модели Уинтерса, поэтому ее чаще всего называют моделью Хольта-Уинтерса.

Прогноз по модели Хольта-Уинтерса на τ шагов вперед определяется выражением:

$$\hat{y}_\tau(t) = (\hat{a}_{1,t} + \tau\hat{a}_{2,t})\,\hat{f}_{t-l+\tau} \tag{5.3}$$

Обновление коэффициентов осуществляется следующим образом:

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 \frac{y_t}{\hat{f}_{t-l}} + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}); \;\; \hat{f}_t = \alpha_2 \frac{y_t}{\hat{a}_{1,t}} + (1-\alpha_2)\hat{f}_{t-l};$$

$$\hat{a}_{2,t} = \alpha_3(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_3)\hat{a}_{2,t-1}; \;\; 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$$

Здесь $\hat{a}_{1,t}$ - взвешенная сумма текущей оценки $\frac{y_t}{\hat{f}_{t-l}}$, полученной путем очищения от сезонных колебаний фактических данных y_t и суммы предыдущих оценок $\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}$. В качестве коэффициента сезонности f_t берется его наиболее поздняя оценка, сделанная для аналогичной фазы цикла ($\hat{f}_{t-l}$).

Затем значение $\hat{a}_{1,t}$, полученное по первому уравнению, используется для определения новой оценки коэффициента сезонности по второму уравнению. Оценки $\hat{a}_{2,t}$ модифицируются по процедуре, аналогичной экспоненциальному сглаживанию.

Оптимальные значения для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ П.Уинтерс предлагает находить экспериментальным путем, перебирая возможные комбинации этих параметров на сетке значений. Критерием сравнения при этом выступает средняя квадратическая ошибка.

Примером другого подхода – с аддитивной сезонностью – может служить модель сезонных явлений с линейным ростом, предложенная Г. Тейлом и С. Вейджем. Практическая значимость этой модели объясняется не только тем, что в экономических временных рядах довольно часто можно встретить этот тип динамики развития. Опыт проведения экспериментальных расчетов свидетельствует о том, что динамика многих экономических показателей может быть описана с помощью модели, сочетающей в себе экспоненциальную тенденцию с мультипликативным сезонным эффектом. Прологарифмировав исходный временной ряд, на практике часто преобразуют экспоненциальную тенденцию в линейную и одновременно мультипликативный сезонный эффект в аддитивный. Таким образом, динамику преобразованного показателя можно моделировать и прогнозировать с помощью модели Тейла-Вейджа.

Прогноз по этой модели на τ шагов вперед определяется выражением:

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}\tau + \hat{g}_{t-l+\tau} \tag{5.4}$$

Обновление коэффициентов осуществляется следующим образом:

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1\left(y_t - \hat{g}_{t-l}\right) + \left(1-\alpha_1\right)\left(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}\right);\ \hat{g}_t = \alpha_2\left(y_t - \hat{a}_{1,t}\right) + \left(1-\alpha_2\right)\hat{g}_{t-l};$$

$$\hat{a}_{2,t} = \alpha_3\left(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}\right) + \left(1-\alpha_3\right)\hat{a}_{2,t-1};\ 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$$

Прогнозные оценки в этих двух моделях получаются экстраполяцией тенденции линейного роста на основе последних значений коэффициентов $\hat{a}_{1,t}$ и $\hat{a}_{2,t}$, а также добавлением (в виде сомножителя или слагаемого) самой свежей оценки сезонного эффекта для этой фазы цикла ($\hat{f}_{t-l+\tau}$ или $\hat{g}_{t-l+\tau}$). Это справедливо для случая, когда время упреждения удовлетворяет условию $0 < \tau \le l$.

Таким образом, прогнозные оценки есть функция прошлых и текущих уровней временного ряда, параметров адаптации $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а также начальных значений коэффициентов ($\hat{a}_{1,0}$ и $\hat{a}_{2,0}$) и сезонного фактора для каждой фазы цикла. В качестве $\hat{a}_{1,0}$ и $\hat{a}_{2,0}$ на практике берут МНК-оценки коэффициентов линейного тренда $\hat{y}_t = a_1 + a_2 t$, определенные по исходному временному ряду или его части. Начальные значения сезонного фактора для аддитивной модели определяются усреднением отклонений фактических уровней от расчетных для каждой фазы цикла (например, для одноименных месяцев или кварталов), для мультипликативной модели – усреднением частного от деления фактических уровней на расчетные для каждой фазы цикла.

Глава 6. Модели стационарных и нестационарных временных рядов и их идентификация

После исключения из наблюдаемых значений ряда систематических неслучайных компонент, соответствующих тренду и сезонным колебаниям, остается ряд случайных остатков. Задачей изучения случайных временных рядов является построение моделей таких рядов и их идентификация. Более подробную информацию можно найти в [Айвазян С.А., 2001; Андерсон Т., 1976; Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М., 2001; Доугерти К., 2001; Магнус Я.Р., Катшев П.К., Пересецкий А.А., 2000; Салманов О.Н., 2006].

6.1. Стационарные ряды

Пусть $F(y_{t+1}, y_{t+2}, \dots y_{t+k})$ - функция совместного распределения любых k последовательных величин $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots y_{t+k}$ ряда. Считается, что ряд является **стационарным в узком смысле** (или строго стационарным), если функция распределения F не зависит от момента t при любых целых $k>0$, т.е. $F(y_{t+1}, y_{t+2}, \dots y_{t+k}) = F(y_{t+1+m}, y_{t+2+m}, \dots y_{t+k+m})$ для любых целых k, t, m.

Таким образом, если ряд строго стационарный, то любые k последовательных членов ряда имеют одинаковое совместное распределение независимо от их положения в ряде. Очевидно, что в этом случае отдельные члены ряда также распределены одинаково.

Не зависят от времени и основные статистические характеристики случайных членов стационарного ряда:

- математическое ожидание $M\{y_t\} = M\{y_{t+m}\} = \mu$
- дисперсия $D\{y_t\} = M\{(y_t - \mu)^2\} = M\{(y_{t+m} - \mu)^2\} = D\{y_{t+m}\} = \sigma^2$,
- ковариация $\begin{aligned} \gamma_k &= \operatorname{cov}\{y_t, y_{t+k}\} = M\{(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)\} = \\ &= M\{(y_{t+m} - \mu)(y_{t+k+m} - \mu)\} = \operatorname{cov}\{y_{t+m}, y_{t+k+m}\} \end{aligned}$

Говорят, что временной ряд является **стационарным в широком смысле**, если постоянны только математическое ожидание и дисперсия членов ряда. Ковариация между любыми двумя членами одного и того же ряда называется **автоковариацией**. Можно также определить **автокорреляцию**, причем $\rho_0 = 1$:

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}. \qquad (6.1)$$

Совокупность коэффициентов $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ называется **коррелограммой** временного ряда.

Для проверки временных рядов на стационарность используют различные тесты. Выделяют параметрические, полупараметрические и непараметрические тесты на стационарность. Различаются они тем, какие предположения делаются о характере закона распределения временного ряда и его параметров. Рассмотрим один из непараметрических тестов – **тест Манна-Уитни-Уилкоксона** (U-критерий). С помощью этого критерия можно проверить идентичность распределений двух совокупностей (временных последовательностей временного ряда, определенных на разных временных частях интервала $(1,\ n)$).

Предположим, что первая совокупность образована T_1 последовательными значениями, а вторая - T_2 последовательными значениями ряда y_t, и эти последовательности не пересекаются. Нулевая гипотеза теста предполагает стационарность временного ряда y_t. Для проверки гипотезы рассчитывается статистика u^*, представляющей собой число случаев, когда элементы из первой последовательности предшествуют по своим значениям элементам второй последовательности.

Первоначально нужно составить единый ранжированный ряд из обеих сопоставляемых выборок, расставив их элементы по степени нарастания признака и приписав меньшему значению меньший ранг.

Определяем суммы рангов первой и второй совокупностей (R_1 и R_2) и выбираем из этих двух значений наибольшее. Подставляем его в соответствующую формулу:

$$u^* = R_1 - \frac{T_1(T_1+1)}{2} \text{ или } u^* = T_1 \cdot T_2 - \frac{T_2(T_2+1)}{2} - R_2. \qquad (6.2)$$

Для больших последовательностей случайная величина u^* распределена по нормальному закону $u^* \approx N\left(\frac{T_1 \cdot T_2}{2};\ \frac{T_1 \cdot T_2(T_1 + T_2 + 1)}{12}\right)$. Если полученное расчетное значение меньше табличного или равно ему, то признается наличие существенного различия между уровнем признака в рассматриваемых выборках. Табличные значения критерия и информацию о других тестах на стационарность можно найти, например, в [Айвазян С.А., 2001, Салманов О.Н., 2006 и др.].

6.2. Модели авторегрессии

Модели авторегрессии – это класс моделей временных рядов, в которых текущее значение моделируемой переменной задается функцией от прошлых значений самой этой переменной.

Простейшая модель автокоррелированного стационарного ряда, которая часто используется на практике, имеет вид:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (6.3)$$

где ε – случайная величина с нулевым средним, величины ε_i и ε_j некоррелированы между собой при $i \neq j$, дисперсия $D\{\varepsilon_t\} = \sigma_0^2$. Такая модель называется **моделью авторегрессии первого порядка** (AR(1)).

Данная модель обладает следующими свойствами:

$$M\{y_t\} = 0\,,\ \sigma^2 = D\{y_t\} = \frac{\sigma_0^2}{1-\alpha^2}\,,$$

$$\operatorname{cov}(y_t, y_{t+1}) = \alpha D\{y_t\} = \alpha\sigma^2 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t+1})}{\sigma^2} = \alpha \Rightarrow \rho_k = \alpha^k$$

Следовательно, коэффициент α можно найти по формуле:

$$\alpha = \frac{\sum_{t=1}^{n-1}(y_t - \bar{y})(y_{t+1} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}\,. \tag{6.4}$$

Модель авторегрессии второго порядка (AR(2)) записывается в виде:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t\,, \tag{6.5}$$

где относительно последовательности ε сохраняются сделанные ранее предположения.

Система уравнений, связывающая параметра процесса AR(2) со значениями его автокорреляционной функции, называется уравнениями Юла-Уолкера:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_2 \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Решая эту систему относительно параметров, находим:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \\ \alpha_2 &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Используя формулу (10.9.1), можно найти оценки коэффициентов.

В общем виде **модель авторегрессии порядка p** (AR(p)) описывается уравнением:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{6.8}$$

или

$$y_t = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t \tag{6.9}$$

Система уравнений Юла-Уолкера записывается в векторно-матричной форме:

$$\rho = R\alpha\,, \tag{6.10}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)^T$, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_p)^T$,

$$R=\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы существует, если матрица R невырождена, и его можно записать в виде:

$$\alpha = R^{-1}\rho \tag{6.11}$$

Задача оценивания параметров авторегрессии по существу аналогична оцениванию параметров множественной линейной регрессии по методу наименьших квадратов, а значит, свойства оценок будут аналогичны: несмещенность, состоятельность, эффективность.

Для того, чтобы адекватно установить порядок авторегрессионной зависимости, необходимо рассчитать характеристики процесса, которые называются **частными автокорреляциями** (частными автокорреляционными функциями, ЧАКФ).

Частные автокорреляционные функции отражают степень статистической зависимости (корреляции) между наблюдениями y_t и y_{t-k}, когда влияние на y_t промежуточных членов ряда $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ устранено.

Процедура расчета частных автокорреляций является весьма сложной, поэтому на практике используется приближенная методика. В случае стационарного ряда y_t значение выборочной частной автокорреляционной функции ЧАКФ (k) вычисляется как МНК-оценка последнего коэффициента b_k в AR(k) регрессионном уравнении:

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \dots + b_k y_{t-k} + \varepsilon_t \tag{6.12}$$

Таким образом, в качестве предварительного порядка модели AR(p) можно рассматривать такое число p, начиная с которого все последующие оценки выборочной частной автокорреляционной функции отклоняются от нуля не более чем на $\pm 2/\sqrt{n}$ для всех k>p.

Окончательный подбор порядка модели AR(p) процесса связан со статистической значимостью полученных коэффициентов модели и детальным изучением поведения остатков, получаемых вычитанием из исходного ряда y_i значений подобранной AR(p)-модели $\hat{y}_i$. Если полученные остатки модели ведут себя как белый шум, то процесс подбора модели можно считать завершенным. В противном случае следует изменить порядок подбираемой модели или перейти к более сложным комбинированным моделям авторегрессии – скользящего среднего.

В модели AR(1) прогноз на один шаг равен: $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t$. Прогноз на два шага будет составлять: $\hat{y}_{t+2} = \alpha\hat{y}_{t+1} = \alpha^2 y_t$. Аналогично на τ шагов:

$$\hat{y}_{t+\tau} = \alpha^{\tau} y_t \qquad (6.13)$$

В модели AR(2) текущее значение зависит от двух предыдущих, поэтому прогноз на один шаг будет равен: $\hat{y}_{t+1} = \alpha_1 y_t + \alpha_2 y_{t-1}$. Прогноз на два шага записывается так: $\hat{y}_{t+2} = \alpha_1 \hat{y}_{t+1} + \alpha_2 y_t$. Прогноз на τ шагов получается по следующей рекуррентной формуле:

$$\hat{y}_{t+\tau} = \alpha_1 \hat{y}_{t+\tau-1} + \alpha_2 \hat{y}_{t+\tau-2} \qquad (6.14)$$

В общем виде для AR(p) прогноз на τ шагов:

$$\hat{y}_{t+\tau} = \alpha_1 \hat{y}_{t+\tau-1} + \alpha_2 \hat{y}_{t+\tau-2} + \ldots + \alpha_p \hat{y}_{t+\tau-p} \qquad (6.15)$$

6.3. Модели скользящего среднего

Модели скользящей средней – это класс моделей временных рядов, в которых моделируемая величина задается функцией от прошлых ошибок.

Модель скользящего среднего первого порядка (MA(1)) записывается в виде:

$$y_t = \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1} \qquad (6.16)$$

где для удобства второй член взят со знаком минус. Следует оценить параметр β. Автокорреляционная функция процесса первого порядка равна:

$$\rho_j = \begin{cases} \dfrac{-\beta}{1+\beta^2}, & j = 1 \\ 0, & j > 1 \end{cases}. \qquad (6.17)$$

Соответственно, оценивание параметра β сводится к решению квадратного уравнения:

$$\beta^2 + \frac{1}{\hat{\rho}_1}\beta + 1 = 0 \qquad (6.18)$$

Данное уравнение имеет два корня, причем согласно теореме Виета, произведение этих корней равно единице. В качестве оценки параметра β следует взять корень данного уравнения, по модулю меньший, чем единица. Это связано с условиями стационарности процесса.

Уравнение **модели скользящего среднего второго порядка** (MA(2)) записывается в виде:

$$y_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} \qquad (6.19)$$

Автокорреляционная функция связана с параметрами модели следующими соотношениями:

$$\rho_j = \begin{cases} \dfrac{-\beta_1(1-\beta_1)}{1+\beta_1^2+\beta_2^2}, j=1 \\ \dfrac{-\beta_2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2}, j=2 \\ 0, j \geq 3 \end{cases} \tag{6.20}$$

Решение задачи (10.9.20) представляет нетривиальную задачу, поэтому требует применения численных методов, что распространяется также и на модели более высоких порядков.

Модель скользящего среднего порядка q (MA(q)) в общем виде записывается следующим образом:

$$y_t = \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{t-q}. \tag{6.21}$$

Для автокорреляций имеет место выражение:

$$\rho_j = \begin{cases} \dfrac{\beta_j + \sum\limits_{i=1}^{q-j}\beta_i\beta_{i+j}}{1+\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_j^2}, & j \leq q \\ 0, & j > q \end{cases} \tag{6.22}$$

Таким образом, автокорреляции процесса скользящего среднего порядка q эквивалентны нулю для всех $j>q$. Данный факт учитывается при подборе порядка модели по наблюдаемым данным.

Общая схема построения оценок параметров аналогична той, которая применялась при оценивании моделей авторегрессии, и складывается из следующих шагов:

1. по наблюдениям вычисляем выборочные оценки $\hat{\rho}_j$ автокорреляций процесса для всех $j = 1,2,\ldots,q$;
2. составляем систему q уравнений относительно q неизвестных параметров β, в которой вместо теоретических значений автокорреляций ρ стоят их оценки $\hat{\rho}$;
3. решаем полученную систему уравнений относительно неизвестных параметров и получаем их оценки.

В модели MA(q) прогноз возможен лишь максимум на q шагов вперед. При прогнозировании в модели MA(q) по конечному числу наблюдений, формула прогнозного значения при произвольном значении q является очень сложной. Однако для случая $q=1$ точную формулу для прогноза на один шаг вперед можно вывести.

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta^j\left(1-\beta^{2(n-j+1)}y_{t-j}\right)}{1-\beta^{2n+2}} \tag{6.23}$$

6.4. Модели авторегрессии – скользящего среднего

Более полное и точное название моделей, рассмотренных в данном разделе – модели авторегрессии со скользящим средним в качестве ошибок. Данные модели являются естественным обобщением моделей авторегрессии и скользящего среднего.

Модель авторегрессии - скользящего среднего порядков p и q (ARMA(p,q)) имеет вид:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (6.24)$$

Отметим основные принципиальные моменты, касающиеся анализа и оценивания подобных моделей:

1. Текущие значения ряда y_t не зависят от будущих значений ошибок.
2. Процесс авторегрессии - скользящего среднего будет стационарным тогда и только тогда, когда стационарным является процесс авторегрессии вида $y_t = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j y_{t-j} + \tilde{\varepsilon}_t$, где $\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$.

   Для стационарности процесса AR(p) – процесса необходимо и достаточно, чтобы корни его характеристического уравнения

   $$1 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 \lambda^2 - \ldots - \alpha_p \lambda^p = 0$$

   лежали вне единичного круга (по модулю были больше единицы).
3. Процесс авторегрессии - скользящего среднего будет обратимым, если таковым является процесс скользящего среднего вида: $\tilde{y}_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$, где $\tilde{y}_t = y_t - \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j y_{t-j}$.

   Для обратимости MA(q) – процесса необходимо и достаточно, чтобы корни его характеристического уравнения

   $$1 - \beta_1 \lambda - \beta_2 \lambda^2 - \ldots - \beta_q \lambda^q = 0$$

   лежали вне единичного круга (по модулю превышали единицу). Условие обратимости обеспечивает физическую реализацию процесса.
4. Процедура определения оценок параметров ARMA(p,q) – модели носит итерационный характер и включает этап численного решения системы нелинейных уравнений.

Рассмотрим частный случай – **модель авторегрессии – скользящего среднего порядка 1,1** (ARMA(1,1)). Она достаточно широко используется в практике эконометрических исследований:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}. \qquad (6.25)$$

Значения коэффициентов автокорреляции модели подчиняются экспоненциальному закону:

$$\rho_i = \delta \cdot \alpha_1^{i-1}, \text{ где } \delta = \frac{(1 - \alpha_1 \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1)}{1 - 2\alpha_1 \beta_1 + \beta_1^2}. \qquad (6.26)$$

Прогнозное значение на τ шагов вперед определяется по формуле:

$$\hat{y}_{t+\tau} = \alpha_1^{\tau}\left(\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)y_t + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\hat{y}_{t+1}\right). \tag{6.27}$$

В табл. 6.1 приведены отличительные особенности автокорреляционной и частной автокорреляционной функций для различных спецификаций модели.

Табл. 6.1. Форма АКФ и ЧАКФ стандартных процессов

Модель	АКФ	ЧАКФ
«Белый шум», MA(0)	$\rho_k = 0$ для $k \neq 0$	$\rho_{kk} = 0$ для $k \neq 0$
AR(1), $\alpha_1 > 0$	Экспоненциальное убывание, $\rho_k = \alpha_1^k$	$\rho_{11} = \alpha_1$, $\rho_{kk} = 0$, $k \geq 2$
AR(1), $\alpha_1 < 0$	Осциллирующее убывание, $\rho_k = \alpha_1^k$	$\rho_{11} = \alpha_1$, $\rho_{kk} = 0$, $k \geq 2$
AR(p)	Убывание к нулю с возможной осцилляцией	Зануление при $k > p$
MA(1), $\beta_1 > 0$	Положительный пик при $k = 1$; зануление при $k > 1$	Осциллирующее убывание; $\rho_{11} > 0$
MA(1), $\beta_1 < 0$	Отрицательный пик при $k = 1$; зануление при $k > 1$	Убывание по абсолютной величине; $\rho_{kk} > 0$ при $k \geq 1$
MA(q)	Зануление при $k > q$	Убывание к нулю с возможной осцилляцией
ARMA(1,1), $\alpha_1 > 0$	Экспоненциальное убывание с лага 1; знак ρ_1 совпадает со знаком $(\alpha_1 + \beta_1)$	Осциллирующее убывание с лага 1; $\rho_{11} = \rho_1$
ARMA(1,1), $\alpha_1 < 0$	Осциллирующее убывание с лага 1; знак ρ_1 совпадает со знаком $(\alpha_1 + \beta_1)$	Экспоненциальное убывание с лага 1; $\rho_{11} = \rho_1$; знак ρ_{kk} совпадает со знаком ρ_1, $k > 1$
ARMA(p,q)	Осциллирующее или прямое убывание, начинающееся с лага q	Осциллирующее или прямое убывание, начинающееся с лага p

6.5. Анализ нестационарных временных рядов

Модель нестационарных временных рядов – модель авторегрессии - интегрированного скользящего среднего – также известна как модель Бокса – Дженкинса. Класс ARIMA-моделей предназначен для описания нестационарных процессов, последовательные разности (соответствующего порядка) которых являются стационарными процессами.

Если последовательные разности k-го порядка $\Delta^k y_t$, полученные из исходного ряда y_t (путем применения к исходному ряду k раз оператора взятия последовательной разности) представляют собой ARMA(p,q) – процесс, то процесс y_t называется **процессом авторегрессии – интегрированного скользящего среднего с параметрами p, q, k** или сокращенно – ARIMA(p,q,k).

Отличительной особенностью ARIMA – процессов является то, что их, путем взятия последовательных разностей, можно свести к ARMA – процессам.

Рассмотрим основные этапы построения ARIMA – моделей:

1. Преобразование исходного ряда и приведение его к стационарному (предполагается вычисление последовательных разностей и тестирование получающихся рядов из разностей на стационарность). На практике чаще всего анализируемый ряд сводится к стационарному после вычисления последовательных разностей максимум второго порядка.
2. После получения стационарного ряда подбирается соответствующая авторегрессионная или ARMA(p,q) – модель для его описания. При этом следует стремиться к выбору наиболее простой модели с наименьшими значениями параметров p и q.
3. На третьем этапе решается задача оценивания коэффициентов подобранной ARMA – модели.

Глава 7. Проверка адекватности и точности моделей

Независимо от вида и способа построения экономико-математической модели вопрос о возможности ее применения в целях анализа и прогнозирования экономического явления может быть решен только после установления адекватности, то есть соответствия модели исследуемому процессу или объекту. Так как полного соответствия модели реальному процессу или объекту быть не может, адекватность – в какой-то мере условное понятие. При моделировании имеется в виду адекватность не вообще, а по тем свойствам модели, которые считаются существенными для исследования [Слуцкин Л.Н., 2006].

7.1. Проверка адекватности модели

Основным предположением модели является то, что остатки модели являются случайной компонентой, то есть случайность колебаний уровней остаточной компоненты, нормальный закон распределения остатков, равенство математического ожидания случайной компоненты нулю, независимость уровней случайной компоненты.

7.1.1. Проверка случайности колебаний уровней остаточной последовательности

Для исследования случайности отклонений рассмотрим набор разностей:

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t \ (t = 1,2,...,n) \qquad (7.1)$$

Характер этих отклонений изучается с помощью ряда непараметрических критериев. Одним из таких критериев является критерий серий, основанный на медиане выборки. Ряд из величин ε_t располагают в порядке возрастания их значений и находят медиану ε_m полученного вариационного ряда, то есть срединное значение при нечетном n или среднюю арифметическую из двух серединных значений при n четном. Возвращаясь к исходной последовательности ε_t и, сравнивая значения этой последовательности с ε_m, будем ставить знак «плюс», если значение ε_t превосходит медиану, и знак «минус», если оно меньше медианы; в случае равенства сравниваемых величин соответствующее значение ε_t опускается. Таким образом, получается последовательность, состоящая из плюсов и минусов, общее число которых не превосходит n. Последовательность подряд идущих плюсов или минусов называется серией. Для того чтобы последовательность ε_t была случайной выборкой, протяженность самой длинной серии не должна быть слишком большой, а общее число серий – слишком малым.

Обозначим протяженность самой длинной серии через $K_{\max}$, а общее число серий – через v. Выборка признается случайной, если выполняются следующие неравенства для 5%-го уровня значимости:

$$K_{\max} < [3{,}3(\lg n+1)];\ v > \left[\frac{1}{2}\left(n+1-1{,}96\sqrt{n-1}\right)\right] \qquad (7.2)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то гипотеза о случайном характере отклонений уровней временного ряда отвергается, то есть модель будет неадекватной.

Другим критерием для данной проверки может служить критерий пиков (поворотных точек). Уровень последовательности ε_t считается максимумом, если он больше двух рядом стоящих уровней, то есть $\varepsilon_{t-1} < \varepsilon_t > \varepsilon_{t+1}$, и минимумом, если он меньше обоих соседних уровней, то есть $\varepsilon_{t-1} > \varepsilon_t < \varepsilon_{t+1}$. В обоих случаях ε_t считается поворотной точкой; общее число поворотных точек для остаточной последовательности ε_t обозначим через p.

В случайной выборке математическое ожидание числа точек поворота $\bar{p}$ и дисперсия σ_p^2 выражаются формулами:

$$\bar{p} = \frac{2}{3}(n-2);\ \sigma_p^2 = \frac{16n-29}{90}. \qquad (7.3)$$

Критерием случайности с 5%-ным уровнем значимости, то есть с доверительной вероятностью 95%, является выполнение неравенства

$$p > \left[\bar{p} - 1{,}96\sqrt{\sigma_p^2}\right], \qquad (7.4)$$

где квадратные скобки означают целую часть числа. Если неравенство не выполняется, то полученная модель считается неадекватной.

7.1.2. Проверка соответствия распределения остаточной последовательности нормальному закону распределения

Так как временные ряды, как правило, не очень велики, такая проверка может быть проведена лишь приближенно с помощью исследования показателей асимметрии (γ_1) и эксцесса (γ_2). При нормальном распределении показатели асимметрии и эксцесса некоторой генеральной совокупности равны нулю. Предполагается, что остатки представляют собой выборку из генеральной совокупности, поэтому можно определить только выборочные характеристики асимметрии и эксцесса и их ошибки:

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^3}},\ \hat{\gamma}_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^2} - 3, \qquad (7.5)$$

$$\sigma_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}},\ \sigma_{\hat{\gamma}_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \qquad (7.6)$$

В этих формулах $\hat{\gamma}_1$ - выборочная характеристика асимметрии; $\hat{\gamma}_2$ - выборочная характеристика эксцесса; $\sigma_{\hat{\gamma}_1}$ и $\sigma_{\hat{\gamma}_2}$ - соответствующие среднеквадратические ошибки.

Если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$|\hat{\gamma}_1| < 1{,}5\sigma_{\hat{\gamma}_1},\ \left|\hat{\gamma}_2 + \frac{6}{n+1}\right| < 1{,}5\sigma_{\hat{\gamma}_2}, \qquad (7.7)$$

то гипотеза о нормальном характере распределения остатков принимается. Если хотя бы одно из неравенств не выполняется, то гипотеза о нормальном распределении отвергается и модель признается неадекватной.

Кроме рассмотренного метода известен ряд других методов проверки нормальности закона распределения случайной величины: метод Вестергарда, RS-критерий и т.д. Рассмотри один из наиболее простых критериев, основанный на RS-критерии. Этот критерий численно равен отношению размаха вариации случайной величины R к стандартному отклонению S:

$$R = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min},\ S = S_{\hat{y}} = \sqrt{\sum \varepsilon_t^2 / n-1} \qquad (7.8)$$

Вычисленное значение RS-критерия сравнивается с табличными (критическими) нижней и верхней границами данного отношения, и если это значение не попадает в интервал между критическими границами, то с заданным уровнем значимости гипотеза о нормальном распределении отвергается; в противном случае эта гипотеза принимается. При уровне значимости 5% критические границы составляют:

Табл.7.1. Критические границы RS-критерия

	n=10	n=20	n=30
нижняя	3,685	4,49	4,89
верхняя	2,67	3,18	3,47

7.1.3. Проверка равенства математического ожидания остатков нулю

Если остатки распределены по нормальному закону распределения, то проверка равенства нулю математического ожидания осуществляется на основе t-критерия Стьюдента. Расчетное значение этого критерия задается формулой:

$$t = \frac{\bar{\varepsilon} - 0}{S_{\varepsilon}} \sqrt{n} \qquad (7.9)$$

где $\bar{\varepsilon}$ – среднее арифметическое значение уровней остаточной последовательности ε_t; S_{ε} - стандартное (среднеквадратическое) отклонение остатков.

Если расчетное значение *t* меньше табличного t_{α} статистики Стьюдента с заданным уровнем значимости α и числом степеней свободы *n-1*, то гипотеза о равенстве нулю математического ожидания остатков принимается, в противном случае эта гипотеза отвергается и модель считается неадекватной.

7.1.4. Проверка независимости значений уровней остатков

Проверка отсутствия существенной автокорреляции в остаточной последовательности может осуществляться по ряду критериев, наиболее распространенным из которых является критерий Дарбина-Уотсона.

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} \qquad (7.10)$$

Расчетное значение критерия DW сравнивается с табличными.

Табл.7.2. Интервалы критерия Дарбина-Уотсона

Интервал	Вывод
$4 - d_l < DW < 4$	Отрицательная корреляция
$4 - d_u < DW < 4 - d_l$	Неопределенность
$2 < DW < 4 - d_u$	Отсутствие автокорреляции
$d_u < DW < 2$	Отсутствие автокорреляции
$d_l < DW < d_u$	Неопределенность
$0 < DW < d_l$	Положительная корреляция

7.2. Оценка точности модели

Для адекватных моделей имеет смысл ставить задачу оценки их точности. Точность модели характеризуется величиной отклонения выхода модели от реального значения моделируемой переменной (экономического показателя). Для показателя, представленного временным рядом, точность определяется как разность между значением фактического уровня временного ряда и его оценкой, полученной расчетным путем с использованием модели, при этом в качестве статистических показателей точности применяются следующие:

- среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2} \tag{7.11}$$

- среднее абсолютное отклонение, MAD

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left|y_t - \hat{y}_t\right|}{n} \tag{7.12}$$

- средняя относительная ошибка в процентах, MAPE

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| \cdot 100\% \tag{7.13}$$

- коэффициент сходимости

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} \tag{7.14}$$

- коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \varphi^2 \tag{7.15}$$

- скорректированный коэффициент детерминации

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}\left(1 - R^2\right) \tag{7.16}$$

- Байесовский информационный критерий Шварца

$$SBIC = \ln\left(\frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}\right) + \frac{k}{n}\ln(n) \tag{7.17}$$

- информационный критерий Акайка

$$AIC = \ln\left(\frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}\right) + \frac{2k}{n} \tag{7.18}$$

- информационный критерий Хеннана-Куинна

$$HQIC = \ln\left(\frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}\right) + \frac{2k}{n}\ln\left(\ln(n)\right) \tag{7.19}$$

- качество прогноза (p – число прогнозов, подтвержденных фактическими данными; q – число прогнозов, не подтвержденных фактическими данными)

$$\eta = \frac{p}{p+q} \tag{7.20}$$

В приведенных формулах n – количество уровней ряда, k – число определяемых параметров модели, $\hat{y}_t$ - оценка уровней ряда по модели, $\bar{y}$ - среднее значение уровней ряда.

Скорректированный коэффициент детерминации, критерий Шварца и информационный критерий Акайка могут применяться для сравнения модели с разным количеством регрессоров.

Данные показатели точности моделей рассчитываются на основе всех уровней временного ряда и поэтому отражают лишь точность аппроксимации.

7.3. Ex post прогноз

Для расчета прогнозных свойств модели целесообразно использовать так называемый ретроспективный прогноз (прогноз ex post).

Следует отметить, что прогнозировать можно не только будущие значения, но и любые величины, не входящие в набор исходных данных. Исходные данные разбиваются на две группы, так чтобы во второй группе находились более поздние данные, составляющие обычно примерно 15% всей информации. Эти данные будут затем использоваться для тестирования. Строится модель для первой группы данных и с ее помощью определяется прогноз на один период. При этом мы сравниваем полученные значения с имеющейся информацией (второй группой данных). С каждым шагом прогнозирования уменьшаем вторую группу и увеличиваем первую на один уровень временного ряда. Таким образом, коэффициенты модели с каждым шагом меняется, поскольку модель определяется полным набором данных. Такой процесс называется рекурсивным ex post прогнозированием, в отличие от нерекурсивного, когда уравнение, полученное по данным первой группы, остается неизменным. Далее изучается стабильность изменения коэффициентов модели.

Для оценки ошибок ex post прогнозов используется коэффициент неравенства Тейла:

$$U = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{T}}}{\sqrt{\dfrac{\sum y_t^2}{T}} + \sqrt{\dfrac{\sum \hat{y}_t^2}{T}}} \qquad (7.21)$$

где T – число ex post прогнозов.

В ex ante прогнозе эндогенная переменная находится за пределами расчетного периода и для ее прогноза используется знание независимых переменных, часто неизвестных. На рис. 7.1 представлено соотношение двух видов прогнозов, где T_3 - настоящий момент времени.

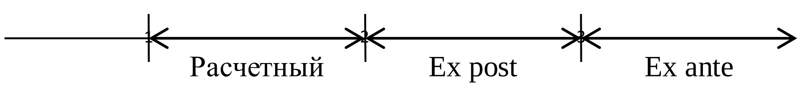

Рис. 7.1. Прогнозы ex post и ex ante

7.4. Интервальный прогноз

Очевидно, что совпадение фактических данных в будущем и прогностических точечных оценок маловероятно. Поэтому точечный прогноз обычно сопровождается интервалом, в котором с достаточной долей уверенности можно ожидать появления прогнозируемой величины. Установление такого интервала называется интервальным прогнозом.

Интервальный прогноз на базе кривых роста осуществляется путем расчета доверительного интервала.

Стандартная (средняя квадратическая) ошибка оценки прогнозируемого показателя $S_{\hat{y}}$ определяется по формуле:

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-k}}, \tag{7.22}$$

где y_t - фактическое значение уровня временного ряда для времени *t*; $\hat{y}_t$ - расчетная оценка соответствующего показателя по модели; *n* – количество уровней в исходном ряду; *k* – число параметров модели.

В случае прямолинейного тренда для расчета доверительного интервала используется следующая формула:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}} \tag{7.23}$$

где *L* – период упреждения; $\hat{y}_{t+L}$ - точечный прогноз модели на (*n*+*L*)-й момент времени; *n* – количество наблюдений во временном ряду; $S_{\hat{y}}$ - стандартная ошибка оценки прогнозируемого показателя, рассчитанная для числа параметров модели, равного двум; t_α - табличное значение критерия Стьюдента для уровня значимости α и для числа степеней свободы, равного *n*-*2*.

Иногда для расчета доверительных интервалов прогноза относительно линейного тренда применяют данную формулу в несколько преобразованном виде:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_L - \bar{t})^2}{\sum (t - \bar{t})^2}} \tag{7.24}$$

Здесь *t* – порядковый номер уровня ряда, $t_L = n + L$ - время для которого делается прогноз, $\bar{t}$ - время, соответствующее середине периода наблюдения для исходного ряда. Эту формулу можно упростить, если перенести начало отсчета времени на середину периода наблюдений ($\bar{t} = 0$).

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L{}^2}{\sum t^2}} \tag{7.25}$$

Формула для расчета доверительных интервалов прогноза относительно тренда, имеющего вид полинома второго или третьего порядка, выглядит следующим образом:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{{t_L}^2}{\sum t^2} + \frac{\sum t^4 + 2t_L^2 \sum t^2 + nt_L^4}{n\sum t^4 - \left(\sum t^2\right)^2}} \qquad (7.26)$$

Аналогично вычисляются доверительные интервалы для экспоненциальной кривой роста, а также для кривых роста, имеющих асимптоту, если значение асимптоты известно.

Глава 8. Прогнозирование на основе регрессионной модели

Прогнозы на основе регрессионной модели можно разделить на условный и безусловный прогнозы [Домбровский В.В., 2004].

8.1. Безусловный прогноз

Безусловный прогноз – это либо ex post, либо ex ante прогнозы с лаговыми переменными. Однако безусловный прогноз может быть результатом не только регрессионной модели на лаговых переменных. Существуют медленно меняющиеся процессы, как, например, параметры половозрастной структуры населения на будущие 6 месяцев. Конечно, целесообразно использовать независимые переменные, которые легко и точно прогнозируются.

Рассмотрим уравнение парной регрессии:

$$Y_t = aX_t + b + \varepsilon_t,\ t = 1,2,...,T,\ \varepsilon_t \sim N(0, s^2) \tag{8.1}$$

Постановку задачи в этом случае можно сформулировать следующим образом: каким будет наилучший прогноз Y_{T+1} при условии, что параметры модели a и b точно оценены, а значение X_{T+1} известно. Тогда прогнозное значение можно вычислить по формуле:

$$\hat{Y}_{T+1} = M(Y_{T+1}) = aX_{T+1} + b \tag{8.2}$$

Ошибка прогноза:

$$\hat{e}_{T+1} = \hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1} \tag{8.3}$$

Ошибка прогноза обладает двумя свойствами:

1. $M(\hat{e}_{T+1}) = M(\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}) = M(-\varepsilon_{T+1}) = 0$ - это значит, что оценка $\hat{Y}_{T+1}$ будет несмещенной.

2. Дисперсия ошибки прогноза $D(\hat{e}_{T+1}) = M\left[(\hat{e}_{T+1})^2\right] = M\left[(\varepsilon_{T+1})^2\right] = \sigma^2 = s_n^2$, она минимальна среди всех возможных оценок, основанных на линейных уравнениях.

Хотя a и b известны, ошибка прогноза появляется за счет того, что Y_{T+1} может не лежать на линии регрессии из-за ошибки ε_{T+1}, которая нормально распределена $\sim N(0, s^2)$. Для проверки качества прогноза вводится нормализованная величина:

$$\lambda = \frac{\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{8.4}$$

Тогда можно определить 95%-ный доверительный интервал:

$$prob\left(-\lambda_{0.05} \le \frac{\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}}{\sigma} \le \lambda_{0.05}\right) = 0.95 \tag{8.5}$$

причем $\lambda_{0.05}$ берется из таблицы нормального распределения. Границы 95%-ного интервала можно определить как

$$\hat{Y}_{T+1} - \lambda_{0.05}\sigma \leq Y_{T+1} \leq \hat{Y}_{T+1} + \lambda_{0.05}\sigma \tag{8.6}$$

Следует отметить, что величина доверительного интервала не зависит от величины X.

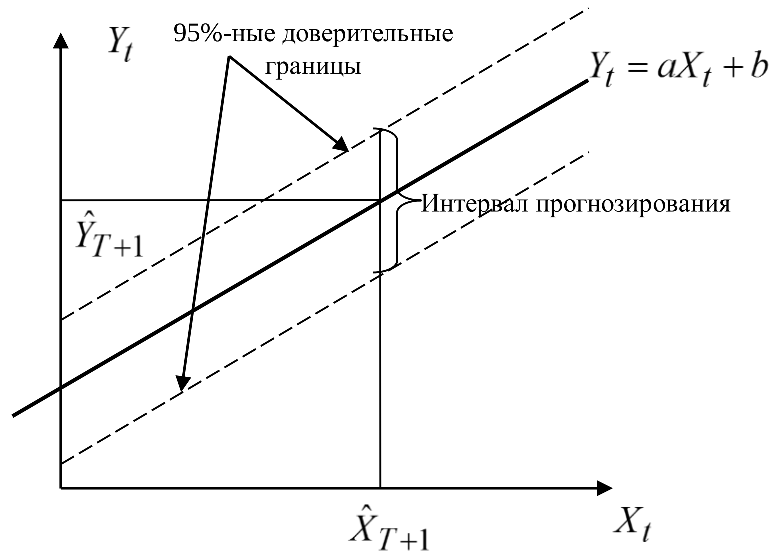

Рис.8.1. Доверительный интервал для безусловного прогноза

Можно получит плохой прогноз по хорошей с точки зрения R^2 модели и, наоборот, - хороший прогноз при плохой модели. Первое может быть в случае серьезных структурных изменений, произошедших за этот период. Второй случай может быть результатом слабо изменяющейся динамики объясняемой переменной, т.е. когда эту переменную легко прогнозировать.

Полученные доверительные интервалы дают простой способ оценки качества прогноза: если Y_{T+1} выходит за пределы интервала, то прогноз плохой и, следовательно, нужно пересмотреть модель.

Обычно параметры регрессии не бывают точно известными, также как дисперсия, которая тоже является случайной. Рассмотрим задачу, когда нужно оценивать не только параметры регрессии, но и дисперсию ошибки прогноза.

Пусть истинная модель имеет вид: $Y_t = aX_t + b + \varepsilon_t$.

Оцененная модель:

$$\hat{Y}_t = \hat{a}X_t + \hat{b} \text{ и } \hat{Y}_{T+1} = \hat{a}X_{T+1} + \hat{b} \tag{8.7}$$

Тогда ошибка прогноза определяется как

$$\hat{e}_{T+1} = \hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1} = (\hat{a} - a)X_{T+1} + (\hat{b} - b) - \varepsilon_{T+1} \tag{8.8}$$

Можно говорить о двух источниках ошибок: ε_{T+1} или $\hat{a}, \hat{b}$.

$$M(\hat{e}_{T+1}) = M(\hat{a} - a)X_{T+1} + M(\hat{b} - b) + M(\hat{\varepsilon}_{T+1}) = 0 \tag{8.9}$$

так как $\hat{a},\hat{b}$ - несмещенные оценки, X_{T+1} - известно.

$$\sigma_f^2 = M\left[(\hat{e}_{T+1})^2\right] = M\left[(\hat{a}-a)^2\right]X_{T+1}^2 + M\left[(\hat{b}-b)^2\right] + M\left[(\hat{\varepsilon}_{T+1})^2\right] + \\ + M\left[2(\hat{a}-a)(\hat{b}-b)\right]X_{T+1} \tag{8.10}$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_{\hat{a}}^2 X_{T+1}^2 + \sigma_{\hat{b}}^2 + 2X_{T+1}\operatorname{cov}(\hat{a},\hat{b}) + \sigma^2 \tag{8.11}$$

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \tag{8.12}$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{T\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \tag{8.13}$$

$$\operatorname{cov}(\hat{a},\hat{b}) = \frac{-\overline{X}\sigma^2}{\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \tag{8.14}$$

В представленных выражениях суммирование выполняется по всем значениям от 1 до *T*.

$$\sigma_f^2 = \sigma^2\left[\frac{X_{T+1}^2}{\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2} + \frac{\sum X_t^2}{T\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2} - \frac{2X_{T+1}\overline{X}}{\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2} + 1\right] \tag{8.15}$$

$$\sigma_f^2 = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{T} + \frac{\left(X_{T+1} - \overline{X}\right)^2}{\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2}\right] \tag{8.16}$$

Полученное выражение показывает, что дисперсия ошибки прямо зависит от $\left(X_{T+1} - \overline{X}\right)$. Кроме того, чем больше длина ряда *T* и чем больше дисперсия *X*, тем точнее прогноз. С другой стороны, ошибка прогноза уменьшается, если значение X_{T+1} близко к $\overline{X}$, т.е. если объясняющая переменная близка к среднему значению. Чем дальше от привычных значений эта переменная, тем менее точен прогноз.

После оценки стандартной ошибки прогноза можно оценить доверительный интервал с учетом того, что

$$\lambda = \frac{\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}}{\sigma_f} \sim N(0,1), \tag{8.17}$$

поскольку σ^2 - неизвестна, вместо нее оценивается выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{T-2}\sum\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2 \tag{8.18}$$

Оценку дисперсии прогноза можно получить по следующей формуле:

$$s_f^2 = s^2\left[1 + \frac{1}{T} + \frac{\left(X_{T+1} - \overline{X}\right)^2}{\sum\left(X_t - \overline{X}\right)^2}\right] \tag{8.19}$$

При этом нормированная ошибка будет иметь t-распределение с *T-2* степенями свободы.

$$\frac{\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}}{s_f} \sim t_{T-2} \qquad (8.20)$$

Тогда 95%-ные доверительные границы интервального прогноза будут определяться следующим образом:

$$\hat{Y}_{T+1} - t_{0.05} s_f \le Y_{T+1} \le \hat{Y}_{T+1} + t_{0.05} s_f \qquad (8.21)$$

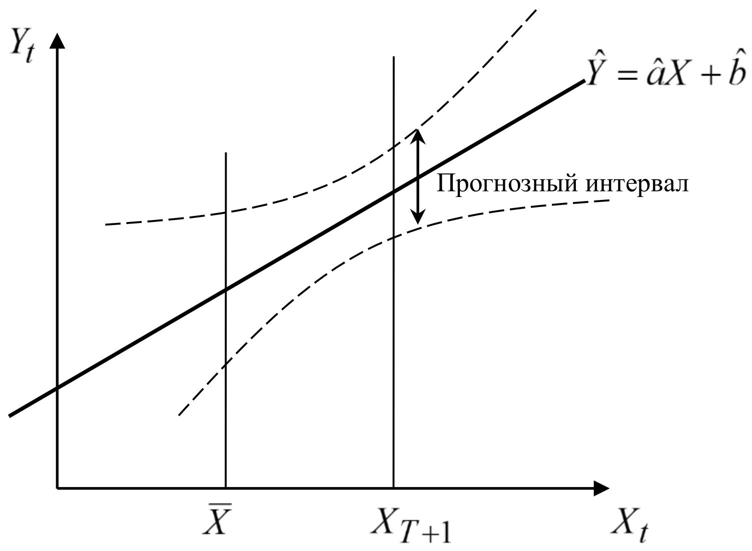

Рис.8.2. Доверительный интервал интервального прогноза

Можно заметить, что ошибка увеличивается по мере роста удаленности точки прогноза от настоящего времени – чем дальше, тем менее надежен прогноз. Это понижение надежности возникает из-за удаления от $\bar{X}$.

8.2. Прогноз при автокорреляции остатков

Часто в значениях экономических временных рядов присутствует эффект автокорреляции и это несколько осложняет прогнозирование. Рассмотрим модель парной регрессии, переменные которой содержат автокорреляцию первого порядка.

$$Y_t = aX_t + b + \varepsilon_t \qquad (8.22)$$

где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t$; $|\rho| < 1$; $\nu_t \sim N(0, \sigma_\nu^2)$.

Информация о наличии автокорреляции остатков дает возможность улучшить прогноз. Раньше полагалось, что математическое ожидание остатков нулевое $M(\varepsilon_{t+1}) = M(\varepsilon_t) = 0$, а теперь этого полагать нельзя в силу автокорреляции. Можно показать, что в этом случае дисперсия прогноза равна

$\sigma_f^2 = (1-\rho^2)\sigma^2 < \sigma^2$, т.е. ошибка прогноза при учете автоковариации остатков меньше, чем если этот факт не учитывать:

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= M(\rho\varepsilon_T - \varepsilon_{T+1})^2 = \rho^2 M(\varepsilon_T^2) + M(\varepsilon_{T+1}^2) - 2\rho M(\varepsilon_T \varepsilon_{T+1}) = \\ &= \rho^2 M(\varepsilon_T^2) + M(\varepsilon_{T+1}^2) - 2\rho M(\varepsilon_T^2) = \rho^2\sigma^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma^2 = (1-\rho^2)\sigma^2 = \sigma_v^2\end{aligned} \qquad (8.23)$$

так как $M(\varepsilon_T^2) = M(\varepsilon_{T+1}^2) = \sigma^2$.

Для прогноза же рекомендуется использовать уравнение регрессии в обобщенной форме, полученное из исходного заменой переменных:

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1},\; X_t^* = X_t - \rho X_{t-1},\; \hat{Y}_{T+1} = \hat{\rho} Y_T + \hat{a}\left(X_{T+1} - \hat{\rho} X_T\right) + \hat{b}(1-\hat{\rho}) \qquad (8.24)$$

При большом объеме выборки среднее значение ошибок модели будет стремиться к нулю.

8.3. Условный прогноз

Условный прогноз – это когда независимые переменные точно неизвестны. Интуитивно понятно, что прогноз независимой переменной сделает прогноз зависимой переменной менее надежным.

$$Y_t = aX_t + b + \varepsilon_t,\; t = 1,2,...,T, \qquad (8.25)$$

где $\varepsilon_t \sim N(0, s^2)$; $\hat{X}_{T+1} = X_{T+1} + u_{T+1}$, $u_t \sim N(0, s_u^2)$, ε_t и u_t - некоррелированы, т.е. нет корреляции между оценками параметров a, b и u_t.

Прогноз:

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{a}\hat{X}_{T+1} + \hat{b} \qquad (8.26)$$

Ошибка прогноза:

$$\hat{e}_{T+1} = \hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1} \qquad (8.27)$$

$$Y_{T+1} = aX_{T+1} + b + \varepsilon_{T+1} \qquad (8.28)$$

$$\hat{e}_{T+1} = \hat{a}\hat{X}_{T+1} + \hat{b} - aX_T - b - \varepsilon_{T+1} = (\hat{a}\hat{X}_{T+1} - aX_T) + (\hat{b} - b) - \varepsilon_{T+1} \qquad (8.29)$$

Математическое ожидание ошибки равно нулю.

$$\begin{aligned}M(\hat{e}_{T+1}) &= M(\hat{a}\hat{X}_{T+1}) + M(\hat{b} - b) - M(\varepsilon_{T+1}) - M(aX_{T+1}) = \\ &= M\left(\hat{a}(X_{T+1} + u_{T+1})\right) - aX_{T+1} = aX_{T+1} - aX_{T+1} = 0\end{aligned} \qquad (8.30)$$

$$\begin{aligned}M(\hat{e}_{T+1}^2) &= M\left[(\hat{a}\hat{X}_{T+1} - aX_{T+1})^2\right] + M\left[(\hat{b} - b)^2\right] - M\left[\varepsilon_{T+1}^2\right] + \\ &+ 2M\left[(\hat{b} - b)(\hat{a}\hat{X}_{T+1} - aX_{T+1})\right]\end{aligned} \qquad (8.31)$$

Следовательно,

$$\sigma_f^2 = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{T} + \frac{\left(X_{T+1} - \bar{X} + \sigma_u^2\right)}{\sum\left(X_t - \bar{X}\right)^2}\right] + \beta^2\sigma_u^2 \qquad (8.32)$$

β – параметр модели $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$.

Последние члены в выражении для σ_f^2 увеличивают дисперсию прогноза. Кроме того, очень сложно описать доверительный интервал для условного прогноза. Дело в том, что величина $\hat{Y}_{T+1}$ уже не распределена по нормальному закону, так как представляет собой сумму произведений нормально распределенных переменных. Поэтому доверительные интервалы не могут быть рассчитаны аналитически. Предлагается следующая приближенная процедура оценки доверительного интервала:

1. Рассчитывается 95%-ная граница доверительного интервала, связанного с $X_{T+1} \pm 2\sigma_u$:

$$Y_{T+1}^{*} = \hat{a}(\hat{X}_{T+1} + 2\sigma_u) + \hat{b}; \; Y_{T+1}^{**} = \hat{a}(\hat{X}_{T+1} - 2\sigma_u) + \hat{b} \qquad (8.33)$$

2. Определяется доверительный интервал, перекрывающий оба интервала.

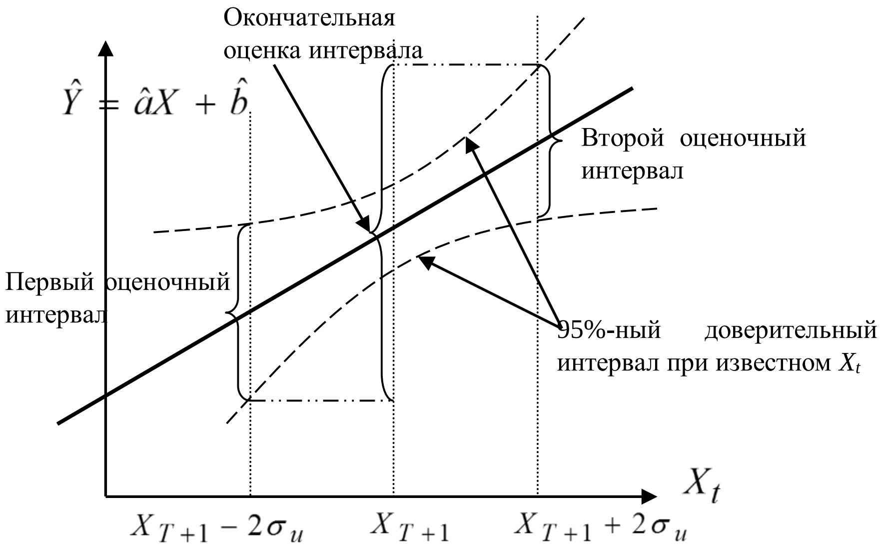

Рис.8.3. Доверительный интервал условного прогноза

С учетом таких особенностей условного прогноза, даже в случае высокого качества регрессионных модели прогноз может быть не очень хорошим.

Список литературы

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник для вузов: В 2 т. 2-е изд., испр. – Т.2: Айвазян С.А. Основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. Пер. с англ. – М.: Изд-во «МИР», 1976. – 756 с.
3. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование. — М.: Финансы и статистика, 2001. – 228 с.
4. Бестужев-Лада И.В., Наместникова Г.А. Социальное прогнозирование. Курс лекций. – М.: Педагогическое общество России, 2002. – 392 с.
5. Бокс, Дж., Дженкинс, Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. Пер. с англ. – М.: Изд-во «МИР», 1974. – 406 с.
6. Домбровский В.В. Эконометрика: учебник. – М.: Новый учебник, 2004. – 342 с.
7. Доугерти К. Введение в эконометрику: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 402 с.
8. Дуброва Т.А. Статистические методы прогнозирования. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 205 с.
9. Лапыгин Ю.Н. Экономическое прогнозирование: учеб. пособие – М.: Эксмо, 2009. – 256 с.
10. Лугачев М.И., Ляпунцов Ю.П. Методы социально-экономического прогнозирования. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 1999. – 159 с.
11. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
12. Лукашин Ю.П. Регрессионные и адаптивные методы прогнозирования. – М.: МЭСИ, 1997. – 44 с.
13. Льюис Х.Д. Методы прогнозирования экономических показателей – М.: Статистика, 1986. – 133 с.
14. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. – М.: Дело, 2000. – 576 с.
15. Мотышина М.С. Методы социально-экономического прогнозирования: Учебное пособие – СПб: Изд-во СПб УЭФ, 2001. – 114 с.
16. Найденков В.И. Прогнозирование и моделирование национальной экономики (конспект лекций). – М.: - «Приор-издат», 2004. – 156 с.
17. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: учебник: в 3 ч. Часть 2: Экспертные оценки. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 486 с.
18. Ромашова И.Б. Прогнозирование в системе управления современным предприятием: Монография. – Н.Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2000. – 328 с.
19. Салманов О.Н. Эконометрика: учеб. пособие. – М.: Экономистъ, 2006. – 320 с.
20. Слуцкин Л.Н. Курс MBA по прогнозированию в бизнесе. – М.6 АЛЬПИНА Бизнес Букс, 2006. – 276 с.

21. Экономико-математические методы и прикладные модели. Под ред. В.В. Федосеева. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 391 с.
22. Neelamkavil, F. Computer simulation and modelling. JohnWiley & Sons Ltd. UK. 1987. – 324 с.

Прогнозирование социально-экономических процессов

Учебно-методическое пособие

Автор-составитель: Ольга Владимировна **Капитанова**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23