МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

В.Л. Котов
Е.Ю. Линник
А.А. Тарасова

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика», 010800 «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород
2014

УДК 539.3
ББК 22.2
К73

К73 Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 46 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. **И.А. Волков**

В учебно-методическом пособии рассматриваются аналитические и численные решения задач о расширении сферической полости в упругопластических средах для различных моделей сред. Подробно показан процесс приведения системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью автомодельных преобразований, в ряде случаев получены аналитические решения. В приложении приведены алгоритмы численного решения начально-краевых задач методами стрельбы и Рунге-Кутта.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика», 010800 «Механика и математическое моделирование».

Ответственный за выпуск:
председатель метод. комиссии механико-математического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.А. Денисова**

УДК 539.3
ББК 22.2

Содержание

Введение

Математическое моделирование как способ исследования и эффективного решения актуальных задач механики сформировалось в 70-х годах прошлого века одновременно с появлением мощных вычислительных средств. В настоящее время активное использование численных методов и комплексов программ позволяет резко сократить сроки научных и опытно-конструкторских разработок, а в тех случаях, когда натурный эксперимент трудно осуществим, математическое моделирование дает практически единственный инструмент исследования. Появилось новое понятие – вычислительный эксперимент, где постановка задачи, метод ее решения и реализация алгоритма рассматриваются в едином комплексе. В процессе вычислительного эксперимента происходит уточнение исходной физической модели, которая, как правило, базируется на упрощенных представлениях о характере протекающих физико-механических процессов.

Так, в нелинейных задачах удара и проникания тел в деформируемые среды в настоящее время применяется предложенная еще И. Ньютоном теория локального взаимодействия. Идеализированная модель течения Ньютона замечательна по своей простоте, так как местный коэффициент давления зависит только от ориентации элемента тела и не зависит от формы тела, расположенного перед этим элементом.

В соответствии с одной из реализаций модели локального взаимодействия, давление в каждой точке боковой поверхности ударника отождествляется с давлением на внутренней поверхности сферической или цилиндрической полости, расширяющейся в безграничной среде от нулевого радиуса до радиуса ударника («Cavity Expansion Model» в зарубежной литературе). Таким образом, решения представленных задач о расширении сферической полости, имея самостоятельное значение, в то же время применяются для оценки параметров моделей локального взаимодействия.

В учебно-методическом пособии приводятся постановки и решения одномерных задач о расширении с постоянной скоростью сферической полости из точки в безграничной среде. Рассмотрены различные модели упругопластических сред, подробно показан процесс приведения систем уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с помощью автомодельных преобразований. Приведены алгоритмы численного решения краевых задач для системы ОДУ первого порядка, в ряде случаев получены аналитические решения.

1. Математическая модель идеально-пластической несжимаемой среды [4]

Математическая модель среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы неразрывности и изменения количества движения в Эйлеровых переменных, которая с учетом сферической симметрии записывается следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+2\frac{\upsilon}{r}\right)=-\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial r}+2\frac{(\sigma-\sigma_\theta)}{r}=\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) \qquad (1.1)$$

где ρ - плотность в деформированном состоянии, υ - скорость, σ и σ_θ- радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши, r – радиальная координата.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1.1) замыкается конечными соотношениями:

закон Гука в упругой области

$$\tau_{\max}=G\Gamma,$$

условие пластичности Треска в пластической области

$$\sigma_\theta-\sigma=\sigma_T,$$

где $\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_\theta-\sigma}{2}$ – максимальное касательное напряжение, $\Gamma=\varepsilon_\theta-\varepsilon$ – главный сдвиг, G– упругий модуль сдвига.

Объемные деформации отсутствуют как в пластической, так и в упругой области деформирования.

Построим решение одномерной задачи о расширении сферической полости в пластической области, полагая среду:

а) несжимаемой: $\rho=\rho_0$=const;

б) идеально пластической: $\sigma_T\equiv\tau_0$.

В области пластического деформирования система дифференциальных уравнений в частных производных (1.1) относительно υ и σ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+2\frac{\upsilon}{r}=0$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial r}+2\frac{\sigma_0}{r}=\rho_0\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) \qquad (1.2)$$

на границе расширяющейся полости радиуса R_0= V_0t задается скорость V_0, внешняя поверхность сферического слоя b свободна от напряжений:

$$\upsilon\big|_{r=R_0}=V_0,\ \sigma\big|_{r=b}=0, \qquad (1.3)$$

на границе раздела упругой и пластической областей при $r=R_c$ (квадратными скобками обозначена разность соответствующих величин «слева» и «справа» от разрыва) выполняется условие непрерывности скоростей и напряжений:

$$[\upsilon]=[\sigma]=[\sigma_\theta]=0$$

в начальный момент времени:

$$R_0\big|_{t=0}=0$$

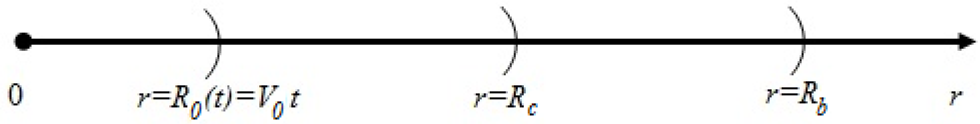


Рис. 1.1. Постановка задачи о расширении сферической полости в идеально-пластической несжимаемой среде

Решение первого уравнение системы (1.2) во всей области записывается следующим образом:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-2\frac{dr}{r}\rightarrow\upsilon=\frac{c_1}{r^2}$$

Постоянная c_1 определяется из краевого условия (1.3) $\upsilon\big|_{r=R_0}=V_0$, и решение первого уравнения задачи (1.2) имеет вид:

$$\upsilon=\frac{R_0^2\dot{R}_0}{r^2}=\frac{\lambda(t)}{r^2} \tag{1.4}$$

где $\dot{R}_0$ - скорость на границе расширяющейся полости.

С учетом выражения (1.4), производные по переменным r и t определяются следующим образом:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial r}=-2\frac{\lambda(t)}{r^3},\qquad \frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\dot{\lambda}(t) \tag{1.5}$$

В результате подстановки полученного решения (1.4) во второе уравнение системы (1.2) и интегрирования с учетом (1.5), получаем:

$$\sigma^p=2\tau_0\ln r+\rho_0\left(-\frac{\dot{\lambda}(t)}{r}+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2(t)}{r^4}\right)+c_2 \tag{1.6}$$

При расширении сферической полости выполняется закон сохранения массы: $m=const$, из которого с учетом несжимаемости среды $\rho=\rho_0$=const следует сохранение объемов: $r^3=(r+w)^3-R_0^3$.

Полагая перемещения малыми, имеем:

$$(r+w)^3=r^3\left(1+\frac{w}{r}^3\right)\approx r^3\left(1+3\frac{w}{r}\right),\quad w<<r$$

Таким образом, перемещение w для упругой зоны определяется следующим образом:

$$w^e=\frac{1}{3}\frac{R_0^3}{r^2} \tag{1.7}$$

При учете сферической симметрии и выражения (1.7) компоненты тензора деформаций имеют вид:

$$\varepsilon^e = \frac{\partial w^e}{\partial r} = -\frac{2}{3}\frac{R_0^3}{r^3}, \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_\theta^e = \frac{w^e}{r} = \frac{1}{3}\frac{R_0^3}{r^3}.$$

При условии (1.8) касательное напряжение определяется выражением:

$$\frac{\sigma_\theta^{\text{e}} - \sigma^{\text{e}}}{2} = G(\varepsilon_\theta^{\text{e}} - \varepsilon^{\text{e}}) = G\frac{R_0^3}{r^3} \tag{1.9}$$

На границе раздела упругой и пластической областей (при $r=R_c$) радиус R_c имеет следующую зависимость от размера полости R_0 в виде:

$$\mathrm{R_c^3} = \mathrm{R_0^3}\frac{2G}{\tau_0} = \mathrm{R_0^3}\frac{2E}{3\tau_0}$$

где E – модуль Юнга.

С учетом выражения для касательных напряжений (1.9) и интеграла (1.4) второе уравнение системы (1.1) в упругой области имеет вид:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} - 2\frac{GR_0{}^3}{r^4} = \rho_0\left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{r^2} - 2\frac{\lambda^2(t)}{r^5}\right)$$

Напряжение σ^e с учетом граничного условия (1.3) $\sigma\big|_{r=b} = 0$ принимает вид:

$$\sigma^{\text{e}} = \frac{4}{3}GR_0^3\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right) + \rho_0\left(\dot{\lambda}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{b^4}\right)\right), \tag{1.10}$$

где внешний радиус шара b определяется из условия несжимаемости $b^3 = b_0^3 + R_0^3$ (b_0 – начальный размер шара).

Условие непрерывности при $r=R_c$ позволяет найти неизвестную c_2 в задаче (1.6):

$$\sigma^{\text{p}}\Big|_{r=R_c} = \sigma^{\text{e}}\Big|_{r=R_c}$$

$$\begin{aligned}\sigma = -\sigma^{\text{p}}\Big|_{r=R_0} &= \frac{2}{3}\tau_0\left(\ln\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^3 + \left(\frac{R_0}{R_c}\right)^3\right) - \frac{2}{3}\tau_0\left(\frac{R_0}{b}\right)^3 + \\ &+ \rho_0\left(\dot{\lambda}(t)\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{b}\right) - \frac{\lambda^2(t)}{2}\left(\frac{1}{R_0{}^4} - \frac{1}{b^4}\right)\right)\end{aligned} \tag{1.11}$$

Формула (1.11) справедлива для любых значений b. Если размер пластической зоны R_c превышает b, то в (1.11) следует положить $R_c=b$, что соответствует отсутствию зоны упругих деформаций.

В случае безграничной среды ($b \to \infty$) при $\lambda(t) = R_0{}^2\dot{R}_0$ формула (1.11) упрощается:

$$\sigma = \frac{2}{3}\tau_0\left(1+\ln\frac{2G}{\tau_0}\right)+\rho_0\left(\frac{3}{2}\dot{R}_0^{\,2}+\ddot{R}_0 R_0\right)$$

Первая группа слагаемых определяет влияние прочности на сопротивление проникanию и представляют собой статическую составляющую силы сопротивления. Вторая группа слагаемых обусловлена динамикой процесса.

При расширении полости с постоянной скоростью V_0, напряжение σ на ее границе определится простым выражением:

$$\sigma = \sigma_\tau + \frac{3}{2}\rho_0 V_0^{\,2}$$

2. Модель несжимаемой среды с условием пластичности Мизеса-Шлейхера [12]

Математическая модель среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих уравнения неразрывности и изменения количества движения в Эйлеровых переменных, которая с учетом сферической симметрии записывается следующим образом:

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial r}[(r-u)^3] = 3\rho r^2 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}+2\frac{(\sigma-\sigma_\theta)}{r} = -\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)$$

где ρ_0 и ρ - плотность в начальном и деформированном состоянии, υ - скорость, σ и σ_θ - радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), r – радиальная координата.

Смещение частиц u и скорость υ связаны выражением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \upsilon\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{2.2}$$

Предполагаем, что среда несжимаема и $\rho = \rho_0$. Тогда смещение частиц получим интегрированием

$$u = r\left[1-\left(1-\frac{R_0^{\,3}}{r^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \tag{2.3}$$

Скорость частиц можно получить дифференцированием (2.3) и подстановкой в (2.2)

$$\upsilon = \frac{R_0^{\,2}\dot{R}_0}{r^2} \tag{2.4}$$

Материал в пластической области описывается условием текучести Мора-Кулона. Таким образом

$$p=(\sigma+2\sigma_\theta)/3,$$
$$\sigma-\sigma_\theta=\tau_0+kp \qquad (2.5)$$
где p – это давление, τ_0 и k – константы, характеризующие сопротивление грунта сдвигу. Подставим выражения (2.4) и (2.5) в уравнение количества движения и, проинтегрировав в пластической области $R_0 \le r \le R_c$, получим выражение для радиальной компоненты напряжения
$$\sigma(r)=\left[\frac{2\rho R_0{}^4\dot{R}_0{}^2}{ak-4}\left(\frac{1}{r}\right)^4-\frac{\rho(\ddot{R}_0R_0{}^2+2R_0\dot{R}_0{}^2)}{ak-1}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\tau_0}{k}+\lambda r^{-ak}\right] \qquad (2.6)$$
где $a=6/(3+2k)$, λ – постоянная интегрирования, которая будет определена в упругой области.

Определим радиальное напряжение в упругой области $R_c \le r \le b$.
$$\sigma(b)=\sigma(b)+\frac{4ER_0{}^3}{9}\left(\frac{1}{R_c{}^3}-\frac{1}{b^3}\right)+$$
$$+\rho\left[(\ddot{R}_0R_0{}^2+2R_0\dot{R}_0{}^2)\left(\frac{1}{R_c}-\frac{1}{b}\right)-\frac{R_0{}^4\dot{R}_0{}^2}{2}\left(\frac{1}{R_c{}^4}-\frac{1}{b^4}\right)\right] \qquad (2.7)$$
где E – модуль Юнга и $\sigma(d)=0$ при $b\to\infty$. Для определения λ приравниваем (2.6) и (2.7) на границе раздела упругой и пластической областей. Для несжимаемой упругой среды давление не определено. Пренебрегая сжимаемостью, мы считаем давление равным 0 в упругой области. При таком предположении используем модель Мора-Кулона: $p=0$, $\sigma-\sigma_\theta=\tau_0$. Это дает нижнюю оценку радиального напряжения на упруго-пластической границе. Предположение о несжимаемости в пластической области дает оценку сверху для радиального напряжения.

Радиальное напряжение на границе полости, полагая $\ddot{R}_0\approx 0$, будет иметь вид:
$$\sigma(R_0)=\left\{2\rho\dot{R}_0{}^2\left[\frac{1}{ak-4}-\frac{1}{ak-1}\right]-\frac{\tau_0}{k}+\left(\frac{2E}{3\tau_0}\right)^{\frac{ak}{3}}\left[\frac{2\tau_0}{3}\left(1-\left(\frac{R_c}{b}\right)^3\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\rho\dot{R}_0{}^2\left(\frac{ak}{ak-1}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\frac{ak}{ak-4}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(\frac{R_0}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{b}\right)^4\right)+\frac{\tau_0}{k}\right]\right\} \qquad (2.8)$$

Формула действует, пока фронт упруго-пластической волны не достигнет свободной поверхности (т.е. $b\ge R_c$).

При $R_c \ge b$ напряжение на границе полости описывается следующим выражением:

$$\sigma(R_0)=\left\{2\rho\dot{R}_0^{\,2}\left[\frac{1}{ak-4}-\frac{1}{ak-1}\right]-\frac{\tau_0}{k}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^{ak}\left[2\rho\dot{R}_0^{\,2}\left(\frac{ak}{ak-1}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\frac{ak}{ak-4}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(\frac{R_0}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{b}\right)^4\right)+\frac{\tau_0}{k}\right]\right\} \qquad (2.9)$$

или

$$\sigma(R_0)=2\rho\dot{R}_0^{\,2}\left[\frac{1}{ak-4}-\frac{1}{ak-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^{ak}\left(\frac{ak}{ak-1}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\frac{ak}{ak-4}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(\frac{R_0}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{b}\right)^4\right)\right]-\frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{R_c}{R_0}\right)^{ak}\right) \qquad (2.10)$$

Принимая во внимание, что на границе раздела упругой и пластической областей (при r=R_c) радиус R_c имеет следующую зависимость от размера полости R_0:

$$\frac{\mathrm{R_c}}{\mathrm{R_0}}==\left(\frac{2E}{3\tau_0}\right)^{\frac{1}{3}},$$

в случае безграничной среды ($b\to\infty$), обозначив $\dot{a}=V_0, \rho=\rho_0$, из (2.8) имеем:

$$\sigma(R_0)=2\rho_0V_0^{\,2}\left[\frac{1}{ak-4}-\frac{1}{ak-1}+\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{-\frac{ak}{3}}\left(\frac{ak}{ak-1}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\frac{ak}{ak-4}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\right]-$$

$$-\frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{-\frac{ak}{3}}\right)-\frac{2\tau_0}{3}\left(\frac{3\tau_0}{2E}\right)^{-\frac{ak}{3}} \qquad (2.11)$$

При k=0 (a=2) из (2.11) следует:

$$\sigma=-\frac{2}{3}\tau_0\left(1+\ln\frac{2E}{3\tau_0}\right)+\frac{3}{2}\rho_0V_0^{\,2},$$

что совпадает с выражением, полученным в п. 1.

3. Модель линейно сжимаемой среды с использованием условия несжимаемости для определения инерционных членов [1]

Математическая модель среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы неразрывности и изменения количества движения, которая с учетом сферической симметрии записывается следующим образом:

$$x^2\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\rho_0}{\rho}r^2,$$

$$x\frac{\partial\sigma}{\partial r}+2(\sigma-\sigma_\theta)\frac{\partial x}{\partial r}=0 \qquad (3.1)$$

где r и x – лагранжевая и эйлеровая координаты, ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотности, σ и σ_θ - радиальная и окружная компоненты тензора напряжения Коши.

Уравнение состояния $p=p(\rho)$ запишем в виде

$$p=-K\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right),\ \frac{\rho_0}{\rho}=\frac{K}{K-p}.$$

Условие пластичности принимаем в форме, учитывающей действие нормальных напряжений

$$\sigma-\sigma_\theta=-\tau_0+k\,p,$$

где τ_0 – предел текучести при одноосном сжатии для $p=0$.

В условиях центрально-осевой симметрии $\sigma=p+S_r$, $\sigma_\theta=S_\theta+p$, поэтому из предыдущего условия с учетом $S_r+2S_\theta=0$, следует

$$\sigma=\frac{p(3+2k)-2\tau_0}{3},\ \sigma_\theta=\frac{p(3-k)+\tau_0}{3}.$$

С помощью этих формул приведем наше уравнение движения (3.1) к виду

$$x\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{6kp}{3+2k}\frac{\partial x}{\partial r}-\frac{6\tau_0}{3+2k}\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{3}{3+2k}\rho_0\frac{r^2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (3.2)$$

Домножим обе части равенства (3.2) на $x^{2\nu-1}$ и проинтегрируем по r от R_0 до r с условиями $x(R_0)=R$, $p(R_0)=-p_0$. Обозначив $\nu=\dfrac{3k}{3+2k}$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{x}^{2\nu}p)-\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{x}^{2\nu})\frac{\tau_0}{k}=\frac{\nu}{k}\rho_0\mathrm{x}^{2\nu-2}\mathrm{r}^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\mathrm{p}=-\left(\frac{R}{x}\right)^{2\nu}\left(\frac{\tau_0}{k}+p_0\right)+\frac{\tau_0}{k}+\frac{\nu}{k}\rho_0x^{-2\nu}\int_{R_0}^{r}r^2x^{2\nu-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Для вычисления интеграла $I(r)$ воспользуемся предположением о несжимаемости $\rho=\rho_0$. Это условие принято только для оценки сил инерции $\rho_0\dfrac{r^2}{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Итак, $\dfrac{\partial x}{\partial r}\cong\left(\dfrac{r}{x}\right)^2$, откуда следует $x^3=r^3+R^3-R_0^3$.

Так как эйлерова и лагранжевая переменные связаны через соотношение $x=r+u$, то $\ddot{x}=\ddot{u}\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Дифференцируя $x^3 = r^3 + R^3 - R_0^3$ два раза, получим

$$\ddot{x} = \mathrm{x}^{-2}\left(2R\dot{R}^2\left(1-\frac{R^3}{x^3}\right)+R^2\ddot{R}\right).$$

С учетом этого выражения преобразуем интеграл, переходя к интегрированию по x:

$$I(x)=\int_R^x \mathrm{x}^{2\nu-2}\left(2R\dot{R}^2\left(1-\frac{R^3}{x^3}\right)+R^2\ddot{R}\right)dx.$$

Примем для упругой внешней области $x>x^*$:

$$u=\frac{C}{r^2},\ \sigma=-\frac{4CG}{r^3},\ \sigma_\theta=\frac{2CG}{r^3},$$

где C – постоянная, G – модуль сдвига.

Потребуем непрерывности перемещения и напряжений на границе упругой и пластической областей, получим выражение для C, p_0 и x^*:

$$p(x_*,r_*)=p_e=\frac{\tau_0}{k}-\left(\frac{R}{x_*}\right)^{2\nu}\left(\frac{\tau_0}{k}+p_0\right)+\frac{\nu}{k}\rho_0 x_*^{-2\nu}I(x_*),$$

$$p_0=\frac{\tau_0}{k}\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2\nu}-\frac{\tau_0}{k}+\frac{\nu}{k}\rho_0 R^{-2\nu}I(x_*)-\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2\nu}p_e,$$

$$C=\frac{\tau_0}{6G}r_*^3,$$

$$\mathrm{x}_*=r_*\left(1+\frac{\tau_0}{6G}\right).$$

Значение давления на границе упругой и пластической сред p_e определим из условия $\sigma_\text{г}=\frac{2}{3}\tau_0+\frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\Omega\overline{R}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu}\Omega\overline{R}}}$.

$$p=\frac{3\sigma_\text{г}+2\tau_0}{3+2k},$$

$$p_e=\frac{3}{3+2k}\left[\frac{2}{3}\tau_0+\frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\Omega\overline{R}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu}\Omega\overline{R}}}\right]+\frac{2\tau_0}{3+2k}=$$

$$=\frac{2\tau_0}{3+2k}\left(2+\frac{1+\nu}{1-\nu}\Omega\overline{R}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu}\Omega\overline{R}}}\right).$$

Теперь с помощью $\sigma_r = \dfrac{p(3+2k)-2\tau_0}{3}$ можно найти сопротивление $\sigma(R)$ материала расширению сферической полости, представляющее собой напряжение на границе полости с обратным знаком:

$$\sigma_0 = -\sigma\ (R) = \frac{2\tau_0 - p_0(3+2k)}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\tau_0 + \frac{3+2k}{3k}\tau_0\left(1-\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2\upsilon}\right) - \rho_0\frac{1}{R^{2\upsilon}}I(x_*) + \frac{3+2k}{3k}\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2\upsilon} p_e .$$

Интеграл *I(x*)* берется в конечном виде:

$$I(r) = \int\limits_{\mathrm{R}_0}^{r} x^{2\nu-2} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr = \int\limits_{\mathrm{R}_0}^{r} x^{2\nu-2} r^2 \frac{1}{x^2}(2\dot{R}^2 R(1-\frac{R^3}{x^3}) + \ddot{R}R^2)dr =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{R}}^{x} x^{2\nu-2}(2\dot{R}^2 R(1-\frac{R^3}{x^3}) + \ddot{R}R^2)dx =$$

$$= \dot{R}^2 R^{2\nu}\left[\left(\frac{2}{2\nu-1} + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2(2\nu-1)}\right)\left(\left(\frac{x}{R}\right)^{2\nu-1} - 1\right) - \frac{1}{\nu-2}\left(\left(\frac{x}{R}\right)^{2\nu-4} - 1\right)\right]$$

$$I(x_*) = \dot{R}^2 R^{2\nu}\left[\left(\frac{2}{2\nu-1} + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2(2\nu-1)}\right)\left(\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2\nu-1} - 1\right) - \frac{1}{\nu-2}\left(\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2\nu-4} - 1\right)\right]$$

Подставим в выражение для *p(x)*:

$$p(x) = \frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2\nu}\right) + \left(\frac{x_*}{x}\right)^{2\nu} p_e + \frac{\upsilon}{k}\rho_0 x^{-2\nu}(I(x) - I(x_*))$$

$$I(x) - I(x_*) = \dot{R}^2 R^{2\upsilon}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{x}{R}\right)^{2\nu-1}\left(\frac{2}{2\nu-1} + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2(2\nu-1)}\right)\left(1-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2\nu-1}\right) - \\ -\frac{1}{\nu-2}\left(\frac{x}{R}\right)^{2\nu-4}\left(1-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2\nu-4}\right) \end{array}\right]$$

$$p=-\left(\frac{R}{x}\right)^{2v}\left(\frac{\tau_0}{k}+p_0\right)+\frac{\tau_0}{k}+\frac{v}{k}\rho_0 x^{-2v}\int\limits_{R_0}^{r} r^2 x^{2v-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{R}{x}\right)^{2v}\right)-\left(\frac{R}{x}\right)^{2v}p_0+\frac{v}{k}\rho_0 x^{-2v} I(x)=$$

$$=\frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{R}{x}\right)^{2v}\right)-\left(\frac{R}{x}\right)^{2v}\left\{\frac{\tau_0}{k}\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2v}-\frac{\tau_0}{k}+\frac{v}{k}\rho_0 R^{-2v} I(x_*)-\left(\frac{x_*}{R}\right)^{2v}p_e\right\}+$$

$$+\frac{v}{k}\rho_0 x^{-2v} I(x)=\frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{R}{x}\right)^{2v}\right)-$$

$$-\left\{\frac{\tau_0}{k}\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v}-\frac{\tau_0}{k}\left(\frac{R}{x}\right)^{2v}+\frac{v}{k}\rho_0 x^{-2v} I(x_*)-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v}p_e\right\}+$$

$$+\frac{v}{k}\rho_0 x^{-2v} I(x)=\frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v}\right)-\left\{\frac{v}{k}\rho_0 x^{-2v} I(x_*)-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v}p_e\right\}+$$

$$+\frac{v}{k}\rho_0 x^{-2v} I(x)=\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v}p_e+\frac{\tau_0}{k}\left(1-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v}\right)+$$

$$+\frac{v}{k}\rho_0\dot{R}^2\left[\frac{R}{x}\left(\frac{2}{2v-1}+\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2(2v-1)}\right)\left(1-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v-1}\right)-\frac{1}{v-2}\left(\frac{R}{x}\right)^4\left(1-\left(\frac{x_*}{x}\right)^{2v-4}\right)\right]$$

Перейдем к безразмерным координатам:

$$\xi=\frac{x}{x_*},\ \bar{R}_0=\frac{R_0}{x_*},\ \bar{R}=\frac{R}{x_*},$$

$$\lambda=\frac{R_0}{R},\ \bar{r}_*=\frac{r_*}{x_*},\ \bar{p}=\frac{p}{\tau_0},$$

$$\bar{K}=\frac{K}{\tau_0},\ \bar{G}=\frac{G}{\tau_0},\ \Omega=\frac{\rho_0\dot{R}^2}{\tau_0},\ \psi=\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}.$$

$$\bar{p}(\xi)=\xi^{-2v}\frac{p_e}{\tau_0}+\frac{1}{k}\left(1-\xi^{-2v}\right)+\frac{v}{k}\Omega\times$$

$$\times\left[\frac{2+\psi}{2v-1}\left(\frac{\bar{R}}{\xi}\right)\left(1-\xi^{-2v+1}\right)-\frac{1}{v-2}\left(\frac{\bar{R}}{\xi}\right)^4\left(1-\xi^{-2v+4}\right)\right]$$

Для определения неизвестной границы $x*$ или $\bar{R}$ используем уравнение неразрывности $x^2\dfrac{\partial x}{\partial r}=\dfrac{\rho_0}{\rho}r^2$, перепишем его с учетом p:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{K}{K-p}\left(\frac{r}{x}\right)^2, \quad \frac{K-p}{K}x^2\partial x=r^2\partial r$$

$$\int\limits_R^{x_*}\frac{K-p}{K}x^2dx=\int\limits_{R_0}^{r_*}r^2dr, \quad \int\limits_R^{x_*}\frac{K-p}{K}x^2dx=\frac{1}{3}(r_*^3-R_0^3).$$

С учетом перехода к безразмерным величинам

$$\int\limits_{\overline{R}}^{1}\frac{\overline{K}-\overline{p}}{\overline{K}}\xi^2d\xi=\frac{1}{3}(\overline{r}_*^3-\lambda^3\overline{R}^3).$$

Обозначим $A=\frac{\nu}{\mu}\Omega\frac{2+\psi}{2\nu-1}$, $B=\frac{\nu}{\mu}\Omega\frac{1}{\nu-2}$, $C=\frac{1}{3-2\nu}$.

Интеграл берется аналитически:

$$\int\limits_{\overline{R}}^{1}\frac{\overline{K}-\overline{p}}{\overline{K}}\xi^2d\xi=\frac{1}{3}(1-\overline{R}^3)-$$

$$-\frac{1}{\overline{K}}\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi^2\left[\frac{1}{k}\left(1-\xi^{-2\nu}\right)+A\left(\frac{\overline{R}}{\xi}\right)\left(1-\xi^{-2\nu+1}\right)-B\left(\frac{\overline{R}}{\xi}\right)^4\left(1-\xi^{-2\nu+4}\right)+\xi^{-2\nu}\frac{p_e}{\sigma_T}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{3}(1-\overline{R}^3)-\frac{1}{\overline{K}}\left[\frac{1}{k}\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi^2d\xi-\frac{1}{k}\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi^{-2\nu+2}d\xi-A\overline{R}\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi^{-2\nu+2}d\xi+\right.$$

$$\left.+A\overline{R}\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi d\xi+B\overline{R}^4\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi^{-2\nu+2}d\xi-B\overline{R}^4\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi^{-2}d\xi+\frac{p_e}{\tau_0}\int\limits_{\overline{R}}^{1}\xi^{-2\nu+2}d\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\overline{R}^3-\frac{1}{3}\frac{1}{\overline{K}}\frac{1}{k}(1-\overline{R}^3)+\frac{1}{\overline{K}}\frac{1}{k}C(1-\overline{R}^{-2\nu+3})+\frac{1}{\overline{K}}AC\overline{R}(1-\overline{R}^{-2\nu+3})-$$

$$-\frac{1}{2\overline{K}}A\overline{R}(1-\overline{R}^2)-\frac{1}{\overline{K}}BC\overline{R}^4(1-\overline{R}^{-2\nu+3})-\frac{1}{\overline{K}}B\overline{R}^4(1-\frac{1}{\overline{R}})-\frac{1}{\overline{K}}C\frac{p_e}{\tau_0}(1-\overline{R}^{-2\nu+3})=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{\overline{K}}\frac{1}{k}+\frac{1}{\overline{K}}\frac{1}{k}C-\frac{1}{\overline{K}}C\frac{p_e}{\tau_0}\right)+\overline{R}\left(\frac{1}{\overline{K}}AC-\frac{1}{2\overline{K}}A\right)+$$

$$+\overline{R}^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{\overline{K}}\frac{1}{k}+\frac{1}{2\overline{K}}A+\frac{1}{\overline{K}}B\right)+$$

$$-\overline{R}^4\left(\frac{1}{\overline{K}}BC+\frac{1}{\overline{K}}B\right)-\overline{R}^{-2\nu+3}\left(\frac{1}{\overline{K}}\frac{1}{k}C-\frac{1}{\overline{K}}C\frac{p_e}{\tau_0}\right)-\frac{1}{\overline{K}}AC\overline{R}^{-2\nu+4}+\frac{1}{\overline{K}}BC\overline{R}^{-2\nu+7}$$

Получили уравнение относительно $\overline{R}$

$$a_0+a_1\overline{R}+a_3\overline{R}^3+a_4\overline{R}^4+a_5\overline{R}^{-2\nu+3}+a_6\overline{R}^{-2\nu+4}+a_7\overline{R}^{-2\nu+7}=\frac{1}{3}(\overline{r}_*^3-\lambda^3\overline{R}^3), \quad (3.3)$$

где коэффициенты выражаются следующим образом:

$$a_0 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{\overline{\overline{K}}}\frac{1}{k} + \frac{1}{\overline{\overline{K}}}\frac{1}{k}C - \frac{1}{\overline{\overline{K}}}C\frac{p_e}{\tau_0} \right),$$

$$a_1 = \frac{1}{\overline{\overline{K}}}AC - \frac{1}{2\overline{\overline{K}}}A,$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{\overline{\overline{K}}}\frac{1}{k} + \frac{1}{2\overline{\overline{K}}}A + \frac{1}{\overline{\overline{K}}}B,$$

$$a_4 = -\frac{1}{\overline{\overline{K}}}BC - \frac{1}{\overline{\overline{K}}}B,$$

$$a_5 = -\frac{1}{\overline{\overline{K}}}\frac{1}{k}C + \frac{1}{\overline{\overline{K}}}C\frac{p_e}{\tau_0},$$

$$a_6 = -\frac{1}{\overline{\overline{K}}}AC, \qquad a_7 = \frac{1}{\overline{\overline{K}}}BC.$$

$\overline{R}$ находим численно, решая уравнение (3.3) методом Ньютона.

4. Математическая модель линейно-сжимаемой упругопластической среды Мизеса-Шлейхера

Математическая модель среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы неразрывности и изменения количества движения в Эйлеровых переменных, которая с учетом сферической симметрии записывается следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial r} + 2\frac{\upsilon}{r}\right) = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2\frac{(\sigma - \sigma_\theta)}{r} = -\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) \qquad (4.1)$$

где ρ - плотность в деформированном состоянии, υ - скорость, σ и σ_θ- радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), r – радиальная координата.

Линейная сжимаемость среды выражается зависимостью среднего напряжения от объемной деформации θ с постоянным модулем объемного сжатия K:

$$\frac{(\sigma + 2\sigma_\theta)}{3} = K\theta \equiv K\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \qquad (4.2)$$

где ρ_0 – плотность в начальном состоянии.

В пластической области среда подчиняется условию текучести Мизеса-Шлейхера:

$$\sigma - \sigma_\theta = \tau_0 + \frac{k(\sigma + 2\sigma_\theta)}{3} \qquad (4.3)$$

Решение задачи строится в области, ограниченной радиусами $r = V_0 t$ и $r = ct$, примыкающей к области невозмущенной среды.

Зависимость напряжения от плотности в деформируемом состоянии при учете выражений (4.2), (4.3) имеет вид:

$$\sigma = \left(1 + \frac{2}{3}k\right)K\theta + \frac{2}{3}\tau_0 = \left(1 + \frac{2}{3}k\right)K\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + \frac{2}{3}\tau_0$$

$$\sigma_\theta = \frac{3}{2}K\theta - \frac{\sigma}{2} = \left(1 - \frac{k}{3}\right)K\theta + \frac{\tau_0}{3} = \left(1 - \frac{k}{3}\right)K\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + \frac{\tau_0}{3}$$

Выражения для определения производных запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial \rho}}\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\rho_0}{K\left(1 + \dfrac{2}{3}k\right)}\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{1}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial \rho}}\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\rho_0}{K\left(1 + \dfrac{2}{3}k\right)}\frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

Построим решение одномерной задачи о расширении сферической полости, полагая выполненным условие текучести Мизеса-Шлейхера (4.3).

Система дифференциальных уравнений в частных производных (4.1) относительно σ и υ при учете выражений (4.4) запишется следующим образом:

$$\rho(\sigma)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial r} + 2\frac{\upsilon}{r}\right) = -\frac{\rho_0}{K\left(1 + \dfrac{2}{3}k\right)}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2\frac{\tau_0 + kp(\sigma)}{r} = -\rho(\sigma)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right)$$

где $\rho(\sigma) = \rho_0\left(1 + \dfrac{\sigma - 2/3\tau_0}{K(1 + 2/3k)}\right)$, $p(\sigma) = (\sigma + 2\sigma_\theta)/3$ – гидростатическое давление.

На границе расширяющейся полости радиуса $R_0 = V_0 t$ задается скорость V_0, внешняя поверхность сферического слоя R_∞ свободна от напряжений:

$$\upsilon\big|_{r=R_0} = V_0,\ \sigma\big|_{r=R_\infty} = 0, \tag{4.6}$$

в начальный момент времени:

$$R_0\big|_{t=0} = 0,\ \upsilon\big|_{t=0} = 0,\ \sigma\big|_{t=0} = 0$$

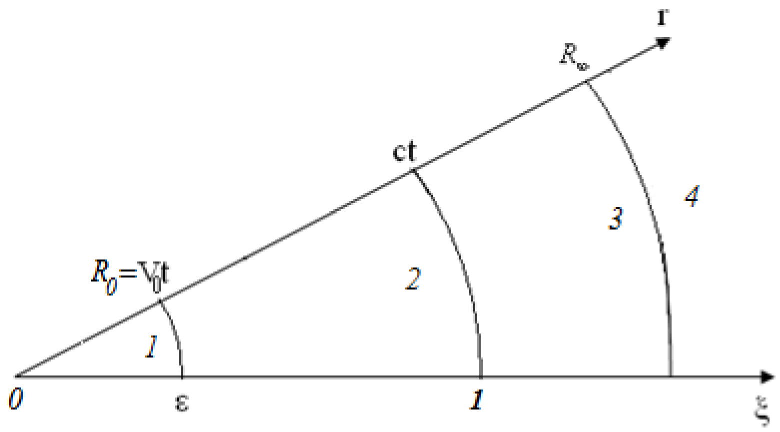


Рис. 4.1. Постановка задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упруго-пластической среде: 1- полость, 2, 3 - области пластического и упругого деформирования, 4- невозмущенная область

Рассмотрим автомодельное решение системы (4.5) относительно переменной $\xi = \dfrac{r}{ct}$. Введем безразмерные переменные:

$$U = \frac{\upsilon}{c},\ S = \frac{\sigma}{K_1},\ P = \frac{p}{K_1},\ T = \frac{\tau_0}{K_1},\ b = \frac{\rho_0}{\rho},\ \beta^2 = \frac{c^2}{a^2},\ K_1 = \left(1 + \frac{2}{3}k\right)K.$$

Относительно введенной безразмерной переменной ξ производные определяются следующим образом:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{c^2 r}{ct^2}\frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial r} = \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{c^2}{ct}\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(1 + \frac{2}{3}k\right)K\left(\frac{-r}{ct^2}\right)\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = K_1\left(\frac{-r}{ct^2}\right)\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} = \left(1 + \frac{2}{3}k\right)K\frac{1}{ct}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = K_1\frac{1}{ct}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}$$

Преобразования (4.7) при учете обозначений (4.4) приводят систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5) первого порядка относительно U и S к виду:

$$U' + \frac{2U}{\xi} = b(\xi - U)S'$$

$$S' + \frac{2(T + kP)}{\xi} = \frac{\beta^2}{b}(\xi - U)U'$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной ξ.

На границе полости $\xi=\varepsilon$, двигающейся со скоростью V_0, выполняется условие:

$$U|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon,$$

на границе раздела упругой и пластической зон ξ=1 используется упругое решение:

$$S|_{\xi=1} = \frac{2}{3}T + \frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{\varepsilon JT}{\left[1+\sqrt{\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\varepsilon J}\right]}, \quad U|_{\xi=1} = 1 - e^{-\frac{(1+\nu)K_1 S / K}{2(1-2\nu)}} \tag{4.8}$$

где ν - коэффициент Пуассона, $J = \rho_0 V_0^2 / \tau_0$.

Таким образом, сформулирована краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в нормальном виде записывается следующим образом:

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{\frac{2U}{\xi} + \frac{2(T+kP)(\xi-U)}{\xi}}{\beta^2(\xi-U)^2 - 1}$$

$$\frac{dS}{d\xi} = \frac{\frac{2(T+kP)}{\xi} + \frac{2\beta^2 U(\xi-U)}{b\xi}}{\beta^2(\xi-U)^2 - 1}, \tag{4.9}$$

$$S|_{\xi=1} = \frac{2}{3}T + \frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{\varepsilon JT}{\left[1+\sqrt{\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\varepsilon J}\right]}, \ \mathrm{U}|_{\xi=1} = 1 - e^{-\frac{(1+\nu)K_1 S / K}{2(1-2\nu)}}$$

В систему уравнений (4.9) входит неизвестный параметр c – скорость фронта на ударной волне. Нахождение неизвестной скорости c проводится итерационно методом стрельбы *(Приложение 1)*до выполнения с заданной точностью граничного условия $|U - \varepsilon| < \delta$. На каждой итерации метода стрельбы применяется метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности *(Приложение 2)* в области изменения переменной ξ от границы упругопластического раздела при $\xi=1$ до границы полости $\xi=\varepsilon$.

5. Математическая модель нелинейно-сжимаемой среды с линейной ударной адиабатой

Математическая модель среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы неразрывности и изменения количества движения в Эйлеровых переменных, которая с учетом сферической симметрии записывается следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial r} + 2\frac{\upsilon}{r}\right) = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2\frac{(\sigma - \sigma_\theta)}{r} = -\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right)$$

где ρ – плотность в деформированном состоянии, υ – скорость, σ и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), r – радиальная координата.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (5.1) замыкается конечными соотношениями:

$$\sigma = f_1(\theta),\ \theta = 1 - \rho_0/\rho$$
$$\sigma - \sigma_\theta = f_2(\theta),$$

где ρ_0 – начальная плотность среды, θ – объемная деформация. Функции f_1 и f_2 определяют сжимаемость и условие пластичности выбранной модели среды.

Решение задачи строится в области пластического течения, ограниченной радиусами $R_0 = V_0 t$ и $r = ct$, примыкающей к области невозмущенной среды. Область упругого деформирования не рассматривается, так как предполагается, что величина c больше значения скорости распространения упругой волны.

Для решения поставленной задачи (5.1) необходимо конкретизировать функций f_1 и f_2. Известно, что сжимаемость среды описывается ударной адиабатой, представленной линейной зависимостью скорости ударной волны c от массовой скорости υ за ее фронтом:

$$c = A + \lambda\upsilon \tag{5.2}$$

Константа A близка к скорости распространения плоской волны сжатия при малых давлениях, λ характеризует предельную сжимаемость среды.

Рассмотрим условие Гюгонио (условия динамической совместимости на разрывах):

$$[\rho]c - [\rho]\upsilon = 0$$
$$[\rho\upsilon]c - \left[\rho\upsilon^2 - \sigma\right] = 0$$

Квадратными скобками обозначена разность соответствующих величин «слева» и «справа» от разрыва.

$$(\rho - \rho_0)c = \rho\upsilon,\ \rho\upsilon c = \rho\upsilon^2 + \sigma$$

или

$$\theta = \frac{\upsilon}{c},\ \frac{\sigma}{\rho c^2} = \frac{\upsilon}{c} - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2,\ \frac{\sigma}{\rho_0 c^2} = \theta = \frac{\upsilon}{c} \tag{5.3}$$

Соотношения (5.3) получены в предположении $\upsilon_0 = \sigma_0 = 0$.

Выразим скорости через объемную деформацию с учетом соотношения на ударной волне (5.2):

$$\upsilon = \frac{A\theta}{1 - \lambda\theta}, \quad c = \frac{A}{1 - \lambda\theta}$$

С учетом условия на ударной волне напряжение определяется следующим образом:

$$\sigma = \frac{\rho_0}{(1-\theta)} \frac{A\theta}{(1-\lambda\theta)} \left(\frac{A}{1-\lambda\theta} - \frac{A\theta}{1-\lambda\theta}\right) = \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1-\lambda\theta)^2}$$

Полученное выражение можно использовать для определения функции f_1:

$$f_1 \equiv \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1-\lambda\theta)^2}, \tag{5.4}$$

Сопротивление среды сдвигу определяется линейной зависимостью предела текучести от давления

$$f_2(\theta) \equiv \tau_0 + \mu\sigma, \tag{5.5}$$

где коэффициенты τ_0 и μ характеризуют сцепление и внутреннее трение среды.

Построим решение одномерной задачи о расширении сферической полости в пластической области. Система дифференциальных уравнений в частных производных (5.1) относительно υ и θ запишется следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial r} + 2\frac{\upsilon}{r}\right) = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)$$

$$\rho_0 A^2 \frac{\partial \dfrac{\theta}{(1-\lambda\theta)^2}}{\partial r} + 2\frac{\left(\tau_0 + \mu\dfrac{\rho_0 A^2\theta}{(1-\lambda\theta)^2}\right)}{r} = -\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)$$

На границе расширяющейся полости радиуса $R_0 = V_0 t$ задается скорость V_0, внешняя поверхность сферического слоя R_∞ свободна от напряжений:

$$\upsilon\big|_{r=R_0} = V_0, \ \sigma\big|_{r=R_\infty} = 0,$$

в начальный момент времени:

$$R_0\big|_{t=0} = 0, \ \upsilon\big|_{t=0} = 0, \ \sigma\big|_{t=0} = 0$$

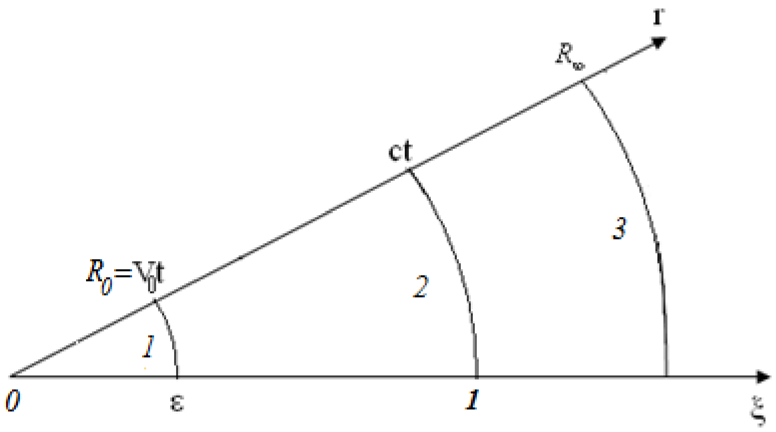


Рис. 5.1. Постановка задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упруго-пластической среде: 1- полость, 2 - область пластического деформирования, 3- невозмущенная область

Рассмотрим автомодельное решение системы относительно переменной $\xi = \dfrac{r}{ct}$ и введем безразмерную переменную $U = \dfrac{\upsilon}{c}$.

Относительно переменной ξ производные определяются следующим образом:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t} = \frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{c^2 r}{ct^2}\frac{\partial U}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial\upsilon}{\partial r} = \frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{c^2}{ct}\frac{\partial U}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\rho_0A^2(1+\lambda\theta)}{(1-\lambda\theta)^3}\left(\frac{-r}{ct^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}=\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{\rho_0A^2(1+\lambda\theta)}{(1-\lambda\theta)^3}\frac{1}{ct}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}$$

Подстановка в систему уравнений (5.1) при учете соотношений (5.4) - (5.6) приводит систему к следующему виду:

$$\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{c}{ct}\frac{\partial U}{\partial\xi}+2\frac{cU}{\xi ct}\right)=-\left(-\frac{\xi ct}{(1-\theta)^2ct^2}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{cU}{(1-\theta)^2ct}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)$$

$$\frac{\rho_0A^2}{ct}\frac{1+\lambda\theta}{(1-\lambda\theta)^3}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+2\left(\frac{\mu\rho_0A^2\theta}{(1-\lambda\theta)^2ct\xi}+\frac{\tau_0}{\xi ct}\right)=-\frac{\rho_0}{1-\theta}\left(-\frac{c\xi}{ct^2}\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{Uc^2}{ct}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right) \tag{5.7}$$

Сделаем следующие замены:

$$T=\frac{\tau_0}{\rho_0A^2},\ \beta^2=\frac{c^2}{A^2},\ S=\frac{\sigma}{\rho_0A^2}=\frac{\theta}{(1-\lambda\theta)^2},\ F=\frac{\xi-U}{1-\theta},\ B=\frac{1+\lambda\theta}{(1-\lambda\theta)^3}$$

Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (5.7) первого порядка относительно переменных U и θ запишется следующим образом:

$$U'+\frac{2U}{\xi}=F\theta'$$

$$B\theta'+\frac{2(T+\mu S(\theta))}{\xi}=\beta^2FU'$$

штрихом обозначено дифференцирование по переменной ξ.

Граничное условие при $\xi=\varepsilon,\ \varepsilon=\dfrac{V_0}{c}$:

$$U\big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon,$$

граничные условия при $\xi=1$ следуют из соотношений Гюгонио на ударной волне (5.3):

$$U\big|_{\xi=1}=\theta\big|_{\xi=1}=b,$$

где b определяется решением уравнения $\dfrac{\rho_0A^2b}{(1-\lambda b)^2}=\rho_0c^2b$ (см. рис. 5.2).

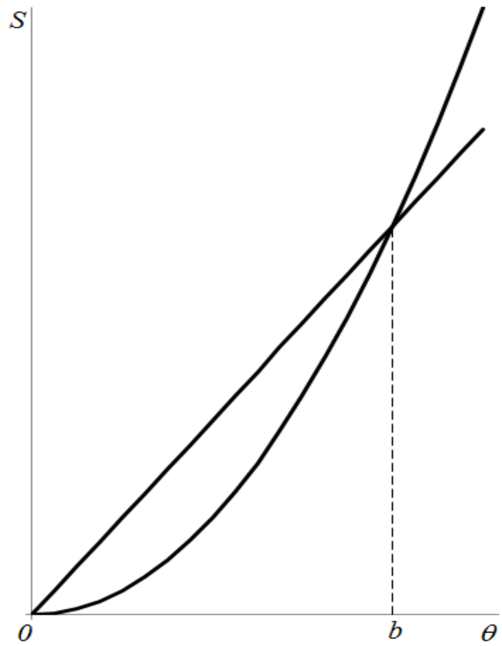


Рис. 5.2. Безразмерное напряжение в пластической области и кривая ударного перехода в зависимости от объемной деформации

Таким образом, сформулирована краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в нормальном виде записывается следующим образом:

$$U' = \frac{\frac{2UB}{\xi} + \frac{2F(T+\mu S)}{\xi}}{\beta^2 F^2 - B}$$

$$\theta' = \frac{\frac{2U\beta^2 F}{\xi} + \frac{2(T+\mu S)}{\xi}}{\beta^2 F^2 - B} \qquad (5.8)$$

$$U\big|_{\xi=1} = \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{1}{\beta}\right), \; U\big|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon,$$

$$\theta\big|_{\xi=1} = \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$$

В систему уравнений (5.8) входит неизвестный параметр c – скорость фронта ударной волны. Нахождение неизвестной скорости c проводится итерационно методом стрельбы *(Приложение 1)* до выполнения с заданной точностью граничного условия $|U - \varepsilon| < \delta$. На каждой итерации метода стрельбы применяется метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности *(Приложение 2)* в области изменения переменной ξ от границы упругопластического раздела при $\xi=1$ до границы полости $\xi=\varepsilon$.

6. Математическая модель нелинейно-сжимаемой среды Григоряна

Математическая модель [6] среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и соотношений теории пластического течения с условием пластичности Мизеса:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\theta}{\partial r}+(1-\theta)\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+\frac{2\upsilon}{r}\right)=0$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)+(1-\theta)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}+2\frac{(\sigma-\sigma_\theta)}{r}\right)=0$$

$$2G\left[\frac{\partial\upsilon}{\partial r}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+\frac{2\upsilon}{r}\right)\right]=-\frac{\partial(\sigma-p)}{\partial t}-\upsilon\frac{\partial(\sigma-p)}{\partial r}-\Lambda(\sigma-p) \qquad (6.1)$$

$$\sigma-\sigma_\theta\le\sigma_{\text{Т}}$$

где обозначено: t – время, θ – объемная деформация, ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотность, υ – скорость, σ и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), r – радиальная координата, G – модуль сдвига, σ_T – предел текучести, p – гидростатическое давление. Параметр $\Lambda = 0$ при упругом деформировании и $\Lambda > 0$, если реализуется условие пластичности.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (6.1) замыкается конечными соотношениями:

$$p=f_1(\theta),\ \theta=1-\rho_0/\rho,\ p\equiv(\sigma+2\sigma_\theta)/3$$

$$\sigma_{\text{Т}}\equiv f_2(p(\theta))$$

Функции f_1 и f_2 определяют сжимаемость и условие пластичности модели среды Григоряна. В частности, модель используется для описания динамического деформирования пористых грунтовых сред.

Решение задачи строится в области, ограниченной радиусами $R_0=V_0t$ и $r=ct$, примыкающей к области упругого деформирования. Область упругого деформирования ограничена координатой $r=c_et$, где $c_e=\sqrt{\left(K+\frac{4}{3}G\right)\Big/\rho_0}$ – скорость распространения упругой волны, K – упругий модуль объемного сжатия.

Построим решение одномерной задачи о расширении сферической полости в области пластической деформации при выполнении условия текучести: $\sigma-\sigma_\theta=\sigma_{\text{Т}}$. При учете равенства нулю первого инварианта тензора девиатора: $\sigma-p+2(\sigma_\theta-p)=0$ и условия пластичности: $\sigma-\sigma_\theta=f_2(p(\theta))$, $p=f_1(\theta)$, получаем:

$$\sigma=f_1(\theta)+\frac{2}{3}f_2(\theta).$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных (6.1) относительно θ и υ запишется в виде:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\theta}{\partial r}+(1-\theta)\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+\frac{2\upsilon}{r}\right)=0$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)+(1-\theta)\left(\frac{\partial\left(f_1(\theta)+\frac{2}{3}f_2(\theta)\right)}{\partial r}+2\frac{f_2(\theta)}{r}\right)=0$$

На границе расширяющейся полости радиуса $R_0 = V_0 t$ задается скорость V_0, внешняя поверхность сферического слоя R_∞ свободна от напряжений:

$$\upsilon\big|_{r=R_0}=V_0,\ \sigma\big|_{r=R_\infty}=0,\ R_0\big|_{t=0}=0$$

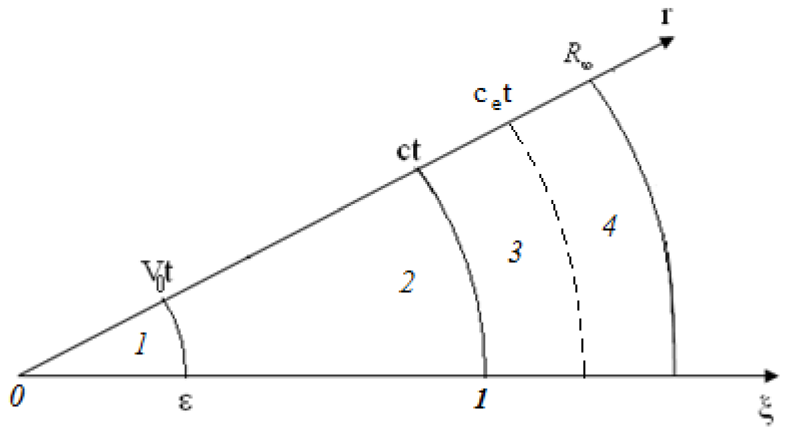


Рис. 6.1. Постановка задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упруго-пластической среде: 1- полость, 2, 3 - области пластического и упругого деформирования, 4- невозмущенная область

Рассмотрим автомодельное решение системы относительно переменной $\xi=\dfrac{r}{ct}$ и введем безразмерную переменную $U=\dfrac{\upsilon}{c}$.

Частные производные по времени и пространству определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial\xi},\qquad \frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

В результате подстановки система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.1) примет следующий вид:

$$U'+2\frac{U}{\xi}=\frac{(\xi-U)}{1-\theta}\theta'$$
$$\frac{\partial f_1(\theta)/\partial\theta}{\rho_0 c^2}\theta'+2\frac{f_2(\theta)}{\rho_0 c^2\xi}=\frac{(\xi-U)}{1-\theta}U' \qquad (6.2)$$

штрихом обозначено дифференцирование по ξ. Для решения системы (6.2) необходимо конкретизировать вид функций f_1 и f_2.

Сжимаемость среды отражается ударной адиабатой, достаточно часто представленной линейной зависимостью скорости ударной волны c от массовой скорости υ за ее фронтом:

$$c=A+\lambda\upsilon \qquad (6.3)$$

Константа A близка к скорости распространения плоской волны сжатия при малых давлениях, λ характеризует предельную сжимаемость среды.

Примем зависимость f_1, определяющую давление, в виде:

$$f_1 \equiv \frac{\rho_0 a^2 \theta}{(1-l\theta)^2},$$

полученном ранее для напряжения с другим, вообще говоря, набором констант.

Сопротивление среды сдвигу определяется дробно-рациональной зависимостью предела текучести от давления

$$f_2(\theta) = \tau_0 + \frac{kp}{1 + kp/(\tau_m - \tau_0)}, \qquad (6.4)$$

где коэффициенты τ_0, τ_m и k характеризуют сцепление, предельное значение предела текучести и внутреннее трение среды соответственно.

Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных величин U и θ запишется следующим образом:

$$U' + 2\frac{U}{\xi} = \frac{(\xi - U)}{1-\theta}\theta' \qquad (6.5)$$

$$\tilde{K}\theta' + 2\frac{\tilde{f}_2(\theta)}{\xi} = \frac{(\xi - U)}{1-\theta}U',$$

где обозначено $\tilde{f}_1(\theta) = \dfrac{f_1(\theta)}{\rho_0 c^2}$, $\tilde{f}_2(\theta) = \dfrac{f_2(\theta)}{\rho_0 c^2}$, $\tilde{K} = \dfrac{\partial \tilde{f}_1(\theta)}{\partial \theta}$.

При изменении переменной ξ от 1 до ε, то есть, от границы пластической волны до границы полости (рис. 6.1) неизвестная скорость c определяется условием:

$$\mathrm{U}\big|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon, \ \varepsilon = \frac{V_0}{c}$$

На границе раздела упругой и пластической зон справедливо упругое решение:

$$S_e = \frac{2}{3}T + \frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{\varepsilon J T}{\left[1 + \sqrt{\dfrac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\varepsilon J}\,\right]}, \ U_e = 1 - e^{-\frac{(1+\nu)K_1 S/K}{2(1-2\nu)}}$$

где ν - коэффициент Пуассона, K – модуль объемного сжатия, $J = \rho_0 V_0^2/\tau_0$,

$$S = \frac{\sigma}{K_1},\ P = \frac{p}{K_1},\ T = \frac{\tau_0}{K_1},\ b = \frac{\rho_0}{\rho},\ \beta^2 = \frac{c^2}{a^2},\ K_1 = \left(1 + \frac{2}{3}k\right)K.$$

Определив таким образом напряжения S_e и скорости U_e как функции ε, поставим граничные условия при $\xi=1$

$$S|_{\xi=1} = S_e,\ U|_{\xi=1} = U_e$$

Обозначим также: $F = \dfrac{\xi - U}{1-\theta}$.

В случае сверхзвукового движения, когда $c/c_e > 1$, применяются граничные условия при $\xi = 1$, которые следуют из соотношений Гюгонио на ударной волне в размерном и в безразмерном виде

$$\begin{aligned}&(\rho-\rho_0)c=\rho\upsilon \\ &\rho\upsilon c=\rho\upsilon^2+\sigma\end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned}&\rho(c-\upsilon)=\rho_0 c \\ &\rho(c-\upsilon)\upsilon=\sigma\end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned}&\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)=\frac{\upsilon}{c} \\ &\rho_0 c^2\frac{\upsilon}{c}=\sigma\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&\theta=U, \\ &\theta=S, \\ &\text{где } S=\tilde{f}_1(\theta)\end{aligned}$$

и имеют вид:

$$U\big|_{\xi=1}=\theta\big|_{\xi=1}=b,$$

где b определяется решением уравнения $f_1(b)=\rho_0 c^2 b$.

На рис. 6.2 приведены напряжения в пластической области и кривые ударного перехода, отнесенные к величине $\rho_0(c^*)^2$, в зависимости от объемной деформации. Сплошной линией обозначены допустимые напряжения при пластическом деформировании, при $\theta<\theta^*$ деформирование происходит упругопластически и не реализуется в задаче. Штриховые линии отвечают ударным переходам при $c_e = c^*$ и $c_e = c^I$, $c^{II} > c^*$. Скоростям c^I, c^{II} на рис. 6.2 соответствуют значения объемной деформации b^I, b^{II}. Из рис. 6.2 также следует, что при определенных параметрах упругого участка кривой сжатия, когда $c_e=\sqrt{\left(K+\frac{4}{3}G\right)\Big/\rho_0} < c^*$, фронт единой пластической УВ, распространяющейся по невозмущенному пространству, не формируется.

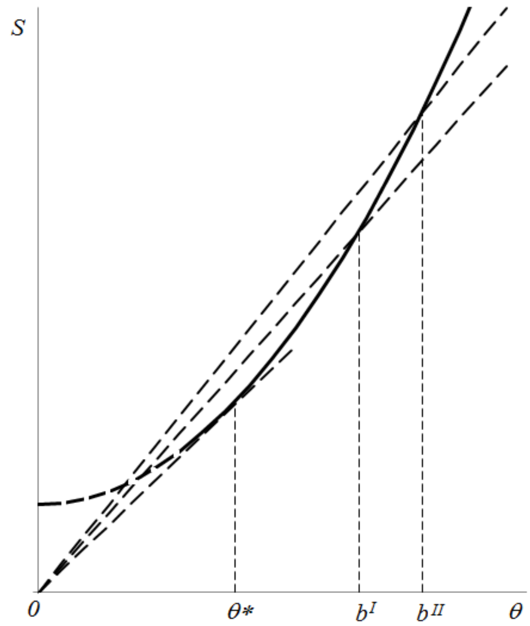


Рис. 6.2. Безразмерные напряжения в пластической области и кривые ударного перехода в зависимости от объемной деформации

Таким образом, сформулирована краевая задача для системы дифференциальных уравнений, которая в нормальном виде записывается следующим образом:

$$\frac{dU}{d\xi}=\frac{\dfrac{2U\dfrac{\partial\tilde{f}_1(\theta)}{\partial\theta}}{\xi}+\dfrac{2F\tilde{f}_2(\theta)}{\xi}}{F^2-\dfrac{\partial\tilde{f}_1(\theta)}{\partial\theta}} \tag{6.6}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{\dfrac{2UF}{\xi}}{F^2-\dfrac{\partial\tilde{f}_1(\theta)}{\partial\theta}}$$

$$U\big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon,\ S|_{\xi=1}=S_e,\ \ U|_{\xi=1}=U_e,\ c<c_e$$

$$U\big|_{\xi=1}=\theta\big|_{\xi=1}=b,\ \ f_1(b)=\rho_0c^2b,\ c\geq c_e$$

В систему уравнений (6.6) входит неизвестный параметр c – скорость фронта на ударной волне. Нахождение неизвестной скорости c проводится итерационно методом стрельбы *(Приложение 1)* до выполнения с заданной точностью граничного условия $|U - \varepsilon| < \delta$. На каждой итерации метода стрельбы применяется метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности *(Приложение 2)* в области изменения переменной ξ от границы упругопластического раздела при $\xi=1$ до границы полости $\xi=\varepsilon$.

7. Аналитическое решение в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны

Математическая модель среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы неразрывности и изменения количества движения в Эйлеровых переменных, которая с учетом сферической симметрии записывается следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+2\frac{\upsilon}{r}\right)=-\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}+2\frac{(\sigma-\sigma_\theta)}{r}=-\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)$$

где ρ – плотность в деформированном состоянии, υ – скорость, σ и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), r – радиальная координата.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (7.1) замыкается конечными соотношениями:

$$\sigma=f_1(\theta),\ \theta=1-\rho_0/\rho$$

$$\sigma-\sigma_\theta=f_2(\theta)$$

где ρ_0 – начальная плотность среды, θ – объемная деформация. Функции f_1 и f_2 определяют сжимаемость и условие пластичности выбранной модели среды.

Решение задачи строится в области пластического течения, ограниченной радиусами $r = V_0 t$ и $r = ct$ и примыкающей к области невозмущенной среды. Область упругого деформирования не рассматривается, так как предполагается, что величина c больше значения скорости распространения упругой волны.

Построим решение одномерной задачи о расширении сферической полости в пластической области. Система дифференциальных уравнений в частных производных (7.1) относительно υ и θ запишется следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+2\frac{\upsilon}{r}\right)=-\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial f_1(\theta)}{\partial r}+2\frac{f_2(\theta)}{r}=-\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)$$

На границе расширяющейся из точки ($R_0\big|_{t=0}=0$) полости радиуса $R_0 = V_0 t$ задается скорость V_0, внешняя поверхность сферического слоя R_∞ свободна от напряжений:

$$\upsilon\big|_{r=R_0}=V_0,\ \sigma\big|_{r=R_\infty}=0, \tag{7.2}$$

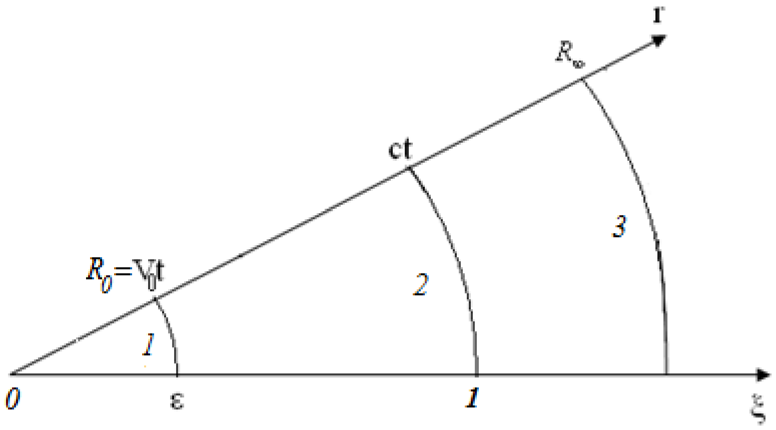


Рис. 7.1. Постановка задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упруго-пластической среде: 1 - полость, 2 - область пластического деформирования, 3 - невозмущенная область

Подстановка безразмерных переменных $U=\frac{\upsilon}{c}, \xi=\frac{r}{ct}$ в систему уравнений (7.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных U и θ:

$$\begin{gathered} U'+2\frac{U}{\xi}=\frac{(\xi-U)}{1-\theta}\theta' \\ \frac{\partial f_1/\partial\theta}{\rho_0 c^2}\theta'+2\frac{f_2(\theta)}{\rho_0 c^2\xi}=\frac{(\xi-U)}{1-\theta}U' \end{gathered} \tag{7.3}$$

штрихом обозначено дифференцирование по ξ.

При изменении ξ от 1 до ε, то есть, от границы пластической волны до границы полости (рис. 7.1) неизвестная скорость c определяется условием:

$$\mathrm{U}\big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon,\ \varepsilon=\frac{V_0}{c} \tag{7.4}$$

Рассмотрим условия Гюгонио на ударной волне для системы (5.1)

$$[\rho]c-[\rho\upsilon]=0$$

$$[\rho\upsilon]c-\left[\rho\upsilon^2+\sigma\right]=0$$

Обозначим величины слева и справа от разрыва как $\rho_{\text{УВ}},\upsilon,\sigma$ и $\rho_0,\upsilon_0,\sigma_0$ соответственно, также положим $\upsilon_0=\sigma_0=0$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned}&(\rho_{УВ}-\rho_0)c=\rho\upsilon\\&\rho_{УВ}\upsilon c=\rho_{УВ}\upsilon^2+\sigma\end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned}&1-\frac{\rho_0}{\rho_{УВ}}\equiv\theta_{УВ}=\frac{\upsilon}{c}\\&\frac{\upsilon}{c}-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2=\frac{\sigma}{\rho_{УВ}c^2}\end{aligned},$$

Выбрав в качестве безразмерных переменных $U=\dfrac{\upsilon}{c}$ и $S=\dfrac{\sigma}{\rho_{УВ}c^2}$, будем иметь следующее условие на ударной волне

$$\theta_{УВ}=U,\ U-U^2=S$$

Учитывая, что при высоких скоростях расширения полости и высоких давлениях изменение θ мало, далее рассматривается система (5.3) в предположении несжимаемости среды, то есть, при выполнении равенства

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0 \text{ или } \theta=const$$

Положим значение объемной деформации $\theta\equiv\theta_{УВ}$ и $\rho\equiv\rho_{\text{УВ}}=\dfrac{\rho_0}{1-\theta_{УВ}}$. Сохранение значением плотности его значения на ударной волне $\rho_{\text{УВ}}$ равносильно предположению о несжимаемости за фронтом ударной волны.

Система уравнений относительно нормированных таким образом скорости U и напряжения S будет иметь вид:

$$U'+2\frac{U}{\xi}=0 \tag{7.5}$$

$$S'+2\frac{\tilde{f}_2}{\xi}=(\xi-U)U',$$

где $\tilde{f}_2=\dfrac{f_2}{\rho_{УВ}c^2}$ – безразмерная функция в условии пластичности, $\rho_{\text{УВ}}=\dfrac{\rho_0}{1-\theta_{УВ}}$ – плотность на ударной волне.

Значения $\theta_{УВ}$ определяются для каждой скорости расширения полости. На рис. 7.2 приведены соответствующие двум различным скоростям расширения полости значения $\theta_{УВ}$, определяемые пересечением кривых ударного перехода с графиком функции безразмерного напряжения от объемной деформации.

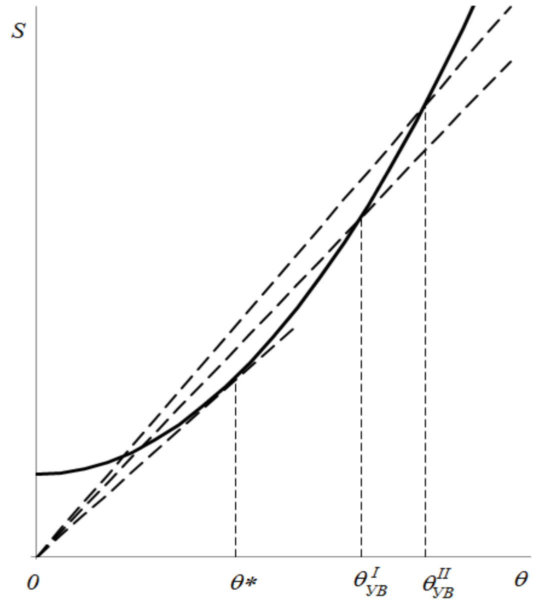


Рис. 7.2. Безразмерные напряжения в пластической области и кривые ударного перехода в зависимости от объемной деформации

Окончательное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.5) замыкается конкретизацией вида функций f_1 и f_2. Динамическая сжимаемость среды характеризуется ударной адиабатой в виде линейного соотношения:

$$c = A + \lambda \upsilon, \tag{7.6}$$

связывающего скорость ударной волны c и скорость за фронтом волны υ. Здесь A соответствует скорости продольной волны при отсутствии возмущений, параметр λ характеризует предельную сжимаемость. Следовательно, напряжение σ и объемная деформация θ связаны следующим соотношением:

$$f_1(\theta) \equiv \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1-\lambda\theta)^2} \tag{7.7}$$

Функция в условии пластичности среды имеет вид:

$$f_2(\theta) = \begin{cases} \tau_0 + \mu\sigma, & 0 < \sigma \le \sigma_{\mathrm{m}}, \\ \tau_m, & \sigma > \sigma_m \end{cases} \tag{7.8}$$

где $\mu = k/(1 + 2k/3)$ – коэффициент внутреннего трения.

Учитывая условия на ударной волне, краевые условия (7.2) перепишутся в следующем виде:

$$U\big|_{\xi=1} = \frac{c-A}{\lambda c}, \quad S\big|_{\xi=1} = U - U^2, \quad U\big|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon \tag{7.9}$$

Таким образом, с учетом выражений (7.7), (7.8) краевая задача запишется в виде:

$$U' + 2\frac{U}{\xi} = 0 \tag{7.10}$$

$$S' + 2\frac{T+\mu S}{\xi} = (\xi - U)U' \text{ или } S' + 2\frac{T+\mu S}{\xi} = -(\xi - U)2\frac{U}{\xi}$$

$$U\big|_{\xi=1}=\frac{c-A}{\lambda c},\quad S\big|_{\xi=1}=U-U^2,\quad U\big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon$$

где $T=\dfrac{\tau_0}{\rho_{УВ}c^2}$.

С учетом определяющих условий (7.7) и (7.8) система обыкновенных дифференциальных уравнений (7.5) разделяется на два независимых уравнения.

Решая первое уравнение системы с разделяющимися переменными, получим:

$$\frac{dU}{d\xi}+2\frac{U}{\xi}=0,\qquad \frac{dU}{U}=\frac{d\xi}{\xi^{-2}}\to U=\frac{c_1}{\xi^2}$$

Постоянная c_1 определяется из краевого условия (7.9) $U\big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon$: $c_1=\varepsilon^3$ и решение первого уравнения системы (7.10) имеет вид:

$$U=\frac{\varepsilon^3}{\xi^2}.$$

В результате подстановки полученного решения во второе уравнение системы (7.10) и интегрирования, получаем решение второго уравнения задачи (7.10):

$$S=-\frac{T}{\mu}+\frac{c_1{}^2}{(\mu-2)\xi^4}-2\frac{c_1}{(2\mu-1)\xi}+c_2\xi^{-2\mu}$$

С учетом граничных условий (7.9) $U\big|_{\xi=1}=\dfrac{c-A}{\lambda c},\quad S\big|_{\xi=1}=U-U^2$, решение принимает вид:

$$S=-\frac{T}{\mu}+\frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)\xi^4}-2\frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)\xi}+\left(\frac{T}{\mu}-\frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)}+2\frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)}+\varepsilon^3-\varepsilon^6\right)\xi^{-2\mu}\qquad(7.11)$$

Безразмерное напряжение на границе полости (ξ=ε) в зависимости от значений коэффициента внутреннего трения определяется следующим образом:

$$U=\varepsilon$$

$$S=-\frac{T}{\mu}+\frac{\varepsilon^2}{(\mu-2)}-2\frac{\varepsilon^2}{(2\mu-1)}+\left(\frac{T}{\mu}-\frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)}+2\frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)}+\varepsilon^3-\varepsilon^6\right)\varepsilon^{-2\mu},$$

В размерном виде напряжение имеет вид:

$$\sigma=\frac{\tau_0}{\mu}\left(1-\varepsilon^{-2\mu}\right)+$$
$$+\rho_{УВ}V_0^2\left(\frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)}+\frac{2\mu+1}{2\mu-1}\cdot\varepsilon^{1-2\mu}-\frac{\mu-1}{\mu-2}\cdot\varepsilon^{4-2\mu}\right),\qquad(7.12)$$

Формулы (7.11), (7.12) не определены при μ=0 и 0,5. Рассмотрим их отдельно.

При μ=0 краевая задача (7.10) запишется следующим образом:

$$U'+2\frac{U}{\xi}=0 \qquad (7.10a)$$

$$S'+2\frac{T}{\xi}=(\xi-U)U'$$

$$U\Big|_{\xi=1}=\frac{c-A}{\lambda c},\quad S\Big|_{\xi=1}=U-U^2,\quad U\Big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon$$

Решение поставленной задачи (7.10a) получаем аналогично предыдущему случаю:

$$S=-2T\ln\xi-\frac{\varepsilon^6}{2}\left(1+\frac{1}{\xi^4}\right)-\varepsilon^3\left(1-\frac{2}{\xi}\right)$$

На границе полости (ξ=ε) напряжение принимает вид:

$$S=-2T\ln\varepsilon-\frac{\varepsilon^6}{2}-\varepsilon^3+\frac{3}{2}\varepsilon^2$$

В размерном виде записывается следующим образом:

$$\sigma=-2\tau_0\ln\varepsilon+\rho_{УВ}V_0^2\left(3/2-\varepsilon-\varepsilon^4/2\right).$$

При μ=0,5 краевая задача (7.10) принимает вид:

$$U'+2\frac{U}{\xi}=0 \qquad (7.10b)$$

$$S'+2\frac{T+0{,}5S}{\xi}=(\xi-U)U'$$

$$U\Big|_{\xi=1}=\frac{c-A}{\lambda c},\quad S\Big|_{\xi=1}=U-U^2,\quad U\Big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon$$

Аналогично определяются напряжения:

$$S=-2T\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{\varepsilon^6}{3}\left(\frac{1}{\xi}+\frac{2}{\xi^4}\right)-\varepsilon^3\left(2\frac{\ln\xi}{\xi}-\frac{1}{\xi}\right)$$

$$S\Big|_{\xi=\varepsilon}=-2T\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)--\frac{\varepsilon^5}{3}+\varepsilon^2\left(2\ln\varepsilon+\frac{1}{3}\right)$$

$$\sigma=-2\tau_0\left(1-\varepsilon^{-1}\right)+\rho_{УВ}V_0^2\left(1/3-2\ln\varepsilon-\varepsilon^3/3\right)$$

Покажем, что решение можно получить предельным переходом в (7.11) и (7.12) при стремлении μ к 0 и 0,5 соответственно:

$$S\Big|_{\mu=0} = \lim_{\mu\to 0}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{T}{\mu} + \dfrac{\varepsilon^6}{(\mu-2)\xi^4} - 2\dfrac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)\xi} + \\ + \left(\dfrac{T}{\mu} - \dfrac{\varepsilon^6}{(\mu-2)} + 2\dfrac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)} + \varepsilon^3 - \varepsilon^6\right)\xi^{-2\mu} \end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{\mu\to 0}\frac{T\left(\xi^{-2\mu}-1\right)}{\mu} - \frac{\varepsilon^6}{2\xi^4} + 2\frac{\varepsilon^3}{\xi} - \frac{\varepsilon^6}{2} - \varepsilon^3 =$$

$$= \lim_{\mu\to 0}\frac{-2T\xi^{-2\mu}\ln\xi}{1} - \frac{\varepsilon^6}{2\xi^4} + 2\frac{\varepsilon^3}{\xi} - \frac{\varepsilon^6}{2} - \varepsilon^3 =$$

$$= -2T\ln\xi - \frac{\varepsilon^6}{2\xi^4} + 2\frac{\varepsilon^3}{\xi} - \frac{\varepsilon^6}{2} - \varepsilon^3$$

$$S\Big|_{\mu=0,5} = \lim_{\mu\to 0,5}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{T}{\mu} + \dfrac{\varepsilon^6}{(\mu-2)\xi^4} - 2\dfrac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)\xi} + \\ + \left(\dfrac{T}{\mu} - \dfrac{\varepsilon^6}{(\mu-2)} + 2\dfrac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)} + \varepsilon^3 - \varepsilon^6\right)\xi^{-2\mu} \end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{\mu\to 0,5}\frac{2\varepsilon^3\left(1-\varepsilon^3\xi^{-2\mu+1}\right)}{(2\mu-1)\xi} - 2T\left(1-\frac{1}{\xi}\right) - \frac{2\varepsilon^6}{3\xi^4} - \frac{\varepsilon^6}{3\xi} + \varepsilon^3 =$$

$$= \lim_{\mu\to 0,5}\frac{-4\varepsilon^6\xi^{-2\mu+1}\ln\xi}{2\xi} - 2T\left(1-\frac{1}{\xi}\right) - \frac{\varepsilon^6}{3}\left(\frac{2}{\xi^4}+\frac{1}{\xi}\right) + \frac{\varepsilon^3}{\xi} =$$

$$= -2T\left(1-\frac{1}{\xi}\right) - \frac{\varepsilon^6}{3}\left(\frac{1}{\xi}+\frac{2}{\xi^4}\right) - \varepsilon^3\left(\frac{2\ln\xi}{\xi}-\frac{1}{\xi}\right)$$

Формула (7.10) для напряжения на границе полости при условии пластичности (7.8) справедлива при значениях напряжений $\sigma < \sigma_m$. При больших значениях напряжений в (7.10) необходимо положить μ=0 и $\tau_0 = \tau_m$.

Для определения неизвестной величины ε с учетом краевого условия (7.9) получается кубическое уравнение:

$$\varepsilon^3 + \frac{\varepsilon}{\lambda M} - \frac{1}{\lambda} = 0, \tag{7.13}$$

где обозначено $M = \dfrac{V_0}{A}$, A и λ - параметры ударной адиабаты (7.6). Уравнение (7.13) определяется только сжимаемостью среды и не зависит от выбранной модели пластичности.

Действительное решение (7.13) по формуле Кардано имеет вид:

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{1}{2\lambda} + \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{27\lambda^3\text{M}^3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2\lambda} - \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{27\lambda^3\text{M}^3}}} \tag{7.14}$$

Рассмотрим так же линейное приближение к c, которое следует из (7.13) с применением разложения в ряд Тейлора

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda^{1/3}}\left(1+\left(-\frac{\varepsilon}{M}\right)\right)^{1/3} \approx \frac{1}{\lambda^{1/3}}\left(1-\frac{\varepsilon}{3M}\right).$$

С учетом $M = \dfrac{V_0}{A}$ и $\varepsilon = \dfrac{V_0}{c}$ получаем:

$$c = \lambda^{1/3}V_0 + A/3 \tag{7.15}$$

Далее приводится сравнение безразмерных напряжений, полученных в рамках задачи о расширения сферической с учетом внутреннего трения. Решение краевой задачи для системы ОДУ, полученное в п. 5 с использованием метода Рунге-Кутта, считается точным и обозначено сплошной линией.

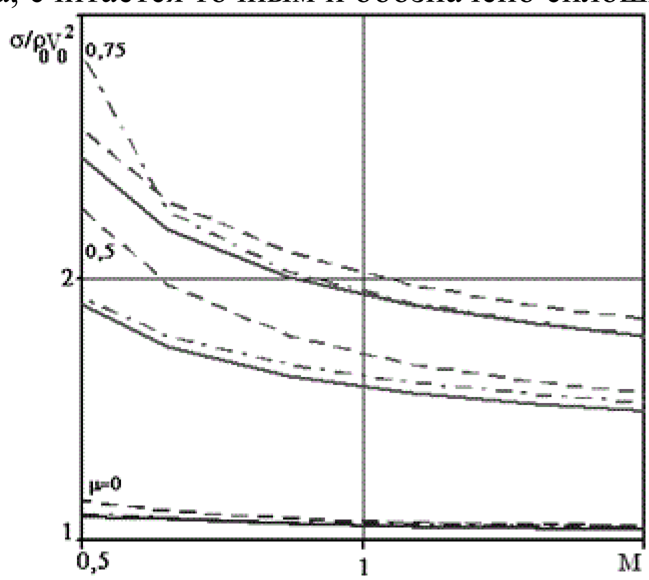


Рис. 7.3. Безразмерные напряжения на границе полости в зависимости от скорости расширения

Штриховой линией на рис. 7.3 обозначены результаты, полученные по формуле (7.14), а штрихпунктирной – приближенной решение (7.15). Сравнения проведены при различных значениях коэффициента внутреннего трения (μ=0; 0,5; 0,75). Отметим, что линейная зависимость (7.15) скорости ударной волны от скорости расширения полости дает меньшую ошибку при определении нормального напряжения на границе полости, чем решение по формулам (7.14), что объясняется сложением погрешностей с разным знаком. Отличие от точных решений растет с ростом μ, при этом характер кривых сохраняется, наилучшее соответствие результатов наблюдается при значении коэффициента внутреннего трения близком к 0.

8. Примеры численной реализации

Пример 1. Рассматривается задача о расширении сферической полости из точки в безграничной среде. Среда считается сжимаемой упругопластической.

Линейная сжимаемость выражается зависимостью давления от объемной деформации θ с постоянным модулем объемного сжатия K=320МПа (4.2): $p = K\theta$. Упругий модуль сдвига G=160 МПа. В пластической области среда подчиняется условию текучести Мизеса-Шлейхера (4.3): $\sigma - \sigma_\theta = \tau_0 + kp$, τ_0=0,5МПа, ρ_0= 2000 кг/м^3, k= 1.

Рассматриваются решения задачи при двух значениях скорости расширения полости. В первом случае упругопластическое решение непрерывно, во втором происходит образование ударной волны, двигающейся с постоянной скоростью.

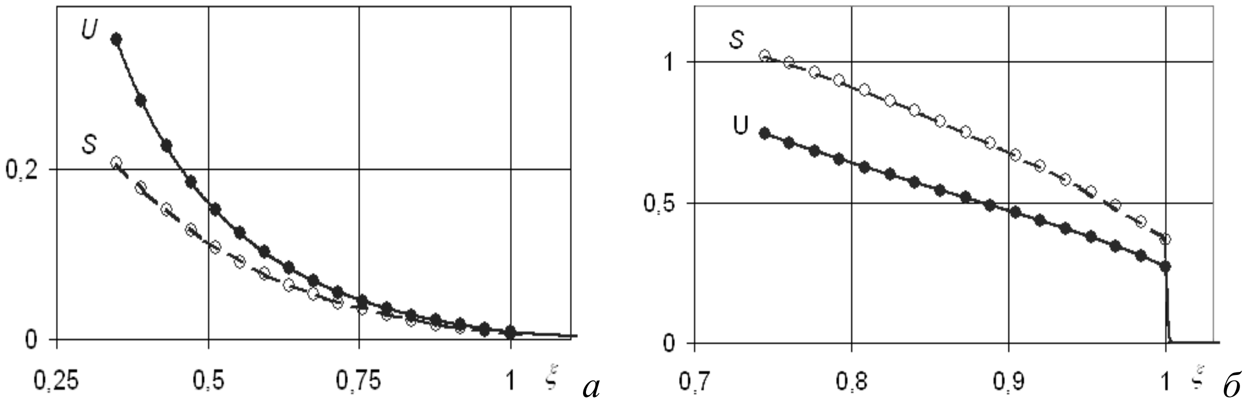


Рис. 8.1. Распределение скоростей и напряжений в зависимости от ξ.

На рис. 8.1 для скоростей расширения полости 150 м/с (*а*) и 450 м/с (*б*) приведены распределения скоростей и напряжений в интервале изменения переменной ξ = [ε , 1]. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным решениям по схеме сквозного счета, маркерами показано автомодельное решение. Из рис 8.1. видно, что полученные решения хорошо согласуются друг с другом.

Пример 2 Рассматривается задача о расширении сферической полости из точки в безграничной нелинейно-сжимаемой среде. Сжимаемость среды характеризуется ударной адиабатой (5.4) $f_1 \equiv \dfrac{\rho_0 A^2 \theta}{(1 - \lambda\theta)^2}$ с параметрами: A= 455 м/с, λ= 2,3, ρ_0= 1700 кг/м^3. Сопротивление среды сдвигу определяется линейной зависимостью предела текучести от давления (5.5): $f_2(\theta) \equiv \tau_0 + \mu\sigma$, ($\mu$=0,6, τ_0=0,01МПа). Параметры упругого предвестника определяются решением М. Форрестола при V<0,4A. Обнаружено, что при $V \geq 0{,}4A$ происходит формирование единой пластической ударной волны. На рис. 8.2 представлены безразмерные распределения нормальных напряжений при начальных скоростях проникания V_0=180 м/с, 275 м/с и 545 м/с. Штриховой линией обозначены безразмерные нормальные напряжения.

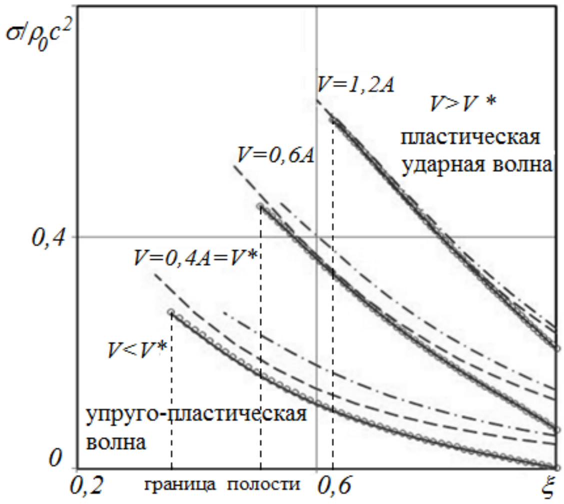


Рис. 8.2. Распределение безразмерных напряжений в зависимости от ξ

Сплошными линиями показаны величины напряжений, полученные в рамках двумерных численных расчетов, маркерами – результаты решения одномерной задачи о расширении сферической полости, которые хорошо согласуются друг с другом. Штриховой линией обозначены распределения, полученные с учетом решения (7.14), а штрих-пунктирной – по приближенной формуле (7.15).

Как видно на графике скорость ударной волны, полученная из решения кубического уравнения (7.14) дает более близкие результаты, чем решение, полученное по приближенной формуле (7.15). Однако, в окрестности полости амплитудные значения напряжений с учетом решения (7.15) (штрих-пунктирная линия на рис. 8.2) оказываются ближе к точному.

Пример 3 Рассматривается задача о расширении сферической полости. Сжимаемость грунтовой среды естественного состава характеризуется ударной адиабатой (6.3): $c = A + \lambda\upsilon$, A= 455 м/с, λ= 2,3, ρ_0= 1700 кг/м^3. Сопротивление среды сдвигу определяется дробно-рациональной зависимостью предела текучести от давления (6.4): $f_2(\theta) = \tau_0 + \dfrac{kp}{1 + kp/(\tau_m - \tau_0)}$, ($k$=1,14, τ_0=0,01МПа, τ_m=275,3МПа). Учитывается упругий предвестник, решение для которого получено Форрестолом (для данных параметров среды V<0,5A) и для случая формирования единой пластической ударной волны ($V \geq 0{,}5A$). На рис. 8.3 представлены безразмерные распределения нормальных напряжений при начальных скоростях проникания V_0=90 м/с, 227,5 м/с и 318,5 м/с.

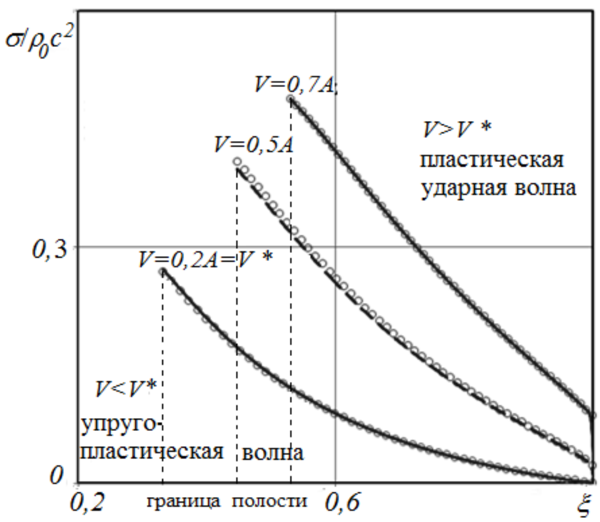


Рис. 8.3. Распределение безразмерных напряжений в зависимости от ξ

Как и ранее сплошным линиям соответствуют величины, полученные в рамках двумерных численных расчетов, маркерам – результаты одномерной задачи о расширении сферической полости, которые хорошо согласуются друг с другом.

Пример 4. Рассматривается задача о расширении сферической полости. Сжимаемость среды характеризуется ударной адиабатой (5.2): $c = A + \lambda \upsilon$, A= 460 м/с, λ= 2,3, ρ_0= 1700 кг/м^3. Сопротивление среды сдвигу определяется линейной зависимостью предела текучести от давления (5.5): $f_2(\theta) \equiv \tau_0 + \mu\sigma$.

На рис. 8.4, *а* изображены относительные погрешности определения скорости пластической ударной волны при различных значениях коэффициента внутреннего трения $\delta_c = (c - c_{1,2})/c \cdot 100\%$, где c – точное решение, а c_1 и c_2 определены по формулам (7.14), (7.15) и показаны штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно при различных значениях коэффициента внутреннего трения.

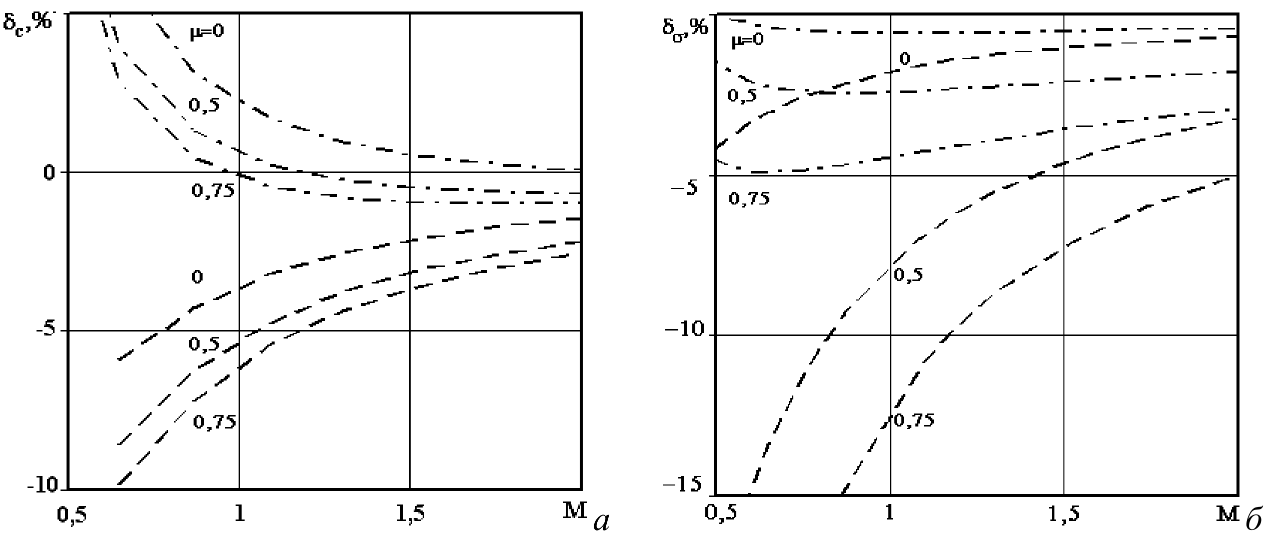
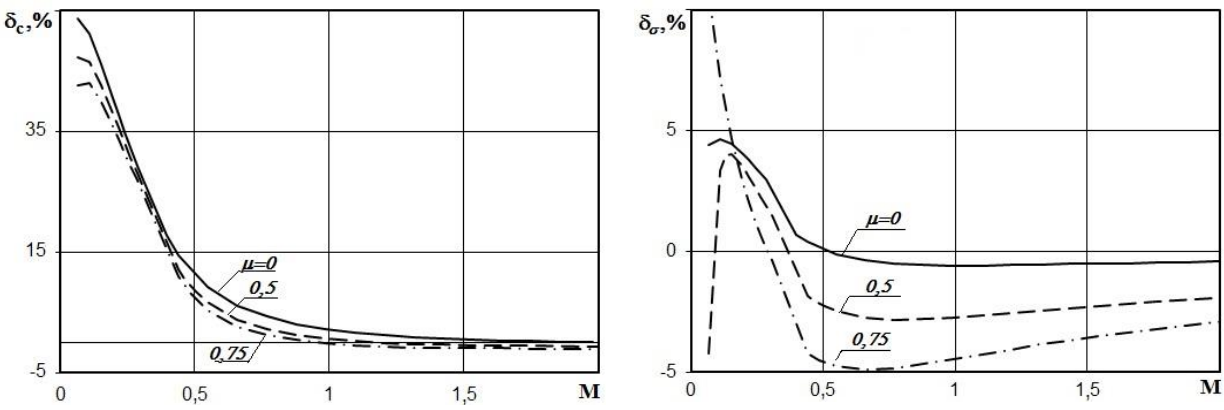


Рис. 8.4. Погрешность определения скорости фронта ударной волны и нормального напряжения при значениях μ=0, 0,5 и 0,75

Относительные погрешности для нормального напряжения на границе полости, приведенные на рис. 8.4, *б*, определены аналогично. Как и ранее штриховой линией обозначены результаты, полученные с учетом формулы (7.14), а штрихпунктирной линией – формулы (7.15). Относительные погрешности для приближенных линейных формул существенно меньше, чем с использованием формулы Кардано. Отмечается уменьшение погрешностей с ростом скорости расширения полости

Таким образом, напряжения на границе сферической полости, расширяющейся из точки с постоянной скоростью в грунтовой среде с известной ударной адиабатой, определяются формулами (7.14), (7.15) с погрешностью менее 5% при относительных скоростях расширения полости $V_0 / A > 0{,}5$ и изменении коэффициента внутреннего трения во всем допустимом диапазоне [0; 0,75].

Погрешности определения скорости пластической ударной волны и нормального напряжения так же можно продолжить на весь диапазон изменения *M*. На рис. 8.5 приведены графики погрешностей при различных значениях коэффициента внутреннего трения с использованием линейного приближения для определения скорости (7.15).



а *б*

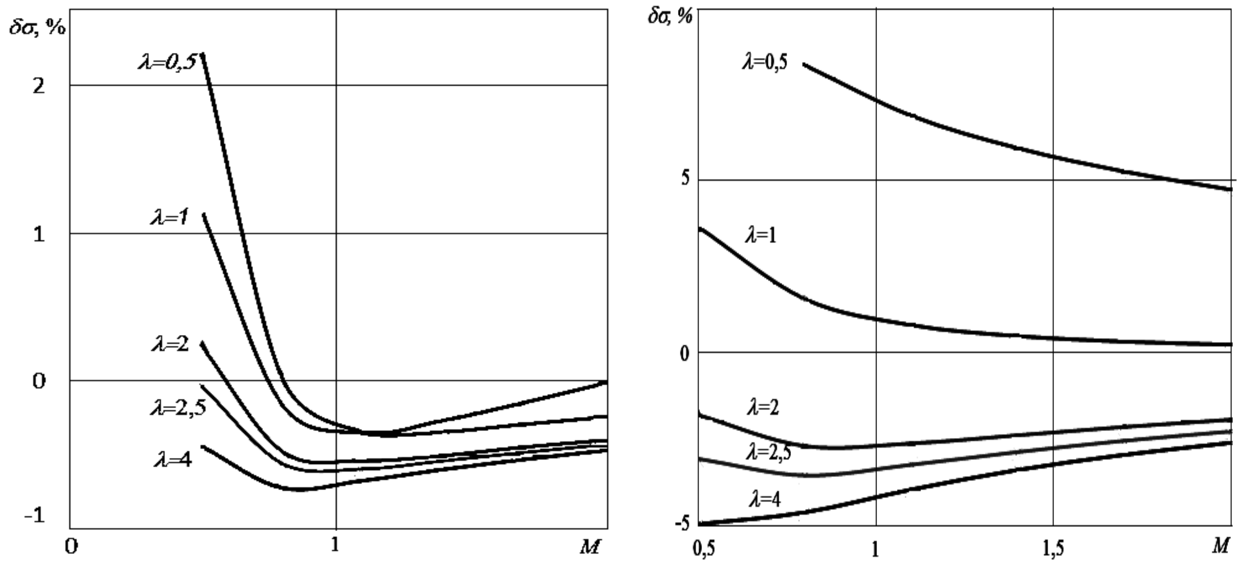
Рис. 8.5. Погрешность определения скорости фронта ударной волны и нормального напряжения

Видно, что при относительной скорости расширения полости M<0,5 погрешность для скорости ударной волны возрастает до 50%. Для нормальных напряжений погрешности не превосходят 5% во всем диапазоне изменения скоростей и лишь при больших значениях коэффициента внутреннего трения (μ=0,75) может значительно возрасти. Полученные оценки показывают, что в дальнейшем при решении задачи проникания можно использовать приближенную формулу для определения скорости ударной волны.

Пример 5. Рассматривается задача о расширении сферической полости. Сжимаемость среды характеризуется ударной адиабатой (5.2), (5.4): $c = A + \lambda\upsilon$,

$f_1 \equiv \dfrac{\rho_0 A^2 \theta}{(1-\lambda\theta)^2}$. Сопротивление среды сдвигу определяется линейной зависимостью предела текучести от давления (5.5): $f_2(\theta) \equiv \tau_0 + \mu\sigma$. Расчеты производились при следующих значениях параметров: А= 460 м/с, $\tau_0 = 0{,}01$, $\rho_0 = 2000$ кг/м^3.

На рис. 8.6, *а* и *б* изображены относительные погрешности нормального напряжения на границе полости для значений параметра $\mu = 0$ и $\mu = 0{,}6$ соответственно при различных значениях коэффициента сжимаемости грунта λ в зависимости от относительной скорости расширения полости V_0 / A. Погрешность ищем следующим образом: $\delta_\sigma = (\sigma - \sigma_1)/\sigma \cdot 100\%$, где σ – точное решение, а σ_1определено по формуле (7.12) .



а *б*

Рис. 8.6. Относительные погрешности для нормального напряжения на границе полости при коэффициенте внутреннего трения μ =0, μ =0,6

Видно, что погрешности в определении напряжения на границе сферической полости, расширяющейся с постоянной скоростью в грунтовой среде с известной ударной адиабатой с использованием формулы (7.12) не превышают 5% при относительных скоростях расширения полости $V_0 / A > 0{,}5$ и изменении параметра предельной сжимаемости в достаточно широком диапазоне [0,5; 4] при допустимых значениях коэффициента внутреннего трения.

Полученные оценки показывают, что приближенную формулу можно использовать в дальнейшем для определения напряжения на границе полости при решении задач проникания.

Приложение 1

Метод стрельбы

Рассматривается [5] задача Коши вида:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = Y_0, & y(1) = Y_1, \end{cases} \qquad (\text{П-1.1})$$

с граничными условиями на обоих концах отрезка $0 \le x \le 1$, на котором надо найти решение *y=y(x).*

Решение задачи (П-1.1) сводится к решению задачи (П-1.2), записанной в виде, удобном для численного решения:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = Y_0, & \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = tg\alpha, \end{cases} \qquad (\text{П-1.2})$$

где Y_0 – ордината точки (0, Y_0), из которой выходит интегральная кривая, α – угол наклона интегральной кривой к оси *Ox.*

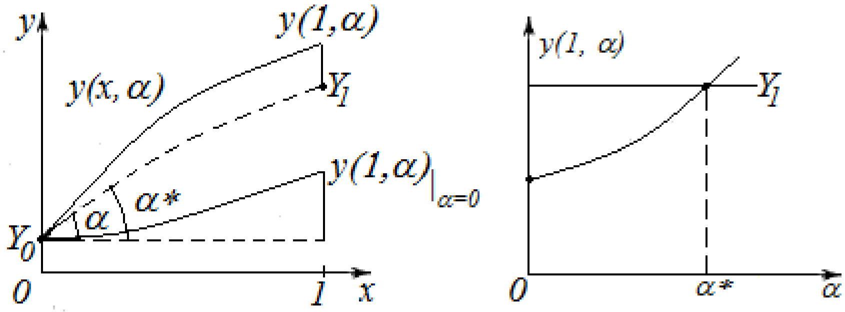


Рис. П-1. Графическое представление задачи Коши

При фиксированном Y_0 решение задачи (П-1.2) имеет вид $y=y(x, \alpha)$. При $x=1$ решение $y(x, \alpha)$ зависит только от α:

$$\left. y(x,\alpha)\right|_{x=1} = y(1,\alpha).$$

Таким образом, задача Коши (П-1.1) заключается в следующем: найти такой угол $\alpha=\alpha*$, при котором интегральная кривая, выходящая из точки (0, Y_0) под углом а к оси абсцисс, попадает в точку (1, Y_1):

$$y(1,\alpha) = Y_1 \qquad (\text{П-1.3})$$

Следовательно, решение задачи Коши (П-1.1) сводится к решению уравнения (П-1.3) типа $F(\alpha) = 0$, где $F(\alpha) = y(1,\alpha) - Y_1$. Применяя к уравнению (П-1.3) метод половинного деления, рекуррентная формула для искомого угла *a* запишется следующим образом:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F(\alpha_n) - F(\alpha_{n-1})}(\alpha_n - \alpha_{n-1}), n = 1, 2, \ldots$$

Процесс выполняется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε: $|y(1, \alpha_n) - Y_1| < \varepsilon.$

Приложение 2

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

Рассматривается задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [13].

Пусть дана следующая система

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{П-2.1}$$

Надо найти $y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x)$, причем

$$y_1(x_0) = y_0, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{П-2.2}$$

Первоначально рассматривается простейший случай:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{П-2.3}$$

При численном решении задача (П-2.1, П-2.2) или (П-2.3) сводится к поиску в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ приближенных значений $y_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, n}$. Точки $x_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, n}$ задают сетку, у которой $\Delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$ - шаг сетки. Если шаг сетки постоянный и обозначить его $\Delta x_\kappa = h,$ то

$$x_\kappa = x_0 + \kappa h, \qquad \kappa = \overline{0, n}.$$

Наиболее известным и широко используемым методом Рунге-Кутты является метод, который представляется следующей формулой

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + h\ell_\kappa, \qquad \ell_\kappa = \frac{1}{6}(\ell_\kappa^{(1)} + 2\ell_\kappa^{(2)} + 2\ell_\kappa^{(3)} + \ell_\kappa^{(4)}),$$

$$\ell_\kappa^{(1)} = f(x_\kappa, y_\kappa), \qquad \ell_\kappa^{(2)} = f\left(x_\kappa + \frac{h}{2}, y_\kappa + \frac{h}{2}\ell_\kappa^{(1)}\right),$$

$$\ell_\kappa^{(3)} = f\left(x_\kappa + \frac{h}{2}, y_\kappa + \frac{h}{2}\ell_\kappa^{(2)}\right), \qquad \ell_\kappa^{(4)} = f(x_\kappa + h, y_\kappa + h\ell_\kappa^{(3)}).$$

Метод, в соотношении с задачами о вычислении интеграла

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx, \qquad x_0 \le x \le \mathrm{X},$$

порожден формулой Симпсона

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{h}{6}(f(x_\kappa) + 4f(x_\kappa + 1/2) + f(x_{\kappa+1})).$$

Этот метод, как и формула Симпсона, имеет четвертый порядок точности.

Рассмотренные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка можно применять и к решению задач Коши для систем. Форма записи претерпевает минимальные изменения:

- числа y_κ заменяем на векторы $\vec{y}_\kappa = (y_{1\kappa}, y_{2\kappa}, \ldots, y_{n\kappa})^{\mathrm{T}}$;

- функции *f* заменяем на вектор-функции $\vec{f}$ и т.д.

В векторной форме задача Коши записывается следующим образом:

$$\frac{d\,\vec{y}}{d\,x} = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0.$$

В случае дифференциального уравнения *n*-ого порядка

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}),$$

задача сводится к решению системы:

$$\frac{dy}{dx} = y_1,$$
$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$
$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Основные формулы выглядят следующим образом

$$\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_\kappa + h\vec{\ell}_\kappa,$$
$$\vec{\ell}_\kappa = \frac{1}{6}(\vec{\ell}_\kappa^{(1)} + 2\vec{\ell}_\kappa^{(2)} + 2\vec{\ell}_\kappa^{(3)} + \vec{\ell}_\kappa^{(4)}),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(1)} = \vec{f}(x_\kappa, \vec{y}_\kappa),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(2)} = \vec{f}(x_{\kappa+1/2}, \vec{y}_\kappa + \frac{h}{2}\vec{\ell}_\kappa^{(1)}),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(3)} = \vec{f}(x_{\kappa+1/2}, \vec{y}_\kappa + \frac{h}{2}\vec{\ell}_\kappa^{(2)}),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(4)} = \vec{f}(x_{\kappa+1}, \vec{y}_\kappa + h\vec{\ell}_\kappa^{(3)}).$$

Для случая системы двух уравнений первого порядка метод Рунге-Кутты определяется следующими выражениями:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad y(x_0) = y_0,$$
$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \qquad z(x_0) = z_0$$

$$l^{(1)} = f(x_k, y_k, z_k) \qquad t^{(1)} = g(x_k, y_k, z_k)$$
$$l^{(2)} = f\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2}l^{(1)}, z_k + \frac{h}{2}t^{(1)}\right) \qquad t^{(2)} = g\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2}l^{(1)}, z_k + \frac{h}{2}t^{(1)}\right)$$
$$l^{(3)} = f\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2}l^{(2)}, z_k + \frac{h}{2}t^{(2)}\right) \qquad t^{(3)} = g\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2}l^{(2)}, z_k + \frac{h}{2}t^{(2)}\right)$$
$$l^{(4)} = f\left(x_{k+1}, y_k + hl^{(3)}, z_k + ht^{(3)}\right) \qquad t^{(4)} = g\left(x_{k+1}, y_k + hl^{(3)}, z_k + ht^{(3)}\right)$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(l^{(1)} + 2l^{(2)} + 2l^{(3)} + l^{(4)}\right) \qquad z_{k+1} = z_k + \frac{h}{6}\left(t^{(1)} + 2t^{(2)} + 2t^{(3)} + t^{(4)}\right)$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Литература

1. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. Прикладная теория проникания. – М.: Наука, 1992. – 105 с.
2. Афанасьев С.Б., Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование динамики сжимаемых упругопластических сред: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2011. – 73 с.
3. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
4. Высокоскоростное взаимодействие тел / Под ред. акад. В.М. Фомина. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 1999. 600 с.
5. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.
6. Григорян С.С. К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1070-1082.
7. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. Определение параметров квадратичной модели локального взаимодействия при внедрении сферического ударника в мягкий грунт // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Вып. 75(1). Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2013. С. 47-55.
8. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Вып. 74. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2012. С. 49-57.
9. Сагомонян А.Я. Проникание. − М.: Изд-во МГУ, 1974. − 299 с.
10. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2- изд. М.: Физматлит. 2002. 320 с.
11. Forrestal M.J., Tzou D.Y., Askari E., Longcope D.B. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods // International Journal of Impact Engineering. 1995. V. 16. № 5/6. P. 699-710.
12. Warren T.L., Hanchak S.J., Kevin L. Penetration of limestone targets by ogive-nosed VAR 4340 steel projectiles at oblique angles: experiments and simulations // International Journal of Impact Engineering. 2004. Vol. 30. P. 1307–1331.
13. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем. Учебно-методическая разработка для студентов механико-математического факультета / Сост. Л.А. Игумнов, В.Л. Котов, С.Ю. Литвинчук, Д.Т.Чекмарев. – Н. Новгород: ННГУ, 2000. – 38 с.

Василий Леонидович **Котов**
Елена Юрьевна **Линник**
Анна Алексеевна **Тарасова**

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.