

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Механико-математический факультет  
Кафедра теории функций

Михаил Александрович Солдатов  
Светлана Серафимовна Круглова  
Евгений Валентинович Круглов

Математический анализ функций нескольких переменных  
Часть 2  
Кратные интегралы

Учебное пособие

Предназначено для студентов физического и радиофизического факультетов

Рекомендовано Методической комиссией  
механико-математического факультета

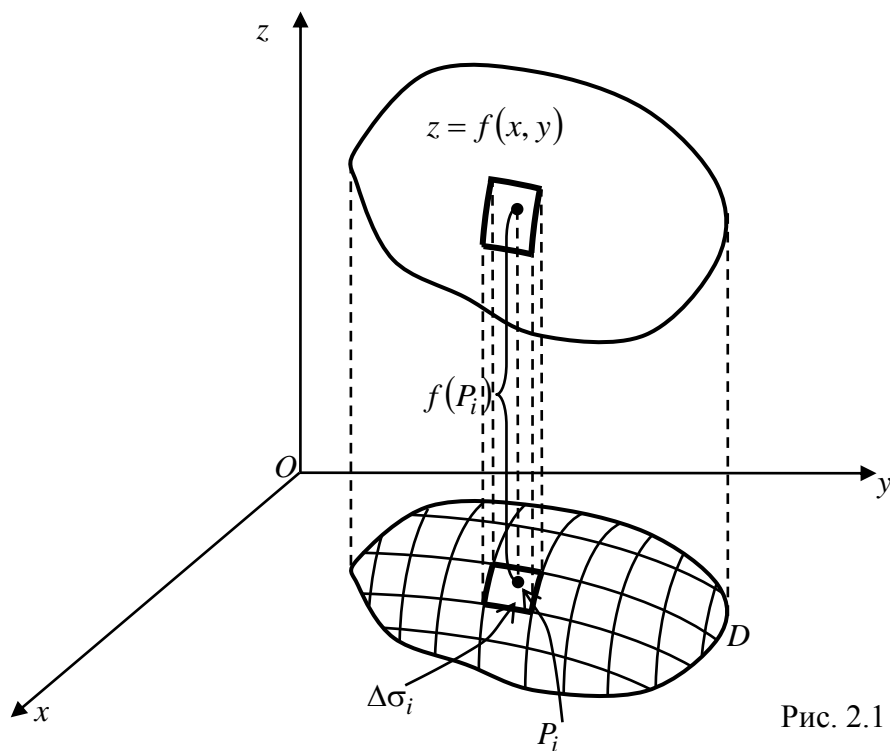
Нижний Новгород, 2014

## § 1. Определение двойного интеграла

1. Задача об объёме цилиндрического тела. Пусть в пространстве  $Oxyz$  имеется цилиндрическое тело, т.е. тело, ограниченное сверху поверхностью  $z = f(x, y) \equiv f(P) \geq 0$  (функцию считаем непрерывной), снизу – областью  $D$  плоскости  $Oxy$ , с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси  $Oz$  и проходящими через границу  $\partial D$ . Определим объём  $V$  этого тела.

Для этого разобьём область  $D$  произвольным образом на  $n$  *частичных областей*  $\Delta\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Возьмём какую-либо точку  $P_i \in \Delta\sigma_i$ , найдём  $z = f(P_i)$  и построим прямой цилиндр с основанием  $\Delta\sigma_i$  и высотой  $f(P_i)$  (рис. 2.1). Его объём  $\Delta\sigma_i \cdot f(P_i)$  принимаем за приближённое значение соответствующего *элементарного* цилиндрического тела, а за объём  $V$  всего тела – сумму

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (2.1)$$



Пусть  $\lambda_i$  - диаметр области  $\Delta\sigma_i$ , а именно: наибольшее из расстояний между любыми двумя граничными точками этой площадки  $\Delta\sigma_i$ ; обозначим  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ . Понятно, что чем меньше все  $\lambda_i$ , и соответственно  $\lambda$ , тем точнее равенство (2.1.); и в пределе получим

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (2.2)$$

Теперь отбросим конкретное содержание таких сумм и дадим общее, математическое определение.

**2. Понятие двойного интеграла.** Пусть дана ограниченная замкнутая область  $D$  и в ней задана некоторая функция  $z = f(P) \equiv f(x, y)$ . Разобьём  $D$  на  $n$  частей, в частичной области  $\Delta\sigma_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) возьмём произвольную точку  $P_i(\xi_i, \eta_i)$  (рис.2.2) и составим сумму

$$A = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Она называется *интегральной суммой* для функции  $f(x, y)$  в области  $D$ . Пусть  $\lambda_i$  - диаметр области  $\Delta\sigma_i$  и  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ .

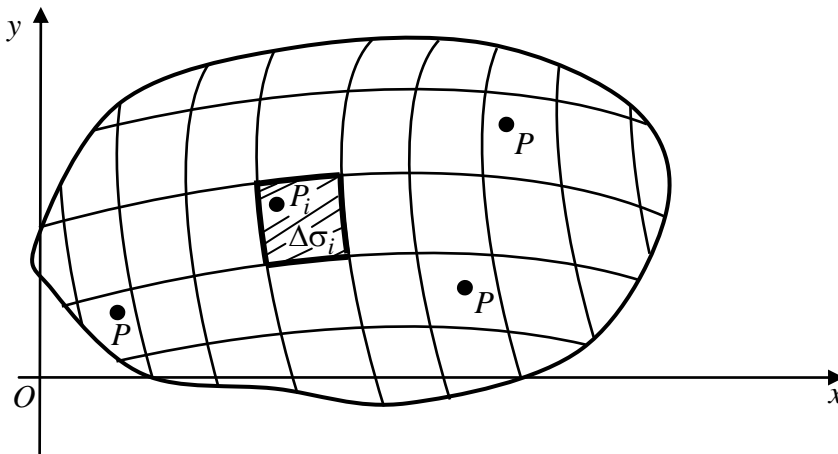


Рис. 2.2

**Определение 1.** Число  $I$ , если оно существует, называется *пределом интегральных сумм* при  $\lambda \rightarrow 0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно найти такое число  $\delta > 0$ , что при  $\lambda < \delta$  будет выполняться неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i \right| < \varepsilon$$

независимо от способов разбиения области  $D$  на частичные области  $\Delta\sigma_i$  и выбора в них точек  $P_i$ . При этом функция  $f(x, y)$  называется *интегрируемой* в области  $D$ , число  $I$  называется *двойным интегралом* от функции  $f(x, y)$  по области  $D$  и обозначается символами

$$I = \iint_D f(P) d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Итак, по определению

$$\iint_D f(P) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (2.3)$$

(Конечный предел подобного вида может существовать только для ограниченных функций.)

Символ  $d\sigma = dx dy$  называется «элементом площади в декартовых координатах», он напоминает элементарную площадку  $\Delta\sigma_i$ ; формально его можно рассматривать как площадь прямоугольника со сторонами  $dx$  и  $dy$ , лежащими на линиях, параллельных осям координат. Никогда  $dx$  и  $dy$  не могут быть рассматриваемы как некие дифференциалы. При  $\lambda \rightarrow 0$  точки  $P_i$  будут пробегать «всю» область  $D$ , поэтому под знаком интеграла поставлена функция  $f(P)$ , где  $P$  символизирует все точки области  $D$ .

Таким образом, объём цилиндрического тела есть

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy - \quad (2.3')$$

в этом простейший *геометрический смысл* двойного интеграла.

Если взять  $f(P) \equiv 1$ , то сумма  $A = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$  даст площадь  $\sigma$  области  $D$  и из

(2.3) получим

$$\sigma = \iint_D d\sigma = \iint_D dx dy. \quad (2.3'')$$

## § 2. Определение тройного интеграла

**1. Задача о массе пространственного тела.** Пусть имеется некоторое пространственное тело  $V$  и задана его объёмная плотность  $\rho = \rho(P)$ ,  $P \in V$  (функцию считаем непрерывной). Требуется определить его массу  $m$ . Для этого разобьём тело  $V$  произвольным образом на большое число  $n$  *малых элементарных объёмов*  $\Delta V_i$  и возьмём точку  $P_i \in \Delta V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). (Рис. 2.3). Если диаметр объёма  $\Delta V_i$  мал, то можем считать, что масса в нём распределена равномерно (тело однородное); тогда его масса примерно равна  $\rho(P_i) \cdot \Delta V_i$ , и масса всего тела

приблизительно будет  $m \approx \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \cdot \Delta V_i$ .

Замечая, что чем меньше элементарные объёмы, тем точнее будет это равенство, в пределе получим точное равенство

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \cdot \Delta V_i,$$

где  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$  и  $\lambda_i$  – диаметр области  $\Delta V_i$ .

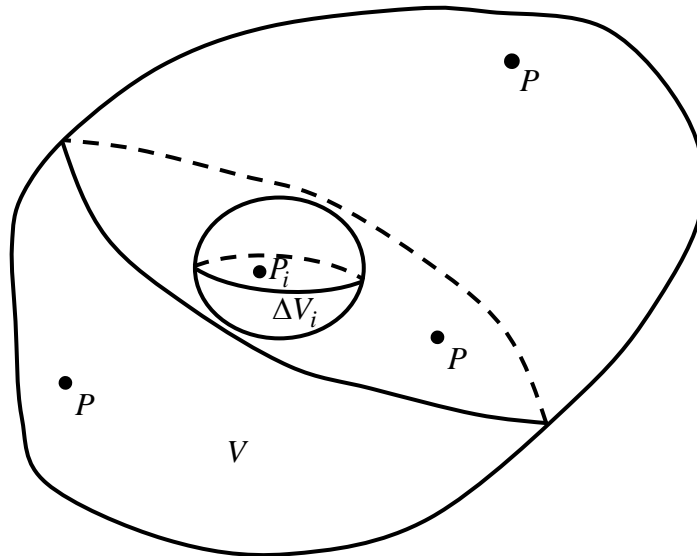


Рис. 2.3

2. Дадим общее определение подобных образований. Пусть в пространстве  $Oxyz$  дана ограниченная замкнутая область  $V$  и в ней задана некоторая функция  $f(P) \equiv f(x, y, z)$ . Осуществим процедуру, описанную в п.1, и составим

сумму  $\sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta V_i$  – она называется интегральной суммой для функции

$f(P)$  в области  $V$ . Величину объёма тела и рассматриваемую область (интегрирования) будем обозначать одной и той же буквой  $V$ . Как и в § 2.1 даётся понятие предела таких сумм при  $\lambda \rightarrow 0$  и имеем

**Определение 2.** Тройным интегралом от функции  $f(x, y, z)$  по области  $V$  называется предел интегральных сумм при  $\lambda \rightarrow 0$ , и обозначается символами

$$\iiint_V f(P) dV = \iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

так что

$$\iiint_V f(P) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta V_i \quad (2.4)$$

Символ  $dV = dx dy dz$  называется элементом объёма в декартовых координатах, по происхождению он напоминает элементарный объём  $\Delta V_i$  и формально его можно рассматривать как объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $dx, dy, dz$ .

В связи со сказанным, масса тела  $V$  с плотностью  $\rho(P)$  будет

$$m = \iiint_V \rho(P) dV \quad (2.4')$$

в этом простейший физический смысл тройного интеграла.

### § 3. Теоремы существования и свойства двойного и тройного интегралов

**1. Теорема существования двойного интеграла.** Для существования двойного интеграла (2.3) достаточно, чтобы функция  $f(x, y)$  в области  $D$  была непрерывной или ограниченной с разрывами на конечном числе линий.

Точно так же формулируется теорема существования тройного интеграла, но для него допускается конечное число «поверхностей разрыва». Терминология, принятая в случаях «одномерного» и двойного интегралов переносится на тройной интеграл.

**2. Свойства двойных и тройных интегралов** (устанавливаются для интегрируемых функций).

1) Величина двойного (тройного) интеграла не изменится, если изменить значения функции на конечном числе кривых (поверхностей), однако, функция должна оставаться ограниченной.

2) Линейность: а) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла; б) интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых.

3) Свойство аддитивности. Если область интегрирования разбита на конечное число частичных областей, то интеграл по всей области будет равен сумме интегралов по частичным областям.

4) Оценка интегралов сверху и снизу. Если  $m \leq f(P) \leq M$ , то

$$m \cdot \sigma \leq \iint_D f(P) d\sigma \leq M \cdot \sigma, \quad (\sigma - \text{площадь области } D);$$

$$m \cdot V \leq \iiint_V f(P) dV \leq M \cdot V, \quad (V - \text{объём тела } V). \quad (2.5)$$

В частности, если  $f(P) \geq 0 = m$ , то интеграл неотрицателен.

5) Теорема о среднем. Если функция  $f(P)$  непрерывна в области интегрирования, то в этой области найдётся такая точка  $P_0$ , что будет иметь место равенство

$$\iint_D f(P) d\sigma = f(P_0) \cdot \sigma, \quad (2.6)$$

$$\iiint_V f(P) dV = f(P_0) \cdot V. \quad (2.7)$$

$\Delta$  Докажем, например, свойства 3 и 5.

3') Приведём доказательство для двойного интеграла. Пусть область  $D$  разбита линией  $C$  на две части  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 2.4). Разобьём  $D$  на частичные области  $\Delta\sigma_i$  произвольно, но так, чтобы линия  $C$  не разбивала ячейки на части. Интегральная сумма по области  $D$  разобьётся на две составляющие

$$\sum_{\Delta\sigma_i \in D} f(P_i) \Delta\sigma_i = \sum_{\Delta\sigma_i \in D_1} f(P_i) \Delta\sigma_i + \sum_{\Delta\sigma_i \in D_2} f(P_i) \Delta\sigma_i.$$

Если здесь перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , то в пределе получим

$$\iint_D f(P) d\sigma = \iint_{D_1} f(P) d\sigma + \iint_{D_2} f(P) d\sigma.$$

Аналогично свойство доказывается и для тройного интеграла.

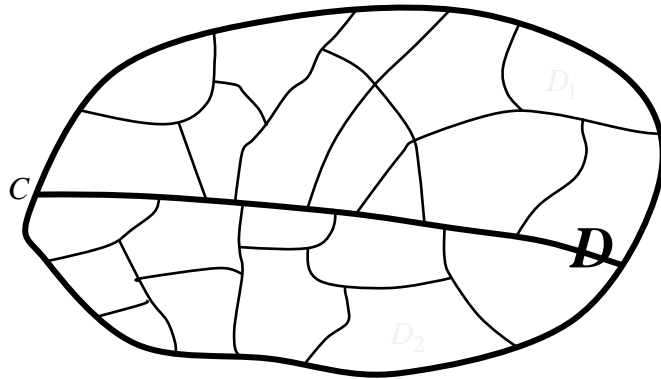


Рис. 2.4

5') Пусть функция  $f(P)$  непрерывна в области  $V$ . Тогда она достигает (имеет) в этой области наибольшее и наименьшее значения  $M$  и  $m$ , так что  $m \leq f(P) \leq M$ ,  $\forall P \in V$ , и, следовательно, верно неравенство (2.5), откуда, обозначая

$$\gamma = \frac{\iiint_V f(P) dV}{V}, \quad (2.8)$$

будем иметь  $m \leq \gamma \leq M$ .

Так как функция непрерывна в области  $V$ , то она принимает все промежуточные значения между значениями  $m$  и  $M$ , а таковым является и число  $\gamma$ , поэтому  $\exists P_0 \in V: f(P_0) = \gamma$ , и тогда из (2.8) следует доказываемое равенство (2.7). (Если рассматривать функцию в области  $D$ , то получим равенство (2.6).) ▲

Дробь в (2.8), а, значит, и число  $\gamma = f(P_0)$ , называется средним значением функции  $f(P)$  в области  $V$ .

Согласно формулам (2.6) и (2.7) казалось бы легко найти интеграл. Однако, это не так: точка  $P_0$  и вместе с тем  $f(P_0)$ , неизвестны. Здесь, наоборот, чтобы найти  $\gamma$ , надо уметь вычислять интеграл.

Отметим, что геометрический смысл равенства (2.6) очевиден.

#### § 4. Вычисление двойного интеграла (сведение к повторным интегралам)

##### 1. Случай прямоугольной области.

**Теорема 2.1.** Если функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условиям теоремы существования двойного интеграла (в частности, непрерывна) в прямоугольнике  $G = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , причём, линии разрыва, если они есть, пересека-

ются с каждой вертикалью и каждой горизонталью разве лишь в конечном числе точек, то имеют место формулы

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (2.9)$$

где при вычислении «внутренних» определённых интегралов соответственно величина  $y$  или  $x$  считается постоянной.

Δ Так как функция  $f(x, y)$  интегрируема, то предел интегральных сумм не зависит от способа разбиения. Разобьём прямоугольник  $G$  на малые прямоугольники: прямыми, параллельными оси  $Oy$  на  $n$  полосок, а параллельными оси  $Ox$  на  $m$  полосок. Тогда промежуток  $[a, b]$  будет разбит на  $n$  частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b,$$

а  $[c, d]$  на  $m$  частей точками

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{k-1} < y_k < \dots < y_m = d.$$

Обозначим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). В элементарном прямоугольнике с площадью  $\Delta \sigma_{i,k} = \Delta x_i \cdot \Delta y_k$  возьмём произвольную точку  $P_{i,k}(\xi_i, \eta_k)$  такую, что  $\xi_i$  одинаковы во всех прямоугольниках с основанием  $\Delta x_i$ , а  $\eta_k$  - в прямоугольниках с основанием  $\Delta y_k$ . Такой выбор возможен, поскольку функция интегрируема, и предел интегральных сумм не зависят от выбора точек  $P_{i,k}(\xi_i, \eta_k)$ . (Рис. 2.5)

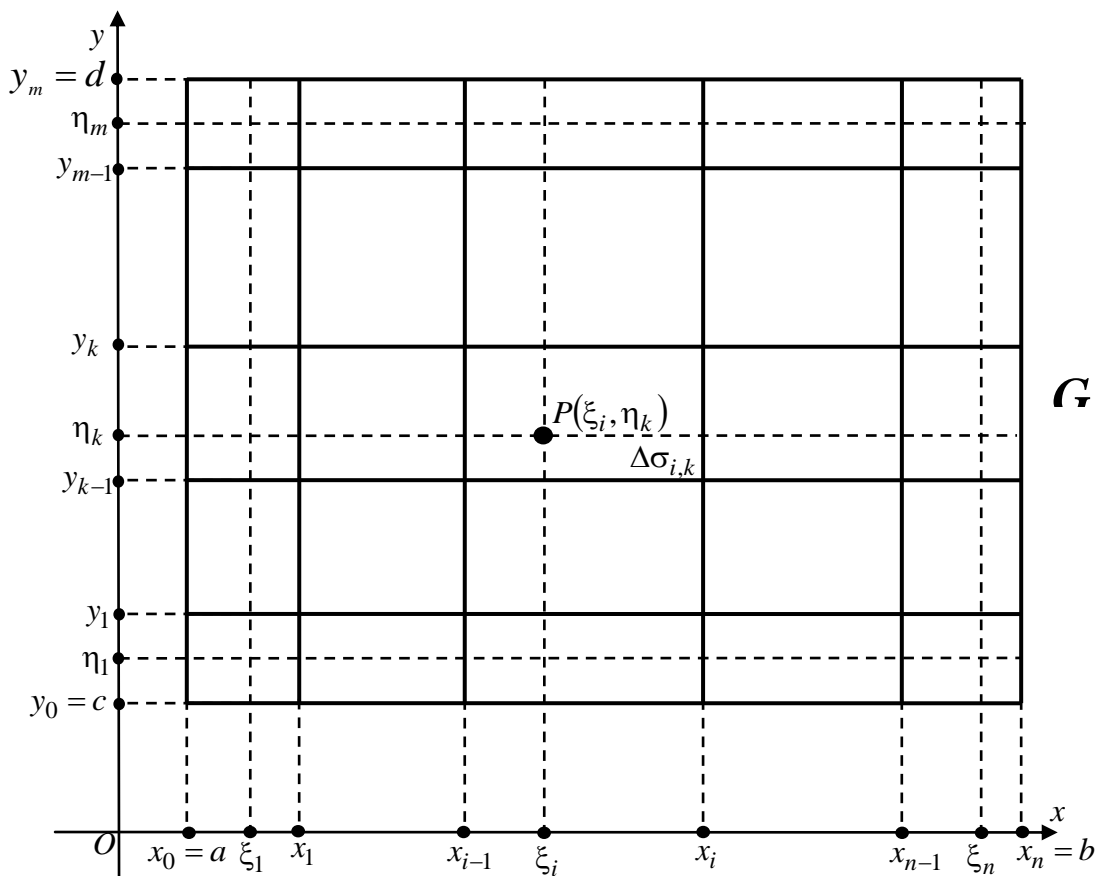


Рис. 2.5



Интегральная сумма примет вид

$$A = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \Delta y_k \equiv \sum_{k=1}^m \Delta y_k \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i.$$

Обозначим  $I = \iint_G f(x, y) dx dy$ . Имеем:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  такое, что неравенство

$$\left| I - \sum_{k=1}^m \Delta y_k \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \right| < \varepsilon \quad (2.10)$$

выполнится, если  $\lambda < \delta$  - при этом тем более  $|\Delta x_i| < \delta$  и  $|\Delta y_k| < \delta$ .

Обозначим  $\int_a^b f(x, y) dx = \Phi(y)$  - при вычислении этого интеграла считается

$y = const$  (это - «интеграл, зависящий от параметра», параметром является  $y$ ); интеграл существует, ибо  $f(x, y)$  при фиксированном  $y$  может иметь лишь конечное число точек разрыва и ограничена. В неравенстве (2.10) перейдём к пределу при  $\lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ . Поскольку внутренняя сумма при фиксированном

$k$  есть интегральная сумма функции  $f(x, \eta_k)$  одного переменного  $x$  на промежутке  $a \leq x \leq b$ , то

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x, \eta_k) dx = \Phi(\eta_k),$$

и в пределе получим

$$\left| I - \sum_{k=1}^m \Phi(\eta_k) \Delta y_k \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \Delta y_k < \delta.$$

Такое неравенство означает, что функция  $\Phi(y)$  интегрируема на промежутке  $c \leq y \leq d$ , причём

$$\int_c^d \Phi(y) dy = I.$$

Итак, получили

$$I \equiv \iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy. \quad (2.11)$$

Меняя роли переменных  $x$  и  $y$  (изменив порядок суммирования в интегральной сумме), можем доказать формулу

$$I \equiv \iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx. \quad (2.12)$$

Интегралы (2.11) и (2.12) обычно записывают в форме (2.9). ▲

Интегралы, стоящие справа в (2.11) и (2.12) (или в середине и справа в формулах (2.9)), называются *повторными* или *двукратными*. Мы доказали, что они равны. При переходе от одного из них к другому, говорят, что *меняется*

порядок интегрирования.

Замечание 1. Теорема 2.1 верна и при более общих предположениях. Именно, предположим: 1) существует двойной интеграл и 2) при каждом  $y = const$  или  $x = const$  существуют соответственно «внутренние интегралы»: по  $[a, b]$  в (2.11) или по  $[c, d]$  в (2.12). Тогда существуют и равны повторные интегралы, и они равны двойному, т.е. верны формулы (2.9).

Это утверждение есть видоизменение теоремы о двойном и повторных пределах (см. теорему 2.1).

## 2. Общий случай.

1) Пусть функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1 или замечания 1 в области  $D$ , причём  $D$  проектируется на ось  $Ox$  в отрезок  $[a, b]$ . Предположим, что каждая вертикаль, проходящая внутри  $D$ , пересекает границу  $\partial D$  области лишь в двух точках. Нижняя точка  $M$  называется точкой входа, верхняя  $N$  – точкой выхода (т.е.  $D$  пересекается вертикалью по единственному отрезку  $MN$ ). Такая область называется *правильной* в направлении оси  $Ox$ . Точки входа образуют нижнюю границу области  $D$ , её уравнение обозначим  $y = y_1(x)$ , а точки выхода – верхнюю границу, с уравнением  $y = y_2(x)$  (см. рис. 2.6).

Пусть на ось  $Oy$  область  $D$  проектируется в отрезок  $[c, d]$ . Заключим  $D$  в прямоугольник  $G = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  – его стороны касаются границы  $\partial D$ , и образуем вспомогательную функцию

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in G \setminus D \end{cases} \quad (2.13)$$

Понятно, что эта функция интегрируема в прямоугольнике  $G$ . По свойству аддитивности и в силу (2.13), имеем

$$\iint_G \varphi(x, y) dx dy = \iint_D \varphi(x, y) dx dy + \iint_{G \setminus D} \varphi(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

С другой стороны, по формулам (2.9)

$$\begin{aligned} \iint_G \varphi(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x, y) dy = \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^{y_1(x)} \varphi(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \varphi(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d \varphi(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \varphi(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2.14)$$

2) Аналогично: пусть область  $D$  проектируется на ось  $Oy$  в отрезок  $[c, d]$  и является *правильной* в направлении линий  $y = const$ . Уравнение левой границы обозначим  $x = x_1(y)$ , правой –  $x = x_2(y)$ , так что при фиксированном  $y$  будет  $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$  для  $(x, y) \in D$  (рис.2.7). Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2.15)$$

**Вывод.** При указанных выше условиях на функцию  $f(x, y)$  (в частности, если она непрерывна) и область  $D$ , двойной интеграл вычисляется по формулам (2.14) или (2.15).

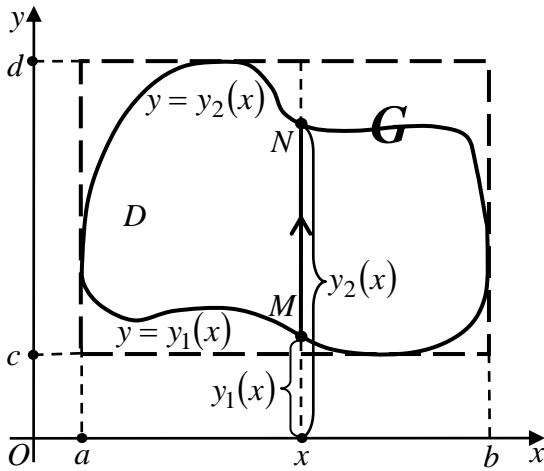


Рис. 2.6

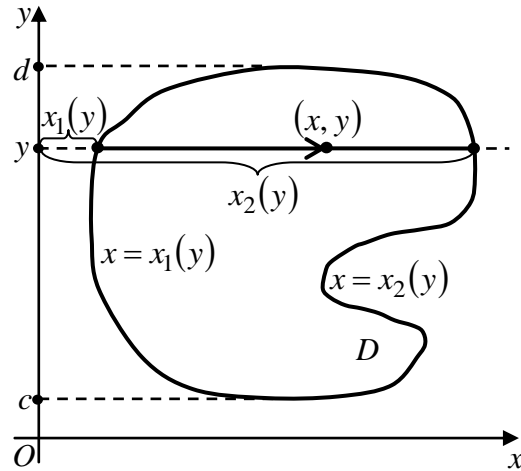


Рис. 2.7

3) Пусть область  $D$  *правильная* в направлении обеих осей  $Ox$  и  $Oy$ . Тогда верны обе формулы (2.14) и (2.15). При переходе от одной из них к другой говорят, что *меняется порядок интегрирования*, при этом, как видим, меняются и *пределы интегрирования*.

4) Если  $D$  не является правильной в направлении оси  $Ox$  или  $Oy$ , то её разбивают на правильные области (в каком-нибудь направлении) и используют свойство аддитивности.

**Замечание 2.** Рассмотрим, например, повторный интеграл (2.14). Внутренний интеграл берётся по вертикальному отрезку  $\{y_1(x) \leq y \leq y_2(x), x = x\}$ , затем результат (это будет функция от  $x$ ) интегрируется по промежутку  $a \leq x \leq b$ . При изменении  $x$  от  $a$  до  $b$  указанный вертикальный отрезок опишет всю область  $D$ . Поэтому можем сказать, что «элементы»  $f(x, y) dx dy$  непрерывно просуммируются (проинтегрируются) по всем точкам  $P(x, y) \in D$ .

**Замечание 3.** Рассмотрим цилиндрическое тело, описанное в § 2.1. Очевидно, внутренний интеграл в (2.14) есть площадь  $S(x)$  сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$  в точке  $x$ , так что  $S(x) dx$  есть элемент объёма слоя с основанием  $S(x)$  высоты  $dx$ . Исходя из сказанного, формула

(2.14) означает, что  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx = V$  – это формула объёма тела (см.

[13, стр. 297, § 10.4, формула (10.17)] с известной площадью поперечных сечений. Таким образом, получили *геометрическую интерпретацию двойного интеграла* – это объём цилиндрического тела.

**Пример.** Вычислить двойной интеграл от функции  $f(x, y) = 8x + 6y$  по

треугольной области  $D$ , ограниченной прямыми  $y = x, y = 2x - 2, y = 0$  (рис.2.8).

Область  $D$  правильная в направлении обеих осей  $Ox$  и  $Oy$ , поэтому для вычисления интеграла можно пользоваться обеими формулами: и (2.14), и (2.15). Однако здесь удобнее пользоваться формулой (2.15), убедимся в этом.

1) Спроектируем область  $D$  на ось  $Oy$  – это отрезок  $0 \leq y \leq 2$ , и применим формулу (2.15):

$$\begin{aligned} \iint_D (8x + 6y) dx dy &= \int_0^2 dy \int_{x=y}^{x=\frac{1}{2}(y+2)} (8x + 6y) dx = \int_0^2 dy [4x^2 + 6yx]_{x=y}^{x=\frac{1}{2}(y+2)} = \\ &= \int_0^2 \left[ 4 \left( \frac{y+2}{2} \right)^2 + 6y \left( \frac{y+2}{2} \right) - (4y^2 + 6y \cdot y) \right] dy = \dots \end{aligned}$$

2) Изменим порядок интегрирования. На ось  $Ox$  область  $D$  проектируется тоже в отрезок  $0 \leq x \leq 2$ , однако, нижняя граница  $y = y_1(x)$  задаётся разными аналитическими выражениями:  $y_1(x) = 0$ , если  $0 \leq x \leq 1$  и  $y_1(x) = 2x - 2$  на участке  $1 \leq x \leq 2$ . Поэтому имеем

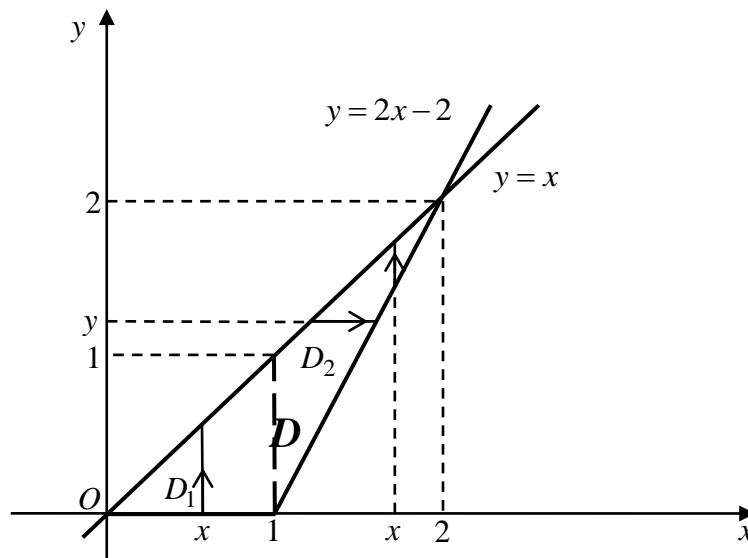


Рис. 2.8

$$\begin{aligned} \iint_D (8x + 6y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_{y=y_1(x)}^{y=x} (8x + 6y) dy = \int_0^1 dx \int_0^x (8x + 6y) dy + \\ &+ \int_1^2 dx \int_{y=2x-2}^{y=x} (8x + 6y) dy = \int_0^1 ([8xy + 3y^2]_{y=0}^{y=x}) dx + \int_1^2 ([8xy + 3y^2]_{y=2x-2}^{y=x}) dx = \\ &= \int_0^1 (8x^2 + 3x^2) dx + \int_1^2 \{ (8x^2 + 3x^2) - (8x(2x-2) + 3(2x-2)^2) \} dx = \dots \end{aligned}$$

К этому же придём, если область  $D$  расцечь на две части  $D_1$  и  $D_2$  прямой  $x = 1$  и применить свойство аддитивности для двойного интеграла.

Довести вычисления до конца труда не представляет.

## § 5. Криволинейные координаты на плоскости и замена переменных в двойных интегралах

1. Говорят, что на плоскости (или в области  $D$ ) введена система координат, если указан способ, по которому каждой точке плоскости (области  $D$ ) соответствует определённая пара чисел и наоборот. Рассмотрим такие способы. Возьмём в системе координат  $Oxy$  область  $D$  и в системе  $Ouv$  область  $\Delta$ . И пусть дана система функций

$$\{x = x(u, v), y = y(u, v)\}, \quad (2.16)$$

непрерывных в области  $\Delta$ . Пусть эта система каждую точку  $Q(u, v) \in \Delta$  переводит (отображает) в определённую точку  $P(x, y) \in D$ , причём, когда точка  $Q$  пробежит всю область  $\Delta$ , то соответствующая точка  $P$  пробежит всю область  $D$ . Более того, предположим, что система (2.16) однозначно разрешима относительно  $u$  и  $v$  в области  $\Delta$ . Обозначим решение в виде

$$\{u = u(x, y), v = v(x, y)\}. \quad (2.17)$$

Так что каждой точке  $P(x, y) \in D$  соответствует одна точка  $Q(u, v) \in \Delta$ .

При отображении (2.16) точка  $Q$  и область  $\Delta$  называются прообразом, а  $P$  и  $D$  – образом.

В описанной ситуации говорят, что с помощью формул (2.16) или (2.17) между областями  $D$  и  $\Delta$  установлено взаимно-однозначное (или однолистное) отображение. Формулы (2.16) преобразуют (отображают) область  $\Delta$  в область  $D$ , а формулы (2.17) – наоборот.

Взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение областей называется *гомеоморфным* или *топологическим*. При таких отображениях областей внутренние точки переходят во внутренние и граничные – в граничные (однако на границе взаимная однозначность может нарушаться).

Поскольку задание пары чисел  $(u, v) \in \Delta$  взаимно-однозначно определяет точку  $P(x, y) \in D$ , то  $u$  и  $v$  называются координатами (причём *криволинейными*) точки  $P$  и её определяют как точку  $P(u, v)$ .

Всякая непрерывная кривая  $L \subset \Delta: \{u = u(t), v = v(t)\}$ , отображается тоже в непрерывную кривую  $\Gamma \subset D: \{x = x(u(t), v(t)) \equiv x(t), y = y(u(t), v(t)) \equiv y(t)\}$ , т.к. суперпозиция непрерывных функций есть тоже функция непрерывная. Прямая  $L_1 \subset \Delta: u = \text{const} = u_0$  отобразится в кривую  $\Gamma_1 \subset D: \{x = x(u_0, v), y = y(u_0, v)\}$ . Она называется: координатная  $v$ -линия, или линия  $(v)$ , – вдоль неё меняется только переменная  $v$ . Неявное уравнение этой линии получим, если положить  $u = u_0$  в первом из уравнений (2.17):  $u(x, y) = u_0$ . Аналогично, прямая  $L_2: v = \text{const} = v_0$  отобразится в кривую  $\Gamma_2: \{x = x(u, v_0), y = y(u, v_0)\}$  – это есть координатная  $u$ -линия или линия  $(u)$ . Понятно, что точки пересечения линий (образов и прообразов) соответствуют друг другу. Меняя  $u_0$  и  $v_0$ , получим на плоскости  $Oxy$  два семейства координатных линий. Таким образом, на плоско-

сти  $Oxy$  получится криволинейная сетка координатных линий, которая является отображением сетки прямых  $u = const$  и  $v = const$ , находящихся на плоскости  $Ouv$ . Если криволинейные координатные линии ортогональны, то система криволинейных координат  $(u, v)$  в плоскости  $Oxy$  называется прямоугольной или ортогональной (см. рис. 2.8 и 2.9).

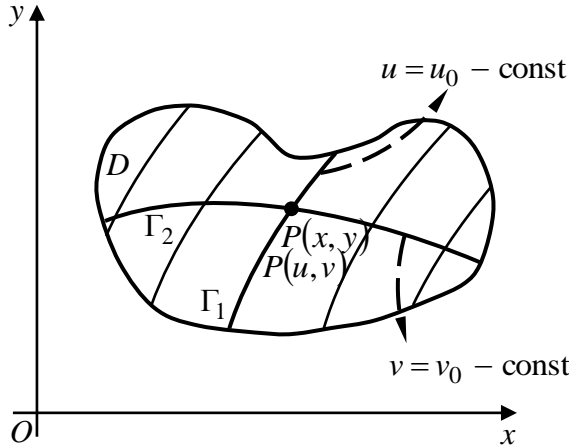


Рис. 2.8

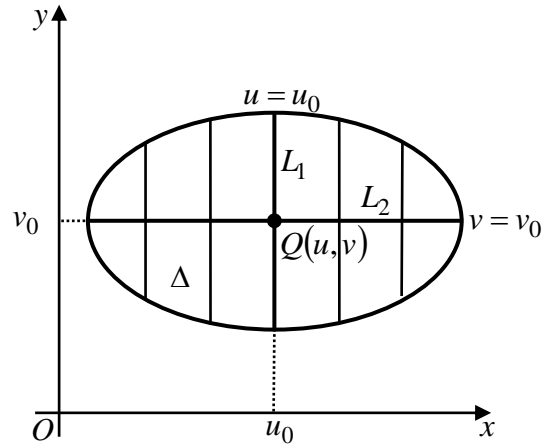


Рис. 2.9

**Замечание.** Далее будем предполагать, что функции (2.16) непрерывно дифференцируемы. Понятно, что в описанной выше ситуации эти функции независимы, в противном случае они были бы связаны уравнением  $F(x, y) = 0$ , и область  $\Delta$  отобразилась бы не в область, а в кривую. Для однозначной разрешимости системы (2.14) относительно  $u$  и  $v$  естественно предполагать, что отличен от нуля функциональный определитель системы (см. гл.1, §1.8):

$$I(u, v) \equiv \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.18)$$

**Примеры.** 1)  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ . Здесь криволинейные координаты имеют про-

стой геометрический смысл – это полярные координаты. Соответствие будет взаимно-однозначным, если  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (или  $-\pi < \varphi \leq \pi$  и т.п.) и  $\rho > 0$ . Область  $D$  – вся плоскость  $Oxy$ , а  $\Delta$  – горизонтальная полуполоса в плоскости  $O\rho\varphi$ . Криволинейная координатная сетка состоит из лучей, исходящих из начала, и концентрических окружностей с центром в начале: сетка ортогональная. (Рис. 2.10, 2.11).

2)  $\begin{cases} x = \rho a \cos \varphi \\ y = \rho b \sin \varphi \end{cases}, a \neq b$ . Здесь криволинейная координатная сеть в плоско-

сти  $Oxy$  состоит из лучей и эллипсов; координаты не ортогональны.

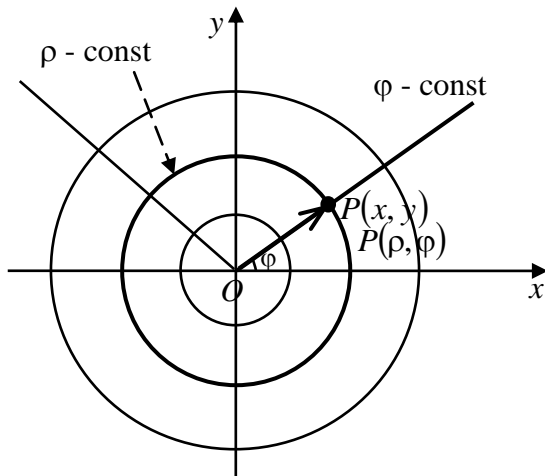


Рис. 2.10

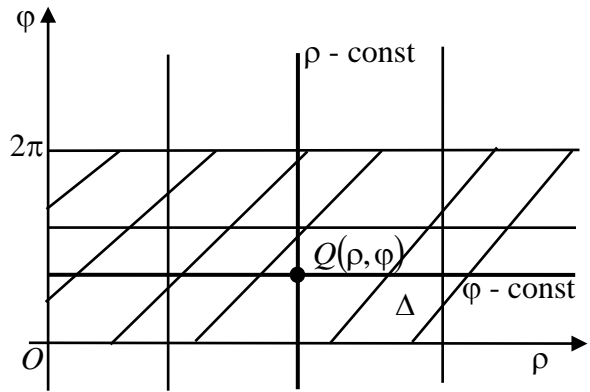


Рис. 2.11

## 2. Выражение площади в криволинейных координатах.

Изучим вопрос о том, как связаны площади соответствующих областей  $D$  и  $\Delta$  при отображении (2.16). Для этого вначале найдём формулу, связывающую элементарные площадки, при этом используем приближённое равенство (см. гл.1, § 1.3, п.3):

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx F(u, v) + dF(u, v). \quad (2.19)$$

Рассмотрим бесконечно малый прямоугольник  $QQ_1Q_2Q_3$  на плоскости  $Ouv$ . Он отобразится в криволинейный координатный четырёхугольник  $PP_1P_2P_3$  с вершинами (см. рис.2.12, 2.13):  $P(x(u, v), y(u, v))$ ,  $P_1(x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v))$ ,  $P_2(x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v))$ ,  $P_3(x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v))$ . Пользуясь формулой (2.19), с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем  $\Delta u$  и  $\Delta v$ , запишем:

$$\begin{aligned} &P(x(u, v), y(u, v)), P_1\left(x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u\right), \\ &P_2\left(x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right), \\ &P_3\left(x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right). \end{aligned}$$

Отсюда, также с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем  $\Delta u$  и  $\Delta v$ , определяются векторы  $\overrightarrow{PP_1} \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\}$ ,  $\overrightarrow{P_3P_2} \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right\}$ ,  $\overrightarrow{PP_3} \left\{ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right\}$ , и опять с указанной же точностью  $\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{P_3P_2}$ , т.е. фигура  $PP_1P_2P_3$  есть почти параллелограмм. Его площадь  $\Delta\sigma$  найдём как модуль векторного произведения

$$\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_3} \approx \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} \vec{k}$$

(поэтому площадь иногда изображают вектором, перпендикулярным к самой площадке).

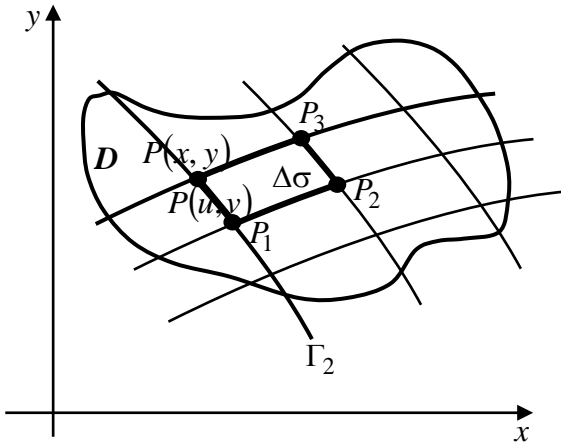


Рис. 2.12

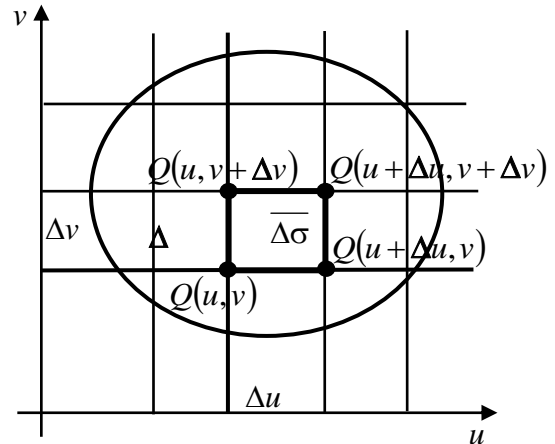


Рис. 2.13

Итак, имеем

$$\Delta \sigma \approx \left| \overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_3} \right| \approx \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v = |I(u, v)| \cdot \Delta u \cdot \Delta v, \quad (2.20)$$

где  $I(u, v)$  - якобиан системы (2.16). Отсюда площадь  $\sigma$  области  $D$  будет

$$\sigma = \sum \Delta \sigma \approx \sum |I(u, v)| \cdot \Delta u \Delta v,$$

откуда в пределе при  $\lambda = \max \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \rightarrow 0$  получим точное равенство

$$\sigma \equiv \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} |I(u, v)| du dv. \quad (2.21)$$

Выражение  $d\sigma = |I(u, v)| du dv$  называется элементом площади в криволинейных координатах – это есть главная часть площади, ограниченной координатными линиями  $u, u + du, v, v + dv$  (здесь  $u = const, u + du = const$  и  $v = const, v + dv = const$ ).

Пусть  $\overline{\Delta \sigma} = \Delta u \cdot \Delta v$  – это площадь соответствующего прямоугольника  $QQ_1Q_2Q_3$ . Из (2.20) имеем  $\frac{\Delta \sigma}{\overline{\Delta \sigma}} = |I(u, v)| + \text{б. м.}$ , откуда в пределе получим

$\lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\overline{\Delta \sigma}} = |I(u, v)|$ . Таким образом,  $|I(u, v)|$  можно рассматривать как коэффициент растяжения, или искажения, плоскости  $Ouv$  в данной точке  $(u, v)$



при отображении её в плоскость  $Oxy$ .

Замечание. Предположим, что  $\Delta\sigma$  и  $\overline{\Delta\sigma}$  - произвольные площадки, отображающиеся друг в друга. Можно доказать, что найдётся точка  $Q_0 \in \overline{\Delta\sigma}$ , что будет верно точное равенство  $\Delta\sigma = |I(Q_0)| \cdot \overline{\Delta\sigma}$ .

**3. Замена переменных в двойных интегралах.** Рассмотрим двойной интеграл (2.3). Сделаем замену переменных  $x$  и  $y$  по формулам (2.16). Тогда

$$f(P) = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) \equiv \varphi(u, v) = \varphi(Q). \quad (2.22)$$

Разобьём область  $\Delta$  на части  $\overline{\Delta\sigma}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). В области  $D$  получим соответствующее разбиение на области  $\Delta\sigma_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Согласно формуле (2.21),

$$\Delta\sigma_i = \iint_{\Delta\sigma_i} |I(u, v)| du dv.$$

По теореме о среднем  $\exists Q_i \in \overline{\Delta\sigma}_i : \Delta\sigma_i = |I(Q_i)| \cdot \overline{\Delta\sigma}_i$ . Возьмём точку  $P_i \in \Delta\sigma_i$ , соответствующую точке  $Q_i$  при отображении (2.16). В силу (2.22),  $f(P_i) = \varphi(Q_i)$ .

Тогда  $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(Q_i) |I(Q_i)| \overline{\Delta\sigma}_i$ . Справа имеем

интегральную сумму для функции  $\varphi(Q) |I(Q)|$  по области  $\Delta$ ;  $\bar{\lambda}$  - наибольший из диаметров областей  $\overline{\Delta\sigma}_i$ , который тоже стремится к нулю в силу непрерывности отображения. Поэтому последний предел даст  $\iint_{\Delta} \varphi(Q) |I(Q)| dudv$ . Итак, получили формулу замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |I(u, v)| dudv. \quad (2.23)$$

Вывод. Если функции (2.16) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между областями  $D$  и  $\Delta$ , непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области  $\Delta$ , то справедлива формула (2.23), где  $I(u, v)$  - функциональный определитель (2.18) системы функций (2.16).

В интеграле, стоящем справа в (2.23), вместо  $\Delta$  можно писать тоже  $D$ , но иметь в виду, что пределы интегрирования по области  $D$  надо расставлять в криволинейных координатах.

Замечание. Опишем процесс расстановки пределов интегрирования – сведения к повторным интегралам. (См. рис. 2.14 и 2.15.)

Допустим, область  $\Delta$  правильная в направлении координатной оси  $Ov$ . Тогда, расставляя пределы интегрирования по области  $\Delta$  в интеграле, находящемся в правой части формулы (2.23), получим

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} du \int_{v=v_1(u)}^{v=v_2(u)} f(x(u, v), y(u, v)) |I(u, v)| dv. \quad (2.24)$$

Однако, расставить пределы можно и не выходя из области  $D$ . *Предполагаем, что она правильная в направлении координатной линии  $u = const$ :  $M$  (образ точки  $\overline{M}$ ) – точка входа,  $N$  (образ точки  $\overline{N}$ ) – точка выхода. На границе  $\partial D$*

определяем точки  $A$  и  $B$  (образы точек  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ ) с наименьшей  $\alpha$  и наибольшей  $\beta$  криволинейной координатой  $u$  – это будут внешние пределы интегрирования. Пусть уравнение границы  $\partial D$  есть  $F(x, y) = 0$ , а значит, в криволинейных координатах  $F(x(u, v), y(u, v)) = 0$  – это уравнение границы  $\partial \Delta$ . Отсюда находим два решения  $v = v_1(u)$  и  $v = v_2(u)$ ,  $v_1(u) < v_2(u)$  которые и определяют внутренние пределы интегрирования.

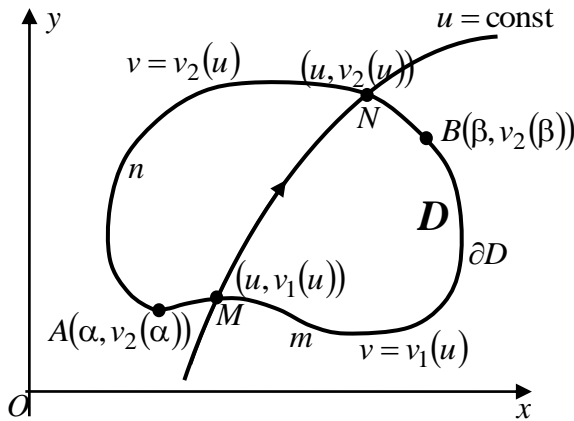


Рис. 2.14

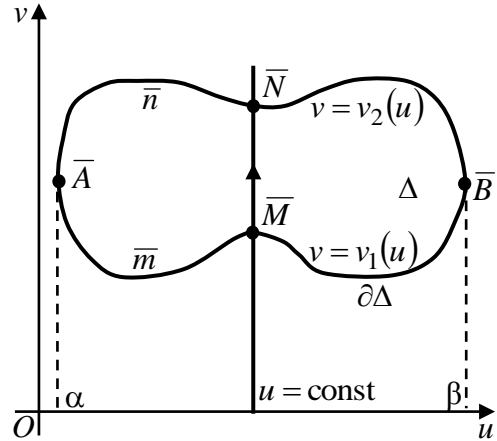


Рис. 2.15

#### 4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Произведём замену переменных  $x$  и  $y$  по формулам:

$$\{x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi\}, \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Находим якобиан

$$I = I(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Поэтому элемент площади  $d\sigma = \rho d\rho d\varphi$ . Его легко получить и геометрическим путём. Изобразим координатный четырёхугольник  $PP_1P_2P_3$ ; он мал, углы у него прямые, т.к. координаты  $(\rho, \varphi)$  ортогональны (рис. 2.16). Значит, его можно считать прямоугольником со сторонами  $PP_1 = d\rho$  и  $PP_3 = \rho d\varphi$  (это длина дуги окружности), поэтому  $d\sigma = \rho d\rho d\varphi = \rho \overline{\Delta\sigma}$ , отсюда  $I = \rho$ .

Переходя к полярным координатам, имеем

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi. \quad (2.25)$$

а) Пусть область  $D$  не содержит начало координат и является правильной в направлении координатных линий  $\varphi = const$  – это лучи, исходящие из начала; уравнения  $\rho = \rho_1(\varphi)$  и  $\rho = \rho_2(\varphi)$  – уравнения нижней и верхней границ. (Рис. 2.17). Воспользовавшись равенством (2.24), получим формулу для вычисления двойного интеграла с помощью повторного:

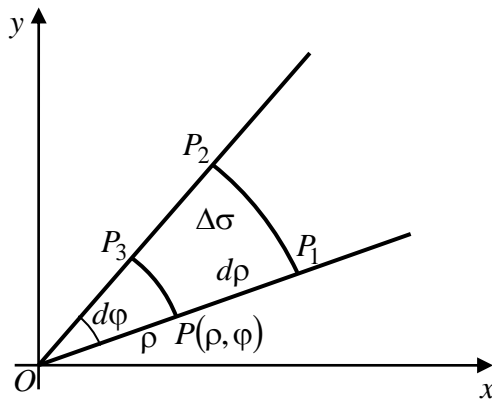


Рис. 2.16

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Изменим порядок интегрирования, считая область  $D$  правильной в направлении координатных линий  $\rho = const$  (рис. 2.18), тогда формула примет вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho d\rho \int_{\varphi=\varphi_1(\rho)}^{\varphi=\varphi_2(\rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi.$$

Здесь внутреннее интегрирование проводится вдоль дуги окружности  $\rho = const$ . В таком порядке интегрирование употребляется реже.

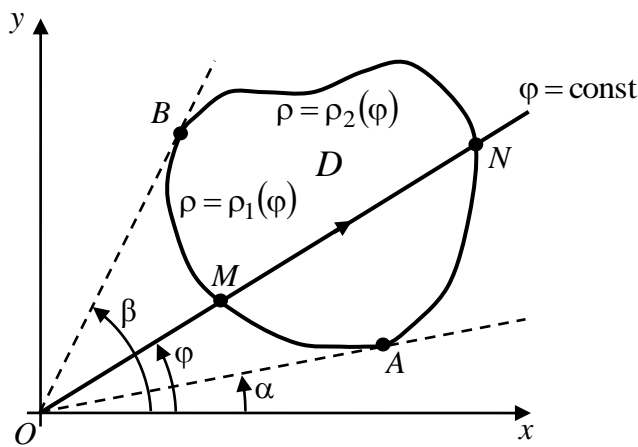


Рис. 2.17

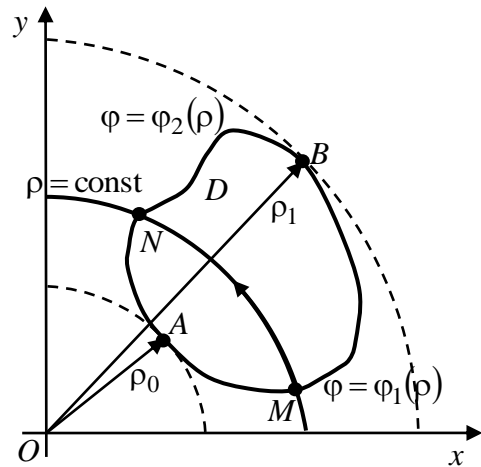


Рис. 2.18

б) Допустим, полюс  $O$  содержится внутри области  $D$ , любой полярный радиус, т. е. линия  $\varphi = const$ , пересекает границу в одной точке (такая область называется *звёздной* относительно полюса) и полярное уравнение границы есть  $\rho = \rho(\varphi)$  (рис. 2.19). Рассекаем область по лучу  $\varphi = 0$ , тогда луч  $\varphi = const$  при изменении  $\varphi$  в промежутке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  опишет всю область, и получим

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho=\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

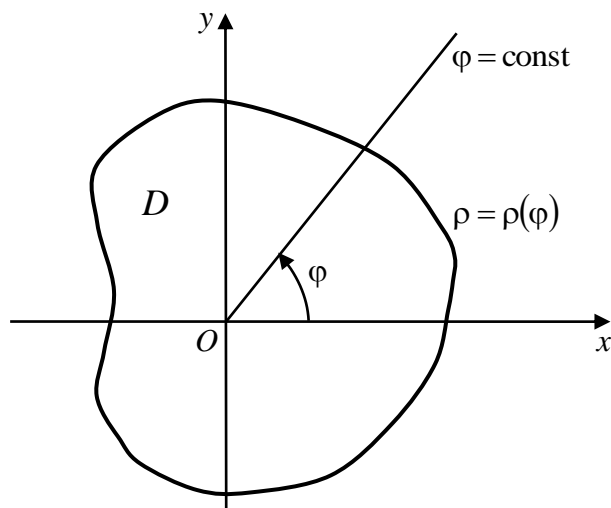


Рис. 2.19

в) Очень удобно и особенно просто переходить к полярным координатам, когда область  $D$  есть круг, круговое кольцо с центром в начале (рис.2.20) или их части. Например, для круга радиуса  $R$  (рис. 2.21)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi.$$

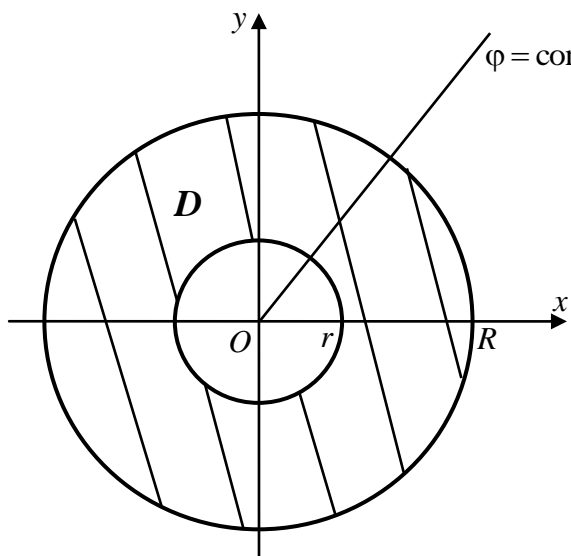


Рис.2.20

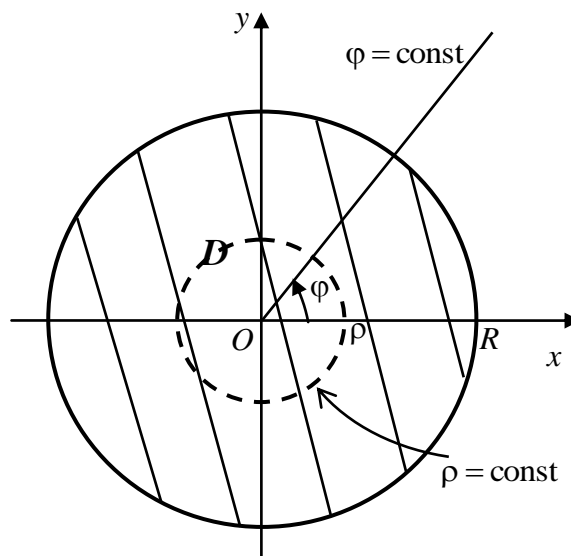


Рис.2.21

Замечание. При вычислении двойных интегралов удобно переходить к полярным координатам, если уравнение границы содержит двучлен  $x^2 + y^2$ . Вычисления при этом значительно упрощаются.

Примеры. 1) Найти площадь  $\sigma_1$  плоской фигуры  $D$ , ограниченной частью лемнискаты Бернулли  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  лежащей вне окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  (рис. 2.22). Видели, что площадь  $\sigma$  области  $D$  есть. Тогда

$$\sigma = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} \rho d\varphi d\rho.$$

Наличие двучлена  $x^2 + y^2$  в обоих уравнениях наводит на мысль перейти к полярным координатам; после преобразований получим уравнения границ в виде  $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$  и  $\rho^2 = a^2$ . Найдём координаты точек пересечения  $(\rho, \varphi)$  этих двух кривых. Имеем:  $\rho = a$ , и тогда из первого уравнения получим  $2\cos 2\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$  – достаточно взять только одно значение  $\varphi$ , поскольку область  $D$  симметрична относительно осей координат. Поэтому искомая площадь будет равна учетверённой площади  $\sigma$  замкнутой области  $\Delta$ , определяемой неравенствами  $a \leq \rho \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ . По формуле для вычисления площади  $\sigma = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} |I(u, v)| du dv$  в данном случае имеем:

$$\sigma_1 = 4\sigma = 4 \iint_{\Delta} \rho d\varphi d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1) d\varphi = 2a^2 (\sin 2\varphi - \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2.$$

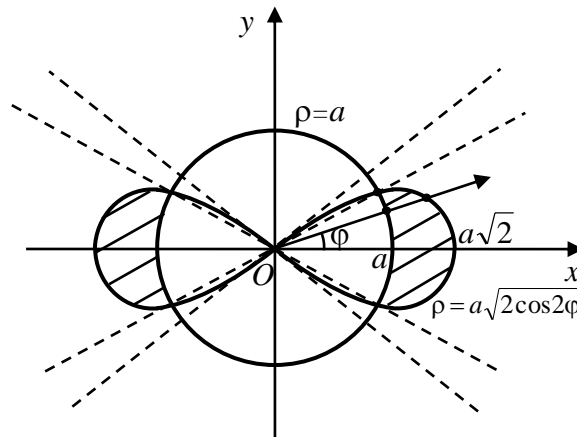


Рис. 2.22

2) Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $D$  ограничена окружностями  $x^2 + y^2 = x$  и  $x^2 + y^2 = 2x$  (рис. 2.23).

Перейдём к полярным координатам. Учитывая уравнения границ в полярных координатах, имеем:  $\rho_1 = \cos \varphi \leq \rho \leq \rho_2 = 2\cos \varphi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2\cos \varphi} \rho^3 d\rho = \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{15}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \dots = \frac{45}{32} \pi.^1$$

<sup>1</sup> Двойные интегралы впервые ввёл Л. Эйлер (1769г.), но он «тяжко сомневался» в правильности выведенной им формулы замены переменной, ибо вместо  $|I|$  у него стояло просто  $I$  – а при  $I < 0$  площадь получалась отрицательной. Потом вывести эту формулу пытался Ж.Л.

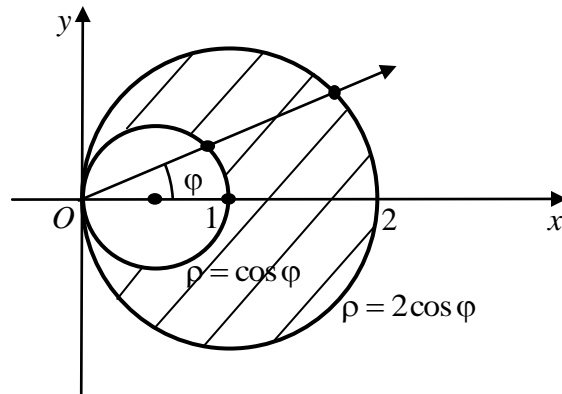


Рис. 2.23

## § 6. Вычисление тройных интегралов

**1. Случай декартовых координат.** Рассмотрим тройной интеграл (2.4). Будем предполагать, что функция  $f(P)$  удовлетворяет условиям теоремы существования (см. §2.3). Пусть тело  $V$  проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$  и является правильным в направлении оси  $Oz$ , то есть каждая вертикаль, проходящая внутри  $V$ , пересекает границу  $\partial V$  только в двух точках. Обозначим уравнение нижней границы (геометрическое место точек входа)  $z = z_1(x, y)$ , а верхней границы (точек выхода) —  $z = z_2(x, y)$ . Эти функции однозначны и предполагаем, что они непрерывны в области  $D$ .

Область  $D$  разобьём на  $n$  частей  $\Delta\sigma_i$  и возьмём в них по точке  $Q_i(\xi_i, \eta_i)$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Построим элементарные цилиндры с основаниями  $\Delta\sigma_i$ , тогда тело рассечётся на  $n$  «столбиков». Далее разрежем  $V$  плоскостями  $z = z_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) на  $m$  горизонтальных слоёв. В результате тело разбивается на элементарные объёмы  $\Delta V_{i,k} = \Delta\sigma_i \cdot \Delta z_k$ , где  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ; в них берём по точке  $P_{i,k}(\xi_i, \eta_i, \zeta_k)$ ,  $\zeta_k \in (z_{k-1}, z_k)$ . Пусть  $\lambda$  — наибольший из диаметров областей  $\Delta V_{i,k}$ . Если  $\lambda \rightarrow 0$ , то и  $\lambda_1 = \max \text{диам.} \Delta\sigma_i \rightarrow 0$  и  $\lambda_2 = \max \Delta z_k \rightarrow 0$  (рис. 2.24).

---

Лагранж. И лишь в 1836 г. в вопрос внёс полную ясность М.В. Остроградский — он дал геометрический вывод формулы использованным выше приёмом.

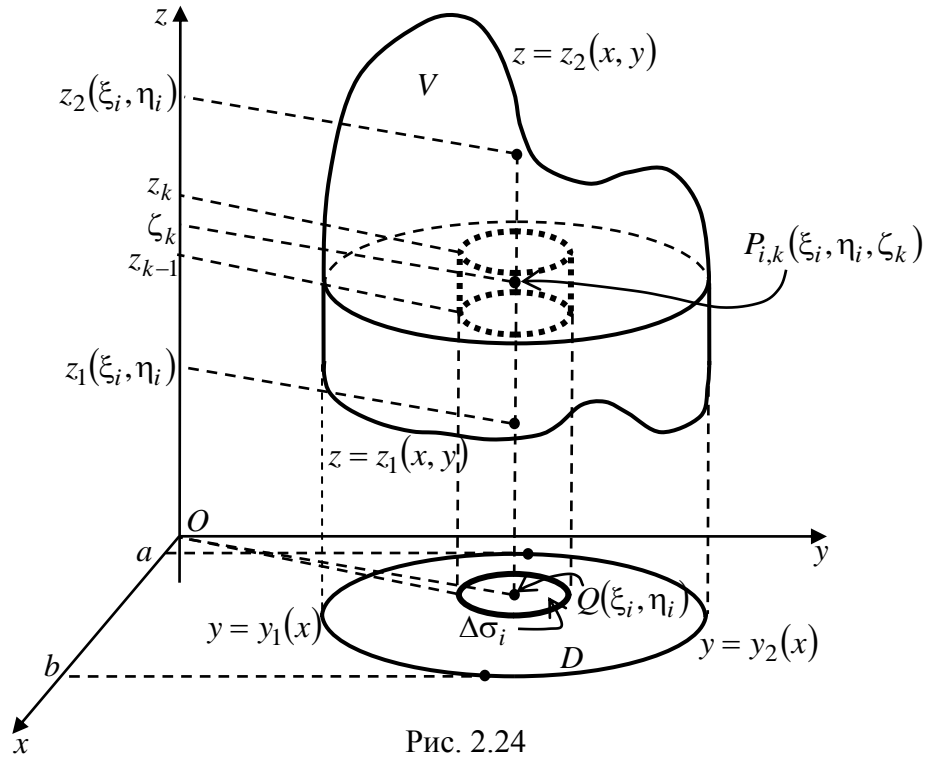


Рис. 2.24

По определению (2.4) тройного интеграла имеем

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta\sigma_i \Delta z_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \Delta\sigma_i \sum_k f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta z_k.$$

Так как внутренняя сумма в последнем выражении есть интегральная сумма функции одного переменного  $f(\xi_i, \eta_i, z)$  по отрезку  $z_1(\xi_i, \eta_i) \leq z \leq z_2(\xi_i, \eta_i)$ , то в пределе при  $\lambda_2 = \max \Delta z_k \rightarrow 0$  получим:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \Delta\sigma_i \sum_k f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta z_k = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_i \Delta\sigma_i \int_{z_1(\xi_i, \eta_i)}^{z_2(\xi_i, \eta_i)} f(\xi_i, \eta_i, z) dz.$$

В результате под знаком предела имеем интегральную сумму по области  $D$ , по-

этому  $\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_i \Delta\sigma_i \int_{z_1(\xi_i, \eta_i)}^{z_2(\xi_i, \eta_i)} f(\xi_i, \eta_i, z) dz = \iint_D \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy$ . Таким образом,

получена формула для вычисления тройного интеграла:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.26)$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла.

Приведённый вывод формулы (2.26) не является вполне строгим. Дадим более убедительное доказательство этой формулы вычисления тройного интеграла.

а) Пусть область  $V$  представляет собой цилиндрическое тело, с образующими, параллельными оси  $Oz$  и с плоскими основаниями  $z = h$  и  $z = l$  ( $h < l$ ), параллельными плоскости  $Oxy$ ;  $D$  – проекция тела  $V$  на плоскость  $Oxy$ . Разо-

бъём тело  $V$ , как и ранее, на  $m \cdot n$  элементарных областей с объёмами  $\Delta V_{i,k} = \Delta \sigma_i \cdot \Delta z_k$ , в каждой из которых берём произвольно по точке  $P_{i,k}(\xi_i, \eta_i, \zeta_k)$ ,  $\zeta_k \in (z_{k-1}, z_k)$ , ( $h = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{m-1} < z_m = l$ ),  $Q_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta \sigma_i$ .

Составим интегральную сумму

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta \sigma_i \cdot \Delta z_k = \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i \sum_{k=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta z_k.$$

Функция  $f(P)$  по условию интегрируема, тогда в силу определения предела  $I$  интегральных сумм  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , что при  $\lambda < \delta$  выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i \sum_{k=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta z_k \right| < \varepsilon. \quad (2.26')$$

В этом неравенстве будем неограниченно уменьшать  $\Delta z_k$ , т.е. уменьшать мелкость  $\lambda_2 = \max_{1 \leq k \leq m} \Delta z_k$ ; при этом величина  $\lambda$  не увеличивается. Обозначая

$$\Phi(x, y) = \int_h^l f(x, y, z) dz,$$

заметим, что

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta z_k = \int_h^l f(\xi_i, \eta_i, z) dz = \Phi(\xi_i, \eta_i).$$

Поэтому неравенство (2.26') после указанного перехода к пределу примет вид

$$\left| I - \sum_{i=1}^n \Phi(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i \right| \leq \varepsilon$$

и выполнится при условии  $\lambda_1 = \max \text{диам.} \Delta \sigma_i < \delta$ . Это неравенство означает, что функция  $\Phi(x, y)$  интегрируема по области  $D$ , причём  $I = \iint_D \Phi(x, y) dx dy$ , и значит, справедлива формула

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_h^l f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

б) Общий случай. Пусть область  $V$  правильная в направлении оси  $Oz$  (см. рис.2.24). Заключим тело в цилиндрическую область  $G$  с основаниями  $z = h$  и  $z = l$  ( $h \leq z_1(x, y) \leq z_2(x, y) \leq l$ ) и рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & z \in V, \\ 0, & z \in G \setminus V. \end{cases}$$

К ней и области  $G$  можно применить формулу, полученную в п. а):

$$\iiint_G \varphi(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_h^l \varphi(x, y, z) dz.$$

Преобразуем, пользуясь свойством аддитивности левую и правую части этого равенства. Имеем:



$$\begin{aligned} \iiint_G \varphi(P)dV &= \iiint_V \varphi(P)dV + \iiint_{G \setminus V} \varphi(P)dV = \iiint_V f(P)dV \text{ и} \\ \int_h^l \varphi(P)dz &= \int_h^{z_1} \varphi(P)dz + \int_{z_1}^{z_2} \varphi(P)dz + \int_{z_2}^l \varphi(P)dz = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \varphi(P)dz. \end{aligned}$$

Следовательно, в результате для вычисления тройного интеграла получаем равенство (2.26).

Замечание. Вычерчивать область интегрирования  $V$  необязательно, достаточно лишь представить себе уравнения нижней и верхней границ тела  $V$  и его проекцию  $D$  на плоскость  $Oxy$  (см рис. 2.24). Далее, в зависимости от области  $D$  для вычисления внутреннего (двойного) интеграла пользуемся формулой (2.14), если  $D$  правильная в направлении оси  $Oy$  и формулой (2.15), если  $D$  правильная в направлении оси  $Ox$ . Например, в первом случае имеем

$$\iiint_V f(x, y, z)dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Здесь внутренний повторный интеграл очевидно есть двойной интеграл по области  $D_x$ , представляющей собой сечение тела  $V$  плоскостью  $x = const$ :

$$\iiint_V f(x, y, z)dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz. \quad (2.27)$$

Аналогичные формулы получим, если спроектировать тело, правильное в направлении оси  $Ox$ , на плоскость  $Oyz$  или правильное в направлении оси  $Oy$  — на плоскость  $Oxz$ .

Пример. Пусть  $V$  — шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . Тогда  $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ , и

$$\iiint_V f(x, y, z)dx dy dz = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz.$$

Понятно, что вычисление подобных интегралов дело весьма сложное, даже когда  $f(x, y, z) \equiv 1$ . В таких случаях лучше пользоваться специально подобранными криволинейными координатами.

**2. Криволинейные координаты в пространстве. Замена переменных в тройном интеграле.**

Наиболее удобный способ задания кривых в пространстве, т.е. определения положения точек  $M(x, y, z)$  кривой — параметрический. Как и в плоском случае, здесь координаты  $x, y, z$  представляются функциями некоторой вспомогательной переменной  $t$ , называемой параметром кривой (например, это может быть длина дуги, см. также §1.4):

$$\{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}, t_0 \leq t \leq T. \quad (2.28')$$

Эту кривую можно задать одним *векторным уравнением*

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \equiv \vec{r}(t), \quad (2.28^*)$$

где  $\vec{r}(t)$  - вектор, начало его находится в начале координат  $O(0,0,0)$ , а концом

является точка  $M(x, y, z)$ , координаты которой определяются формулами (2.28'). Такой вектор  $\vec{r}(t) = \overline{OM}$  называется *радиус-вектором*. При изменении  $t$  его конец опишет линию  $L$ , а сама эта линия  $L$  называется годографом векторной функции (2.28\*) скалярного аргумента  $t$ . Для таких функций вводятся понятия предела, непрерывности, производной аналогично тому, как это делается для скалярных функций.

Кривая называется *гладкой*, если функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  имеют непрерывные производные, не обращающиеся в нуль одновременно, т.е.  $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 \neq 0$ . Геометрически это означает, что в каждой точке кривой существует касательная, которая непрерывно зависит от точки касания. В этом случае вектор  $\vec{r}'(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$  направлен по касательной в сторону возрастания  $t$ , и уравнения касательной в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , соответствующей значению параметра  $t = t_0$ , будут  $\frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)}$ . Если, например,  $\dot{z}(t_0) = 0$ , то следует полагать и  $z - z_0 = 0$ , т.е. касательная лежит в плоскости  $z = z_0$ ; так будет, в частности, когда сама кривая  $L$  расположена в плоскости  $Oxy$ .

Непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется *кусочно-гладкой*. Такие кривые имеют длину (спрямляемы).

Аналогично, поверхности  $S$  тоже можно задавать параметрически, а именно: определять положение точек  $N(x, y, z) \in S$  с помощью двух параметров  $u$  и  $v$  (они символизируют длину и ширину – два измерения) – задавать уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (2.27')$$

Высказанные соображения будем иметь в виду далее при рассмотрении *точечных отображений пространственных областей*.

Пусть имеются декартовы системы координат  $Oxyz$  и  $Ouvw$ , и пусть между точками  $P(x, y, z)$  и  $Q(u, v, w)$  соответственно замкнутых областей  $V$  и  $V^*$  установлено взаимно-однозначное соответствие с помощью системы функций

$$\{x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)\}. \quad (2.28)$$

Как и в плоском случае, предполагаем, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные в области  $V^*$ , и их якобиан отличен от нуля:

$$I(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.28'')$$

Числа  $u, v, w$  называются *криволинейными координатами* точки  $P(x, y, z)$  и пишут также  $P(u, v, w)$ . Поверхности в пространстве  $Oxyz$ , на которых сохраняется постоянное значение одна из криволинейных координат:  $u = const$ ,  $v = const$ , или  $w = const$ , называются *координатными поверхностями*. Например, подставляя в (2.28)  $u = u_0$ , получим параметрические уравнения поверхности  $u = u_0 = const$ , переменные  $v$  и  $w$  являются параметрами этой поверхности. Линии пересечения координатных поверхностей называются *криволинейными координатными линиями* – вдоль них меняется только одна координата. Линию, вдоль которой меняется только одна координата  $u$ , обозначают  $(u)$ , её параметрические уравнения получают из равенств (2.28), подставляя  $v = v_0 = const$  и  $w = w_0 = const$ . Аналогично определяются линии  $(v)$  и  $(w)$ . Всего имеется три семейства координатных линий и три семейства координатных поверхностей. Точка  $P$  лежит на пересечении трёх координатных поверхностей и соответственно – трёх координатных линий.

Рассмотрим в области  $V^*$  элементарный объём  $\Delta V^*$ , ограниченный шестью координатными плоскостями, проходящими по три через точки  $Q(u, v, w)$  и  $Q_1(u + du, v + dv, w + dw)$ , – это прямоугольный параллелепипед. Как и в плоском случае, можно доказать, что

$$\Delta V = |I(u, v, w)| \cdot du \cdot dv \cdot dw = |I(Q)| \cdot \Delta V^*,$$

где  $\Delta V$  – соответствующий для  $\Delta V^*$  элементарный объём в области  $V$ . Так что на  $|I|$  можно смотреть как на коэффициент растяжения (искажения) объёма в точке  $Q$  при отображении (2.28).

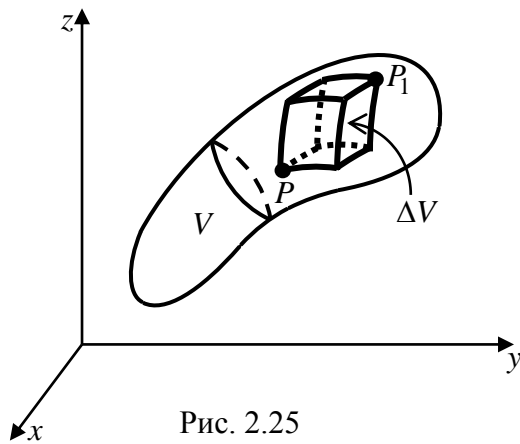


Рис. 2.25

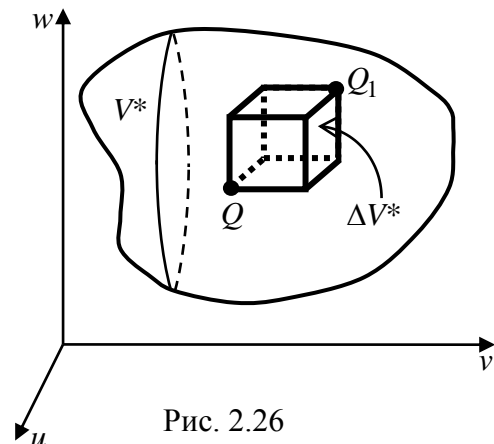


Рис. 2.26

После этого можно установить, что имеет место *формула замены переменных в тройном интеграле* посредством функций (2.28):

$$\begin{aligned} A &\equiv \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{V^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |I(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Расстановка пределов интегрирования – задача достаточно сложная. Отметим, например, как это можно сделать по формуле (2.27):

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} du \iint_{D_u} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |I| dv dw, \quad (2.30)$$

не выходя из области  $V$ . Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – наименьшее и наибольшее значения криволинейной координаты  $u$  для точек тела  $V$ ,  $D_u$  – область, полученная в сечении тела координатной поверхностью  $u = \text{const}$ .

**3. Цилиндрические координаты.** Будем определять положение точки  $M(x, y, z)$  в пространстве полярными координатами  $(\rho, \varphi)$  её проекции  $P(x, y)$  на плоскость  $Oxy$  и аппликатой  $z$  (рис. 2.27). Величины (числа)  $\rho, \varphi, z$  называются цилиндрическими координатами точки  $M(x, y, z)$ , они связаны с декартовыми координатами формулами

$$\{x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z\}. \quad (2.31)$$

Эти формулы отображают область  $\{0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty\}$  на всё пространство  $Oxyz$  взаимно-однозначно при  $\rho > 0$  и  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

а) Криволинейные координатные поверхности здесь:  $\rho = \text{const}$  – прямые круговые цилиндры ( $0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty$ );  $\varphi = \text{const}$  – вертикальные полуплоскости, опирающиеся на ось  $Oz$ , ( $\rho \geq 0, -\infty < z < \infty$ );  $z = \text{const}$  – горизонтальные плоскости ( $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ).

б) Криволинейные координатные линии:  $(z)$  – вертикальная прямая (линия пересечения координатных поверхностей  $\rho = \text{const}$  и  $\varphi = \text{const}$ );  $(\varphi)$  – окружность (сечение цилиндра горизонтальной плоскостью); и  $(\rho)$  – лежит на пересечении полуплоскости  $\varphi = \text{const}$  и горизонтальной плоскости  $z = \text{const}$ . (Рис. 2.28). Точка  $M$  лежит на их пересечении.

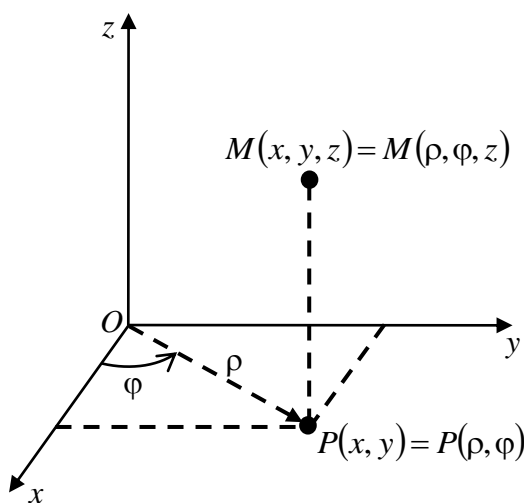


Рис. 2.27

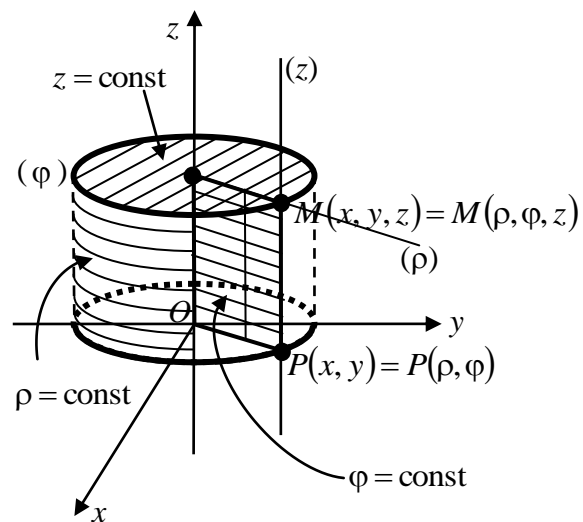


Рис. 2.28

Очевидно, цилиндрические координаты ортогональны. Бесконечно малому координатному прямоугольному параллелепипеду  $\Delta V^*$  из пространства  $O\rho\varphi z$  с противоположными вершинами  $Q(\rho, \varphi, z)$  и  $Q_1(\rho + \Delta\rho, \varphi + \Delta\varphi, z + \Delta z)$  будет соответствовать в пространстве  $Oxyz$  тоже прямоугольный, но криволинейный параллелепипед  $\Delta V$ , ограниченный двумя параллельными горизонтальными плоскостями, двумя цилиндрами и двумя вертикальными полуплоскостями, опирающимися на ось  $Oz$  (рис. 2.29). Его стороны равны  $AD = \rho\Delta\varphi$ ,  $AB = \Delta\rho$ ,  $AA' = \Delta z$ , поэтому с точностью до бесконечно малых высшего порядка получим  $\Delta V \approx AD \cdot AB \cdot AA' = \rho\Delta\varphi \cdot \Delta\rho \cdot \Delta z = \rho \cdot \Delta V^*$ , откуда  $|I| = \rho$ . Тот факт, что  $|I| = \rho$  можно получить, если вычислить якобиан  $I$  системы (2.31). Таким образом, получается следующая формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2.32)$$

Имеется в виду, что в интеграле, стоящем справа, расстановка пределов интегрирования по области  $V$  проводится в криволинейных координатах.

Достаточно просто расставить пределы интегрирования в случае цилиндра и его частей. Цилиндр  $V$  (рис.2.30) рассечём координатной поверхностью  $\varphi = const$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . В сечении получим прямоугольник  $D_\varphi$ . В нём при каждом  $\varphi$  координата  $\rho$  меняется в постоянных пределах:  $0 \leq \rho \leq R$ ; и при  $\rho = const$  координата  $z$  меняется в пределах  $0 \leq z \leq h$ . По формуле (2.30) имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{D_\varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_0^R \rho d\rho \int_0^h f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz \right\}. \end{aligned}$$

Здесь нетрудно изменять порядок интегрирования. Однако, для случая цилиндрических координат проще воспользоваться формулой (2.26) и в двойном интеграле по области  $D$  перейти к полярным координатам.

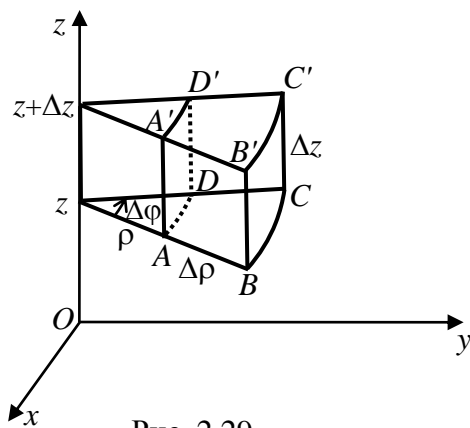


Рис. 2.29

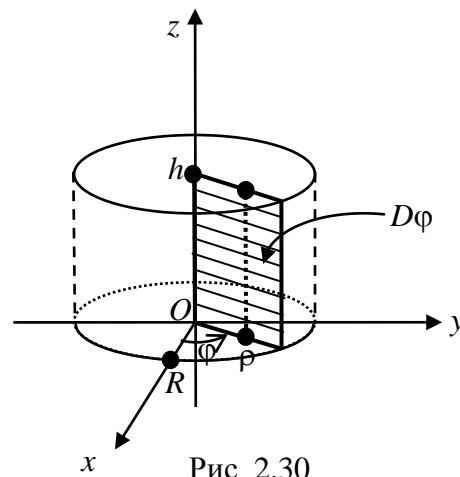


Рис. 2.30

#### 4. Сферические координаты (или полярные координаты в пространстве).

Положение точки  $M(x, y, z)$  определим с помощью её расстояния  $r$  от начала координат ( $r$  – радиус-вектор точки  $M$ ) и двух углов  $\varphi$  и  $\theta$  (см. рис. 2.31). Заметив, что  $OP = r \sin \theta$ , находим связь сферических координат с декартовыми:

$$\{x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, z = r \cos \theta\}. \quad (2.33)$$

Эти формулы отображают область  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  на всё пространство  $Oxyz$ , взаимно-однозначно при  $r > 0$  и  $\varphi < 2\pi$ .

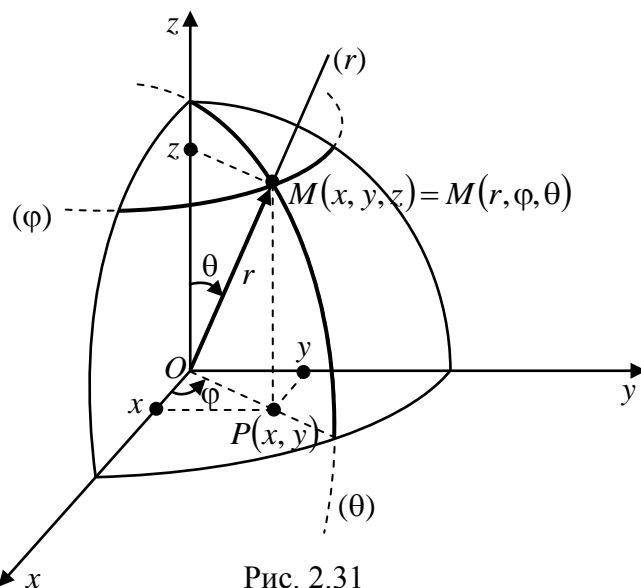


Рис. 2.31

Криволинейные координатные поверхности суть:

- 1)  $r = const$  – концентрические сферы с центром в начале координат;
- 2)  $\theta = const$  – круговые конусы, осью которых является ось  $Oz$  и вершиной точка  $O$ ;
- 3)  $\varphi = const$  – полуплоскости, проходящие через ось  $Oz$ .

Их уравнения в обычных координатах  $x, y, z$  получим, исключив двух меняющихся криволинейных координат из системы (2.33). На сфере радиуса  $r = R$ , т.е.  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , числа  $\theta$  и  $\varphi$  называются географическими координатами точки  $M$ , линии  $\varphi = const$  – меридианы,  $\theta = const$  – параллели. Линии пересечения координатных поверхностей (т.е. координатные линии) есть лучи ( $r$ ), окружности ( $\varphi$ ), полуокружности ( $\theta$ ). Очевидно, сферические координаты ортогональны.

В пространстве  $Oxyz$  элементарная область  $\Delta V$  в сферических координатах заключена между сферами радиусов  $r$  и  $r + dr$ , конусами  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  и полуплоскостями  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$  (рис. 2.32). Её можно рассматривать приближённо как прямоугольный параллелепипед со сторонами  $BC$ ,  $BD$ ,  $BE$ . Имеем:  $BD = r d\theta$ ,  $BE = dr$ , сторона  $BC$  есть дуга окружности ( $\varphi$ ); исключая меняю-

щуюся координату  $\varphi$  из системы (2.33), найдём  $\{z = r \cos \theta, x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta\}$  – это есть окружность радиуса  $AB = r \sin \theta$  (это можно видеть из рисунка 2.32). Поэтому  $BC = AB \cdot d\varphi = r \sin \theta \cdot d\varphi$ , и тогда

$$dV \approx dV = BC \cdot BD \cdot BE = r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi = r^2 \sin \theta \cdot dV^*.$$

Отсюда якобиан  $I = r^2 \sin \theta$ . Это можно проверить, вычислив определитель (2.28'') для системы (2.33):

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Поэтому *тройной интеграл в сферических координатах запишется в виде:*

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (2.34)$$

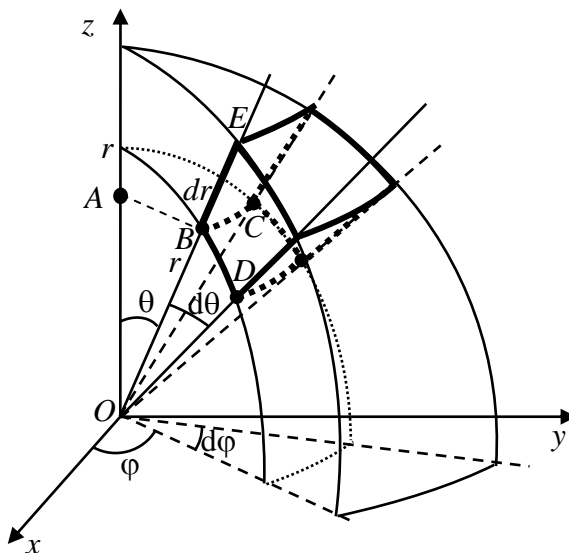


Рис. 2.32

Наиболее проста расстановка пределов интегрирования в сферических координатах, когда область  $V$  есть шар радиуса  $R$  с центром в начале координат (рис. 2.33). Рассечём область  $V$  полуплоскостью  $\varphi = const$ , в сечении получаем полукруг  $D_\varphi$ ,  $\varphi$  меняется в пределах от  $0$  до  $2\pi$  (при этом полукруг опишет шар). Граница  $\partial D_\varphi$  содержит полуокружность – это линия  $(\theta)$ , т.е.  $0 \leq \theta \leq \pi$ , при каждом  $\theta = const$  расстояние  $r$  меняется в постоянных пределах,  $0 \leq r \leq R$ . Получим

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 dr. \end{aligned}$$

Понятно, что здесь можно менять порядок интегрирования как угодно.

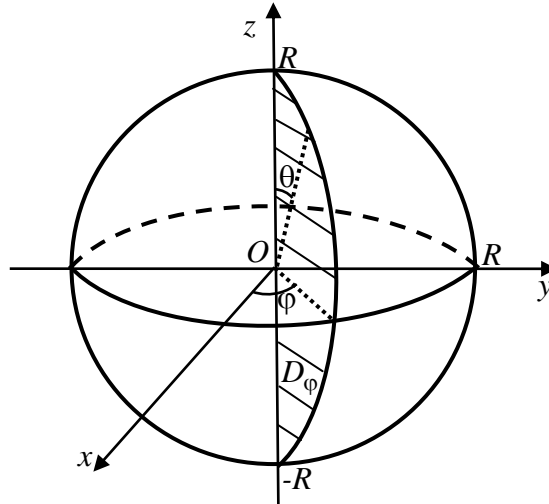


Рис. 2.33

Примеры. 1) Расставить пределы интегрирования в сферических и цилиндрических координатах в тройном интеграле

$$J = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \text{ если } V : \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, x^2 + y^2 \leq z.\}$$

$\Delta$   $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  - уравнение сферы, смещённой по оси  $Oz$  на 1 вверх и радиуса  $R=1$ ,  $x^2 + y^2 = z$  - уравнение параболоида с вершиной в точке  $(0,0,0)$  и выпуклостью вниз. (Рис. 2.34.)

а) Перейдём к сферическим координатам. Используя связь с декартовыми – формулы (2.33), находим уравнение сферы:  $r = 2 \cos \theta$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , и уравнение параболоида:

$r = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$ . Найдём пределы изменения угла  $\theta$ : для этого приравняем  $r$  из уравнения сферы и параболоида и решим полученное уравнение  $2 \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$ , или  $2 \cos \theta \sin^2 \theta - \cos \theta = 0$ , или  $(2 \sin^2 \theta - 1) \cos \theta = 0$ . Отсюда

решения, с учётом границ изменения углов, есть  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ . Тройной интеграл представляем суммой двух интегралов, разбив тело на две части: первая ограничена сверху сферой и угол  $\theta$  меняется в промежутке  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , вторая - параболоидом, и  $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Таким образом, границей двух тел является коническая поверхность.



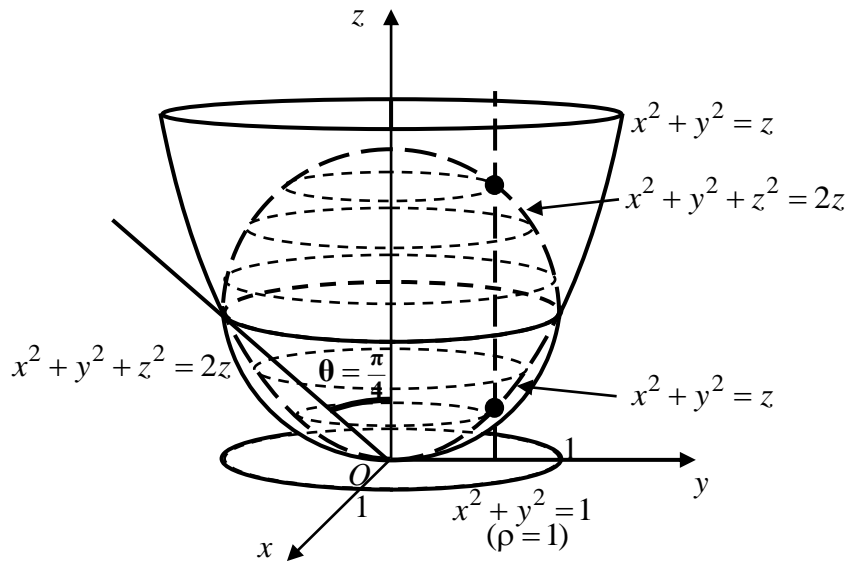


Рис. 2.34

Итак,

$$J = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \sin\theta \cos\varphi, \dots) r^2 \sin\theta dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} f(\dots) r^2 \sin\theta dr.$$

б) Для расстановки пределов интегрирования в цилиндрических координатах найдём уравнение проекции сечения сферы и параболоида на плоскость  $Oxy$ . Для этого подставим сумму квадратов переменных из уравнения параболоида в уравнение сферы, получим квадратное уравнение для вычисления значений  $z$ :  $z^2 - z = 0$ , корни его  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ . Следовательно, проекция сечения имеет вид  $x^2 + y^2 = 1$ . В цилиндрических координатах уравнение сферы запишется:  $\rho^2 + z^2 = 2z$ , или  $z^2 - 2z + \rho^2 = 0$ , отсюда  $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \rho^2}$ . Из двух решений выбираем  $z = 1 + \sqrt{1 - \rho^2}$ , что соответствует верхней полусфере. Уравнение параболоида в цилиндрических координатах есть  $z = \rho^2$ , а уравнение проекции сечения на плоскость  $Oxy$  в полярных координатах –  $\rho = 1$ . Интеграл  $J$  в цилиндрических координатах примет вид

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{1 + \sqrt{1 - \rho^2}} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z) dz.$$

В данном случае цилиндрические координаты более предпочтительны: приводят к более простым пределам интегрирования.

2) Преобразовать тройной интеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , – к сферическим координатам. (Рис. 2.35.)

Δ Здесь поверхность  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z \geq 0$ , есть эллиптический конус, а вторая поверхность – эллипсоид.

а) Применим обобщённые сферические координаты:

$x = ar \sin \theta \cos \varphi, y = br \sin \theta \sin \varphi, z = cr \cos \theta$  (якобиан  $I = abc r^2 \sin \theta$ ). Получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z \geq 0 \Rightarrow r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

ределить пределы изменения для угла  $\theta: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow r = 1$ .

Отсюда найдём пределы изменения для  $r: 0 \leq r \leq 1$ . Из уравнений  $r = 1$  и  $\theta = \frac{\pi}{4}$

следует, что  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (оба уравнения не содержат переменной  $\varphi$ , т.е.  $\varphi$  меняется по максимуму). Геометрически: если рассечь тело вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат, в сечении будет сектор радиуса 1 ( $0 \leq r \leq 1$ ) и с центральным углом  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ). Тело  $V$  получится, если менять  $\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , – сектор опишет всё тело  $V$ .

Таким образом, интеграл преобразуется к виду:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 f(ar \sin \theta \cos \varphi, br \sin \theta \sin \varphi, cr \cos \theta) dr.$$

б) Перейдём к обобщённым цилиндрическим координатам:

$$x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi, z = z \quad (I = abr).$$

Для этого найдём (как и в предыдущем случае) уравнение проекции сечения двух заданных поверхностей на плоскость  $Oxy$  – в декартовых, а затем в обобщённых цилиндрических координатах.

Из двух уравнений  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  и  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z \geq 0$  имеем  $z = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ , так

что  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$  – уравнение проекции пересечения двух поверхно-

стей, ограничивающих тело  $V$ . Пределы для  $\rho$  и  $\varphi: 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ; пределы для  $z$  следуют из уравнений конуса и верхней полусферы в обобщённых

цилиндрических координатах  $c\rho \leq z \leq c\sqrt{1-\rho^2}$ , якобиан  $I = ab\rho$ . Итак,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho d\rho \int_{c\rho}^{c\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz.$$

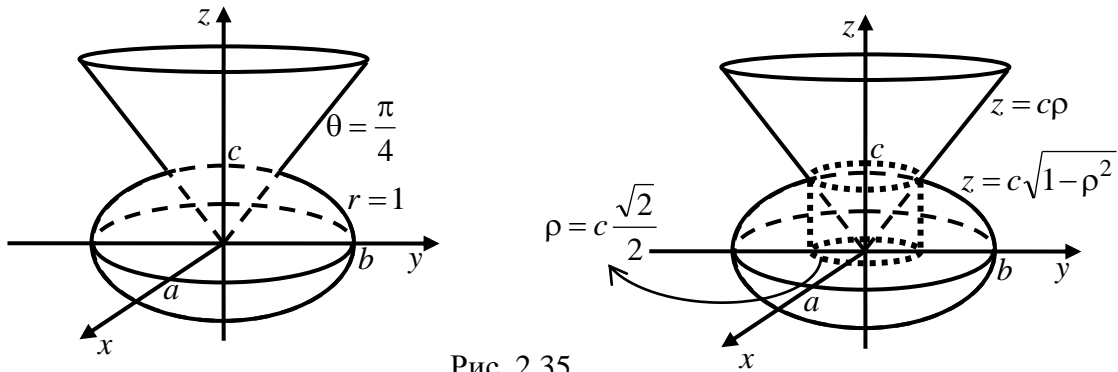


Рис. 2.35

## § 7. Геометрические приложения двойных и тройных интегралов

**1. Объём  $V$  цилиндрического тела**, ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y) \geq 0$ , снизу – областью  $D$  плоскости  $Oxy$  вычисляется по формуле (см. (2.3'))

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.35)$$

**2. Объём произвольного тела  $V$**  можно найти с помощью тройного интеграла

$$V = \iiint_V dx dy dz. \quad (2.36)$$

Это следует из рассмотрения интегральной суммы для функции  $f(P) \equiv 1$  (или из формулы (2.7)):

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta V_i.$$

Из (2.36) сведением тройного интеграла к двойному непосредственно получается формула (2.35).

**3. Площадь плоской области  $D$**  с помощью двойного интеграла найдётся так:

$$\sigma = \iint_D dx dy. \quad (2.37)$$

Это было в (2.3''), (2.21) и получается также из (2.6) при  $f(P) \equiv 1$ . Из (2.37) сведением к повторному интегралу приходим к формулам для площади (см. §10.1, 10.2).

Для площади криволинейного сектора, ограниченного лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\varphi)$  в полярных координатах  $(\rho, \varphi)$ , из (2.37) получим известную формулу

$$\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi . \quad (2.38)$$

**4. Вычисление площади поверхности.** Пусть поверхность  $S$  задана уравнением  $z = f(x, y)$  и проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$ . Прежде всего, надо определиться с понятием площади этой «кривой» поверхности. Разобьём область  $D$  на малые части  $\Delta\sigma_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). В ячейке  $\Delta\sigma_i$  возьмём произвольную точку  $P_i(\xi_i, \eta_i)$ , из неё восстановим перпендикуляр к плоскости  $Oxy$  и пусть  $Q_i$  - точка пересечения его с поверхностью. Построим цилиндр с основанием  $\Delta\sigma_i$ . Он отсечёт от поверхности кусок  $A_i B_i C_i D_i$ , а от касательной плоскости площадку  $A'_i B'_i C'_i D'_i$  - её площадь обозначим  $\Delta S'_i$ .

**Определение.** За площадь  $\Delta S_i$  малого куска поверхности  $A_i B_i C_i D_i$  принимается приближённо площадь  $\Delta S'_i$  соответствующего куска  $A'_i B'_i C'_i D'_i$  касательной плоскости:  $\Delta S_i \approx \Delta S'_i$ . За площадь  $S$  всей поверхности принимается приближённо сумма этих площадок,  $S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S'_i$ , а предел этой суммы при условии, что  $\lambda = \max \text{диам.} \Delta\sigma_i \rightarrow 0$ , и называется площадью «кривой» поверхности:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S'_i . \quad (2.39)$$

Для вычисления площади  $\Delta S'_i$  рассмотрим вектор нормали к поверхности (это градиент функции  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$  - и (см. Гл.1, формула (1.29)) в точке  $Q_i$ :  $\vec{N} = -\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$  - взяли вектор, образующий с осью  $Oz$  острый угол  $\nu_i$  (обозначаем углы, которые образует нормаль осями координат соответственно  $\lambda, \mu, \nu$ ).

Тогда, используя обозначения  $p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ , имеем

$$\cos \nu_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_i) + q^2(\xi_i, \eta_i)}} .$$

Так как  $\Delta\sigma_i$  есть проекция площадки  $\Delta S'_i$ , образующей двугранный угол  $\nu_i$  с плоскостью  $Oxy$ , то  $\Delta\sigma_i = \Delta S'_i \cdot \cos \nu_i$ . Откуда

$$\Delta S'_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos \nu_i} = \sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_i) + q^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \Delta\sigma_i .$$

Подставив в (2.39), будем иметь интегральную сумму функции  $\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}$  по области  $D$ , и потому предел (2.39) даёт

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy. \quad (2.40)$$

**Вывод.** Если поверхность задана явным уравнением  $z = f(x, y)$ , проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$ , функция  $f(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные  $p(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ,  $q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  в области  $D$ , то её площадь вычисляется по формуле (2.40).

В случае, когда  $\nu$  - угол нормали  $\vec{N}$  с осью  $Oz$ , не обязательно острый, формулу (2.40) можно записать так:

$$S = \iint_D \frac{1}{|\cos \nu|} dx dy. \quad (2.40')$$

Отсюда для малых площадок  $\Delta S \approx \frac{\Delta \sigma}{|\cos \nu|} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{|\cos \nu|}$ .

**Замечание 1.** Пусть поверхность задана параметрическими уравнениями (2.27'), или, что то же, одним векторным уравнением

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \equiv \vec{r}(u, v); \quad (2.41)$$

$\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $M(x, y, z) \in S$ . Тогда площадь поверхности есть

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (2.42)$$

где  $\Delta$  - область изменения параметров  $u$  и  $v$  на поверхности  $S$ , и  $E = (\vec{r}_u, \vec{r}_u)$ ,  $F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ ,  $G = (\vec{r}_v, \vec{r}_v)$  (скалярные произведения) так называемые коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. (Без доказательства.) Если поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , то взяв за параметры поверхности  $x$  и  $y$ , т.е. параметрические уравнения  $\{x = x, y = y, z = f(x, y)\}$ , из (2.42) легко получить (2.40) как частный случай.

**Замечание 2.** Спрашивается: получится ли такой же результат, если вместо касательных площадок брать вписанные многогранники и определять площадь поверхности как предел суммы их площадей? Оказывается, не всегда! Для примера рассмотрим цилиндр высоты  $h$ , и окружность основания (радиуса  $R$ ) разобьём на  $n$  равных частей, а образующую – на  $m$  частей, и построим равнобедренные треугольники – их будет  $2n \cdot m$  (см. рис. 2.36); любой из них и один из слоёв изображён на рис. 2.37. Оказывается, предел суммы площадей треугольников даст что угодно. Имеем:

$$BC = 2R \sin \frac{\pi}{n}, \quad EF = R - R \cos \frac{\pi}{n} = R \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}, \quad AE = \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Площадь треугольника  $ABC$  равна:  $\Delta S' = R \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$  и сумма

площадей

$$S = \sum \Delta S' = 2Rnm \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{h^2 + 4R^2 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

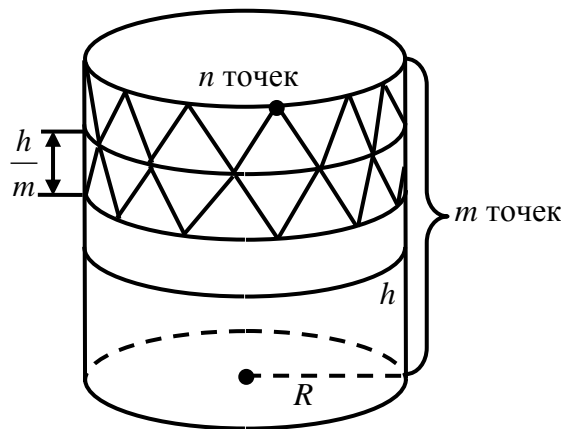


Рис. 2.36

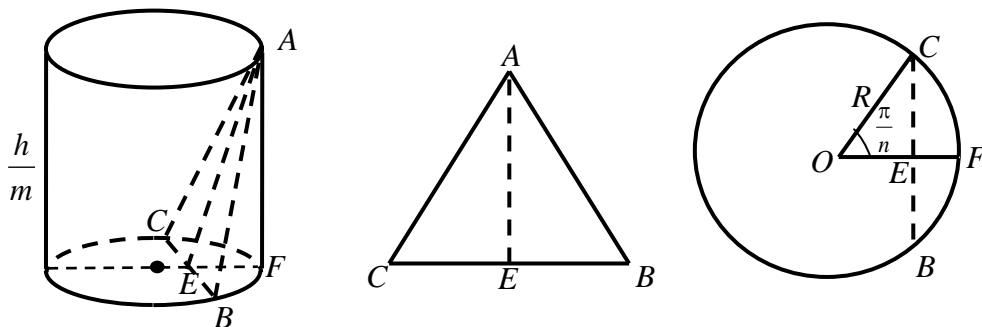


Рис. 2.37

Множитель  $2Rn \sin \frac{\pi}{n} \sim 2Rn \cdot \frac{\pi}{n} \rightarrow 2\pi R$  при  $n \rightarrow \infty$ .

1)  $n = m$ , то  $m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n} \approx n^2 \frac{\pi^4}{2^4 n^4} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и тогда  $S = 2\pi R \cdot h$  – это верный факт.

2)  $m = n^3$ . То  $m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n} \approx n^6 \frac{\pi^4}{2^4 n^4} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и тогда  $S \rightarrow \infty$ . Таким путём можно получить любое число, большее  $2\pi R \cdot h$ .<sup>2</sup>

Примеры. 1) Найти площадь сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Возьмём верхнюю её часть:  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . Она проектируется на плоскость  $Oxy$  в круг  $\{x^2 + y^2 \leq R^2\} = D$ . Находим

$$p = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

<sup>2</sup> Этот пример привёл немецкий математик Карл Шварц в 1883 г.

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

В круге  $D$  переходим к полярным координатам  $(\rho, \varphi)$ . По формуле (2.40):

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \iint_D \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 2R \iint_D \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\ &= 2R \cdot 2\pi \cdot \left( -\frac{1}{2} (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

2) Вычислить объём  $V$  тела, вырезанного цилиндром  $x^2 + y^2 = Rx$  из шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  (его иногда называют «телом Вивиани» – по имени итальянского математика XVII века). (См. рис. 2.38 для  $z \geq 0$ .)

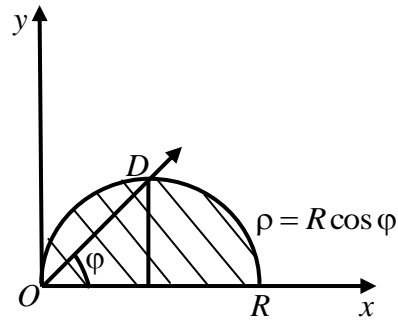
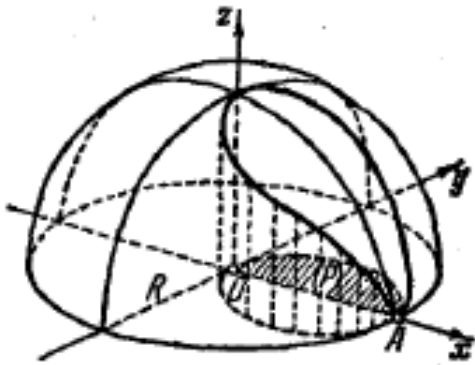


Рис. 2.38

По формуле (2.36) имеем  $V = \iiint_V dx dy dz$ . Тело ограничено сферой радиуса  $R$  с центром в начале координат и круговым цилиндром с образующими, параллельными оси  $Oz$ , смещённым на  $\frac{R}{2}$  по оси  $Ox$  и радиусом основания  $\frac{R}{2}$ .

Здесь удобно воспользоваться цилиндрическими координатами и тем, что тело симметрично относительно плоскостей  $Oxy$  и  $Oxz$ . Поскольку проекция на плоскость  $Oxy$  четверти  $V_1$  тела есть полукруг  $D$ , то переменное  $\varphi$  меняется в пределах  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Для того, чтобы найти пределы изменения  $\rho$ , проводим на плоскости  $Oxy$  через область  $D$  из начала координат луч, на луче расстояние  $\rho$  меняется в пределах  $0 \leq \rho \leq R \cos \varphi$ , где  $\rho = R \cos \varphi$  есть уравнение данной окружности. Для нахождения пределов изменения  $z$  запишем уравнение сферы в цилиндрических координатах – это  $\rho^2 + z^2 = R^2$ , значит для тела  $V_1$  будет

$0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}$ . Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iiint_{V_1} dx dy dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\
 &= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R \cos \varphi} d\varphi = -\frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \varphi - 1) d\varphi = \frac{4}{3} R^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).
 \end{aligned}$$

## § 8. Физические (механические) приложения

1. Масса тела  $V$  с заданной (объёмной) плотностью  $\rho(P)$  определится с помощью тройного интеграла (2.4'). Подобным же образом масса плоской площадки  $D$  с поверхностной плотностью  $\rho(P)$ ,  $P \in D$ , будет

$$m = \iint_D \rho(P) d\sigma. \quad (2.43)$$

### 2. Вычисление центра масс (центра тяжести).

а) Как известно, координаты центра масс системы материальных точек  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  с массами  $m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) определяются формулами

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (2.44)$$

б) Координаты центра масс плоской пластинки  $D$  с поверхностной плотностью  $\rho(P)$ ,  $P \in D$ , найдутся по формулам

$$x_c = \frac{\iint_D x \rho(P) dx dy}{\iint_D \rho(P) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \rho(P) dx dy}{\iint_D \rho(P) dx dy}. \quad (2.45)$$

Это устанавливается тем же приёмом, как и в следующем пункте в) (рис. 2.39), или как было в [13, § 10.5].

Если  $\rho(P) = \text{const}$  (пластинка однородная), то

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}. \quad (2.46)$$

В (2.45) в знаменателях стоит масса  $m$  пластинки  $D$ , а в (2.46) – её площадь  $\sigma$ .



Числа  $K_x = \iint_D y\rho(P)dxdy$  и  $K_y = \iint_D x\rho(P)dxdy$  называются статическими моментами площадки  $D$  соответственно относительно оси  $Ox$  и  $Oy$ .

в) *Центр масс пространственного тела.* Пусть дано тело  $V$  и задана его объёмная плотность  $\rho(P)$ ,  $P \in V$  (функцию  $\rho(P)$  считаем непрерывной). Разобьём  $V$  на малые части  $\Delta V_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и в них берём по точке  $P_k(x_k, y_k, z_k)$  (рис.2.40). Масса объёма  $\Delta V_k$  примерно равна  $m_k = \rho(P_k)\Delta V_k$ . Её сосредоточим в точке  $P_k$ . Центр масс полученной системы материальных точек  $P_1, P_2, \dots, P_n$  находим по формулам (2.44), например, для его абсциссы имеем

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \rho(P_k) \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \rho(P_k) \Delta V_k};$$

аналогично для остальных координат  $\bar{y}_c, \bar{z}_c$ . Устремляя

$\lambda \rightarrow 0$ , получим точные значения координат центра масс тела  $V$ :

$$x_c = \frac{\iiint_V x\rho(P)dxdydz}{\iiint_V \rho(P)dxdydz}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y\rho(P)dV}{\iiint_V \rho(P)dV}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z\rho(P)dV}{\iiint_V \rho(P)dV}. \quad (2.47)$$

Если плотность постоянна:  $\rho(P) = \rho = const$ , то число  $\rho$  можем вынести за знаки интегралов и потом сократить на него; формулы упростятся, в знаменателях получим объём тела  $V$ . При этом, если тело  $V$  имеет ось симметрии, то принимая её за ось  $Oz$ , можно убедиться, что  $x_c = y_c = 0$ , т.е. центр масс будет лежать на оси симметрии.

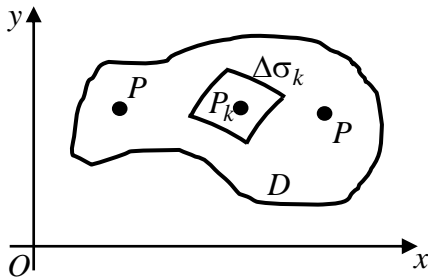


Рис. 2.39

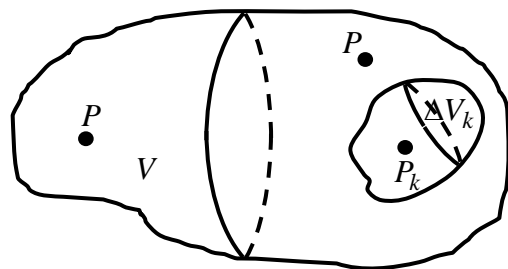


Рис. 2.40

Пример. Найти центр масс сегмента высоты  $h$ ,  $h \leq R$ , однородного полушара радиуса  $R$  (рис. 2.41). Начало координат совместим с центром шара, и ось симметрии сегмента примем за ось  $Oz$ .

Поскольку тело однородное и ось  $Oz$  является осью симметрии, то центр

масс лежит на оси  $Oz$ , так что  $x_c = y_c = 0$ , а  $z_c$  вычислим по формуле:  $z_c = \frac{\iiint_V z dV}{\iiint_V dV}$ .

Для подсчёта числителя спроектируем тело на плоскость  $Oxy$ . Вычислять проще в цилиндрических координатах  $(\rho, \varphi, z)$ . Проекция на плоскость  $Oxy$  се-

чения сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  плоскостью  $z = R - h$  есть окружность  $x^2 + y^2 + (R - h)^2 = R^2$ , её уравнение в цилиндрических координатах будет  $\rho^2 = (2R - h)h$ , а  $z$  в области  $V$  меняется в пределах  $R - h \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}$ . Итак,

$$\begin{aligned} \iiint_V z dV &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{(2R-h)h}} \rho d\rho \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{(2R-h)h}} \rho \frac{1}{2} (R^2 - \rho^2 - (R-h)^2) d\rho = \\ &= \pi \left( (2R-h)h \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{(2R-h)h}} = \frac{\pi}{4} (2R-h)^2 h^2. \end{aligned}$$

Аналогично можно подсчитать знаменатель, который численно равен объёму шарового сегмента:  $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$ . Поэтому  $z_c = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R-h)^2}{3R-h}$ . При  $h = R$  получаем центр масс полушара:  $C(0,0, \frac{3}{8}R)$ .

В частности, полагая  $h = R$ , из формулы  $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$  найдём объём полушара, а удваивая – объём шара  $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

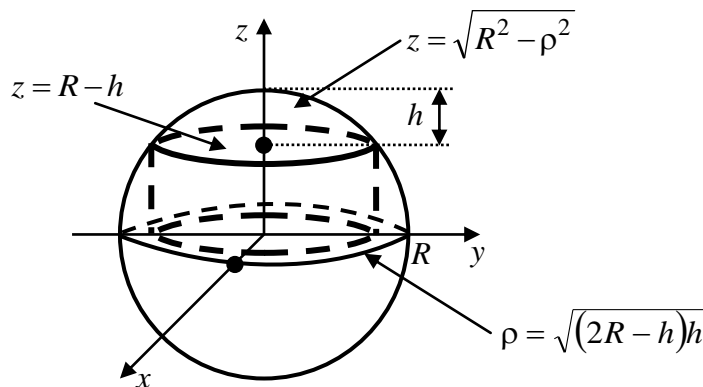


Рис. 2.41

Другой способ. Тело  $V$  проектируется на плоскость  $Oxy$  в круг  $D$   $x^2 + y^2 \leq (2R - h)h$ . По формуле (2.26) находим

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz = \frac{1}{2} \iint_D [(R^2 - (x^2 + y^2)) - (R-h)^2] dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D [(2R-h)h - (x^2 + y^2)] dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{(2R-h)h}} [(2R-h)h - \rho^2] \rho d\rho = \\ &= \pi [(2R-h) \cdot h \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}] \Big|_0^{\sqrt{(2R-h)h}} = \frac{\pi}{4} (2R-h)^2 h^2. \end{aligned}$$

Здесь в интеграле по кругу  $D$  перешли к полярным координатам.

**Теорема.** Объём  $V$  тела вращения плоской фигуры  $D$  около не пересекающей её оси, лежащей в той же плоскости, равен произведению площади  $\sigma$  этой фигуры на длину окружности, описанной центром масс (пластинка однородная).

Δ Докажем для случая, когда фигура  $D$  правильная в направлении оси  $Oy$ , и вращается вокруг оси  $Ox$ . Пусть она проектируется на ось  $Ox$  в отрезок  $a \leq x \leq b$  и ограничена сверху кривой  $y = y_2(x)$ , а снизу кривой  $y = y_1(x)$ ,  $0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)$  (см. рис. 2.6). По второй из формул (2.46), умножая обе части равенства на  $2\pi$  и на знаменатель, находим

$$2\pi y_c \cdot \sigma = 2\pi \iint_D y dx dy = 2\pi \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y dy = \pi \int_a^b \left( y^2 \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) dx = \pi \int_a^b y_2^2(x) dx - \pi \int_a^b y_1^2(x) dx = V_2 - V_1 = V,$$

где  $V_1$  и  $V_2$  объёмы тел, полученных от вращения соответствующих криволинейных трапеций вокруг оси  $Ox$ ; их разность определяет искомым объём  $V$ . ▲

Теорема эта была сформулирована и ранее [13, § 10.5], там же приведены примеры.

**4. Вычисление моментов инерции.** Под *объектом* будем понимать точку, прямую или плоскость.

**Определение.** Моментом инерции  $I$  точки  $M$  с массой  $m$  относительно объекта называется произведение массы на квадрат расстояния  $r$  от точки  $M$  до объекта:  $I = mr^2$ . Момент инерции системы материальных точек  $M_k$  с массами

$m_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) определяется аддитивно:  $I = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$ , где  $r_k$  – расстояние точки  $M_k$  до объекта.

а) Найдём момент инерции тела  $V$  с плотностью  $\rho(P)$ ,  $P \in V$  (считаем, что величина  $\rho(P)$  меняется непрерывно при перемещении точки  $P$ ).

Обозначим  $r = r(P)$  – расстояние от точки  $P$  до объекта. Тело  $V$  разобьём на  $n$  частей  $\Delta V_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ); в  $\Delta V_k$  возьмём (см. рис. 2.40) точку  $P_k$  и в ней сосредоточим массу частичной области  $\Delta V_k$ , примерно равную  $m_k = \rho(P_k) \Delta V_k$ .

Момент инерции этой системы точек представляется суммой  $\sum_{k=1}^n m_k r^2(P_k) = \sum_{k=1}^n \rho(P_k) r^2(P_k) \Delta V_k$ . Эта сумма приближённо принимается за момент инерции  $I$  тела  $V$ . Отсюда в пределе при  $\lambda \rightarrow 0$  получим точное значение:

$$I = \iiint_V \rho(P) r^2(P) dV. \quad (2.48)$$

Отметим, что понятие момента инерции инвариантно по отношению к выбору системы координат.

Введём систему координат  $Oxyz$ . Тогда функции точки  $r(P)$  и  $\rho(P)$  становятся функциями координат  $r = r(P) = r(x, y, z)$  и  $\rho = \rho(P) = \rho(x, y, z)$ , где точка  $P(x, y, z) \in V$ . Найдём момент инерции относительно точки  $A(x_0, y_0, z_0)$ . В

этом случае формула (2.48) примет вид

$$I_A = \iiint_V [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.49)$$

В частности, момент инерции относительно начала координат  $O(0,0,0)$  будет

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Момент инерции относительно оси  $Oz$  есть

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(P) dV, \quad (2.50)$$

т.к. квадрат расстояния от точки  $P(x, y, z)$  до оси  $Oz$  (см. рис.2.42) есть  $r^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = x^2 + y^2$ . Аналогично, относительно оси  $Ox$ :

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(P) dV, \text{ и относительно оси } Oy: I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(P) dV.$$

Нетрудно написать формулы для моментов инерции относительно координатных плоскостей.

б) Аналогичные формулы имеют место для моментов инерции плоской площадки  $D$ , но здесь тройной интеграл заменится двойным интегралом по области  $D$ .

Пример. Найти момент инерции однородного шара  $V$  радиуса  $R$  и плотности  $\rho_1$  относительно оси, проходящей через центр шара. (Начало координат совмещено с центром шара.)

Воспользуемся формулой (2.50). Понятно, что достаточно вычислить этот интеграл по 1/8 части, расположенной в первом октанте (рис. 2.43). Вычислять легче в сферических координатах (см. формулы (2.33)):

$$\begin{aligned} I_z &= \rho_1 \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho_1 \cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \\ &= -\frac{4}{5} \pi R^5 \rho_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \frac{8}{15} \pi R^5 \rho_1. \end{aligned}$$

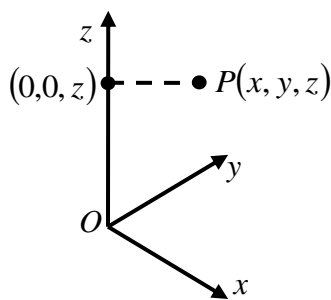


Рис. 2.42

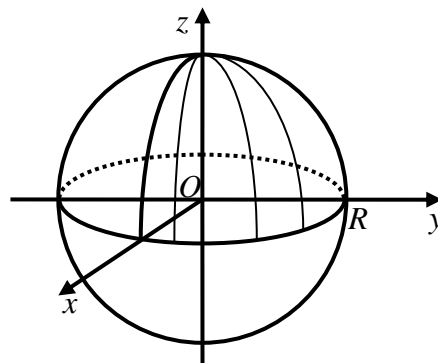


Рис. 2.43

## Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 20-е, стереотипное. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985. – 384 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Часть 2. М., ГИТТЛ, 1959. – 358 с.
3. Будаков Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука. ГРФМЛ, 1965. – 608 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963, 1100 с.
5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М., Наука, 1965. – 616 с.
6. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М., Физматлит, 2002. – 464 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М, Наука, ГРФМЛ, 1970. – 420 с.
8. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. Том 2. Издание 3-е, перераб. – М.-Л., ГИТТЛ, 1957. – 498 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т.1, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 432 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 560 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. Изд-е 23-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 479 с.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. Изд-е 21-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 656 с.
13. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного. Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2013. – 310 с.
14. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.2. Издание 2-е, стереотипное. – М., Наука. ГРФМЛ, 1974. – 472 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. СПб., Лань, 2005. – 464 с.
16. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.-Л., ГИТТЛ, 1949. – 420 с.