

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Механико-математический факультет  
Кафедра теории функций

Михаил Александрович Солдатов  
Светлана Серафимовна Круглова  
Евгений Валентинович Круглов

Математический анализ функций нескольких переменных  
Часть 3  
Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы векторного анализа  
Учебное пособие

Предназначено для студентов физического и радиофизического факультетов, а также для студентов направления «Бизнес-информатика»

Рекомендовано Методической комиссией  
механико-математического факультета

Нижний Новгород, 2014

## § 1. Криволинейные интегралы по длине дуги кривой

Понятие определённого интеграла по отрезку  $[a, b]$ ,  $a < b$ , обобщим на случай любой кривой. Это осуществляется двумя способами.

1. Пусть в пространстве дана материальная спрямляемая кривая  $\Gamma = AB$  и задана её линейная плотность  $\rho = \rho(P)$ . Найдём массу  $m$ . Поступаем обычным образом: разобьём кривую на малые части  $A_{k-1}A_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), их длины обозначим  $\Delta s_k$ . В каждом участке возьмём по точке  $P_k$ . (Рис. 3.1). Если участок мал, то его

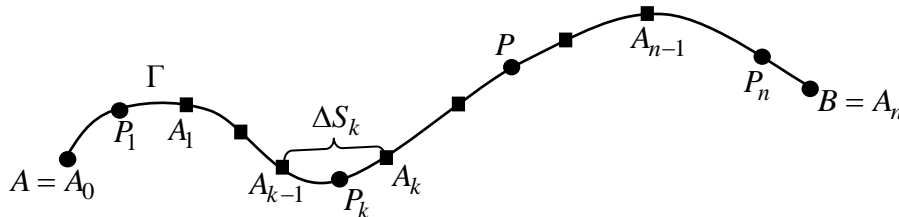


Рис. 3.1

можно примерно считать однородным, с плотностью  $\rho(P_k)$  и потому его масса приближённо есть  $\rho(P_k) \cdot \Delta s_k$ , и тогда для всей кривой  $m \approx \sum_{k=1}^n \rho(P_k) \cdot \Delta s_k$ . Переходя к пределу при  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k \rightarrow 0$ , получим точное значение массы:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(P_k) \Delta s_k. \quad (3.1)$$

Полученные суммы изучим с математической точки зрения.

### 2. Понятие криволинейного интеграла первого рода (типа).

Пусть в пространстве дана непрерывная спрямляемая кривая  $\Gamma = AB$  (обычно гладкая или кусочно-гладкая – см. § 2.6, п. 2) и в точках  $P(x, y, z)$  этой кривой определена некоторая функция  $F(P) \equiv F(x, y, z)$ . Разобьём кривую на части  $A_{k-1}A_k$ , длины  $\Delta s_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). На каждом участке возьмём по точке  $P_k$  и составим сумму

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k.$$

Она называется интегральной суммой для функции  $F(P)$  вдоль кривой  $\Gamma$ .

**Определение.** Предел интегральных сумм при  $\lambda \rightarrow 0$  (если он существует) называется криволинейным интегралом от функции  $F(P)$  по длине дуги кривой, или криволинейным интегралом первого рода (типа) и обозначается символами

$$\int_{\Gamma} F(P) ds = \int_{AB} F(x, y, z) ds.$$

Итак, по определению

$$\int_{\Gamma} F(P) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k. \quad (3.2)$$

Символ  $ds$  называют элементом длины кривой, он напоминает элементарные длины  $\Delta s_k$ , а точка  $P$  пробегает всю кривую. Кривая  $\Gamma = AB$  называется: путь или контур интегрирования. Поскольку длины  $\Delta s_k > 0$ , то такой интеграл не зависит от направления обхода кривой:

$$\int_{AB} F(P) ds = \int_{BA} F(P) ds.$$

Если кривая  $AB$  совпадает с отрезком  $[a, b]$  оси  $Ox$ , то он превращается в обычный определённый интеграл, но только когда  $a < b$ : в этом случае  $\Delta s_k = \Delta x_k$ ,

$$\int_{AB} F(x, y, z) ds = \int_a^b F(x, 0, 0) dx.$$

**Теорема (существования).** Если функция  $F(P)$  непрерывна на кривой  $\Gamma$ , то интеграл (3.2) по контуру  $\Gamma$  существует. (Более того, достаточно, чтобы функция  $F(P)$  была ограниченной с конечным числом точек разрыва.)

**3. Свойства интегралов первого рода** – такие же, как и у обычных определённых интегралов при  $a < b$ , и доказываются аналогично.

1) Линейность: а) Интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых. б) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2) Аддитивность. Если кривая  $\Gamma$  разбита на конечное число частей, то интеграл вдоль всей кривой равен сумме интегралов по отдельным частям.

3) Оценка интеграла. Если  $m \leq F(P) \leq M$ ,  $\forall P \in \Gamma$ , и  $l$  – длина кривой  $\Gamma$ , то

$$m \cdot l \leq \int_{\Gamma} F(P) ds \leq M \cdot l.$$

4) Теорема о среднем. Если функция  $F(P)$  непрерывна на кривой  $\Gamma$ , то найдётся точка  $P_0 \in \Gamma$ , что будет иметь место равенство

$$\int_{\Gamma} F(P) ds = F(P_0) \cdot l.$$

#### 4. Вычисление интегралов первого рода.

а) Будем рассматривать гладкие или кусочно-гладкие кривые  $\Gamma = AB$ , и пусть  $s$  – длина дуги, отсчитываемая от точки  $A$  до переменной точки  $P(x, y, z) \in \Gamma$  ( $s = \text{дл. } AP$ ). Точку  $P$  отмечаем как точку  $P(s)$  – её координаты однозначно определяются заданием  $s$  и пусть они, т.е. параметрические уравнения кривой  $\Gamma$ , есть

$$\{x = x(s), y = y(s), z = z(s)\}, 0 \leq s \leq l; \quad (3.3)$$

это непрерывные функции. Обозначим  $s_k$  и  $s'_k$  длины дуг, соответственно  $AA_k$  и  $AP_k$ , то  $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$ ,  $s'_k \in [s_{k-1}, s_k]$ ; координаты точки  $P_k$  определяются из уравнений (3.3) при  $s = s'_k$  (рис. 3.2).

Интегральная сумма по кривой  $\Gamma$  примет вид

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n F(x(s'_k), y(s'_k), z(s'_k))(s_k - s_{k-1}). \quad (3.4)$$

Справа получили обычную интегральную сумму для функции  $F(x(s), y(s), z(s))$  одного переменного  $s$  по отрезку  $0 \leq s \leq l$ . Поэтому, переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , получим

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_0^l F(x(s), y(s), z(s)) ds. \quad (3.5)$$

Однако для практических вычислений формула (3.5) мало пригодна.

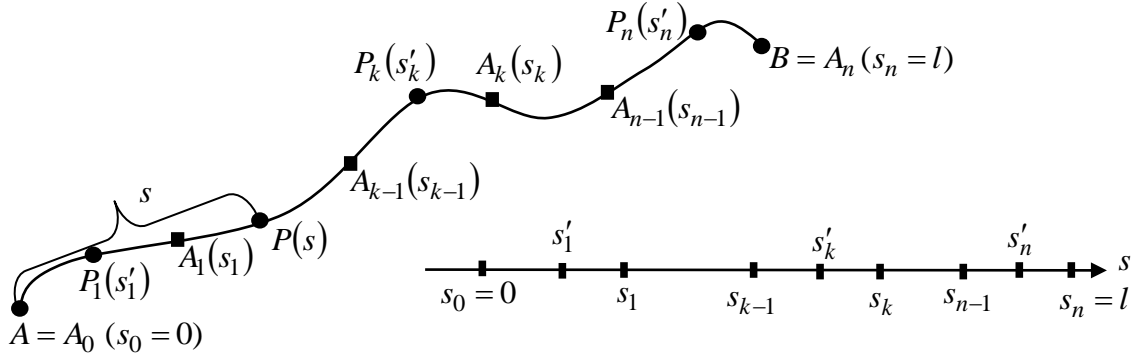


Рис. 3.2

б) Как правило, кривая в пространстве задаётся параметрическими уравнениями

$$\{x = \varphi(t), y = f(t), z = \psi(t)\}, t_0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

где параметр  $t$  произвольный. Допустим, что кривая  $\Gamma$  гладкая, так что функции (3.6) непрерывно дифференцируемы (имеют непрерывные первые производные) на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$ . Пусть значению  $t$  параметра соответствует дуга  $s$ . Как и в плоском случае [13, §10.2] длина кривой (3.6) на участке  $[t_0, T]$  определяется интегралом

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\varphi'(t)^2 + f'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt; \quad (3.7)$$

здесь значению  $s = 0$  соответствует  $t = t_0$ , а значению  $s = l$  соответствует  $t = T$  (рис. 3.3a)).

В определённом интеграле в равенстве (3.5) сделаем замену переменной: от  $s$  перейдём к переменной  $t$  по формуле (3.7). Учитывая, что дифференциал длины дуги есть  $ds = s'(t) \cdot dt = \sqrt{\varphi'(t)^2 + f'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$ , получим

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T F(\varphi(t), f(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + f'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt, t_0 < T. \quad (3.8)$$

**Вывод.** Если кривая  $\Gamma$  гладкая и задана параметрически уравнениями (3.6), то криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле (3.8).

Формула (3.8) легко запоминается: вместо  $x, y, z$  надо просто подставить их значения (3.6) в точки кривой, а вместо  $ds$  – дифференциал длины дуги.

Если кривая  $\Gamma$  плоская, лежит в плоскости  $Oxy$ , то в формулах (3.6) и (3.8) отсутствуют  $z$  и  $\psi(t)$ . В частности, пусть  $\Gamma$  задана явным уравнением  $y = y(x)$ , или, что то же самое, параметрическими уравнениями  $\{x = x, y = y(x)\}$ ,  $a \leq x \leq b$ , тогда получим

$$\int_{\Gamma} F(x, y) ds = \int_a^b F(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (3.9)$$

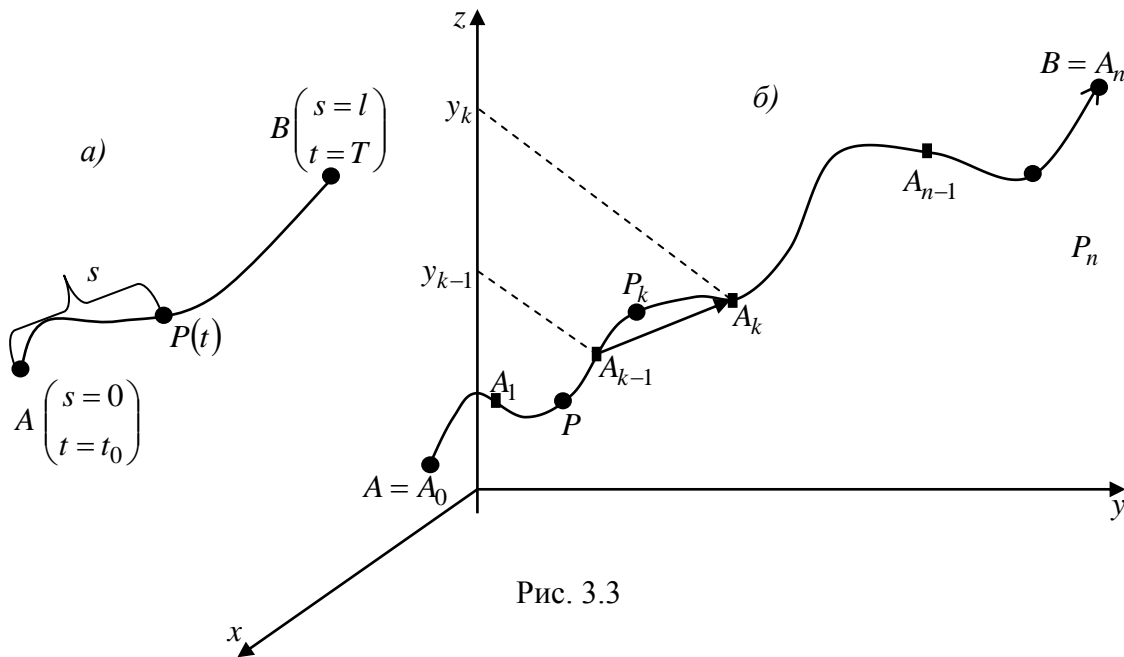


Рис. 3.3

### 5. Приложения интегралов первого рода.

1) Масса  $m$  материальной кривой  $\Gamma$  с плотностью  $\rho(P)$  есть  $m = \int_{\Gamma} \rho(P) ds$ .

2) Координаты центра масс плоской кривой  $\Gamma$  будут

$$x_c = \frac{K_y}{m}, \quad y_c = \frac{K_x}{m},$$

где  $K_y = \int_{\Gamma} x\rho(P)ds$ ,  $K_x = \int_{\Gamma} y\rho(P)ds$  - статические моменты кривой  $\Gamma$  относительно осей  $Oy$  и  $Ox$  соответственно.

3) Моменты инерции. Аналогично случаям плоской области и тела, можно записать моменты инерции материальной кривой  $\Gamma$  (плоской или пространственной) относительно объекта (точки, прямой или плоскости) (см. § 2.8).

Момент инерции пространственной кривой относительно точки  $A(x_0, y_0, z_0)$  есть

$$I_A = \int_{\Gamma} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \rho(P) ds.$$

В частности, момент инерции относительно начала координат будет

$$I_O = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(P) ds.$$

Моменты инерции относительно координатных осей имеют вид

$$I_x = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) \rho(P) ds, \quad I_y = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) \rho(P) ds, \quad I_z = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \rho(P) ds.$$

В случае кривых, расположенных в плоскости  $Oxy$ , отсутствуют переменная  $z$  и  $I_z$ .

Нетрудно записать моменты инерции относительно плоскостей.

Примеры. 1) Найти координаты центра масс четверти окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ , если плотность постоянна:  $\rho(P) = \rho$ . Рис. (3.4)

Расположим дугу окружности в первой четверти и запишем её уравнение в параметрической форме – это  $\{x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi\}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Здесь  $ds = R d\varphi$  (это следует и из геометрических соображений). Имеем

$$K_y = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} x ds = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \varphi \cdot R d\varphi = \rho \cdot R^2, \quad K_x = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} y ds = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin \varphi \cdot R d\varphi = \rho \cdot R^2,$$

$$m = \rho \cdot \frac{1}{2} \pi R, \quad x_c = \frac{2}{\pi} R, \quad y_c = \frac{2}{\pi} R.$$

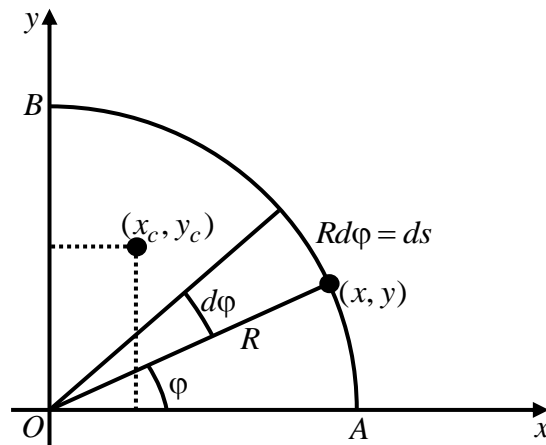


Рис. 3.4

2) Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  первого витка  $\Gamma$  винтовой линии

$$\{x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t, z = v \cdot t\}, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.9')$$

если плотность  $\rho = 1$ .

Винтовой линией называется линия, описываемая точкой  $M$ , движущейся с постоянной линейной скоростью  $v$  по образующей прямого кругового цилиндра радиуса  $a$ , который при этом вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Найдём её параметрические уравнения, взяв за параметр время  $t$ . Пусть в начальный момент точка  $M$  находилась в положении  $A(a, 0, 0)$ , а в момент  $t$  в положении  $M(x, y, z)$ . Проекция точки  $M$  на плоскость  $Oxy$  есть  $N(x, y, 0)$ . (Рис. 3.5). Считаем, что точка  $N$  движется по окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  против часо-

вой стрелки. Тогда имеем *правую винтовую линию*, или *правый винт*. (При том, что система координат  $Oxyz$  – правая.) Поскольку точка  $N$  вращается по окружности с угловой скоростью  $\omega$ , то она за время  $t$  опишет дугу  $AN$  с центральным углом  $\varphi = \angle AON = \omega \cdot t$ , и следовательно  $x = a \cos \varphi = a \cos \omega t$ ,  $y = a \sin \varphi = a \sin \omega t$ . А аппликата точки  $M$  равна расстоянию, пройденному точкой по образующей цилиндра, именно  $z = v \cdot t$ . Так получили уравнения (3.9').

После того, как угол  $\varphi$  изменится на  $2\pi$  (это за время  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ ), точка  $M$  вернётся на ту же образующую цилиндра (точка  $B$ ), поднявшись на высоту  $h = AB = v \cdot \frac{2\pi}{\omega}$  – она называется *шагом* винта. (Иногда в уравнениях (3.9') вме-

сто  $v$  подставляют  $v = \frac{\omega}{2\pi} \cdot h$ , а вместо  $\omega t$  – угол  $\omega t = \varphi$ , т.е. вместо физических величин подставляют геометрические.)

Итак, пользуясь уравнениями (3.9'), находим

$$I_z = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{(a\omega)^2 + v^2} dt = \frac{2\pi}{\omega} a^2 \sqrt{(a\omega)^2 + v^2} = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

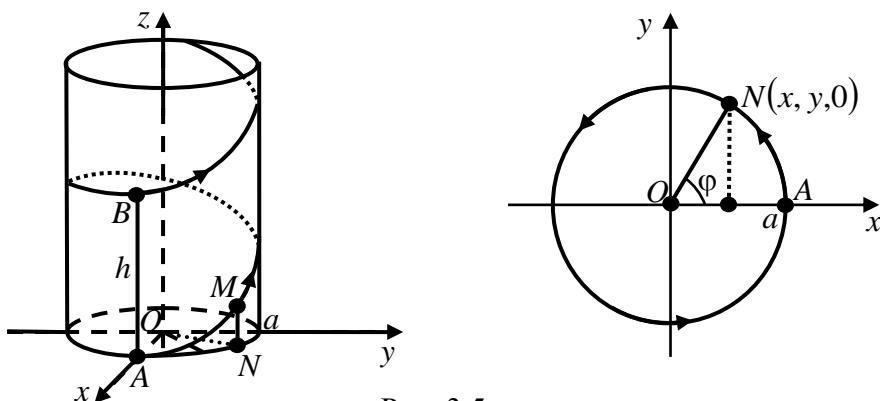


Рис. 3.5

## § 2. Криволинейные интегралы по координатам или криволинейные интегралы второго рода (типа)

**1.** Пусть в пространстве дана непрерывная спрямляемая кривая  $AB$  (как обычно, гладкая или кусочно-гладкая) и на ней *установлено определённое направление* (движения, обхода): от (начальной) точки  $A$  к (конечной) точке  $B$ . В таком случае говорят, что *кривая ориентирована*. И пусть в точках  $P(x, y, z) \in AB$  задана функция  $F(P) \equiv F(x, y, z)$ . Начиная с точки  $A$ , разобьём кривую на  $n$  малых участков последовательно точками  $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$  и пусть  $A_k = A_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). На каждом участке  $A_{k-1}A_k$  возьмём по точке  $P_k$  и найдём произведение  $F(P_k)\Delta x_k$ , где  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  есть проекция на ось

$Ox$  направленного отрезка  $\overline{A_{k-1}A_k}$ ; здесь существенен выбор направления на кривой – он сказывается на знаке величины  $\Delta x_k$ . (Рис. 3.3, б))

Пусть  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k$ , где  $\Delta s_k$  – длина дуги  $A_{k-1}A_k$ . Составим сумму

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta x_k.$$

Предел этой суммы при  $\lambda \rightarrow 0$  (если он существует) называется криволинейным интегралом (второго рода) по координате  $x$  и записывается так:

$$\int_{AB} F(P) dx = \int_{AB} F(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta x_k. \quad (3.10)$$

Очевидно, этот интеграл превращается в обычный определённый, если  $AB$  есть отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$ , включая случай  $a > b$ .

**Теорема (существования).** Если функция  $F(x, y, z)$  непрерывна на кривой  $AB$ , то интеграл (3.10) существует.

*Свойства интегралов второго рода.*

1) Ориентированность. При изменении направления обхода кривой  $AB$  интеграл (3.10) изменит знак:  $\int_{AB} F(P) dx = - \int_{BA} F(P) dx$ , так как при смене направления все величины  $\Delta x_k$  поменяют знак.

Как и для интегралов по длине дуги, выполняются свойства:

2) Линейность.

3) Аддитивность.

Другие свойства интегралов первого рода, как-то оценка сверху и снизу, теорема о среднем для интегралов второго рода места не имеют.

## 2. Вычисление интегралов второго рода.

Пусть кривая  $AB$  – гладкая и задана параметрическими уравнениями (3.6), причём начальной точке  $A$  соответствует значение  $t = t_0$ , конечной  $B$  – значение  $t = T$  (возможно  $t_0 > T$ ), точке  $A_k(x_k, y_k, z_k)$  соответствует значение параметра  $t = t_k$ . Тогда

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\xi_k) \cdot (t_k - t_{k-1}), \quad \exists \xi_k \in (t_{k-1}, t_k),$$

– применили теорему Лагранжа о конечном приращении функции. На дуге  $A_{k-1}A_k$  берём точку  $P_k$  не любую, а соответствующую значению  $t = \xi_k$ , и обозначим  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ . Учитывая сказанное, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n F(\varphi(\xi_k), f(\xi_k), \psi(\xi_k)) \cdot \varphi'(\xi_k) \Delta t_k.$$

Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$  и пользуясь тем, что предел интегральных сумм не зависит от выбора точек  $\xi_k$  и соответственно  $P_k$ , получим

**Вывод.** Если функция  $F(x, y, z)$  непрерывна на кривой  $AB$ , причём кривая эта гладкая и задана параметрическими уравнениями (3.6), то справедлива формула для вычисления интеграла второго рода



$$\int_{AB} F(x, y, z) dx = \int_{t_0}^T F(\varphi(t), f(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) dt, \quad (3.11)$$

где нижний предел  $t_0$  соответствует начальной точке  $A$ , а верхний  $T$  – конечной точке  $B$ .

Аналогично, если проектировать на оси  $Oy$  и  $Oz$ , то придём к понятию криволинейного интеграла соответственно по координате  $y$  и по координате  $z$ :

$$\int_{AB} F(P) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta y_k, \quad \int_{AB} F(P) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta z_k. \quad (3.12)$$

Но обычно рассматривают сумму интегралов указанных трёх видов. Именно, пусть в точках кривой  $AB$  заданы три скалярные функции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  от переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , или, что то же, одна векторная функция  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ . Берут сумму

$$\int_{AB} X dx + \int_{AB} Y dy + \int_{AB} Z dz \equiv \int_{AB} X dx + Y dy + Z dz$$

– это есть криволинейный интеграл второго рода «общего вида», или *линейный интеграл* от векторной функции  $\vec{F}(X, Y, Z)$  вдоль кривой  $AB$ , или *циркуляция вектора  $\vec{F}$*  вдоль кривой  $AB$ .

### 3. Вычисление криволинейного интеграла общего вида.

Понятно, что для интегралов (3.12) тоже справедливы формулы вида (3.11). Поэтому: если функции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  непрерывны на кривой  $AB$ , кривая эта гладкая и задана уравнениями (3.6), то

$$\begin{aligned} & \int_{AB} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = \\ & = \int_{t_0}^T \{ X(\varphi(t), f(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Y(\varphi(t), f(t), \psi(t)) f'(t) + Z(\varphi(t), f(t), \psi(t)) \psi'(t) \} dt, \end{aligned} \quad (3.13)$$

причём начальной точке  $A$  соответствует значение  $t = t_0$  параметра, а точке  $B$  (конечной) – значение  $t = T$ . Замечаем, что на символы  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  можно смотреть как на дифференциалы функций (3.6) (их называют: *дифференциалы вдоль кривой  $AB$* ). Поэтому формула (3.13) запоминается вполне естественно: в функции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  вместо переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  надо подставить их значения (3.6) в точках кривой и т.д.

Замечание. Если кривая  $AB$  плоская, лежит в плоскости  $Oxy$ , то в этих формулах отсутствуют  $Z$ ,  $z$ ,  $\psi(t)$ .

### 4. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

В качестве параметра  $t$  возьмём переменную дугу  $s$ , и пусть кривая задана тремя параметрическими уравнениями (3.3) или, что то же, одним векторным уравнением

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k},$$

где  $P(s)$  – точка кривой, соответствующая параметру  $s$  (длину отсчитываем от начальной точки  $A$ ) (рис.3.3).

В точке  $P$  проводим вектор

$$\vec{r}'(s) = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} + z'(s)\vec{k}.$$

Он направлен по касательной к кривой в сторону возрастания  $s$  и является единичным:  $|\vec{r}'(s)| = 1$ . Известно, что координаты единичного вектора касательного направления, направленного в сторону возрастания  $s$ , равны направляющим косинусам (см. § 1.4). Обозначим  $\vec{r}'(s) = \vec{\tau}$ , то  $\vec{\tau} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$  и  $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$ ,  $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$ ,  $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$ . (Рис. 3.6).

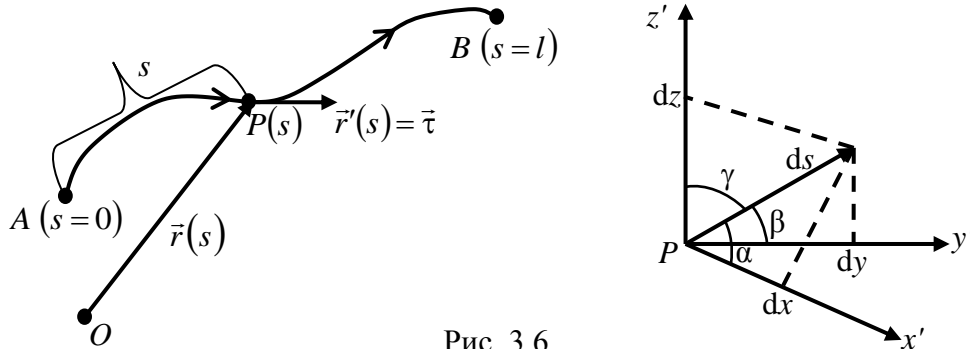


Рис. 3.6

Применяя формулу (3.13), где  $t \equiv s$ , и затем формулы вида (3.5), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \\ & = \int_0^l \{ X(x(s), y(s), z(s))x'(s) + Y(\dots)y'(s) + Z(\dots)z'(s) \} ds = \\ & = \int_0^l \{ X(x(s), y(s), z(s))\cos\alpha + Y(\dots)\cos\beta + Z(\dots)\cos\gamma \} ds = \\ & = \int_{AB} \{ X(x, y, z)\cos\alpha + Y(x, y, z)\cos\beta + Z(x, y, z)\cos\gamma \} ds. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Приравнивая начало и конец, получаем искомую связь интегралов второго и первого рода.

Введём вектор  $\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \vec{r}'(s)ds = \vec{\tau} ds$ , то полученная формула запишется в векторном виде так:

$$\int_{AB} (\vec{F}, \vec{dr}) = \int_{AB} (\vec{F}, \vec{\tau}) ds. \quad (3.15)$$

Здесь скалярное произведение  $(\vec{F}, \vec{\tau}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{\tau}| \cdot \cos\varphi = F_{\tau}$  ( $\varphi$  - угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{\tau}$ ) есть проекция вектора  $\vec{F}$  на направление касательной, она называется *тангенциальной составляющей вектора  $\vec{F}$* . Формулы (3.14) и (3.15) связывают интеграл второго рода, зависящий от направления обхода кривой, с интегралом первого рода, который от направления не зависит. Но здесь нет противоречия: если изменить направление на кривой, то направляющие косинусы

и вектор  $\vec{\tau}$  также сменяют знак (т.е. знак поменяется и в левой и в правой частях обеих формул).

### § 3. Приложение криволинейных интегралов второго рода – вычисление работы силы

Пусть в точке  $P$  пространства (или его части) помещена материальная точка (масса, заряд, ...) и под воздействием каких-то причин точка переместилась из положения  $A$  в положение  $B$  вдоль кривой  $AB$ . Найти работу  $\mathbf{A}$  некоторой силы  $\vec{F}(X, Y, Z)$  при этом перемещении. Для этого кривую  $AB$ , как обычно, точками  $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$  разделим на малые участки  $A_{k-1}A_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), длины  $\Delta s_k$ , и на каждом из них возьмём по точке  $P_k$ . Ввиду малости участка, силу на нём можем считать постоянной, примерно равной  $\vec{F}(P_k)$ , а криволинейный участок заменим прямолинейным – хордой  $\overline{A_{k-1}A_k}$ . Обозначим  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  – углы касательной к  $AB$  в точке  $P_k$ , а  $\vec{\tau}_k$  – единичный вектор касательной в этой точке. Имеем  $|\overline{A_{k-1}A_k}| \approx \Delta s_k$  и потому  $\overline{A_{k-1}A_k} \approx \Delta s_k \cdot \vec{\tau}_k = \{\Delta s_k \cdot \cos \alpha_k, \Delta s_k \cdot \cos \beta_k, \Delta s_k \cdot \cos \gamma_k\}$ .

Пусть  $\varphi_k$  – угол между векторами  $\overline{A_{k-1}A_k}$  и  $\vec{F}(P_k)$ . (См. рис.3.7). Приближённо работа на дуге  $A_{k-1}A_k$  будет

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}_k &\approx |\vec{F}(P_k)| \cdot |\overline{A_{k-1}A_k}| \cdot \cos \varphi_k = (\vec{F}(P_k), \overline{A_{k-1}A_k}) = \\ &= (X(P_k) \cdot \cos \alpha_k + Y(P_k) \cdot \cos \beta_k + Z(P_k) \cdot \cos \gamma_k) \Delta s_k. \end{aligned}$$

Сумма этих «элементарных работ» в пределе при  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k \rightarrow 0$  даёт истинное значение работы:

$$\mathbf{A} = \int_{AB} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) ds \equiv \int_{AB} X dx + Y dy + Z dz. \quad (3.16)$$

Здесь использовали связь с интегралами второго рода (см. формулу (3.14)). С помощью векторов работа (3.16) запишется интегралами (3.15), правый из которых часто записывается так:

$$\mathbf{A} = \int_{AB} \vec{F}_\tau \cdot ds. \quad (3.17)$$

Формула (3.17) явно отражает тот факт, что работа определяется именно касательной составляющей вектора  $\vec{F}$  (рис. 3.8).

Важно отметить, что интеграл второго рода по каждой координате в отдельности зависит от выбора системы координат, а интеграл общего вида (линейный интеграл) инвариантен по отношению к системе координат. Это видно из (3.15) и (3.17).

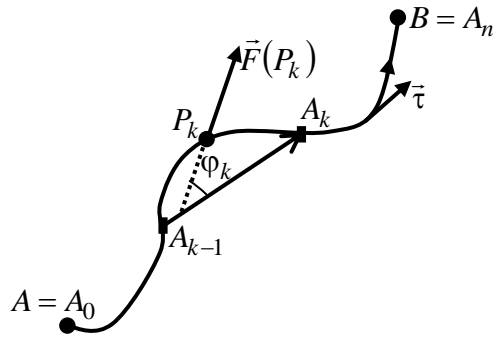


Рис. 3.7

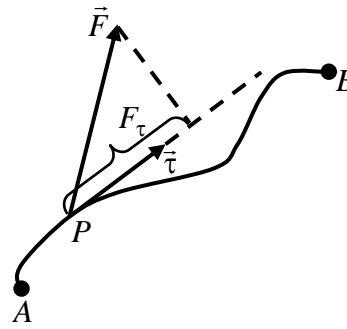


Рис. 3.8

**Пример.** Найти работу, производимую силой тяжести при перемещении точки массы  $m$  из положения  $A(a_1, b_1, c_1)$  в положение  $B(a_2, b_2, c_2)$  (рис. 3.9).

Ось  $Oz$  направим вниз, то сила  $\vec{F} = mg \cdot \vec{k}$  ( $g$  – ускорение силы тяжести): проекции силы есть  $X = 0, Y = 0, Z = mg$ . За параметр кривой  $AB$  примем координату  $z$  и пусть уравнения кривой имеют вид  $\{x = x(z), y = y(z), z = z\}$ . По

формуле (3.16) имеем  $\mathbf{A} = \int_{AB} Z dz = \int_{AB} mg dz = mg \int_{c_1}^{c_2} dz = mg(c_2 - c_1) = mg \cdot h$ .

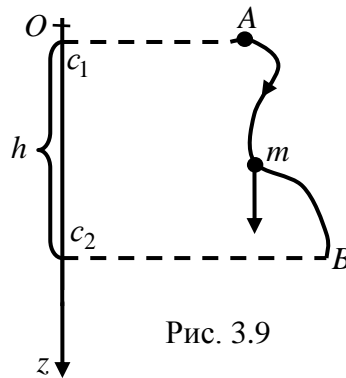


Рис. 3.9

## § 4. Плоский случай. Формула Грина<sup>1</sup>

**1.** Пусть кривая  $AB$  плоская, лежит в плоскости  $Oxy$ . Тогда криволинейный интеграл второго рода примет вид

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (3.18)$$

Физически его можно трактовать как работу силы  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  вдоль пути  $AB$ .

Если кривая задана уравнением  $y = y(x), x \in [a, b]$  (рис.3.10), то приняв  $x$  за параметр, будем иметь её параметрические уравнения в виде

<sup>1</sup> Джордж Грин (1793-1841) – английский математик и физик, сын мельника. В 1828г. опубликовано его сочинение «Опыт приложения математического анализа к теории электричества и магнетизма».

$\{x = x, y = y(x)\}$ , и получим

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_a^b P(x, y(x))dx, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_a^b Q(x, y(x))y'(x)dx. \quad (3.19)$$

Аналогичные формулы получим, когда кривая задана уравнением  $x = x(y)$ ,  $y \in [c, d]$ .

Кривая  $AB$  называется замкнутой, если начало и конец совпадают,  $A = B$ .

Кривая  $AB$  называется *простой*, если через каждую свою внутреннюю точку она проходит только один раз: кривая не имеет точек самокасания, самопересечения и т.п. Например, кривые, изображённые на рис. 3.11, не являются простыми.

*Простая замкнутая гладкая или кусочно-гладкая* кривая называется *замкнутым контуром*. На нём направление обхода (движения) можно выбрать двумя способами. Направление обхода считается *положительным*, если при этом обходе область, ограниченная контуром, т.е. внутренность:  $\text{int } \Gamma$ , остаётся слева (обход против часовой стрелки). Если записан интеграл вида (3.18) по замкнутому контуру  $\Gamma$ , то считается, что обход ведётся в положительном направлении, и знак интеграла иногда отмечается с кружочком:  $\oint$ . Если  $l$  некоторая кривая, то эта же кривая, но с противоположным направлением движения обозначается через  $l^-$ ; при этом сам путь  $l$  иногда отмечается как  $l^+$ . По свойству ориентированности  $\int_{l^-}(\dots) = - \int_{l^+}(\dots)$ .

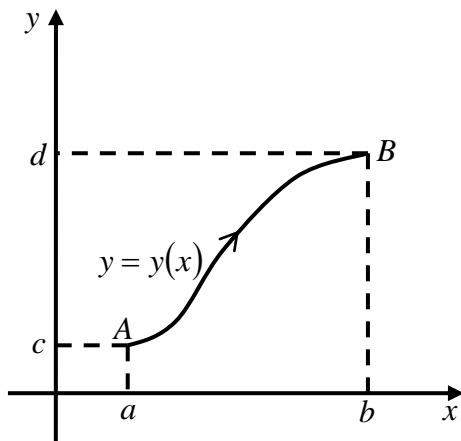


Рис. 3.10

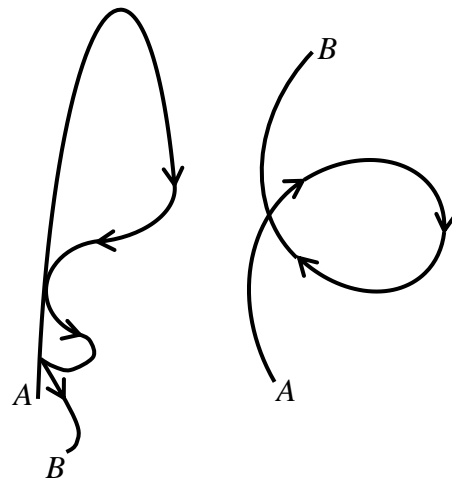


Рис. 3.11

**2. Теорема Грина.** Пусть  $D$  – замкнутая область, ограниченная замкнутым контуром  $\Gamma$ ,  $\Gamma = \partial D$ . Если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  в области  $D$  непрерывны и имеют непрерывные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , то имеет место формула Грина:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.20)$$

(Формула (3.20) получается сложением двух её частных случаев: когда  $\{P(x, y) = 0, Q(x, y) \neq 0\}$  или  $\{Q(x, y) = 0, P(x, y) \neq 0\}$ .)

Δ 1) Пусть область  $D$  правильная в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  (рис.3.12).

Вычислим двойной интеграл:  $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$ . При вычислении внут-

реннего интеграла считается, что  $x = const$ , так что он вычисляется с помощью первообразной  $P(x, y)$ :

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y)|_{y_1(x)}^{y_2(x)}] dx = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \stackrel{\text{в силу (3.19)}}{=} \int_{AmB} P(x, y) dx - \int_{AnB} P(x, y) dx = - \int_{BmA} P(x, y) dx - \int_{AnB} P(x, y) dx = - \oint_{AnBmA} P(x, y) dx \equiv - \oint_{\Gamma} P(x, y) dx \quad (3.21)$$

Результат не изменится, если  $\Gamma$  содержит отрезки прямых  $x = a$  и  $x = b$ , поскольку на них  $dx = 0$ .

Аналогично можно доказать, что

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy. \quad (3.22)$$

Складывая эти частные случаи (3.21) и (3.22), получим формулу (3.20).

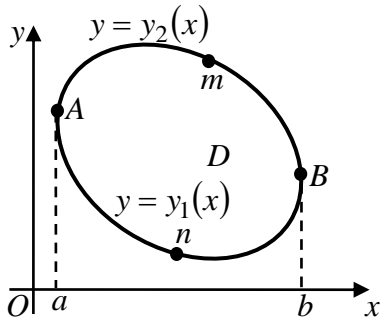


Рис. 3.12

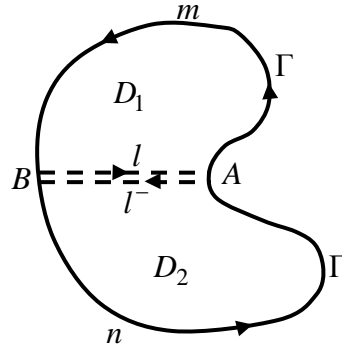


Рис. 3.13

2) Если область  $D$  не является правильной, то её разбивают на правильные части  $D_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) с помощью кривых  $l_k \cup l_k^-$ , проходимых дважды в разных направлениях (так называемые двойные кривые или «двойные перемычки»). Для каждой из областей  $D_k$  записывают формулу (3.20), затем применяют свойство аддитивности и тот факт, что интегралы по  $l_k$  и  $l_k^-$  взаимно уничтожаются. Например, для случая, изображённого на рис. 3.13 имеем  $\oint_{AmBA} = \iint_{D_1}$ ,

$\oint_{ABnA} = \iint_{D_2}$ . Складывая, находим:  $\left( \int_{AmB} + \int_{BA} \right) + \left( \int_{AB} + \int_{BnA} \right) = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$ ; интегралы по  $l = BA$  и  $l^- = AB$  взаимно уничтожатся, и получим  $\oint_{AmBnA} = \iint_D$ , т.е. равенство

(3.20). ▲

**3. Формула Грина верна и для многосвязной области.** Именно, пусть замкнутая многосвязная область  $D$  ограничена  $(n+1)$ -им замкнутыми контурами: внешним  $\Gamma_0$  и внутренними  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , причём, все они обходятся против часовой стрелки. И пусть  $\Gamma$  - так называемый *составной контур*:  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1^- + \dots + \Gamma_n^-$ , причём считается, что  $\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1^-} + \dots + \int_{\Gamma_n^-}$ . Тогда при условии, что функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны и имеют непрерывные первые частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  в области  $D$ , включая её границу  $\Gamma$ , верна формула Грина (3.20). Подтвердим это на примере двусвязной области  $D$  (см. рис. 3.14). Из неё сделаем область односвязную, проведя двойной разрез  $l \cup l^-$ , - её граница будет  $L = \Gamma_0 + \Gamma_1^- + l + l^-$ . Применим к этой области формулу Грина. Интегралы по  $l$  и  $l^-$  уничтожатся и криволинейный интеграл по границе  $L$  сведётся к сумме интегралов по контурам  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1^-$ ; обозначаем  $\Gamma_0 + \Gamma_1^- = \Gamma$ .

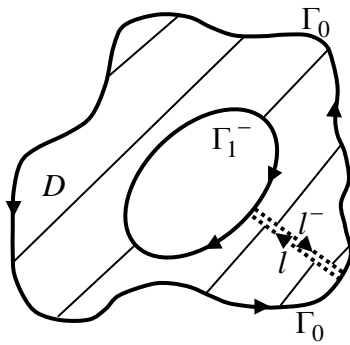


Рис. 3.14

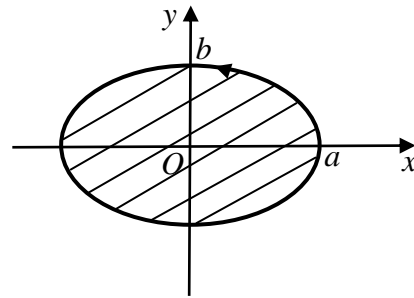


Рис. 3.15

**Замечание 1.** Формула Грина сводит вычисление интеграла по замкнутым контурам к вычислению двойных интегралов по областям, ограниченными этими контурами, или наоборот.

**Замечание 2.** Поскольку функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  однозначны, то интеграл по замкнутому контуру  $\Gamma = AB$  (см. (3.18)) не зависит от выбора начальной  $A$  и конечной  $B$  ( $A = B$ ) точек пути интегрирования.

**4. Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла.**

Пусть  $\sigma$  - площадь области  $D$ , ограниченной замкнутым контуром  $\Gamma$ . Известно, что  $\sigma = \iint_D dx dy$ . Положим в формуле Грина (3.20)  $P \equiv -y$ ,  $Q \equiv 0$  или  $P \equiv 0$ ,

$Q \equiv x$ , то получим  $\sigma = \int_{\Gamma} (-y) dx = \int_{\Gamma} x dy$  и отсюда ещё

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx. \quad (3.23)$$

**Пример.** Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(рис. 3.15). Возьмём параметрические уравнения эллипса в виде  $\{x = a \cos t, y = b \sin t\}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Находим  $dx = -a \sin t dt, dy = b \cos t dt$  и по формуле (3.23)

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

В частности, при  $a = b$  получаем площадь круга.

## § 5. Поверхностные интегралы первого рода (типа), или интегралы по площади поверхности

Понятие двойного интеграла обобщим на случай «кривых» поверхностей.

**1.** Напомним, что поверхность  $S$ , заданная уравнением  $\Phi(x, y, z) = 0$ , называется *гладкой*, если в точках  $P(x, y, z) \in S$  функция  $\Phi(P) \equiv \Phi(x, y, z)$  непрерывна и имеет непрерывные первые частные производные, причём  $\text{grad} \Phi \neq 0$ , т.е.  $\Phi'_x{}^2 + \Phi'_y{}^2 + \Phi'_z{}^2 \neq 0$ . В каждой внутренней точке такой поверхности существует касательная плоскость, положение которой меняется непрерывно при перемещении точки касания  $P$ , а именно: нормальный вектор  $\vec{N} = \text{grad} \Phi$  непрерывно меняет своё направление. На таких поверхностях нет особых точек, рёбер. В частности, поверхность  $z = f(x, y)$  является гладкой, когда функция  $z = f(x, y)$  и её производные  $z'_x$  и  $z'_y$  непрерывны в области  $D$  – проекции  $S$  на плоскость  $Oxy$ . Непрерывная поверхность называется кусочно-гладкой, если её можно разбить кусочно-гладкими кривыми на конечное число гладких частей. Только такие поверхности и будем иметь в виду. Площадь поверхности  $S$  будем обозначать тоже буквой  $S$ .

**2.** Пусть в точках  $P(x, y, z)$  поверхности  $S$  задана ограниченная функция  $F(P) \equiv F(x, y, z)$ . Разобьём  $S$  произвольно сетью кусочно-гладких кривых на  $n$  частей  $\Delta S_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) (рис.3.16). В каждой из этих частей берём произвольно точку  $P_k$ , найдём произведение  $F(P_k) \cdot \Delta S_k$  и составим сумму

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) \cdot \Delta S_k. \quad (3.24)$$

Она называется интегральной суммой функции  $F(P)$  по площади поверхности  $S$ . Пусть  $\lambda$  - наибольший из диаметров всех площадок  $\Delta S_k$ . Предел интегральных сумм при  $\lambda \rightarrow 0$  (если он существует) называется *поверхностным интегралом первого рода (типа)* или *интегралом от функции  $F(P)$  по площади поверхности  $S$*  и записывается так:

$$\iint_S F(P) dS = \iint_S F(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(P_k) \cdot \Delta S_k. \quad (3.25)$$



**Теорема** (существования). Если функция  $F(P)$  на поверхности  $S$  непрерывна, то интеграл (3.25) существует.

Свойства интегралов первого рода такие же, как у двойных интегралов, и последние есть частный случай первых, когда  $S \equiv D$ .

**3. Вычисление.** Понятие интеграла первого рода инвариантно по отношению к выбору системы координат. Однако для его вычисления введём в пространстве декартову систему координат. Пусть поверхность  $S$  гладкая, задана уравнением  $z = f(x, y)$  (так что  $S$  каждой вертикалью пересекается не более, чем в одной точке), проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$ , а кусок  $\Delta S_k$  - в площадку

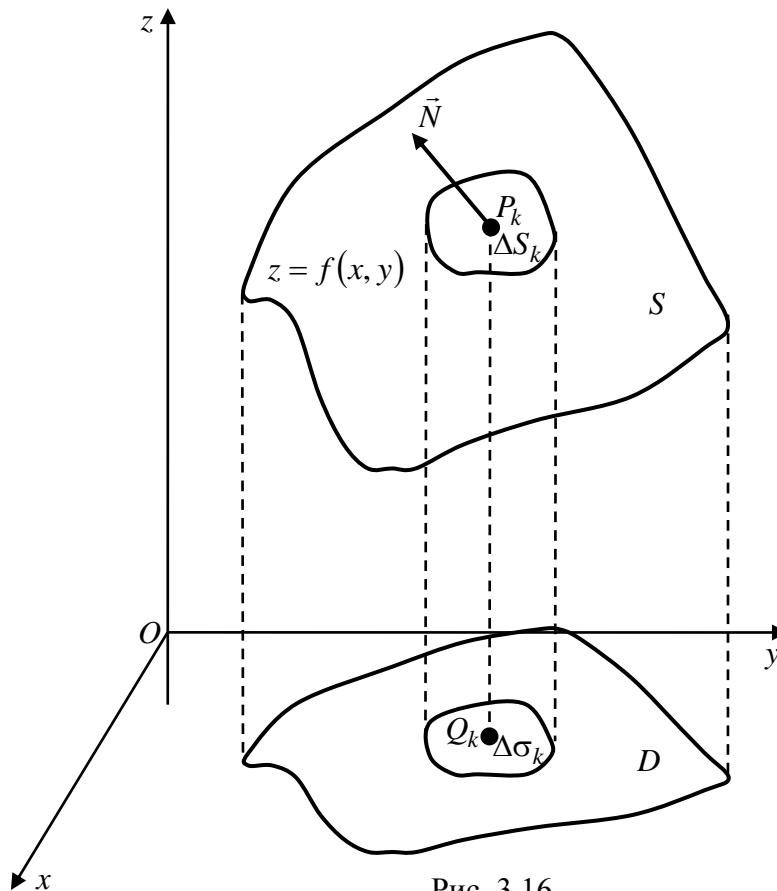


Рис. 3.16

$\Delta\sigma_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) (см. рис.3.16). Как обычно, обозначаем  $p(x, y) = f'_x(x, y)$ ,  $q(x, y) = f'_y(x, y)$ . Известно (см. § 2.7, п.4), что

$$\Delta S_k = \iint_{\Delta\sigma_k} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy.$$

По теореме о среднем для двойного интеграла, на площадке  $\Delta\sigma_k$  найдётся такая точка  $Q_k(\xi_k, \eta_k)$ , что

$$\Delta S_k = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \Big|_{Q_k} \cdot \Delta\sigma_k.$$

Пусть  $P_k$  – точка пересечения перпендикуляра, восстановленного из точки  $Q_k(\xi_k, \eta_k)$ , с поверхностью  $S$ , т.е. это есть точка  $P_k(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ . Тогда интегральная сумма (3.24) примет вид

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) \cdot \Delta S_k = \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + p^2(\xi_k, \eta_k) + q^2(\xi_k, \eta_k)} \cdot \Delta \sigma_k. \quad (3.26)$$

Справа получилась интегральная сумма для функции двух переменных  $F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}$  по области  $D$ . Переходя в равенстве (3.26) к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$  и учитывая, что предел не зависит от выбора точек  $P_k$ , получаем

**Вывод.** Пусть функция  $F(x, y, z)$  непрерывна на поверхности  $S$ , поверхность эта задана уравнением  $z = f(x, y)$ , проектируется на плоскость  $Oxy$  в ограниченную замкнутую область  $D$ , и функция  $f(x, y)$  имеет в  $D$  непрерывные частные производные  $p = f'_x(x, y)$ ,  $q = f'_y(x, y)$ . Тогда поверхностный интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (3.27)$$

Формула эта получается и запоминается вполне естественно: вместо  $(x, y, z) \in S$  надо подставить их значения  $(x, y, f(x, y))$  в точках поверхности – при этом точки  $(x, y)$  пробегают область  $D$ , – а символ  $dS$  заменить на «элемент площади» поверхности:  $dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \frac{1}{|\cos \nu|} d\sigma$ ,  $d\sigma = dx dy$ , где  $\nu$  – угол нормали  $\vec{N}$  к поверхности  $S$  с осью  $Oz$ . Если брать острый угол, то формулу (3.27) можно записать и так:

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \frac{1}{\cos \nu} d\sigma. \quad (3.28)$$

Аналогичные формулы получим, если поверхность  $S$  задана уравнениями  $x = \varphi(y, z)$  или  $y = \psi(x, z)$  и проектируется на плоскости  $Oyz$  или  $Oxz$  соответственно в области  $D_1$  или  $D_2$ ; впрочем, для этого достаточно просто переобозначить переменные.

Если поверхность  $S$  состоит из нескольких частей  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , каждая из которых может быть представлена уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $x = \varphi(y, z)$  или  $y = \psi(x, z)$ , то следует воспользоваться свойством аддитивности и затем вычисление интегралов по частям  $S_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) сводить к вычислению двойных интегралов.

**4. Приложение.** Пусть дана материальная поверхность  $S$  с заданной плотностью  $\rho = \rho(P)$ ,  $P \in S$ , которую считаем меняющейся непрерывно.

1) Найдём массу  $m$  поверхности  $S$ . Для этого разбиваем  $S$  на большое число  $n$  частей  $\Delta S_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ), в них берём по точке  $P_k$ . Поскольку участок  $\Delta S_k$

мал, то его плотность можно считать постоянной, равной примерно  $\rho = \rho(P_k)$ , и тогда масса участка приближённо равна  $\rho(P_k) \cdot \Delta S_k$  и  $m \approx \sum_{k=1}^n \rho(P_k) \cdot \Delta S_k$ . Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , для массы поверхности получаем формулу

$$m = \iint_S \rho(P) dS.$$

2) Аналогично, исходя из формул (2.45), можно получить координаты центра масс поверхности:

$$x_c = \frac{\iint_S x\rho(P)dS}{\iint_S \rho(P)dS}, \quad y_c = \frac{\iint_S y\rho(P)dS}{\iint_S \rho(P)dS}, \quad z_c = \frac{\iint_S z\rho(P)dS}{\iint_S \rho(P)dS}. \quad (3.29)$$

Если плотность постоянна,  $\rho(P) = \rho = const$ , то вынося  $\rho$  за знак интеграла, после сокращения на  $\rho$  в знаменателе получим площадь поверхности:

$$S = \iint_S dS.$$

3) Момент инерции поверхности  $S$  относительно объекта (см. § 2.7, п. 4) найдётся по формуле

$$I = \iint_S \rho(P) \cdot r^2(P) dS,$$

где  $r(P)$  – расстояние точек  $P \in S$  до объекта.

Пример. Найдём координаты центра масс однородной полусферы радиуса  $R$  (рис. 3.17). Очевидно  $x_c = y_c = 0$ ,

$$z_c = \frac{\iint_S z dS}{S}.$$

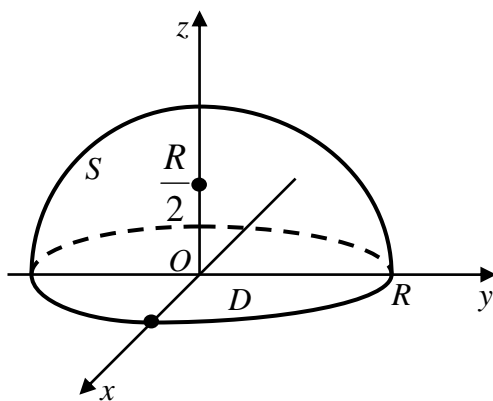


Рис. 3.17

Известно, что площадь поверхности полусферы  $S = 2\pi R^2$ . Уравнение поверхности есть  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . Находим

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Тогда

$$\iint_S z dS = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \iint_D dx dy = R \cdot \pi R^2 \text{ и } z_c = \frac{R}{2}.$$

## § 6. Поверхностные интегралы второго рода (типа), или интегралы по координатам. Поток вектора

1. Понятие стороны поверхности. Возьмём гладкую поверхность  $S$ , и в точке  $P \in S$  направленную нормаль (нормальный вектор) к этой поверхности. Точку  $P$  вместе с нормалью будем непрерывно передвигать по поверхности так, чтобы *направление нормали менялось непрерывно*. Если при движении точки по любой замкнутой кривой  $\Gamma \subset S$ , не пересекающей границу поверхности, с возвращением в исходное положение нормаль вернётся с прежним направлением, то поверхность называется двусторонней (рис. 3.18). В противном случае – односторонней; примером её является лист Мёбиуса. Чтобы сделать его модель, надо полоску бумаги (рис. 3.19) перекрутить так, чтобы точка  $D$  совпала с точкой  $A$ , а точка  $C$  с точкой  $B$ , т.е. отрезок  $\overline{DC}$  совместится с  $\overline{AB}$ . Такую поверхность можно закрасить всю единым движением кисти, не пересекая границ.

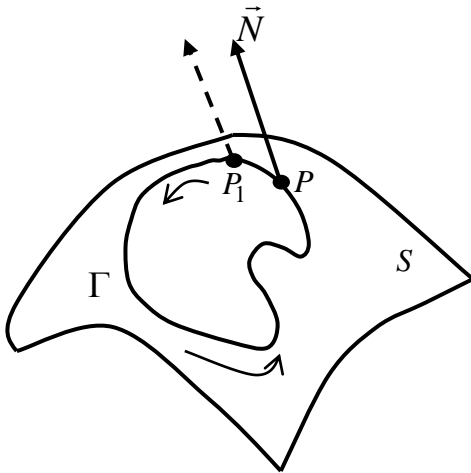


Рис. 3.18

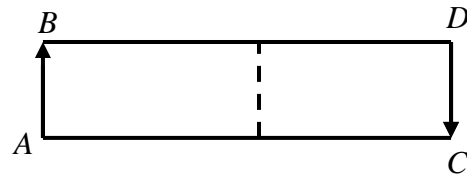


Рис. 3.19

Мы будем рассматривать только двусторонние поверхности. Если выбрана определённая сторона поверхности, то говорят, что поверхность *ориентирована*. Сторона поверхности задаётся с помощью вектора нормали  $\vec{N}$ , с конца которого видна эта сторона. Другая сторона определится с помощью противоположного вектора  $\vec{N}_1 = -\vec{N}$ . Иногда обозначают  $\vec{N}_1 \equiv \vec{N}^-$ , так что  $\vec{N}^- = -\vec{N}$ . Если поверхность  $S$  ограничивает некоторое тело  $V$ ,  $S = \partial V$ , то на ней различают внешнюю (наружную) и внутреннюю стороны, причём, каждая со своей нормалью. Внешнюю сторону обычно называют положительной стороной.

(Рис. 3.20.) Примерами таких поверхностей служат поверхности типа сферы, эллипсоида, параллелепипеда, возможно непрерывно деформируемые. Если поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , то на ней различают верхнюю сторону и нижнюю (рис. 3.16).

## 2. Определение поверхностного интеграла второго рода.

Пусть дана гладкая двусторонняя поверхность  $S$ , ориентированная. Выбранную сторону задаём вектором  $\vec{n}$ , его считаем единичным,  $|\vec{n}| = 1$  (рис. 3.20'). Тогда, если углы вектора  $\vec{n}$  с осями координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  обозначим соответственно  $\lambda, \mu, \nu$ , то его проекциями на эти оси будут направляющие косинусы:

$$\vec{n} = \cos\lambda \vec{i} + \cos\mu \vec{j} + \cos\nu \vec{k}, \quad (\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1). \quad (3.30)$$

Пусть в точках  $P(x, y, z) \in S$  задана функция  $F(P) \equiv F(x, y, z)$ .

**Определение.** Поверхностным интегралом второго рода по координатам  $x, y$  по выбранной стороне поверхности  $S$  называется интеграл первого рода от функции  $F(P)\cos\nu$ , и записывается так:

$$\iint_S F(P) dx dy \equiv \iint_S F(x, y, z) dx dy = \iint_S F(P) \cos\nu dS. \quad (3.31)$$

Символ  $dx dy = \cos\nu dS$  условно можно рассматривать как площадь проекции площадки  $dS$  на плоскость  $Oxy$ .

Аналогично определяются интегралы по координатам  $y, z$ :

$$\iint_S F(P) dy dz = \iint_S F(P) \cos\lambda dS, \quad (3.32)$$

и по координатам  $x, z$ :

$$\iint_S F(P) dz dx = \iint_S F(P) \cos\mu dS. \quad (3.33)$$

Буквы принято переставлять в циклическом порядке  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ . В обозначении интеграла нигде не участвует указание на сторону поверхности, по которой ведётся интегрирование, но это всегда оговаривается особо. Иногда одна сторона обозначается  $S^+$  или  $S$ , другая  $S^-$ .

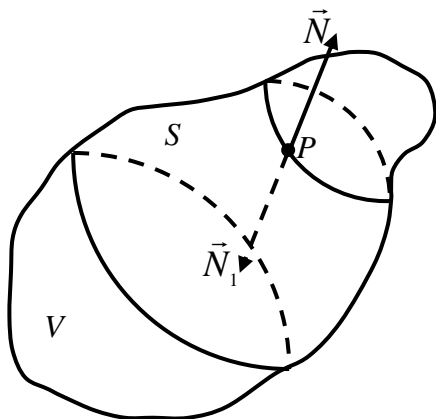


Рис.3.20

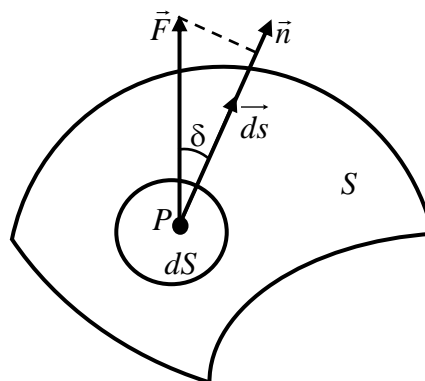


Рис. 3.20'

Наиболее общим видом поверхностного интеграла второго рода является сумма всех трёх таких интегралов – обычно она и рассматривается. Именно, пусть в точках  $P$  поверхности  $S$  задана векторная функция  $\vec{F}(P) = X(P)\vec{i} + Y(P)\vec{j} + Z(P)\vec{k}$ , или три скалярные функции  $X, Y, Z$ , то рассматривается интеграл

$$\begin{aligned} \iint_S X(P) dydz + Y(P) dzdx + Z(P) dxdy &= \iint_S (X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu) dS \equiv \\ &\equiv \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS \equiv \iint_S F_n dS. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь скалярное произведение  $(\vec{F}, \vec{n}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{n}| \cos\delta = F_n$  ( $\delta$  – угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{n}$ ) есть проекция вектора  $\vec{F}$  на выбранную нормаль  $\vec{n}$ . Интеграл (3.34) называется *поток* вектора  $\vec{F}$  через заданную сторону поверхности  $S$ . В отличие от частных случаев (3.31) - (3.33), он инвариантен по отношению к выбору системы координат. Элемент площади  $dS$  принято рассматривать как вектор, направленный по нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  (она считается плоской), именно (рис. 3.20'):  $\vec{dS} = \vec{n}dS$ , и тогда поток записывается в виде:

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{dS}).$$

**Теорема (существования).** *Если поверхность  $S$  гладкая или кусочно-гладкая и функция  $F(x, y, z)$  непрерывна на  $S$ , то интегралы (3.31) - (3.33) существуют.*

(Указанные условия далее считаем выполняющимися.)

Имеют место свойства, аналогичные приведённым ранее для криволинейного интеграла второго рода:

1) Линейность. 2) Аддитивность. 3) Ориентированность: интегралы по разным сторонам отличаются знаком, т.к. для другой стороны поверхности нормальный вектор есть  $\vec{n}_1 = \vec{n}^- = -\vec{n}$ , его углы с осями координат отличаются от соответствующих углов вектора  $\vec{n}$  на величину  $\pi$ , поэтому направляющие косинусы меняют знак на противоположный.

**3. Вычисление.** 1) Пусть гладкая поверхность  $S$  задана уравнением  $z = f(x, y)$ , проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$ , и выбрана верхняя сторона поверхности (см. рис. 3.16), так что угол  $\nu$  острый,  $\cos\nu > 0$ . Единичный вектор нормали  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ ,  $\vec{N} = \{-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, +1\}$ , и потому  $\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ .

Применяя к интегралу первого рода в (3.31) формулу вида (3.27), найдём:

$$\begin{aligned} \iint_S F(x, y, z) dxdy &= \iint_S F(P) \cos\nu dS = \\ &= \iint_D F(x, y, f(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2} dxdy. \end{aligned}$$

Итак, получили формулу для вычисления интеграла второго рода (3.31):

$$\iint_S F(x, y, z) dx dy = \iint_D F(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (3.35)$$

Для нижней стороны (её обозначим  $S^-$ ) имеем:

$$\iint_{S^-} F(x, y, z) dx dy = -\iint_S F(x, y, z) dx dy = -\iint_D F(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (3.36)$$

2) Пусть на выбранной стороне поверхности имеются как точки, где нормаль направлена вверх, так и точки, где нормаль направлена вниз. Тогда поверхность  $S$  разбивается на части  $S_1$  и  $S_2$  (рис.3.21), применяются свойство аддитивности и формулы (3.35), (3.36):

$$\begin{aligned} \iint_S F(P) dx dy &= \iint_{S_2} F(P) dx dy + \iint_{S_1} F(P) dx dy = \\ &= \iint_{D_2} F(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_1} F(x, y, f_1(x, y)) dx dy; \end{aligned} \quad (3.37)$$

$D_1$  и  $D_2$  - соответственно проекции  $S_1$  и  $S_2$  на плоскость  $Oxy$ .

3) Пусть поверхность  $S$  замкнутая, причём, тело, ограниченное этой поверхностью является правильным в направлении оси  $Oz$ , и проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$  (рис.3.22), то по формуле (3.37) имеем

$$\iint_S F(P) dx dy = \iint_D \{F(x, y, f_2(x, y)) - F(x, y, f_1(x, y))\} dx dy. \quad (3.38)$$

(При вычислении интегралов по таким поверхностям  $S$  и следует пользоваться формулой (3.38), а не разбивать на сумму двух интегралов, как в (3.37).)

В частности, для такой поверхности, если  $F(P) \equiv 1$ , то по формуле (3.38) найдём, что  $\iint_S 1 \cdot dx dy = 0$ .

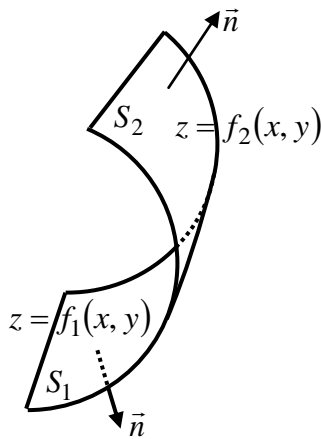


Рис. 3.21

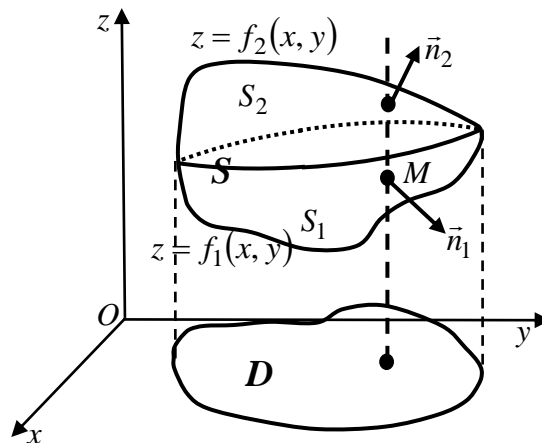


Рис. 3.22

4) Пусть  $S$  – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $Oz$  (в частности, цилиндр – см. рис. 3.23), то  $v = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos v = 0$ , и непосредственно из определения (3.31) получим  $\iint_S F(P) dx dy = 0$ .

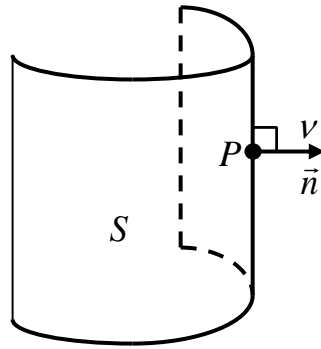


Рис. 3.23

Поэтому формула (3.38) не изменится, если в состав поверхности  $S$  входит ещё боковая поверхность указанной цилиндрической формы.

5) Соотношения, аналогичные формулам (3.35) и (3.36) сведения поверхностного интеграла к двойному, получим для интегралов (3.32) и (3.33). В этих случаях поверхность  $S$  задаётся соответственно уравнением  $y = \varphi(x, z)$  или  $x = \psi(y, z)$ , так что однозначно проектируется на плоскости  $Oxz$  или  $Oyz$  соответственно в области  $D_{xz}$  или  $D_{yz}$ .

6) При вычислении поверхностного интеграла второго рода общего вида (3.34) бывает удобнее перейти к интегралу первого рода, т.к. для вычисления последнего достаточно знать проекцию поверхности  $S$  только на одну из координатных плоскостей.

Пример. Вычислить  $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$ , где  $S$  – положительная сторона куба, составленного плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ . (Рис. 3.22')

Здесь дана замкнутая поверхность. Она кусочно-гладкая, поэтому разбиваем её на 6 поверхностей (граней куба) с соответствующими направлениями нормали и применяем свойство аддитивности. Переходя к двойным интегралам, учитываем направление нормали к каждой поверхности, и то, что положительная сторона куба – это внешняя его сторона.

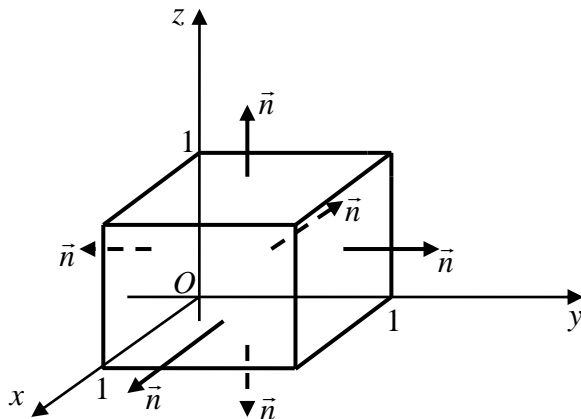


Рис. 3.22'

$$\begin{aligned} \oiint_S &= \iint_{x=0} + \iint_{y=0} + \iint_{z=0} + \iint_{x=1} + \iint_{y=1} + \iint_{z=1} = \\ &= 3 \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} dxdy = 3. \end{aligned}$$



Здесь интегралы по поверхностям  $x=0, y=0, z=0$  равны нулю, а интегралы по граням  $x=1, y=1, z=1$  совпадают:  $\int_{0 \leq x \leq 1} \int_{0 \leq y \leq 1} \int_{0 \leq z \leq 1} 1 \cdot dx dy = \int_{0 \leq y \leq 1} \int_{0 \leq z \leq 1} 1 \cdot dy dz = \int_{0 \leq x \leq 1} \int_{0 \leq z \leq 1} 1 \cdot dx dz = 1$ .

Причём от интеграла общего вида по каждой грани остаётся лишь одно слагаемое, поверхность интегрирования которого параллельна соответствующей плоскости (остальные грани ей перпендикулярны). Этот интеграл значительно проще вычислить с помощью формулы Остроградского-Гаусса, которая будет установлена позднее.

## § 7. Поток вектора через поверхность

Пусть задано поле скоростей вектором  $\vec{F}(P) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ ,  $P \in S$ . Определим количество жидкости (или газа), проходящее через поверхность  $S$  за единицу времени. Как обычно, разобьём поверхность на  $n$  малых участков  $\Delta S_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Из-за малости этой площадки будем считать её плоской, а скорость постоянной, и совпадающей со скоростью в какой-либо точке  $P_k \in \Delta S_k$ . Тогда жидкость, протекшая за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S_k$ , заполнит цилиндр с основанием  $\Delta S_k$ . Образующие этого цилиндра параллельны вектору  $\vec{F}(P_k)$  и равны по длине  $|\vec{F}| \cdot \Delta t$ . Рассмотрим единичный вектор нормали  $\vec{n}$  к выбранной стороне поверхности, в точке  $P_k$ . Высота цилиндра равна (см. рис 3.24):  $|\vec{F}| \cdot \Delta t \cdot \cos \delta = |\vec{F}| \cdot |\vec{n}| \cos \delta \cdot \Delta t = (\vec{F}, \vec{n}) \cdot \Delta t = F_n \cdot \Delta t$ .

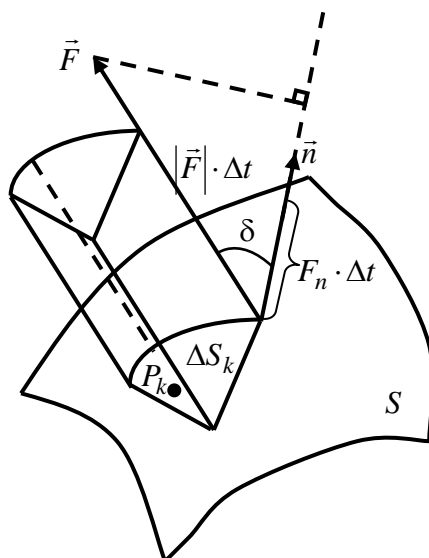


Рис. 3.24

Объём цилиндра, следовательно, равен  $\Delta V_k = F_n \Delta t \cdot \Delta S_k$ . Пусть плотность жидкости есть  $\rho(P)$ . Тогда количество жидкости, содержащейся в цилиндре, при-

мерно равно  $\rho(P_k) \cdot \Delta V_k$ , и количество  $Q$  жидкости, протекшей через всю поверхность, приблизительно будет

$$Q \approx \Delta t \cdot \sum_{k=1}^n \rho(P_k) F_n(P_k) \Delta S_k.$$

Отсюда в пределе при  $\lambda = \max_k \text{диам} \Delta S_k \rightarrow 0$  получим истинное количество жидкости

$$Q = \Delta t \cdot \iint_S \rho(P) F_n(P) dS.$$

Тогда количество жидкости, отнесённое к единице времени:  $\frac{Q}{\Delta t}$  в случае  $\rho(P) = \text{const}$  будет пропорционально интегралу

$$\iint_S F_n dS \equiv \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS. \quad (3.39)$$

Такая величина, естественно, и называется потоком вектора  $\vec{F}$  (векторного поля  $\vec{F}$ ) через поверхность  $S$ , в заданном направлении (см. формулу (3.34)). Если ввести систему координат  $Oxyz$ , проекции вектора  $\vec{F}$  на координатные оси и единичный вектор нормали, то поток запишется в виде любого из четырёх интегралов в формуле (3.34).

Замечание. Если поле  $\vec{F}$  не стационарное, т.е. зависит и от времени:  $\vec{F} = \vec{F}(P, t)$ , то интеграл (3.39) определит *скорость* изменения количества жидкости в момент  $t$  (при  $\rho(P) \equiv 1$ ) – это  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta t}$ .

Пример. Рассмотрим векторное поле  $\vec{F} = \frac{q}{r^2} \cdot \vec{r}^0$  – это сила (напряжённость), с которой заряд  $q$  действует на одноимённый единичный заряд, отстоящий от  $q$  на расстоянии  $r$ ;  $\vec{r}^0$  – единичный вектор. (Иначе говоря  $\vec{F}$  – напряжённость электрического поля, созданного зарядом  $q$ .) Найдём поток этого поля через сферу  $S$  радиуса  $R$  с центром в точке расположения заряда (рис. 3.25). Имеем  $\vec{n} = \vec{r}^0$ ,

$$F_n(P)|_S = \frac{q}{R^2}, \quad \iint_S F_n(P) dS = \frac{q}{R^2} \iint_S dS = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \quad (3.39')$$

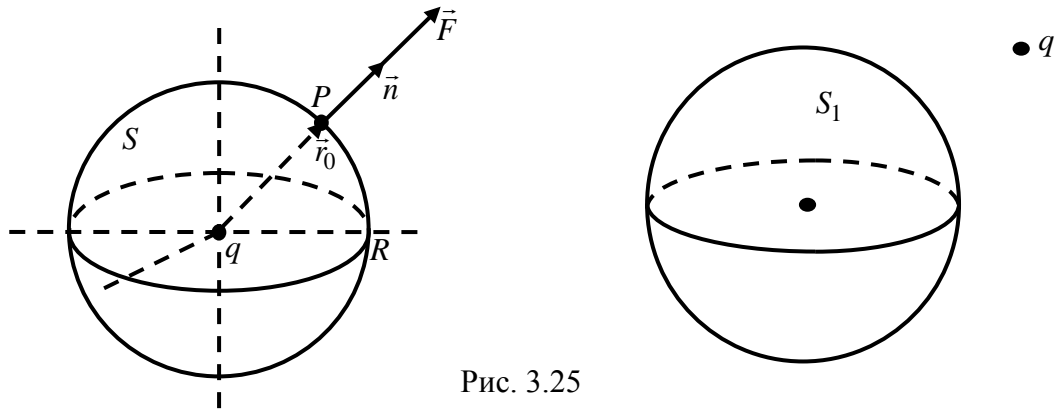


Рис. 3.25

Полученная величина  $4\pi q$  называется «производительность (или мощность) заряда  $q$ ». Если заряд находится вне сферы  $S_1$ , то можно понять, что поток через неё равен нулю (см. (3.45')).

Замечания. 1) В разных системах единиц коэффициент пропорциональности  $q$  будет иметь разный вид.

2) Если  $q < 0$ , то  $\vec{F}$  есть электростатическое поле кулоновского притяжения, а если  $q > 0$  – поле кулоновского отталкивания.

## § 8. Формула Остроградского (или Остроградского-Гаусса)

**1. Теорема Остроградского.** (О преобразовании интеграла по замкнутой поверхности к объёмному интегралу.)

Пусть  $S$  – простая замкнутая гладкая или кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая объём  $V$ , функции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области  $V$ , включая её границу  $S = \partial V$ . Тогда имеет место формула Остроградского

$$\iint_S Xdydz + Ydzdx + Zxdy = \iiint_V \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (3.40)$$

где поверхностный интеграл берётся по внешней стороне поверхности  $S$ .

Δ Следует доказать три равенства (три частных случая):

$$\iint_S X dydz = \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dV, \quad \iint_S Y dzdx = \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dV, \quad \iint_S Z dxdy = \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dV. \quad (3.41)$$

Установим справедливость последнего из них.

1) Рассмотрим частный случай, когда область  $V$  правильная в направлении оси  $Oz$ , т.е. каждая вертикаль, проходящая *внутри* области  $V$  встречает границу  $S$  только в двух точках. Уравнение нижней части  $S_1$  границы обозначим  $z = f_1(x, y)$ , верхней  $S_2$ :  $z = f_2(x, y)$ , и пусть  $V$  проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$  (см рис. 3.22). Воспользовавшись формулой (3.38), вычислим тройной интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dV &= \iint_D dx dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz = \iint_D \left\{ Z(x, y, z) \Big|_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \right\} dx dy = \\ &= \iint_D \{ Z(x, y, f_2(x, y)) - Z(x, y, f_1(x, y)) \} dx dy = \iint_S Z(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Третье из равенств (3.41) установлено.

2) В общем случае надо разбить тело на части рассмотренного вида и воспользоваться свойством аддитивности. Именно, допустим, что можно рас-сечь тело  $V$  некоторой поверхностью  $\Sigma$  на две части  $V_1$  и  $V_2$  указанного вида. Соответственно поверхность  $S$  будет разделена на части  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 3.26). Внешнюю по отношению к  $V_1$  сторону сечения  $\Sigma$  обозначим  $\Sigma^+$ , а внутреннюю через  $\Sigma^-$ , так что  $\partial V_1 = S_1 + \Sigma^+$ ,  $\partial V_2 = S_2 + \Sigma^-$ . По доказанному имеем:

$$\iiint_{V_1} \frac{\partial Z}{\partial z} dV = \iint_{S_1} Z dx dy + \iint_{\Sigma^+} Z dx dy, \quad \iiint_{V_2} \frac{\partial Z}{\partial z} dV = \iint_{S_2} Z dx dy + \iint_{\Sigma^-} Z dx dy.$$

При сложении этих равенств интегралы по  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  взаимно уничтожатся, и мы получим искомое третье из равенств (3.41).

Аналогично доказываются первые два из равенств (3.41). Сложив эти три равенства, получим общую формулу Остроградского (3.40). ▲

**2. Определение 1.** Область  $V$  называется *пространственно односвязной*, если внутренность *любой* замкнутой поверхности  $S^* \subset V$  принадлежит этой области.

Формула (3.40) была установлена именно для таких областей. Однако, она справедлива и в том случае, когда тело  $V$  не является пространственно односвязной областью. Такое тело внутри имеет пустоты, или полости, при этом всегда берётся нормаль, внешняя по отношению к телу  $V$ . Например, пусть  $V$  ограничено двумя замкнутыми поверхностями: внешней  $S_1$  и внутренней  $S_2$ . Т.е., как говорят, ограничено *составной* поверхностью  $S = S_1 + S_2$  (рис. 3.27). Для доказательства справедливости формулы рассечём тело на две пространственно односвязные области  $V_1$  и  $V_2$  некоторой поверхностью  $\Sigma$ , к каждой применим формулу Остроградского, затем применим свойство аддитивности, потом сложим, и в результате получим равенство (3.40), где  $S = S_1 + S_2$ . На рис. 3.28:  $S_1 = S_1' \cup S_1''$ ,  $S_2 = S_2' \cup S_2''$ .

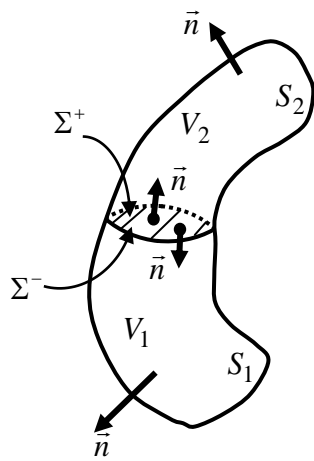


Рис. 3.26

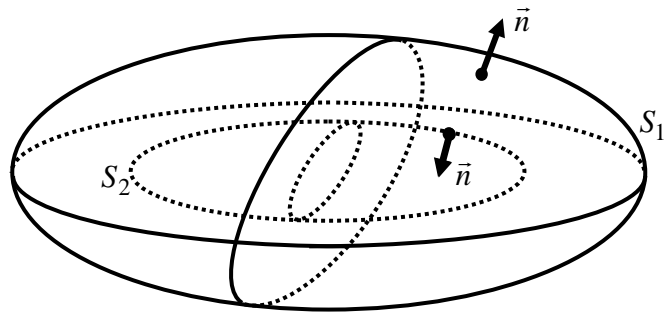


Рис. 3.27

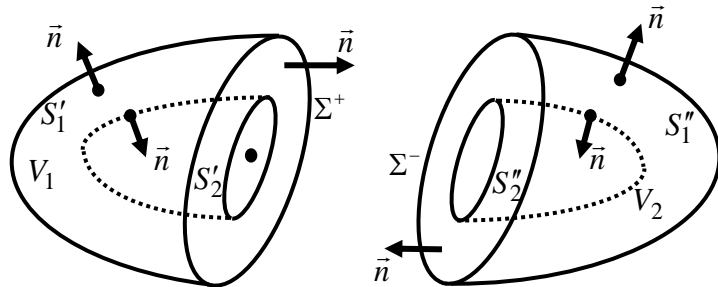


Рис. 3.28

**3.** Пусть единичный вектор нормали к *внешней* по отношению к телу  $V$  стороне поверхности  $S = \partial V$  определяется формулой (3.30). Тогда с помощью поверхностных интегралов первого рода формула Остроградского переписывается так:

$$\iint_S (X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (3.42)$$

Замечание. Полагая в (3.40)  $X \equiv x, Y \equiv 0, Z \equiv 0$ , или  $X \equiv 0, Y \equiv y, Z \equiv 0$ , или  $X \equiv 0, Y \equiv 0, Z \equiv z$ , или  $X \equiv x, Y \equiv y, Z \equiv z$ , получим четыре формулы для вычисления объёма  $V$  с помощью поверхностных интегралов:

$$\iint_S x dy dz = \iint_S y dz dx = \iint_S z dx dy = V, \quad \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 3V.$$

## § 9. Дивергенция (расходимость) векторного поля

**1.** Рассмотрим векторное поле  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ . Ему в соответствие ставится скалярная функция

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}; \quad (3.43)$$

она называется *дивергенцией* (или *расходимостью*) вектора (поля)  $\vec{F}$  (от фр. divergence – расходимость). С помощью оператора Гамильтона набла

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  дивергенцию можно записать как символическое скалярное произведение  $\operatorname{div} \vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F})$ .

Теперь в векторной форме теорема Остроградского примет вид:

Поток вектора (или поток векторного поля) через замкнутую поверхность равен тройному интегралу (интегралу по объёму) от дивергенции:

$$\iint_S F_n \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV. \quad (3.44)$$

Как было ранее сказано,  $F_n = (\vec{F}, \vec{n})$  есть проекция вектора  $\vec{F}$  на внешнюю (по отношению к телу  $V$ ) нормаль  $\vec{n}$  к поверхности  $S$ .

## 2. Инвариантное определение дивергенции.

Дивергенция, заданная определением (3.43), формально связана с выбором системы координат. Покажем, что на самом деле это не так. В пространстве или части его, где функции  $X, Y, Z$  непрерывны вместе с частными производными первого порядка, возьмём точку  $M$  и окружим её замкнутой поверхностью  $S$  с объёмом  $V$  (рис. 3.29). Запишем формулу Остроградского (3.44). Так как  $\operatorname{div} \vec{F}$  в силу условия есть функция непрерывная, то по теореме о среднем найдётся точка  $M_1 \in V$ , что  $\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \operatorname{div} \vec{F}|_{M_1} \cdot V$ . Тогда из формулы (3.44):

$$\operatorname{div} \vec{F}|_{M_1} = \frac{\iint_S F_n dS}{V}.$$

Стянем объём  $V$  в точку  $M$ ; при этом пишут:  $(V) \rightarrow M$ . Тогда точка  $M_1 \rightarrow M$ , и в силу непрерывности  $\operatorname{div} \vec{F}$  получим

$$\operatorname{div} \vec{F}|_M = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\iint_S F_n dS}{V}. \quad (3.45)$$

**Вывод.** Дивергенция поля  $\vec{F}$  (при условии её непрерывности) в данной точке  $M$  равна пределу отношения потока поля через поверхность, окружающую точку  $M$ , к объёму, ограниченному этой поверхностью, при условии, что объём стягивается в точку  $M$ .

Поскольку поток и объём не связаны с системой координат, то и дивергенция не зависит от системы координат. В таком случае говорят:  $\operatorname{div} \vec{F}$  есть истинный скаляр.

**3. Физический смысл дивергенции.** Рассмотрим поток  $\Pi$  поля  $\vec{F}$  через замкнутую поверхность  $S$ , и допустим, что  $\Pi = \iint_S F_n dS \neq 0$ . Если  $\Pi > 0$ , то говорят, что внутри  $S$  преобладают источники, а если  $\Pi < 0$ , то стоки. Их можно объединить одним словом: *источник* (сток – это отрицательный источник). Поток  $\Pi$  есть *мощность* или *производительность* источников, находящихся внутри  $S$ . (По отношению к течению жидкости условие  $\Pi \neq 0$  означает, что в

поверхность втекает и вытекает из неё разное количество жидкости.) Если источники распределены непрерывно, то вводят понятие (объёмной) *плотности источников*: как предела (3.45) отношения потока к объёму. Таков *физический смысл дивергенции*. Если  $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$  в точке  $M$ , то говорят, что в точке  $M$  находится источник и условно отмечают это как на рис. 3.30.

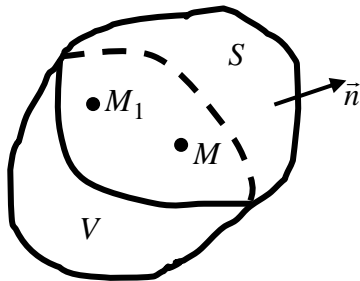


Рис. 3.29

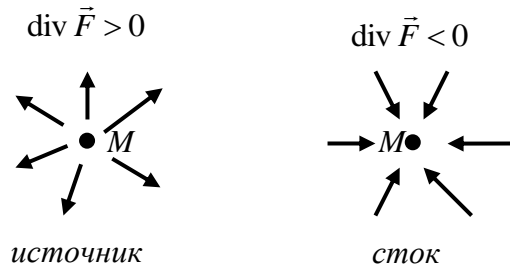


Рис. 3.30

Пример 1. Рассмотрим поле  $\vec{F} = \frac{q}{r^2} \cdot \vec{r}^0$ , создаваемое точечным зарядом  $q$ . Начало координат выберем в точке размещения заряда. Тогда радиус-вектор точки  $M(x, y, z)$  будет  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , а  $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , и  $\vec{F} = q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ , откуда  $X = q \frac{x}{r^3}$ ,  $Y = q \frac{y}{r^3}$ ,  $Z = q \frac{z}{r^3}$ . Поле определено и непрерывно во всём пространстве, кроме точки  $O(0,0,0)$ . (Рис. 3.31). Найдём дивергенцию этого поля. Заметим, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial X}{\partial x} = q \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{1}{r^3} \right) = q \left( \frac{1}{r^3} + x \cdot \frac{-3}{r^4} \cdot \frac{x}{r} \right) = \frac{q}{r^3} - \frac{3qx^2}{r^5}.$$

Тогда в силу сферической симметрии  $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{q}{r^3} - \frac{3qy^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{q}{r^3} - \frac{3qz^2}{r^5}$ ,  $r \neq 0$ .

Отсюда  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{3q}{r^3} - 3q \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} \equiv 0$  всюду, кроме начала координат.

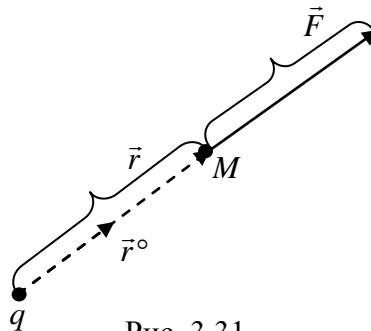


Рис. 3.31

Это же получим, если заряд помещён в точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  - впрочем, это понятно в силу свойства инвариантности дивергенции.

Возьмём замкнутую поверхность  $S$ , не охватывающую заряд  $q$  (начало координат), тогда можем применить формулу (3.44), и получим

$$\iint_S \vec{F}_n \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = 0. \quad (3.45')$$

Теперь пусть сфера  $S_1$  содержит в центре заряд  $q$ . Тогда (см. (3.39')) поток через эту сферу  $\Pi^* = \iint_{S_1} \vec{F}_n dS = 4\pi q$ , а формулу (3.44) применить нельзя (так как

$\operatorname{div} \vec{F}$  в точке  $O$  терпит разрыв). Поток через любую замкнутую поверхность, содержащую внутри заряд, будет таким же. Действительно, внутри замкнутой поверхности  $S_2$  возьмем сферу  $S_1$ , содержащую в центре заряд  $q$ ; тогда по формуле Остроградского (3.44) для составной поверхности  $S = S_2 + S_1^-$  (рис.3.32) имеем:

$$\iint_S \vec{F}_n \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = 0, \text{ откуда } \iint_{S_2} \vec{F}_n dS - \iint_{S_1} \vec{F}_n dS = 0 \Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F}_n dS = 4\pi q.$$

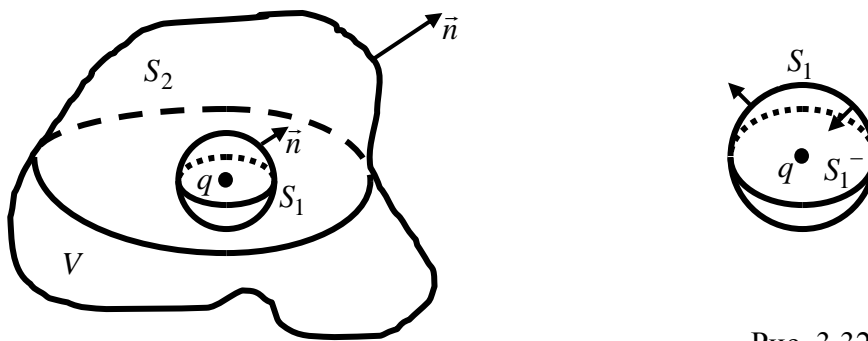


Рис. 3.32

Замечание. В этом примере наделим  $\operatorname{div} \vec{F}$  свойством:  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  всюду, кроме точки  $0$ , и  $\operatorname{div} \vec{F} = \infty$  в точке  $0$ , а  $\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = 4\pi q$ , как и поток  $\Pi^*$ . По-

добные формальные образования, если  $4\pi q$  заменить на  $1$ , называются «дельта-функция Дирака» или  $\delta$ -функция. Они служат для описания дискретных, сосредоточенных (т.е. не являющихся непрерывными) распределений. С них развилась так называемая теория обобщённых функций. Достаточные сведения можно найти в книгах [5, 3]

Пример 2. Пусть имеется несколько зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ; этими же буквами обозначаем точки, в которых помещены заряды. По закону независимости, или суперпозиции, действия сил, они создают поле  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$  ( $\vec{F}_k$  – напряжённость, создаваемая зарядом  $q_k$ ) и  $\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}_1 + \dots + \operatorname{div} \vec{F}_n = 0$  всюду, кроме точек  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Рассмотрим замкнутую поверхность  $S$  с объёмом  $V$ . Можно утверждать, что поток создаётся только за счёт зарядов, находящихся внутри поверхности. Именно, пусть внутри  $S$  находятся заря-



ды  $q_1, q_2, \dots, q_m$ ,  $m \leq n$ . Окружим их непересекающимися сферами  $S_1^-, S_2^-, \dots, S_m^-$ , к которым берём внешние нормали: направленные внутрь тела  $V$  (рис.3.33). Применяя формулу (3.44) к составной поверхности  $\Sigma = S + S_1 + \dots + S_m$ , находим  $\iint_{\Sigma} F_n dS = 0$ , откуда

$$\iint_S F_n dS = \sum_{k=1}^m \iint_{S_k^-} F_n dS = 4\pi \sum_{k=1}^m q_k. \quad (3.46)$$

Пример 3. Рассмотрим случай, когда *заряды распределены непрерывно*. Пусть в объёме  $\Delta V$ , содержащем точку  $M$ , рассредоточен заряд величины  $\Delta q$  (рис. 3.34). Величина  $\rho = \lim_{(\Delta V) \rightarrow M} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \rho(M)$  называется плотностью зарядов в точке  $M$ . *Предполагаем, что  $\rho(M)$  - непрерывная функция*. Для малых объёмов имеем  $\Delta q \approx \rho(M) \cdot \Delta V$ . В этом поле рассмотрим замкнутую поверхность  $S$ . Надо подсчитать поток поля через эту поверхность. Для этого  $V$  разобьём на  $n$  малых объёмов  $\Delta V_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). В объёме  $\Delta V_k$  возьмём точку  $M_k$ ; заряд в нём примерно будет  $\rho(M_k) \cdot \Delta V_k$  - его сосредоточим в точке  $M_k$ . Тогда поток нашего поля через поверхность  $S$  приблизительно равен (см. (3.46))

$$\iint_S F_n dS \approx 4\pi \sum_{k=1}^n \rho(M_k) \Delta V_k.$$

Устремляя наибольший из диаметров  $\lambda$  областей  $\Delta V_k$  к нулю, в пределе получим истинное значение потока  $\iint_S F_n dS = 4\pi \iiint_V \rho(M) dV$ . С другой стороны, поток найдём по формуле (3.44). Получим

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 4\pi \iiint_V \rho(M) dV. \quad (3.47)$$

Отсюда можем выяснить, как дивергенция связана с плотностью. Рассмотрим в заданном поле точку  $M$ , окружим её поверхностью  $S$  с объёмом  $V$  и к обоим объёмным интегралам в (3.47) применим теорему о среднем, согласно которой в объёме  $V$  найдутся точки  $M_1$  и  $M_2$ , такие, что выполнится равенство

$$\operatorname{div} \vec{F} \Big|_{M_1} \cdot V = 4\pi \rho(M_2) \cdot V.$$

Сократим на величину  $V$ , затем объём  $V$  будем стягивать в точку  $M$ . Тогда точки  $M_1$  и  $M_2 \rightarrow M$ ; в пределе получим

$$\operatorname{div} \vec{F} \Big|_M = 4\pi \rho(M). \quad (3.48)$$

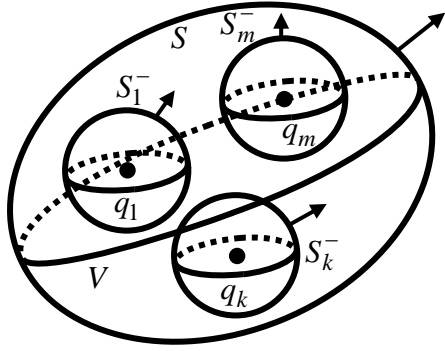


Рис. 3.33

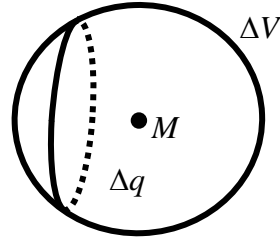


Рис. 3.34

**Вывод.** Дивергенция равна плотности распределения зарядов, умноженной на  $4\pi$ . (Это утверждение, как и результат (3.46), называется теоремой Гаусса в электростатике.)

#### 4. Трубочатые, или соленоидальные поля . (Греч. $\sigma\lambda\epsilon\nu$ - трубка).

**Определение.** Векторное поле  $\vec{F}$ , у которого дивергенция в каждой точке равна нулю,  $\text{div } \vec{F} = 0$ , называется *соленоидальным или трубчатым полем*, а сам вектор  $\vec{F}$  называется соленоидальным вектором.

Выясним особенности таких полей.

1) Если область  $V$ , занятая соленоидальным полем, является пространственно односвязной, то поток через любую замкнутую поверхность  $S \subset V$  равен нулю и наоборот. Это видно из формулы (3.44).

2) Поэтому, если поверхность  $\Sigma$  натянута на замкнутый контур  $L$ , то поток зависит только от границы  $\partial\Sigma = L$  поверхности, и не зависит от самой поверхности  $\Sigma_1$  или  $\Sigma_2$  (см. рис 3.35): поток через замкнутую поверхность  $S = \Sigma_2 + \Sigma_1^-$  равен нулю, поэтому  $\iint_{\Sigma_1} (...) = \iint_{\Sigma_2} (...)$ .

3) **Определение.** Кривая  $l$ , в каждой точке  $M$  которой направление касательной совпадает с направлением поля, называется *векторной линией*. А геометрическое место векторных линий, проходящих через замкнутую кривую  $\Gamma$ , называется *векторной трубкой*.

Рассмотрим векторную трубку и любые её сечения  $S_1$  и  $S_2$  с одинаково направленной нормалью. (Рис. 3.36). Полагаем, что в трубке поле всюду соленоидально (нет ни источников, ни стоков). Поверхность трубки обозначим  $\Sigma$ . Имеем замкнутую поверхность  $S = S_1 + S_2^- + \Sigma$ . Так как внутри её  $\text{div } \vec{F} = 0$ , то по формуле (3.44)

$$\iint_S F_n dS = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} + \iint_{S_2^-} + \iint_{\Sigma} = 0.$$

Поскольку  $\vec{F} \perp \vec{n}$  на поверхности  $\Sigma$ , то  $F_n = 0$ , и потому  $\iint_{\Sigma} = 0$ . Получим

$$\iint_{S_1} - \iint_{S_2} = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} F_n dS = \iint_{S_2} F_n dS.$$

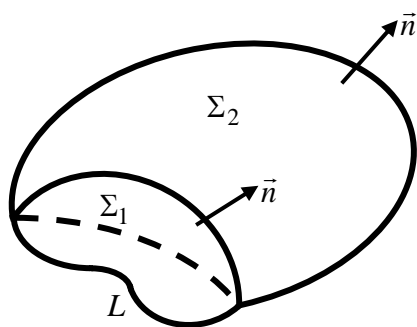


Рис. 3.35

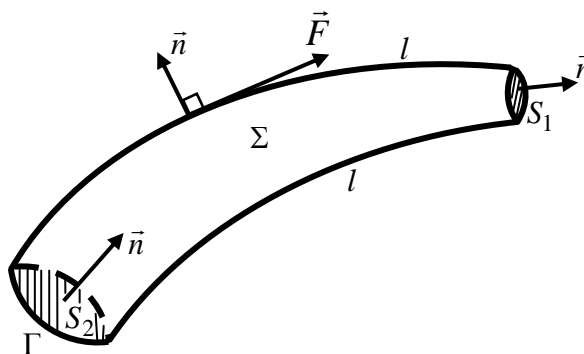


Рис. 3.36

**Вывод.** В соленоидальном поле поток через любое сечение векторной трубки один и тот же. Он называется *интенсивностью* или *производительностью* векторной трубки.

**Замечание.** Мы видели, что поле, создаваемое точечными зарядами, соленоидально всюду, кроме точек, в которых находятся заряды. А всё пространство с выброшенными точками не является пространственно односвязной областью.

## § 10. Формула Стокса<sup>2</sup>

**1.** Пусть в пространстве имеется некоторый замкнутый контур  $\Gamma$ . Натянем на него поверхность  $S$ ,  $\partial S = \Gamma$ , и выберем на ней определённую сторону, т.е. нормаль. Всегда будем считать, что направление на контуре согласовано с выбранной стороной поверхности так, что при обходе  $\Gamma$  в этом направлении выбранная сторона поверхности остаётся слева (рис. 3.37) - такое направление на  $\Gamma$  считается положительным. Формула Стокса связывает криволинейный интеграл по  $\Gamma$  с интегралом по поверхности  $S$ .

**Теорема Стокса.** Пусть функции  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  непрерывны вместе с частными производными первого порядка в некоторой области  $V$ . В этой области берём замкнутый контур  $\Gamma$  и натянутую на него поверхность  $S$ ,  $\partial S = \Gamma$ . Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_S \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx. \quad (3.49)$$

Δ Сначала докажем частный случай формулы Стокса:

$$\int_{\Gamma} X dx = \iint_S \left( -\frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz dx. \quad (3.50)$$

<sup>2</sup> Стокс Джон Габриель (1819-1903) – англ. математик и физик.

Преобразуем левую часть.

1) Допустим, что поверхность  $S$  с каждой прямой, параллельной оси  $Oz$ , пересекается не более, чем в одной точке, т.е. поверхность можно задать уравнением  $z = z(x, y)$ , и возьмём верхнюю сторону. Обозначим  $D$  и  $L$  соответственно проекции  $S$  и  $\Gamma$  на плоскость  $Oxy$ ,  $\Gamma = \partial D$  (рис. 3.38).

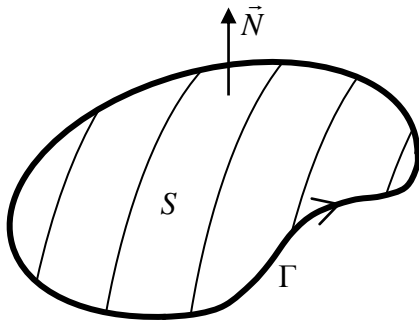


Рис. 3.37

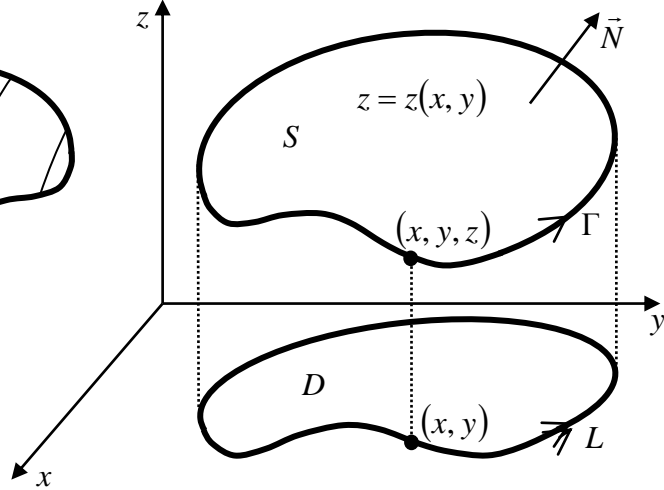


Рис. 3.38

Убедимся, что тогда

$$\int_{\Gamma} X(x, y, z) dx = \int_L X(x, y, z(x, y)) dx. \quad (3.51)$$

Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнениями (3.6), то уравнения линии  $L$  будут  $\{x = \varphi(t), y = f(t)\}$ , а  $\psi(t) \equiv z(\varphi(t), f(t))$ ,  $t \in [t_0, T]$ . Учитывая сказанное, получим:

$$\int_{\Gamma} X(x, y, z) dx = \int_{t_0}^T X(\varphi(t), f(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt,$$

$$\int_L X(x, y, z(x, y)) dx = \int_{t_0}^T X(\varphi(t), f(t), z(\varphi(t), f(t))) \varphi'(t) dt.$$

Отсюда и следует равенство (3.51). Правую часть его преобразуем к двойному интегралу по формуле Грина (3.20), в которой  $P(x, y) \equiv X(x, y, z(x, y))$ ,

$Q(x, y) \equiv 0$ , и заметим, что  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ . Имеем

$$\int_{\Gamma} X(x, y, z) dx \equiv \int_L P(x, y) dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\iint_D \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.52)$$

К полученному двойному интегралу преобразуем и правую часть из равенства (3.50). Там перейдём к поверхностному интегралу первого рода. Поскольку мы выбрали верхнюю сторону поверхности  $z - z(x, y) = 0$ , то в качестве вектора

нормали можем взять  $\vec{N} = -\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$ , и направляющие косинусы будут

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \text{откуда } \cos\mu = -q \cos\nu.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_S \left( -\frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz dx &= \iint_S \left( -\frac{\partial X}{\partial y} \cos\nu + \frac{\partial X}{\partial z} \cos\mu \right) dS = -\iint_S \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} q \right) \cos\nu dS = \\ &= -\iint_D \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} q \right) \cos\nu \cdot \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = -\iint_D \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Сравнивая (3.52) и (3.53), получаем (3.50).

2) В общем случае рассечём поверхность  $S$  на части вида, рассмотренного в первом пункте. Допустим, таких частей будет две (см. рис. 3.39). Тогда  $\int_{ABCmA} X dx = \iint_{S_1}$  и  $\int_{AnCBA} X dx = \iint_{S_2}$ . Складывая эти равенства, замечая при этом, что интегралы по  $ABC$  и  $CBA$  взаимно уничтожаются, и  $S = S_1 + S_2$ , получим

$$\int_{\Gamma} X dx = \iint_S \left( -\frac{\partial X}{\partial y} dx dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz dx \right).$$

Для более сложных поверхностей их разбивают на большее число частей.

Аналогично доказываются два других равенства

$$\int_{\Gamma} Y dy = \iint_S \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Y}{\partial z} dy dz, \quad (3.54)$$

$$\int_{\Gamma} Z dz = \iint_S \frac{\partial Z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial Z}{\partial x} dz dx. \quad (3.55)$$

Складывая равенства (3.50), (3.54), (3.55), получим формулу Стокса (3.49) общего вида. ▲

Учитывая, что  $\vec{n} = \cos\lambda \vec{i} + \cos\mu \vec{j} + \cos\nu \vec{k}$  – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности  $S$ , то с помощью поверхностных интегралов первого рода формула Стокса переписывается так:

$$\int_{\Gamma} X dx + Y dy + Z dz = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos\nu + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos\mu \right\} dS. \quad (3.49')$$

**Замечание 1.** Формула Стокса справедлива и для многосвязных поверхностей, т.е. ограниченных несколькими замкнутыми контурами. Это устанавливается с помощью тех же рассуждений, как это было сделано для формулы Грина (§ 3.4, п.3). На рис. 3.40 изображён случай, когда граница  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  состоит из двух контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

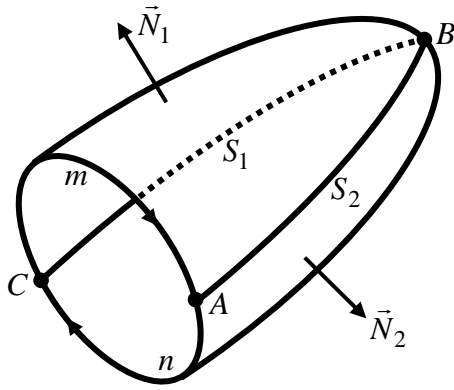


Рис. 3.39

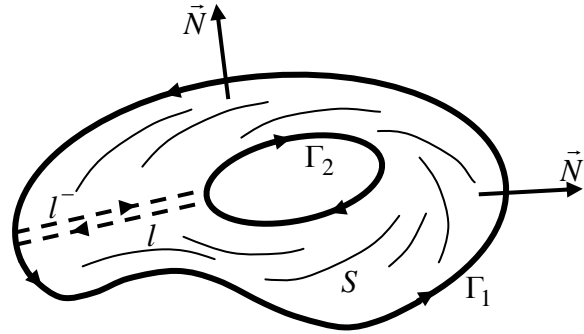
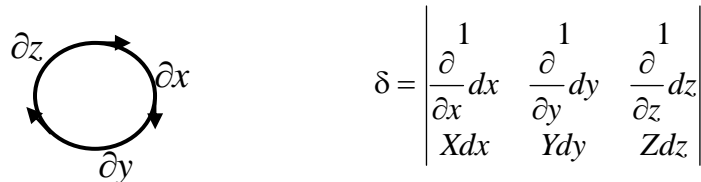


Рис. 3.40

**Замечание 2.** Запомнить подынтегральное выражение справа в (3.49) можно так: первое слагаемое такое же как и в формуле Грина, а остальные получаются из него круговой перестановкой «знаменателей»  $\partial x, \partial y, \partial z$  (рис. 3.41), или с помощью символического определителя  $\delta$ , разложив его по элементам первой строки:



$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} dx & \frac{\partial}{\partial y} dy & \frac{\partial}{\partial z} dz \\ X dx & Y dy & Z dz \end{vmatrix}$$

Рис. 3.41

**Замечание 3.** Формулы Грина, Стокса и Остроградского объединяет одна идея: они выражают интеграл по некоторой области  $\Omega$  через интеграл по границе  $\partial\Omega$  этой области.

## § 11. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Условия независимости

1. Рассмотрим интеграл по пути  $L = AB$

$$\int_{AB} X dx + Y dy + Z dz. \quad (3.56)$$

Соединим точки  $A$  и  $B$  другой кривой  $L_1$  (рис. 3.42). Вообще говоря  $\int_L (\cdot) \neq \int_{L_1} (\cdot)$ .

В частности, работа силы  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  на пути  $L$  вообще говоря не равна работе на пути  $L_1$ . Однако есть ситуации, когда работа не зависит от формы пути, или, как говорят, не зависит от «пути перехода» от точки  $A$  к точке  $B$ .

Рассмотрим вопрос о том, когда интеграл (3.56) (в частности, работа) не зависит от пути интегрирования (а зависит только от начальной  $A$  и конечной  $B$  точек).

Предполагаем, что функции  $X, Y, Z$  непрерывны в некоторой области  $V$  пространства.

**Теорема 3.1.** Утверждение о независимости криволинейного интеграла (3.56) от пути интегрирования в области  $V$  равносильно утверждению о равенстве нулю этого интеграла по любому замкнутому контуру, принадлежащему этой области.

Δ 1) Пусть дано, что интеграл не зависит от пути, а зависит только от начальной и конечной точек. Надо доказать, что интеграл по любому замкнутому контуру  $\Gamma$  равен нулю. Берём на  $\Gamma$  две точки  $A$  и  $B$ . Кривая  $\Gamma$  разобьётся ими на два пути  $AmB$  и  $AnB$  (рис. 3.43). По условию

$$\int_{AmB}() = \int_{AnB}() \Rightarrow \int_{AmB}() - \int_{AnB}() = 0 \Rightarrow \int_{AmB}() + \int_{BnA}() = 0 \Rightarrow \oint_{AmBnA}() = 0.$$

Требуемое доказано, т.к. контур  $\Gamma = AmBnA$  был взят произвольным.

2) Обратно. Пусть дано, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Надо доказать, что интеграл не зависит от пути, соединяющего произвольно взятые точки  $A$  и  $B$ . Для этого данные точки  $A$  и  $B$  соединим любыми двумя путями  $AmB$  и  $AnB$  (рис. 3.42). Получим замкнутый контур  $AmBnA \equiv \Gamma$ . По условию

$$\oint_{\Gamma}() = 0 \Rightarrow \int_{AmB}() + \int_{BnA}() = 0 \Rightarrow \int_{AmB}() - \int_{AnB}() = 0 \Rightarrow \int_{AmB}() = \int_{AnB}(). \blacktriangle$$

2. Применим формулу Стокса для установления условий независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования.

**Определение 2.** Область  $V_0$  пространства, обладающая тем свойством, что на любой замкнутый контур  $\Gamma \in V_0$  можно натянуть простую кусочно-гладкую поверхность  $S$ ,  $\partial S = \Gamma$ , целиком лежащую в области  $V_0$ , называется *поверхностно односвязной областью*, или просто *односвязной*. (Не путать с определением пространственно односвязной области из § 3.8.)

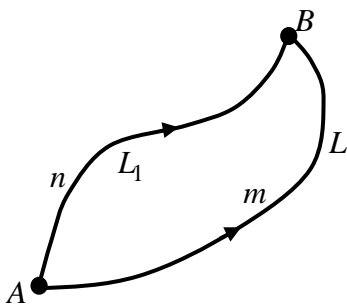


Рис. 3.42

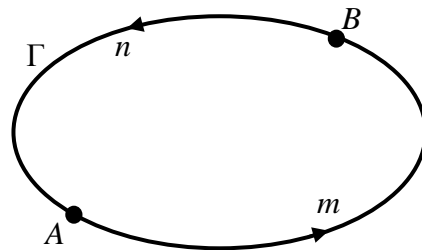


Рис. 3.43

Такие области, как тор и пространство с выброшенной прямой, не являются односвязными.

**Теорема 3.2.** (Условия независимости криволинейного интеграла от пути.)

Пусть функции  $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области  $V_0$ . Для того,

чтобы криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz \quad (3.57)$$

по любому замкнутому контуру  $\Gamma \subset V_0$  был равен нулю, необходимо, а если  $V_0$  односвязная область, – то и достаточно, чтобы в области  $V_0$  выполнялись условия

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \quad (3.58)$$

(Другими словами: тождества (3.58) определяют критерий независимости интеграла (3.56) от пути интегрирования  $AB$ .)

$\Delta$  Достаточность. Пусть дано, что условия (3.58) выполняются. Берём произвольный замкнутый контур  $\Gamma \subset V_0$ . Поскольку область  $V_0$  односвязная, на контур  $\Gamma$  можно натянуть поверхность  $S \subset V_0$ . Тогда по формуле Стокса (3.49) получим, что интеграл (3.57) равен нулю.

Необходимость. Пусть наоборот, дано, что интеграл (3.57) по любому замкнутому контуру  $\Gamma$  равен нулю. Докажем, что тогда выполняются тождества (3.58). Рассуждаем *от противного*: допустим условия (3.58) не выполняются, т.е. найдётся хотя бы одна точка  $M_0 \in V_0$ , в которой не выполняется по крайней

мере одно из тождеств (3.58), например, предположим  $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq \frac{\partial X}{\partial y}$ , или

$\left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)_{M_0} \neq 0$ . Возьмём круг  $S$  с центром в точке  $M_0$ , параллельный плос-

кости  $Oxy$ , столь малого радиуса, чтобы в нём  $\psi(x, y, z) \equiv \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$  – это

возможно в силу непрерывности производных, а значит и функции  $\psi(x, y, z)$ .

Пусть  $\Gamma = \partial S$  и  $S$  проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$  (рис 3.44). При-

меняя формулу Стокса и учитывая её запись (3.49'), в которой  $\lambda = \mu = \frac{\pi}{2}$ ,  $\nu = 0$ ,

найдем:

$$\oint_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_S \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \psi(x, y, h) dx dy = \psi(\xi, \eta, h) \cdot \text{пл. } D \neq 0$$

(такая точка  $(\xi, \eta, h) \in D$  найдётся по теореме о среднем для двойного интеграла). Итак, нашёлся контур, по которому интеграл (3.57) отличен от нуля. Это противоречит тому условию, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.  $\blacktriangle$



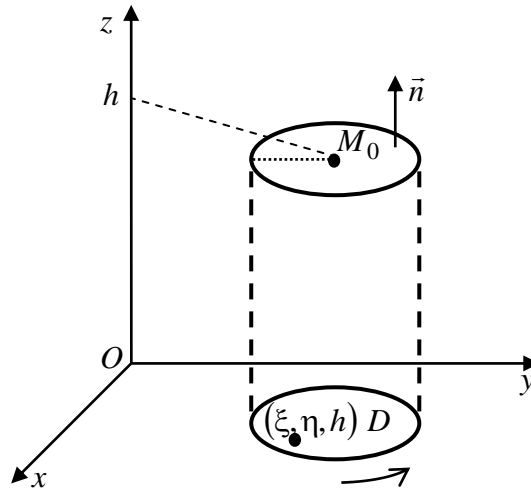


Рис. 3.44

### 3. Связь с вопросом о полном дифференциале.

**Теорема 3.3.** Пусть функции  $X, Y, Z$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в односвязной области  $V_0$ . Для того, чтобы выражение

$$Xdx + Ydy + Zdz \quad (3.59)$$

было полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y, z)$ :

$$Xdx + Ydy + Zdz = du(x, y, z), \quad (3.60)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.58). При этом функция  $u$  может быть найдена с помощью криволинейного интеграла

$$u(x, y, z) = \int_{A(x_0, y_0, z_0)}^{B(x, y, z)} Xdx + Ydy + Zdz, \quad (3.61)$$

где  $A(x_0, y_0, z_0)$  какая-либо фиксированная точка из области  $V_0$ .

$\Delta$  Необходимость. Пусть дано, что выражение (3.59) есть полный дифференциал некоторой функции  $u$ , т.е. имеет место равенство (3.60). Учитывая, что  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$  и полагая в (3.60) одно из приращений  $dx, dy, dz$

отличным от нуля, а два других нулём, получим  $X = \frac{\partial u}{\partial x}, Y = \frac{\partial u}{\partial y}, Z = \frac{\partial u}{\partial z}$ . Те-

перь возьмём от обеих частей соответствующие производные, и в силу равенства вторых смешанных производных функции  $u$  (а они будут непрерывны) получим равенства (3.58). (Здесь односвязность области  $V_0$  не обязательна).

Достаточность. Пусть дано, что выполняются условия (3.58). Возьмём в области  $V_0$  фиксированную точку  $A(x_0, y_0, z_0)$  и переменную  $B(x, y, z)$ , и рассмотрим интеграл (3.56). В силу условий (3.58) он не зависит от формы пути  $AB$ , а только от точек  $A$  и  $B$ . Но поскольку точка  $A$  фиксирована, то он зависит только от точки  $B(x, y, z)$ , т.е. определяет (однозначную) функцию от  $x, y, z$ ; её

обозначим  $u(x, y, z)$  и можем записать в виде (3.61). Докажем, что выражение (3.59) есть дифференциал этой функции. Для этого значению  $x$  дадим достаточно малое приращение  $\Delta x \neq 0$ ; получим точку  $C(x + \Delta x, y, z)$ . Соединим её с точкой  $B$  прямолинейным отрезком  $BC$  (рис. 3.45).

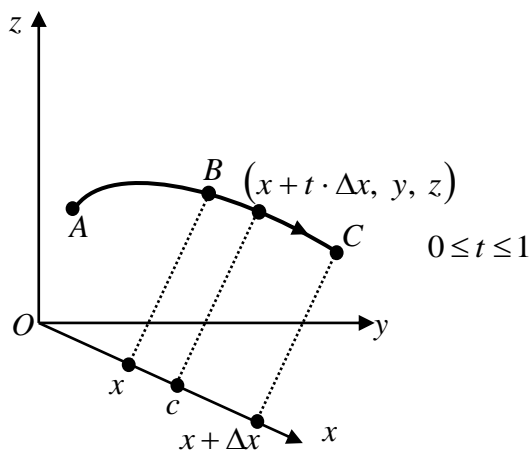


Рис. 3.45

Имеем

$$u(C) = u(x + \Delta x, y, z) = \int_A^C Xdx + Ydy + Zdz.$$

Находим частное приращение функции  $u$ :

$$u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) = \left( \int_A^B (\cdot) + \int_B^C (\cdot) \right) - \int_A^B (\cdot) = \int_B^C Xdx + Ydy + Zdz = \int_B^C X(x, y, z)dx =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} X(x, y, z)dx = [\text{под знаком интеграла} - \text{функция одного переменного } x, \text{ а } y \text{ и } z - \text{ постоянные}] = X(c, y, z) \cdot \Delta x, \quad \exists c \in (x, x + \Delta x),$$

— здесь применили теорему о среднем для определённого интеграла. Делим на  $\Delta x$ :

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = X(c, y, z).$$

В этом равенстве перейдём к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ . При этом  $c \rightarrow x$ ; в силу непрерывности функции  $X$  предел правой части существует, поэтому существует предел и левой части, и получим  $\frac{\partial u}{\partial x} = X(x, y, z)$ .

Аналогично доказывается, что  $\frac{\partial u}{\partial y} = Y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = Z$ . ▲

При вычислении интегралов (3.61), не зависящих от пути, за путь  $AB$  обычно берут ломаную, состоящую из трёх звеньев, параллельных осям координат. Если она соединяет последовательно точки  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $E(x, y_0, z_0)$ ,  $D(x, y, z_0)$ ,  $B(x, y, z)$ , то получим

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x X(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z Z(x, y, z) dz.$$

**Определение.** Всякая функция  $u_1(x, y, z)$ , для которой выражение (3.59) есть полный дифференциал, называется *первообразной* для этого выражения (определение имеет смысл только при выполнении условий (3.58)).

Покажем, что любые две первообразные  $u(x, y, z)$  и  $u_1(x, y, z)$  могут отличаться лишь на постоянное слагаемое (т.е. на аддитивную постоянную). Действительно, имеем

$$\frac{\partial(u - u_1)}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial(u - u_1)}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial(u - u_1)}{\partial z} \equiv 0,$$

т.е. разность  $u - u_1$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$ , ни от  $z$ , значит  $u - u_1 \equiv C = const$ .

Пусть известна какая-то первообразная  $u_1(B)$ . Но функция (3.61) тоже первообразная, следовательно,  $u(B) = u_1(B) + C$ . Полагаем здесь  $B = A$ , то

$$0 = u_1(A) + C \Rightarrow C = -u_1(A).$$

Итак,

$$\int_A^B X dx + Y dy + Z dz = u_1(B) - u_1(A), \quad (3.62)$$

или

$$\int_A^B du_1 = u_1(B) - u_1(A) \equiv u_1(M) \Big|_A^B.$$

Это есть *формула Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов*.

**Замечание 1.** Ещё раз подчеркнём, что сказанное верно лишь при выполнении условий (3.58), причём в односвязных областях  $V_0$ . Если же область  $V_0$  не односвязная, то функция (3.61) может оказаться многозначной: интеграл (3.61) может зависеть от пути. Однако, когда область  $V_0$  многосвязная, её пересекают некоторыми поверхностями  $S^*$ , превращая в односвязную область  $V_0^*$ . Если кривые  $AB$  берутся в области  $V_0^*$ , т.е. не пересекают поверхности  $S^*$ , то линейный интеграл от пути не зависит (при условиях (3.58)) и первообразная  $u$  будет однозначной (в области  $V_0^*$ ).

Сказанное выше обобщает факты: если  $F'(x) = f(x)$ , или  $dF(x) = f(x)dx$ , то  $\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$ , и наоборот.

**Пример.**  $yzdx + xzdy + xydz = d(xyz)$ , условия (3.58) выполняются всюду. Первообразной является функция  $u_1 = xyz$ . Тогда, если имеем точки  $A(1,0,2)$  и  $B(-3,1,4)$ , то по формуле (3.62)

$$\int_A^B yzdx + xzdy + xydz = xyz \Big|_A^B = -12 - 0 = -12.$$

Конечно, если  $A = B$ , т.е. имеем замкнутый контур  $AB = \Gamma$ , то  $\oint_{\Gamma} () = 0$ .

**4. Плоский случай.** Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (3.63)$$

Предполагаем, что функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны и имеют непрерывные первые частные производные в области  $D_0$  плоскости  $Oxy$ . В нашем случае  $Z \equiv 0$ , функции  $X = P$ ,  $Y = Q$  от  $z$  не зависят, и из формулы Стокса (3.49) как частный случай получается формула Грина

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.64)$$

где замкнутый контур  $\Gamma$  ограничивает область  $S = D \subset D_0$  (рис. 3.46). Условия (3.58) примут вид

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (3.65)$$

Исходя непосредственно из (3.64), или как частный случай изложенного в пунктах 1-3, получаем такой результат:

**Теорема 3.4.** В области  $D_0$  эквивалентны следующие факты:

- 1) интеграл (3.63) не зависит от пути интегрирования  $AB$ ,
- 2) интеграл по любому замкнутому контуру  $\Gamma$  равен нулю,
- 3) выполняется условие (3.65),
- 4) выражение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (3.66)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$  (она называется первообразной для выражения (3.66)):

$$P dx + Q dy = du; \quad (3.67)$$

эту функцию можно найти по формуле

$$u(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} P dx + Q dy. \quad (3.68)$$

Если известна какая-то первообразная  $u_1(M) \equiv u_1(x, y)$ , то

$$\int_A^B P dx + Q dy \equiv \int_A^B du_1(x, y) = u_1(M) \Big|_A^B \equiv u_1(B) - u_1(A). \quad (3.69)$$

В случаях 3) и 4) следует предполагать, что область  $D_0$  односвязная.

**Замечание 2.** Отметим, что в плоском случае тоже справедливо замечание 1, только надо заменить условия (3.58) на условие (3.65) и область  $V_0$  на  $D_0$ .

**Пример 1.** Проверить, что выражение  $2xy dx + x^2 dy$  является полным дифференциалом, найти первообразную и вычислить работу силы  $\vec{F} = 2xy \vec{i} + x^2 \vec{j}$  при перемещении из точки  $A_0(3, -2)$  в точку  $B_0(1, 5)$ .

Здесь  $P = 2xy$ ,  $Q = x^2$ ;  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$  - условие (3.65) выполняется во всей

плоскости – это односвязная область. Тогда

$$u(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} 2xy dx + x^2 dy.$$

Возьмём  $A(0,0)$  и в качестве пути ломаную линию  $ACB$  (рис.3.47); тогда

$$u(x, y) = \int_A^C (\cdot) + \int_C^B (\cdot) = \int_0^x 0 \cdot dx + x^2 \cdot 0 + \int_0^y 2xy \cdot 0 + x^2 dy = x^2 y \Big|_0^y = x^2 y.$$

Тогда работа  $\mathbf{A} = \int_{A_0}^{B_0} P dx + Q dy = x^2 y \Big|_{A_0}^{B_0} = 5 + 18 = 23$  (ед. работы).

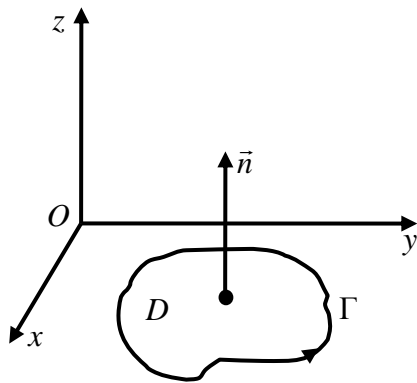


Рис. 3.46

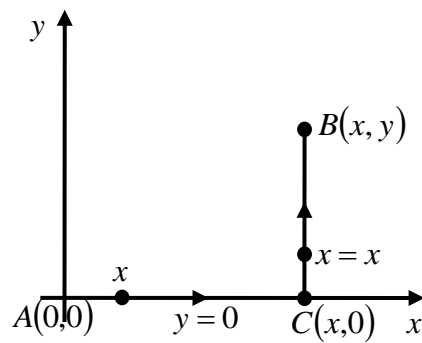


Рис. 3.47

Пример 2. Найти  $\int_{AB} y^2 dx + xy dy$ , где  $A(0,0)$ ,  $B(1,2)$ , по путям: а)  $l$  – ломаная, соединяющая точки  $A(0,0)$ ,  $C(1,0)$ ,  $B(1,2)$ , б)  $L$  – прямолинейный отрезок  $AB$ .

Уравнения всех трёх отрезков отмечены на рис. 3.48. Здесь  $P = y^2$ ,  $Q = xy$ ;

$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \neq \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ . Тожество (3.65) нарушается. Убедимся, что интеграл зависит от пути интегрирования. Действительно,

$$a) \int_l y^2 dx + xy dy = \int_{AC} (\cdot) + \int_{CB} (\cdot) = \int_0^1 0 \cdot dx + 0 \cdot 0 + \int_0^2 y^2 \cdot 0 + y \cdot 1 dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2;$$

$$б) \int_L y^2 dx + xy dy = \int_0^1 (2x)^2 dx + x \cdot 2x \cdot 2 dx = \int_0^1 8x^2 dx = 8 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

Интегралы по разным путям оказались разными, или: интеграл по замкнутому контуру  $\Gamma = l + L^-$  оказался не равным нулю.

Пример 3: магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника.

Пусть дано векторное поле

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}, \text{ где } P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (3.70)$$

Требуется найти его циркуляцию по разным контурам  $\Gamma$ .

Рассмотрим радиус-вектор точки  $M(x, y)$ , именно  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Скалярное произведение  $(\vec{F}, \vec{r}) = 0$ , т.е.  $\vec{F} \perp \vec{OM} = \vec{r}$ . Длина

$$|\vec{F}| = \sqrt{\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

Если представить себе бесконечный линейный проводник с током, проходящий через точку  $O(0,0)$  и перпендикулярно плоскости  $Oxy$ , то возникающее плоскопараллельное, или, как говорят, *плоское магнитное поле* описывается именно вектором  $\vec{F}$ . Циркуляция вектора  $\vec{F}$  вдоль контура  $\Gamma$  определится интегралом

$$C(\Gamma) = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma} F_{\tau} ds. \quad (3.71)$$

Функции (3.70) непрерывны вместе с частными производными, и условие (3.65) выполняется всюду, кроме начала координат  $O(0,0)$ . Тогда по любому замкнутому контуру  $\Gamma_1$ , не содержащему внутри точку  $O(0,0)$ , циркуляция равна нулю:  $C(\Gamma_1) = 0$ .

Однако рассмотрим интеграл по окружности  $\Gamma_2$  радиуса  $R$  с центром в начале, проходимой против часовой стрелки. Поскольку  $\vec{r} \perp \vec{\tau}$  (рис. 3.49), то  $F_{\tau} = |\vec{F}| = \frac{1}{R}$  и

$$C(\Gamma_2) = \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{R} \cdot ds = \frac{1}{R} \cdot \text{дл. } \Gamma_2 = 2\pi \neq 0 \quad (3.72)$$

(циркуляция не зависит от радиуса  $R$ ).

Пусть  $\Gamma_3$  - какой угодно замкнутый контур, содержащий внутри начало и проходимый тоже против часовой стрелки. Внутри  $\Gamma_3$  возьмём окружность  $\Gamma_2$  (достаточно малого радиуса  $R$ ). По формуле Грина для составного контура  $\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_2^-$  в силу (3.65) интеграл по этому контуру равен нулю. Откуда

$$C(\Gamma_3) = C(\Gamma_2) = 2\pi. \quad (3.73)$$

Поэтому, если данные точки  $A$  и  $B$  соединим двумя кривыми  $AnB$  и  $AmB$  такими, чтобы замкнутый контур  $\Gamma_3 = AnBmA$  охватывал начало, то  $\int_{AnB} (\cdot) \neq \int_{AmB} (\cdot)$ . Это,

как и (3.72), (3.73) не противоречит теореме 3.4, так как внутри соответствующих замкнутых контуров имеется точка разрыва функций (3.70) (точка  $O(0,0)$ ). Она называется *вихревой точкой* поля  $\vec{F}$  (см. далее § 3.12).

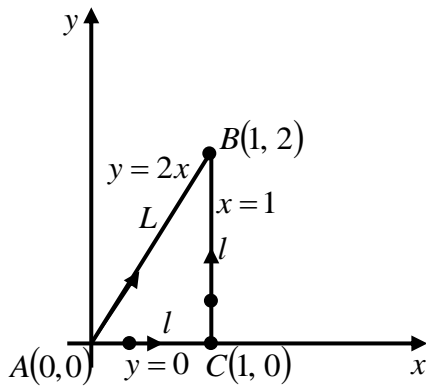


Рис. 3.48

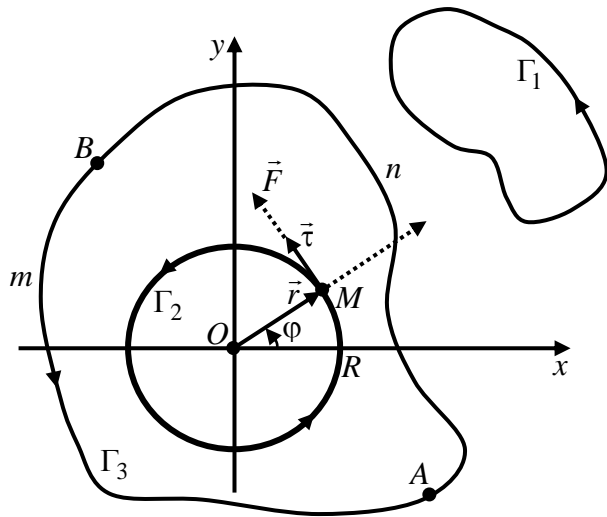


Рис. 3.49

Результат (3.72) можно получить иначе. Пусть  $x, y$  – декартовы,  $r, \varphi$  – полярные координаты точки  $M$ . Они связаны формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (3.74)$$

и параметрические уравнения окружности  $\Gamma_2$  есть  $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (или вообще  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi$ ), откуда  $dx = -R \sin \varphi d\varphi, dy = R \cos \varphi d\varphi$ . Вычислим циркуляцию по окружности  $\Gamma_2$ :

$$C(\Gamma_2) = \oint_{\Gamma_2} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi}{R^2} d\varphi = 2\pi.$$

Интересно отметить следующее. Из (3.74) находим  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ . Отсюда, если считать  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$  т.е.  $x > 0$ , имеем  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ . Этот полярный угол есть функция от  $x$  и  $y$ : обозначим  $\varphi = \varphi(x, y); \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y)$ , где  $P$  и  $Q$  определены формулами (3.70). Так что подынтегральное выражение в (3.71), т.е.  $P dx + Q dy$ , является полным дифференциалом функции  $\varphi = \varphi(x, y)$ . Это же верно, если считать, например,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , т.е. если рассмотреть плоскость с разрезом по лучу  $-\infty < x \leq 0, -$  а это есть односвязная область, её обозначим  $D_0$ .

Если взять точки  $A(1,0), B(x, y)$  и запретить кривым  $AB$  пересекать этот разрез, т.е. считать  $AB \subset D_0$ , то угол  $\varphi(x, y)$  можно определить с помощью криволинейного интеграла вида (3.63):

$$\varphi = \varphi(x, y) = \int_{A(1,0)}^{B(x,y)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad B(x, y) \in D_0. \quad (3.75)$$

Действительно, возьмём путь  $AB$ , состоящий из дуги  $AN$  окружности  $x^2 + y^2 = 1$  и прямолинейного отрезка  $NB$  (рис. 3.49').

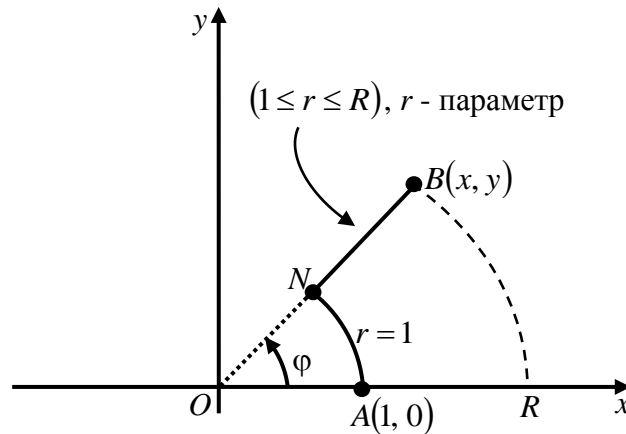


Рис. 3.49'

Параметрические уравнения дуги  $AN$  определяются уравнениями (3.74), где  $r=1$ ,  $\varphi$  – параметр, меняется в пределах от 0 до  $\varphi$ , а уравнение отрезка  $NB$  – теми же формулами, но параметром является расстояние  $r$ , меняющееся от 1 до  $R=OB$ . Для точек  $(x,y) \in AN$  имеем  $-ydx + xdy = 1 \cdot d\varphi$ , а если точка  $(x,y) \in NB$ , то  $-ydx + xdy = -r \sin \varphi \cdot \cos \varphi dr + r \cos \varphi \cdot \sin \varphi dr \equiv 0$ . Поэтому

$$\int_{A(1,0)}^{B(x,y)} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_{AN} (\quad) + \int_{NB} (\quad) = \int_0^\varphi \frac{1 \cdot d\varphi}{1} + \int_1^R 0 \cdot dr = \varphi.$$

(Лучи  $\varphi = const$  являются линиями уровня функции  $\varphi(x,y)$ .)

Представление (3.75) для угла  $\varphi$  справедливо и в случаях  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ ,  $-\pi < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , в частности для  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  (т.е. при  $x=0$ ).

Поскольку  $d\varphi = Pdx + Qdy$ , то криволинейный интеграл по пути  $A_1B_1 \subset D_0$  можно найти так:

$$K \equiv \int_{A_1B_1} Pdx + Qdy = \varphi(B) \Big|_{A_1}^{B_1} = \varphi(B_1) - \varphi(A_1).$$

В частности, когда замкнутый контур  $\Gamma_3 = A_1B_1$  охватывает начало  $O(0,0)$  (рис. 3.50):  $\varphi(B_1) = \pi$ ,  $\varphi(A_1) = -\pi$ , получим  $K = 2\pi$  – это результат (3.73).

Теперь разрешим точке  $B(x,y)$  произвольно непрерывно перемещаться по плоскости, и пусть кривая  $AB$  несколько раз огибает начало  $O(0,0)$ . Тогда интеграл по пути  $AB$  можно представить как сумму интегралов по пути  $l \subset D_0$ , соединяющему точки  $A$  и  $B$ , и по замкнутым контурам вида  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_3^-$  (рис. 3.51). Получим



$$\Phi(B) \equiv \int_{AB} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \varphi(x, y) + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbf{Z}, B \in D^* = \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, -\infty < \varphi < \infty\}.$$

Функция  $\Phi(B) \equiv \Phi(x, y)$  многозначная, но все её однозначные непрерывные ветви отличаются на постоянные слагаемые - вида  $2k\pi$ , так что их дифференциалы одинаковы. В таком случае можно условно считать, что  $d\Phi(x, y) = d\varphi(x, y) = Pdx + Qdy$ . (Напомним, что понятие производных и соответственно дифференциалов вводилось (имеет смысл) только для однозначных функций.) По аналогии с обозначениями аргументов  $\arg z$  и  $\text{Arg } z$  для комплексных чисел  $z = (x, y) = x + iy$  естественно обозначить  $\varphi(B) = \arg B$ ,  $\Phi(B) = \text{Arg } B = \arg B + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

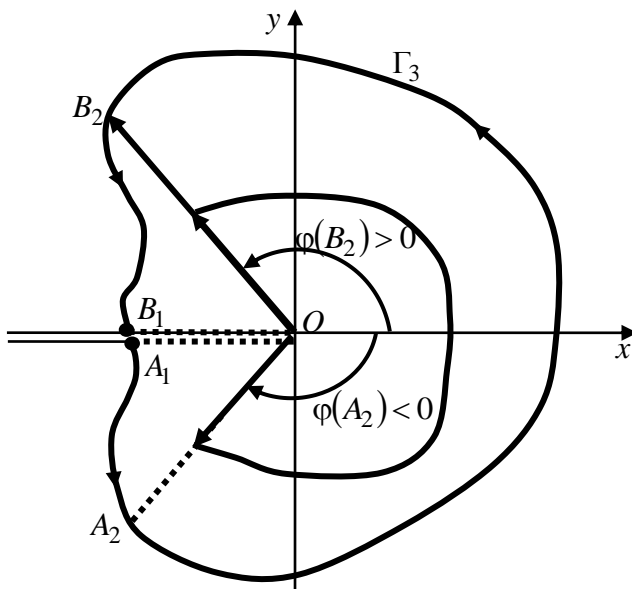


Рис. 3.50

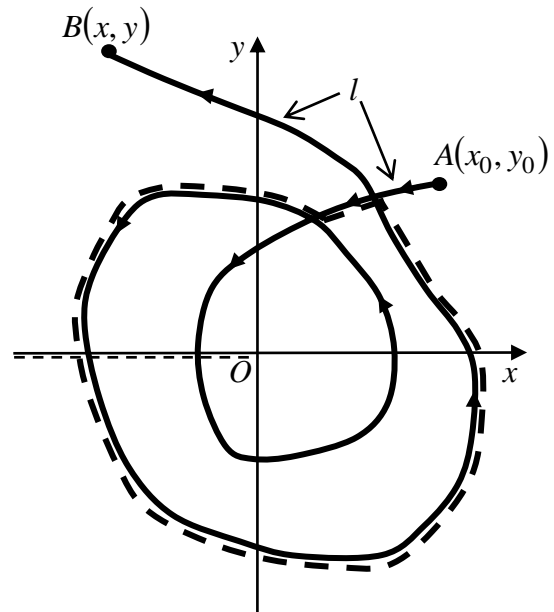


Рис. 3.51

## § 12. Ротор (вихрь) вектора. Теорема Стокса в векторной форме. Потенциальные поля

1. Восстановим некоторые обозначения. Рассматриваем векторное поле  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ . В нём берём ориентированную кривую  $\Gamma$  с векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Векторы  $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$  и  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  направлены по касательной к кривой  $\Gamma$  в том же направлении, как у  $\Gamma$ . Соответствующий единичный вектор здесь, как это часто принято, будем обозначать через  $\vec{l}$  вместо

$\vec{\tau}$ ;  $s \equiv l$  – переменная длина дуги;  $ds \equiv dl = |d\vec{r}| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$  – дифференциал, или элемент длины дуги ( $dt > 0$ ).  $F_l = (\vec{F}, \vec{l})$  – проекция вектора  $\vec{F}$  на направление  $\vec{l}$  (на направленную касательную к кривой  $\Gamma$ ) (рис. 3.52).

Будем рассматривать линейный интеграл в векторном поле  $\vec{F}$ , т.е. циркуляцию вектора  $\vec{F}$  вдоль кривой  $\Gamma$  (см. § 3.2):

$$\int_{\Gamma} X dx + Y dy + Z dz = \int_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{\Gamma} F_l dl. \quad (3.76)$$

Если поле  $\vec{F}$  силовое, то это есть работа поля  $\vec{F}$  вдоль кривой  $\Gamma$ . (Термин «циркуляция» чаще употребляется для замкнутых кривых.)

2. Введём вектор

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (3.77)$$

Его называют *ротор* (или *вихрь*) вектора (поля)  $\vec{F}$  в точке  $M(x, y, z)$ . Символически ротор можно записать в виде определителя или векторного произведения  $\vec{F}$  на символический вектор набла (оператор Гамильтона):

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F}, \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

определитель надо разложить по элементам первой строки.

Употребляется и другое обозначение ротора:  $\text{curl } \vec{F}$ . (Фр. *rotation* – вращение, англ. *curl* – завиток).

Рассмотрим формулу Стокса в виде (3.49'), где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности  $S$ , натянутой на замкнутый контур  $\Gamma$ , с принятым согласованием направления на нём и выбранной стороной поверхности. Сумма в фигурных скобках под знаком интеграла по поверхности  $S$  является скалярным произведением векторов  $\text{rot } \vec{F}$  и  $\vec{n}$ :

$$(\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) = \text{пр}_n \text{rot } \vec{F} \equiv \text{rot}_n \vec{F};$$

так обозначается проекция ротора вектора  $\vec{F}$  на нормаль  $\vec{n}$ . Тогда в векторной форме формула Стокса примет вид

$$\int_{\Gamma} F_l dl = \iint_S \text{rot}_n \vec{F} dS, \quad \text{или} \quad \int_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{l}) dl = \iint_S (\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) dS, \quad (3.78)$$

и теорема Стокса сформулируется так:

*Циркуляция поля  $\vec{F}$  вдоль замкнутого контура  $\Gamma$  равна потоку ротора поля  $\vec{F}$  через поверхность  $S$ , натянутую на этот контур (сторона поверхности и направление на  $\Gamma$  согласованы между собой) (рис. 3.53).*

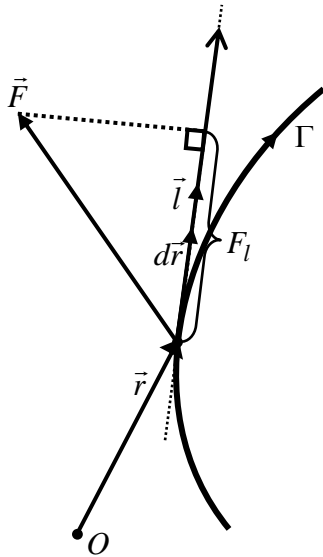


Рис. 3.52

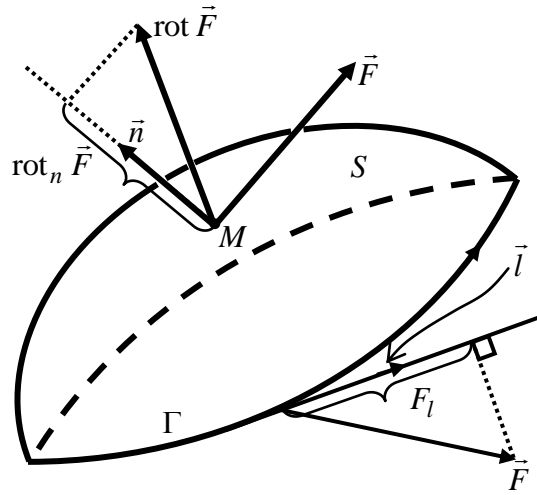


Рис. 3.53

### 3. Инвариантное определение ротора.

Покажем, что ротор не зависит от выбора системы координат. Предположим, что в области  $V$  функции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  непрерывны вместе с первыми частными производными и потому  $\text{rot}_n \vec{F}$  есть функция непрерывная. Берём точку  $M \in V$ , в ней направление  $\vec{n}$  и площадку  $S$  с границей  $\Gamma$ , перпендикулярную  $\vec{n}$  в точке  $M$  (рис. 3.54). Применим формулу Стокса (3.78) и теорему о среднем:

$$\int_{\Gamma} F_l dl = \text{rot}_n \vec{F} \Big|_{M_1} \cdot S, \quad \exists M_1 \in S;$$

т.к. площадка плоская, то нормаль  $\vec{n}$  постоянна. Отсюда  $\text{rot}_n \vec{F} \Big|_{M_1} = \frac{\int_{\Gamma} F_l dl}{S}$ . Будем стягивать площадку  $S$  в точку  $M$ :  $(S) \rightarrow M$ . Тогда  $M_1 \rightarrow M$  и получим

$$\text{rot}_n \vec{F} \Big|_M = \lim_{(S) \rightarrow M} \frac{\int_{\Gamma} F_l dl}{S}. \quad (3.79)$$

Вывод. Ротор  $\text{rot} \vec{F}$  поля  $\vec{F}$  есть вектор, проекция которого на данное в точке  $M$  направление  $\vec{n}$  равна пределу отношения циркуляции поля вдоль границы плоской площадки, перпендикулярной  $\vec{n}$ , к площади этой площадки, при условии, что площадка стягивается в точку  $M$ .

Это есть инвариантное по отношению к выбору системы координат определение ротора. Поскольку ни циркуляция (в частности, работа), ни площадь с системой координат не связаны, следовательно, и проекция  $\text{rot}_n \vec{F}$ , а значит и сам вектор  $\text{rot} \vec{F}$  есть понятия, не связанные с системой координат. Говорят по-

этому:  $\text{rot}_n \vec{F}$  есть истинный скаляр, а  $\text{rot} \vec{F}$  – истинный вектор.

**4. Физический смысл ротора.** Убедимся, что  $\text{rot} \vec{F}$  характеризует степень «завихрённости» поля  $\vec{F}$ .

1) Пусть  $\text{rot} \vec{F}|_M \neq 0$ . Берём вектор  $\vec{N} = \text{rot} \vec{F}$ ,  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ , то

$\text{rot}_n \vec{F} = |\text{rot} \vec{F}| > 0$ , и если плоская площадка  $S \perp \vec{N}$ , то из формулы Стокса (3.78), где  $\Gamma = \partial S$ , видим, что  $\int_{\Gamma} F_l dl > 0$ . Поэтому, если площадка достаточно

малая, то  $F_l > 0$ , т.е. происходит *завихрение* поля в том же направлении, что и на  $\Gamma$  (рис. 3.55). И вообще, если  $\Gamma$  произвольный контур, ограничивающий поверхность  $S$ , на которой  $\text{rot}_n \vec{F} > 0$ , то  $\int_{\Gamma} F_l dl > 0$ , и потому на  $\Gamma$  преимущественно  $F_l > 0$ .

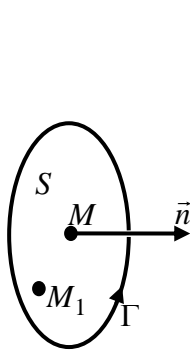


Рис. 3.54

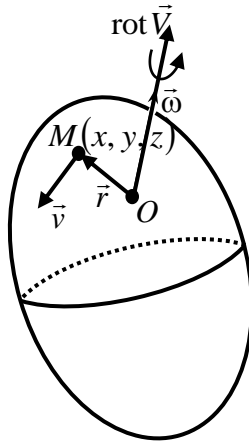


Рис. 3.56

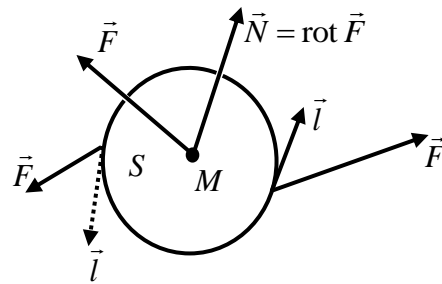


Рис. 3.55

2) Пусть имеем твёрдое тело, закреплённое в точке  $O(0,0,0)$  (рис. 3.56). В данный момент тело вращается вокруг мгновенной оси с некоторой угловой скоростью  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$  (она одинакова для всех точек тела), и пусть  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$  – радиус-вектор точки  $M$ . Тогда, как известно из кинематики, линейная скорость точки  $M(x, y, z)$  будет

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x).$$

И потому

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} = 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Итак,  $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}$ , т.е. действительно ротор характеризует вращение, степень «завихренности» поля. Здесь  $\text{rot } \vec{v} \perp \vec{v}$ , и в других случаях ситуация близка к этому.

3) Пусть поле  $\vec{F}$  плоскопараллельное:  $Z = 0$ , вектор  $\vec{F} = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$  не зависит от  $z$  и лежит в плоскости  $Oxy$ . Тогда  $\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k} \perp \vec{F}$ , т.е. ротор направлен по прямой, и поэтому его можно рассматривать как скаляр  $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ , который может быть больше или меньше нуля (сравни со скоростью прямолинейного движения точки).

**5.** Точка  $M(x, y, z)$ , в которой  $\text{rot } \vec{F} \neq 0$ , называется *вихревой* точкой, или просто *вихрем* поля  $\vec{F}$ . Векторное поле, в котором  $\text{rot } \vec{F} \equiv 0$ , называется *безвихревым*. Имея в виду определения дивергенции (3.43) и ротора (3.77), легко убедимся, что  $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ , т.е. поле ротора является соленоидальным. Это же следует из формулы Стокса (3.78): поток ротора через все поверхности  $S$ , натянутые на контур  $\Gamma$ , один и тот же (см. § 3.9, п. 4). Теорему 3.2 теперь можно сформулировать так:

**Теорема 3.5.** Для независимости криволинейного интеграла  $\int_{AB} (\vec{F}, \vec{l}) dl$  от пути интегрирования в области  $V_0$  (или: для его равенства нулю по любому замкнутому контуру  $\Gamma \subset V_0$ ) необходимо, а если область  $V_0$  односвязная – то и достаточно, чтобы поле  $\vec{F}$  было безвихревым.

### 6. Потенциальные поля.

**Определение.** Поле  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  называется потенциальным, и  $\vec{F}$  – потенциальным вектором, если оно является градиентом некоторой скалярной функции  $U(x, y, z)$ :  $\vec{F} = \text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ , при этом сама функция  $U$  называется *потенциалом* поля.

Имеем три равносильных требования:

$$(\vec{F} = \text{grad}U) \Leftrightarrow \left( X = \frac{\partial U}{\partial x}, Y = \frac{\partial U}{\partial y}, Z = \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Leftrightarrow (\text{Выражение}$$

$Xdx + Ydy + Zdz = dU$  есть полный дифференциал, т.е. потенциал  $U$  является первообразной для этого выражения.)

**Теорема 3.6.** Для того, чтобы поле  $\vec{F}$  в области  $V_0$  было потенциальным, необходимо, а если область  $V_0$  односвязная – то и достаточно, чтобы поле  $\vec{F}$  было безвихревым:  $\text{rot } \vec{F} \equiv 0$  в области  $V_0$ .

$\Delta$  Необходимость. Пусть поле является потенциальным, т.е.  $\vec{F} = \text{grad}U$ . Находим

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} \equiv 0, \text{ т.е. } \operatorname{rot} \operatorname{grad} U \equiv 0.$$

Достаточность. Пусть дано, что  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$  и  $V_0$  - односвязная область. Потенциальность поля  $\vec{F}$  следует из теорем 3.4 и 3.3, причём, потенциал  $U$  может быть найден с помощью линейного интеграла (3.61), т.е.

$$U(x, y, z) = \int_{A(x_0, y_0, z_0)}^{B(x, y, z)} Xdx + Ydy + Zdz = \int_A^B (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_A^B (\vec{F}, \vec{l}) dl = \int_A^B F_l dl. \quad (3.80)$$

Здесь мы собрали вместе все обозначения линейного интеграла. ▲

Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Постоянную подбирают из условия, чтобы потенциал в какой-либо заданной точке, чаще всего – на бесконечности, был равен нулю.

Вывод. Если поле  $\vec{F}$  является потенциальным и  $U_1(M)$  - его потенциал, т.е. какая-либо функция, удовлетворяющая условию  $\vec{F} = \operatorname{grad} U_1$ , или  $X dx + Y dy + Z dz = dU_1$ , то тогда линейный интеграл можно подсчитывать по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_A^B F_l dl \equiv \int_A^B Xdx + Ydy + Zdz \equiv \int_A^B dU_1 = U_1(M) \Big|_A^B = U_1(B) - U_1(A). \quad (3.81)$$

Здесь так же, как и ранее, справедливо сказанное в замечании 1 после формулы (3.62). Отметим только, что в односвязной области  $V_0$  потенциал является однозначной функцией, а в многосвязной может быть многозначной.

В силу теоремы 3.6, если потенциальное поле  $\vec{F} = \operatorname{grad} U$  есть силовое поле, то работа в нём не зависит от формы пути  $AB$ , а зависит только от начальной и конечных точек, и её можно вычислять по формуле (3.81).

Пример. Рассмотрим кулоновское поле  $\vec{F} = q \frac{\vec{r}}{r^3}$ , созданное точечным зарядом (см. § 3.9, пример 1 и рис. 3.57).

Нетрудно проверить, что проекции кулоновского поля суть

$$X = -q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right), \quad Y = -q \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right), \quad Z = -q \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right), \quad \text{так что}$$

$\vec{F} = -q \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \operatorname{grad} \left( \frac{-q}{r} \right)$ . Следовательно, поле потенциальное и его потенци-

ал  $U = \frac{-q}{r}$ , – он удовлетворяет условию нормировки  $U|_{r=\infty} = 0$ . Работа поля  $\vec{F}$  найдётся по известной формуле:

$$\mathbf{A} = \int_A^B (\vec{F}, d\vec{r}) = -\frac{q}{r} \Big|_A^B = -\frac{q}{r(B)} + \frac{q}{r(A)}.$$

В частности, если точки  $A$  и  $B$  находятся на одинаковом расстоянии от заряда (от точки  $O$ ), то работа равна нулю. Если коэффициент пропорциональности  $q$  заменить на  $-k$ ,  $k > 0$ , то получим *ньютоновское силовое поле* или *притяжение по закону Ньютона*  $\vec{F}_1 = -k \frac{\vec{r}}{r^3}$  - оно направлено к точке  $O$  (рис. 3.57, где  $m$  и  $m_1$  массы точек). Для него потенциал  $U_1 = \frac{k}{r}$ .

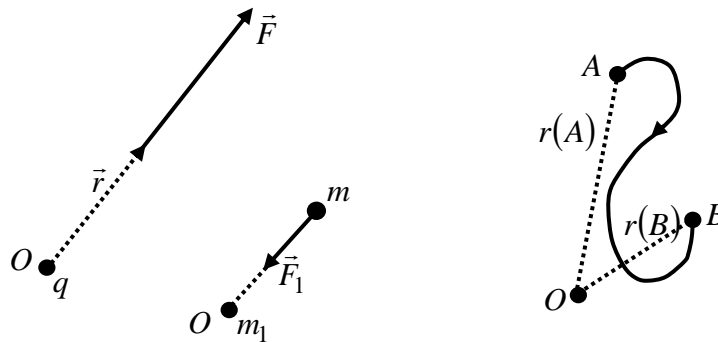


Рис. 3.57

Замечание. Были отмечены две операции *векторного анализа второго порядка*:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \text{ и } \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0.$$

Отметим ещё одну:  $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \equiv \Delta U$ , где символ

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  называется оператором Лапласа; его можно записать в виде

символического скалярного произведения  $\Delta = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})$ , где  $\vec{\nabla}$  – оператор Гамильтона (набла). Дифференциальное уравнение в частных производных  $\Delta U = 0$  называется уравнением Лапласа, а его решения  $U = U(x, y, z)$  – гармоническими функциями (трёх переменных).

### § 13. Потенциально-соленоидальные поля в плоском случае

Пусть имеем плоскопараллельное поле

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

где функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  считаем непрерывными вместе с первыми частными производными в некоторой области  $D_0$ . Введённые выше, в частности в

§3.11, п.4, понятия, факты перенесём, с возможными повторениями на случай таких полей.

1. На кривой  $\Gamma \subset D_0$  выбираем определённое направление, в котором возрастает переменная длина дуги  $s$ , и проводим единичный вектор касательной  $\vec{\tau}$ , а единичный вектор нормали  $\vec{n}$  проводим вправо от  $\vec{\tau}$ , судя по обходу. Поэтому, если  $\vec{\tau}$  образует углы  $\alpha$  и  $\beta$  с осями координат  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, то  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  (или  $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ),  $\vec{\tau} = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j}$ ,  $\vec{n} = \sin\alpha \vec{i} - \cos\alpha \vec{j}$ . (Рис.3.58.)

Пусть векторное уравнение кривой  $\Gamma$  есть

$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ , то  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}$ ,  $\vec{\tau} \cdot ds = \vec{r}'(s) \cdot ds$ , т.е.  $\vec{\tau} \cdot ds = dx\vec{i} + dy\vec{j}$  и  $\vec{n} \cdot ds = dy\vec{i} - dx\vec{j}$ , где  $dx$  и  $dy$  есть дифференциалы вдоль кривой  $\Gamma$ .

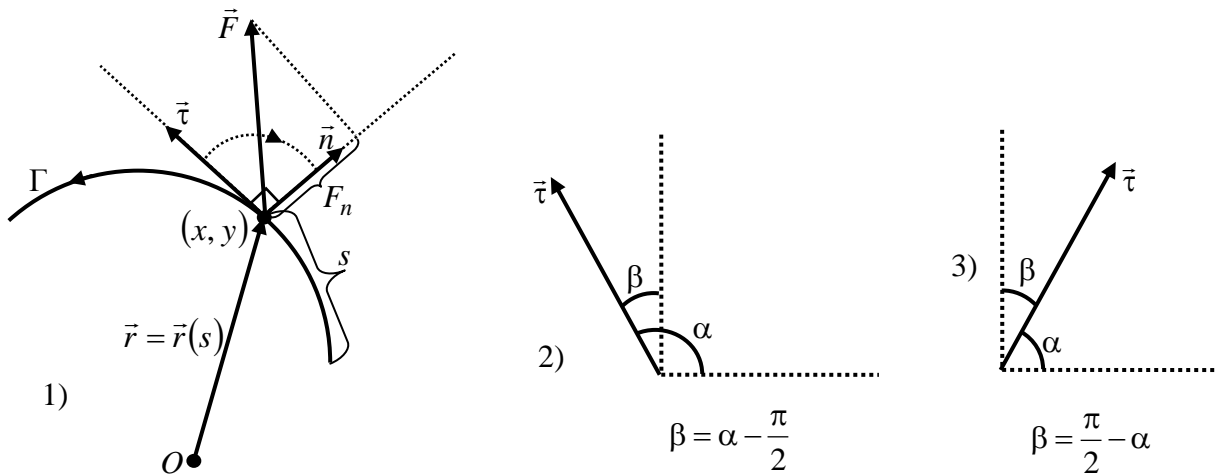


Рис. 3.58

**Определение 1.** *Потоком* векторного поля  $\vec{F}$  через кривую  $\Gamma$  называется число

$$N = \int_{\Gamma} F_n \cdot ds = \int_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{n}) ds = \int_{\Gamma} (P \sin \alpha - Q \cos \alpha) ds = \int_{\Gamma} -Q dx + P dy. \quad (3.82)$$

Если  $\Gamma$  - замкнутый контур, то число  $N$  называется интенсивностью или производительностью источников, находящихся внутри  $\Gamma$ . По формуле Грина имеем

$$N = \oint_{\Gamma} -Q dx + P dy = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.83)$$

где область  $D = \bar{I}(\Gamma) = \Gamma \cup I(\Gamma) \subset D_0$ . Скалярная функция  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  называется *дивергенцией* или *расходимостью* поля  $\vec{F}$  в точке  $M(x, y)$ . Если  $\operatorname{div} \vec{F}|_M \neq 0$  (в частности, не существует), то точка  $M$  называется источником; в



случае  $\operatorname{div} \vec{F}|_M < 0$  точка  $M$  называется также стоком (это отрицательный источник).

Если во всех точках  $M$  некоторой области  $D_1$ ,  $D_1 \subset D_0$ , будет  $\operatorname{div} \vec{F}|_M = 0$ , т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(-Q)}{\partial y}, \quad (3.84)$$

то поле  $\vec{F}$  называется соленоидальным, или трубчатым, в этой области. В таком поле поток через любую замкнутую кривую  $\Gamma$ , такую, что  $\bar{I}(\Gamma) = D \subset D_1$ , как видно из формулы (3.83), будет равен нулю:  $N = 0$ , и существует функция  $v(x, y)$  такая, что  $dv(x, y) = -Qdx + Pdy$ , т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Q, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = P. \quad (3.85)$$

Первообразная  $v(x, y)$  называется *функцией тока*, ибо её линии уровня  $v(x, y) = C_1$  являются векторными линиями поля  $\vec{F}$  (или линиями тока – для случая жидкости или газа). В самом деле, вдоль линии уровня имеем  $dv \equiv v'_x dx + v'_y dy = 0$ , откуда угловой коэффициент касательной

$$\frac{dy}{dx} \equiv -\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi \quad (\varphi \text{ – угол наклона касательной к линии уровня к оси } Ox),$$

или  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ , т.е.  $\vec{\tau} \parallel \vec{F}$  (рис. 3.59). Функцию  $v(x, y)$  можно найти с помощью

криволинейного интеграла

$$v(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} F_n ds + C = \int_A^B -Qdx + Pdy + C, \quad \forall C = \text{const}. \quad (3.86)$$

Замечание 1. Формулу (3.83) можно переписать в виде

$$\oint_{\Gamma} (P \cos \lambda + Q \cos \mu) ds = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy, \quad \text{или} \quad \oint_{\Gamma} F_n ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy; \quad (3.83')$$

это есть формула Остроградского для плоскости. Здесь  $\vec{n} = \cos \lambda \vec{i} + \cos \mu \vec{j}$  есть единичный вектор внешней нормали к контуру  $\Gamma$  ( $\lambda = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ,  $\mu = \frac{\pi}{2} - \lambda = \pi - \alpha$ , рис. 3.60).

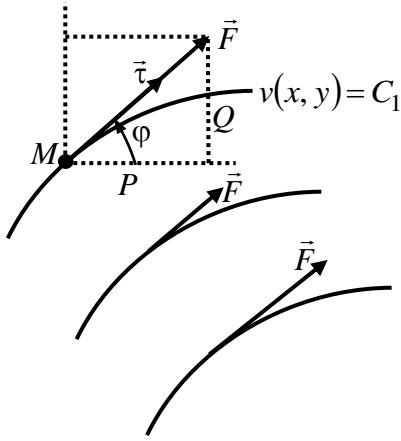


Рис. 3.59

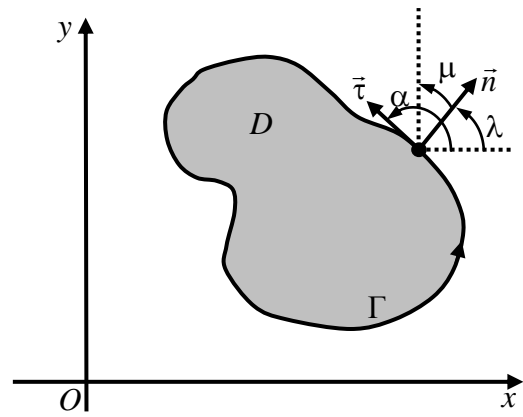


Рис. 3.60

Построим прямой цилиндр высоты 1, основанием которого является область  $D = \bar{I}(\Gamma)$ , и образующие параллельны оси  $Oz$  (рис. 3.61). Уравнение верхнего основания есть  $z=1$ , тогда тройной интеграл в формуле (3.44) ( $X=P, Y=Q, Z \equiv 0$ ) сводится к двойному, и формула (3.44) примет вид  $\iint_S F_n dS = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy$ , так что левая часть здесь даст левую часть в (3.83'). Отсюда становится понятным **Определение 1**.

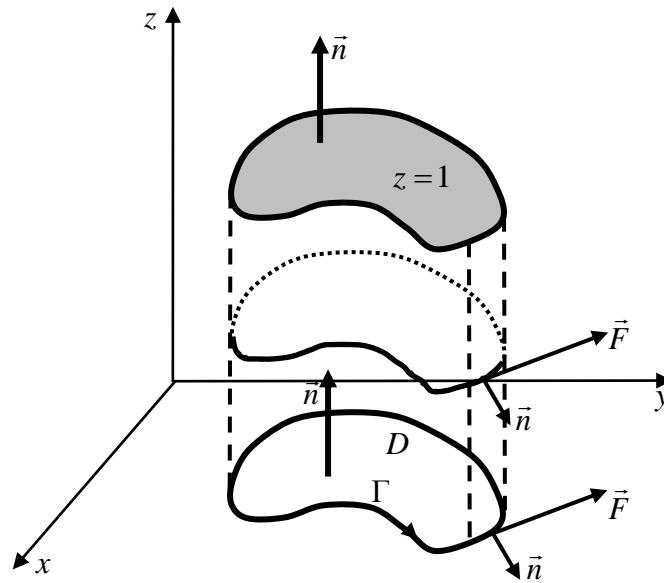


Рис. 3.61

**Определение 2.** Циркуляцией поля  $\vec{F}$  вдоль замкнутого контура  $\Gamma$  называется число

$$C(\Gamma) = \oint_{\Gamma} F_{\tau} ds \equiv \oint_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{\tau}) ds \equiv \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.87)$$

$$D \equiv \bar{I}(\Gamma) \subset D_0.$$

Величина  $\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  называется *ротором* или *вихрем* поля  $\vec{F}$  (в пространстве – это вектор, перпендикулярный плоскости  $Oxy$ ). Точка  $M$  поля, в

которой  $\text{rot } \vec{F} \neq 0$ , называется *вихревой точкой* или *вихрем* поля  $\vec{F}$ . Если в каждой точке некоторой области  $D_1$  будет  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (3.88)$$

то поле называется *безвихревым* или *потенциальным* в области  $D_1$ . Если  $\bar{\Gamma}(\Gamma) \subset D_1$ , то по формуле (3.87) получим  $C(\Gamma) = 0$ . При условии (3.88) существует функция  $u(x, y)$  такая, что  $du = Pdx + Qdy$ , или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad (3.89)$$

и её можно найти с помощью линейного интеграла

$$u(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} F_\tau ds + const = \int_A^B Pdx + Qdy + const. \quad (3.90)$$

Первообразная  $u(x, y)$  называется *потенциальной* функцией или *потенциалом* поля  $\vec{F}$ , поскольку, в силу (3.89)  $\vec{F} = \text{grad } u$ . Линии уровня  $u(x, y) = C_2$  называются *эквипотенциальными* или линиями *равного потенциала* – к ним вектор  $\vec{F}$  направлен по нормали.

Вывод. Если в области  $D_1$  поле  $\vec{F}$  является одновременно соленоидальным и потенциальным, то существуют две функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , удовлетворяющих условиям (3.85) и (3.89), и следовательно, условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.91)$$

В таком поле нет ни источников, ни вихрей.

Равенства (3.91) называются условиями Даламбера-Эйлера. Их получили Даламбер в 1752 г. и Эйлер в 1755 г. исходя из задач гидродинамики.

Поскольку  $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ , то в соленоидально-потенциальном поле линии тока и эквипотенциальные линии образуют криволинейную ортогональную сеть (она называется *сеткой поля*).

Дифференцируя первое из тождеств (3.91) по  $x$ , второе по  $y$ , и затем складывая, получим  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ; аналогично  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ , так что в таком поле

$u$  и  $v$  являются гармоническими функциями (от двух переменных), а поскольку они ещё связаны условиями (3.91), то и *сопряжёнными гармоническими функциями* (порядок функций в паре существен:  $u$  – первая,  $v$  – вторая функция).

Введём комплексное переменное  $z = (x, y) = x + iy$  и составим функцию  $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Эта функция называется комплексным потенциалом поля, или характеристической функцией течения. С помощью её можно решать многие задачи гидро- и аэродинамики. Для функции  $\Phi(z)$  условия (3.91) называются ещё уравнениями Коши-Римана.

Замечание 2. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\psi(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Pdx + Qdy \quad (\text{при условии, что } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в области } D_0). \quad (3.92)$$

Если область  $D_0$  односвязная, то интеграл не зависит от пути  $AB \subset D_0$  и потому определяет однозначную функцию  $\psi(x, y)$ . Если же  $D_0$  область многосвязная, то функция  $\psi(x, y)$  может оказаться многозначной (см. § 3.11, п.4, пример 3), однако все её однозначные непрерывные ветви отличаются друг от друга на

постоянные вида  $\sum_{k=1}^n N_k C_k$ . Именно, пусть  $D_0$  есть внешность контуров  $\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Числа  $C_k = \oint_{\Gamma_k} Pdx + Qdy$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) называются *циклическими постоянными* или *периодами* интеграла (3.92).

Пусть  $l$  – какой-либо фиксированный путь, а  $L$  – любой другой путь, соединяющий точки  $A$  и  $B$  (рис. 3.62), и обходящий контур  $\Gamma_k$  в том или ином направлении  $N_k$  раз,  $N_k \in \mathbf{Z}$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Тогда в силу свойства аддитивности интеграла ясно, что

$$\Psi(x, y) \equiv \int_L (\ ) = \int_l (\ ) + N_1 C_1 + \dots + N_n C_n.$$

Хотя функция  $\Psi(x, y)$ , вообще говоря, многозначная, однако производные от всех её ветвей есть однозначные функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ .

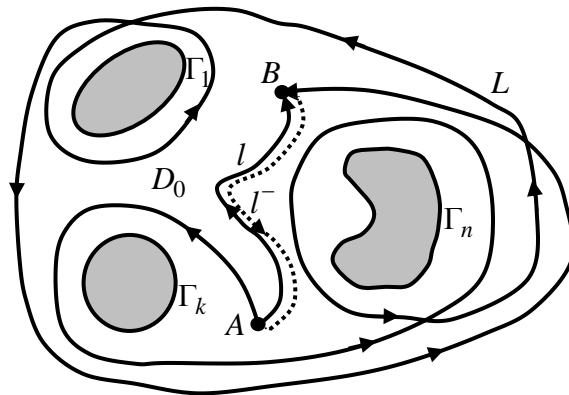


Рис. 3.62

Сказанное полностью относится к интегралам (3.86) и (3.90).

Замечание 3. Иногда, говоря о потенциальном поле, имеют в виду только однозначный потенциал. Но тогда безвихревое поле в неодносвязной области может не быть потенциальным. Однако на то, что оно всё-таки может быть потенциальным, указывает пример ньютоновского или кулоновского поля  $\vec{F} = \mu \frac{\vec{r}}{r^3}$  (см. § 3.12, пример из п.6) на плоскости:  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Здесь существует однозначный потенциал  $U_1 = \frac{-\mu}{r}$  и интеграл (3.87) ( $P \equiv X$ ,  $Q \equiv Y$ ) по замкнутому контуру  $\Gamma$  будет нулём, даже если  $\Gamma$  содержит

внутри точку  $O(0,0)$ , в которой поле имеет *особенность* – это точка разрыва, *особая* точка. А вся плоскость с выколотой точкой  $O(0,0)$  не является односвязной областью.

В пространственном же случае, т.е. когда  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , поле  $\vec{F} = \mu \frac{\vec{r}}{r^3}$  определено и потенциально во всём пространстве с выколотой точкой  $O(0,0,0)$ . Такая область является односвязной, именно, поверхностно односвязной (однако не является пространственно односвязной).

### Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 20-е, стереотипное. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985. – 384 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Часть 2. М., ГИТТЛ, 1959. – 358 с.
3. Будаков Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука. ГРФМЛ, 1965. – 608 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963, 1100 с.
5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М., Наука, 1965. – 616 с.
6. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М., Физматлит, 2002. – 464 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М, Наука, ГРФМЛ, 1970. – 420 с.
8. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. Том 2. Издание 3-е, перераб. – М.-Л., ГИТТЛ, 1957. – 498 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т.1, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 432 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 560 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. Изд-е 23-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 479 с.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. Изд-е 21-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 656 с.
13. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного. Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2013. – 310 с.
14. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.2. Издание 2-е, стереотипное. – М., Наука. ГРФМЛ, 1974. – 472 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. СПб., Лань, 2005. – 464 с.
16. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.-Л., ГИТТЛ, 1949. – 420 с.