НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
"Модели, методы и программные средства"
Механико-математический факультет

Основная образовательная программа
010100 "Математика" общий профиль, квалификация (степень) бакалавр
Основная образовательная программа
010200 "Математика и компьютерные науки", общий профиль,
квалификация (степень) бакалавр

Учебно-методический комплекс
по дисциплине "Дифференциальные уравнения"

Лерман Л.М.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление
материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

УДК 517.9
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ. Лерман Л.М. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. - 89 с.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам II курса механико-математического факультета университета ННГУ, обучающимся по направлениям подготовки 010100 "Математика" , 010200 "Математика и компьютерные науки" , 010500 "Прикладная математика и информатика". В нем изложены основные разделы курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений, связанные с линейными дифференциальными уравнениями и системами таких уравнений. Теоретические вопросы сопровождаются рассмотрением примеров на все основные разделы курса. Пособие может быть также полезно студентам по направлению подготовки 010901 "Механика"и студентам-физикам с углубленным изучением математики.

Оглавление

Глава 1

Введение

Основной предмет изучения в данном пособии – линейные дифференциальные уравнения и системы таких уравнений. Необходимость изучения таких уравнений связана с тремя основными источниками их появления: 1) линейные дифференциальные уравнения являются наиболее простыми среди всех обыкновенных дифференциальных уравнений, их общая теория достаточно хорошо разработана, поэтому естественно, что они составляют существенную часть общего курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений; 2) такие уравнения появляются в качестве первого приближения при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности заданного решения (метод линеаризации так же широко используется в теории дифференциальных уравнений, как и в анализе); 3) обыкновенные линейные дифференциальные уравнения возникают при изучении линейных уравнений математической физики – уравнений с частными производными (разделение переменных для уравнения с частными производными, когда его удается провести, приводит к рассмотрению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений).

При работе с системами обыкновенных линейных дифференциальных уравнений удобно использовать векторные обозначения: это часто позволяет не различать формулировки результатов в скалярном и векторном случаях. Основное, что следует помнить при использовании векторов и матриц, это некоммутативность при умножении матриц.

Приведем для удобства читателя некоторые стандартные обозначения, используемые далее в тексте.

$\mathbb{N}$ – множество натуральных (положительных целых) чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел;

$I = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ – стандартный отрезок на вещественной прямой.

Нулевые элементы в векторных пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ будем обозначать $\underline{0}$, а нулевую квадратную матрицу $\hat{0}$, без указания ее размера.

Для $n \geq 2$:

$\mathbb{R}^n$ – стандартное n-мерное векторное пространство, т.е. множество наборов из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с операциями покоординатного сложения и умножения на вещественные числа. Обычно мы рассматриваем векторы как векторы-столбцы, иногда это явно записывается в виде $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$;

$\mathbb{Z}^n$ – подмножество векторов из $\mathbb{R}^n$ с целыми координатами;

$\mathbb{C}^n$ – стандартное n-мерное комплексное векторное пространство, т.е. множество наборов из n комплексных чисел $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ с операциями покоординатного сложения и умножения на комплексные числа.

$L(n, \mathbb{R})$, $L(n, \mathbb{C})$ – множество квадратных $n \times n$ матриц с вещественными или, соответственно, комплексными коэффициентами.

Вместе с векторами мы будем рассматривать функции, определенными на некотором подмножестве вещественной прямой (обычно это будет интервал, конечный или бесконечный, или отрезок) со значениями в векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Другими словами, это будет упорядоченный набор из n скалярных функций $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, определенных на одном и том же подмножестве вещественной прямой. Этот набор мы будем называть вектор-функцией со значениями в соответствующем векторном пространстве. Вектор-функцию будем называть непрерывной (соответственно – дифференцируемой), если таковы все скалярные функции этого набора. Производной вектор-функции называют (в случае ее существования) вектор-функцию, компонентами которой являются производные скалярных функций набора. Если $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, то, как нетрудно видеть по определению производной и операций в векторном пространстве,

$$X'(t) = \lim_{\delta \to 0} [X(t+\delta) - X(t)]/\delta = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Аналогично определяется и интеграл от вектор-функции:

$$\int_a^b X(t)dt = \left(\int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt \right).$$

Обычные теоремы анализа о свойствах производных и интегралов переносятся на векторный случай дословно.

Мы также будем использовать матрицы, элементы которых являются скалярными функциями, зависящими от одной и той же скалярной переменной, например t, определенными на одном и том же подмножестве вещественной прямой. Снова можно говорить о непрерывных или дифференцируемых матричных функциях, если таковыми являются все скалярные функции – элементы матрицы. Матрицу можно понимать как вектор в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$, если упорядочить ее элементы последовательно по строкам (или, соответственно, – по столбцам). Тогда мы приходим к тем же понятиям непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости матричных функций, что и выше. Также можно использовать операции применения матрицы $A(t)$ к вектору $x(t) : y(t) = A(t)x(t)$. Понятно, что в случае квадратной $(n \times n)$-матрицы $A(t)$ и n-мерного вектора $x(t)$ векторы $y(t) = A(t)x(t)$ (здесь $x(t)$ – вектор-столбец) и $z(t) = x(t)A(t)$ (здесь $x(t)$ – вектор-строка) будут векторами разной природы: первый – вектор-столбец, а второй – вектор-строка.

1.1 Скалярные линейные дифференциальные уравнения

Скалярными линейными дифференциальными уравнениями первого порядка называют соотношения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

у которых функция f в правой части является линейной по зависимой переменной x : $f = a(t)x + b(t)$ с функциями a, b, определенными на некотором общем интервале (α, β), который может быть и бесконечным. Часто мы вместе со стандартным обозначением $x' = dx/dt$ для производной функции $x(t)$ будем использовать обозначение, пришедшее из механики: $\dot{x}$. Как обычно в теории дифференциальных уравнений, функция $x(t)$, определенная на интервале $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ и непрерывно дифференцируемая на этом интервале, называется *решением уравнения* (1.1), если выполнено тождество: $x'(t) \equiv f(t, x(t))$, $\forall t \in (\alpha_1, \beta_1)$. График решения на плоскости переменных (t, x) называется *интегральной кривой*. Ниже мы часто будем писать для краткости и. кривая.

Уравнение (1.1), в котором $b \equiv 0$, называется *однородным*, а если $b \neq 0$ хотя бы в одной точке на интервале (α, β), то такое уравнение называется *неоднородным*. Всюду ниже мы будем предполагать функции a, b непрерывными на интервале (α, β). Имеется большой раздел теории линейных дифференциальных уравнений, где допускается разрывность этих функций, но эти темы – вне рамок нашего изложения.

Кроме понятия решения рассматривается еще понятие решения, удовлетворяющего некоторым условиям. Это нужно для задания единственного решения, поскольку дифференциальное уравнение обычно имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1.1 *1. Задача отыскания первообразной $y(x)$ для заданной функции $f(x)$, определенной на интервале (α, β), может быть записана в виде линейного неоднородного дифференциального уравнения относительно переменной y:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x),\ x \in (\alpha, \beta),$$

Множество решений этого дифференциального уравнения бесконечно: если $y_0(x)$ – некоторая первообразная, то из математического анализа мы знаем, что остальные первообразные даются формулой $y(x) = y_0(x) + C$ с произвольной постоянной C.

2. *Одним из простейших линейных дифференциальных уравнений является однородное уравнение с постоянным коэффициентом a : $x' = ax$. Прямая подстановка показывает, что функция вида $x(t) = c\exp[at]$ при любом c является решением.*

В случае непрерывных функций a, b справедливо следующее утверждение, которое называется *теоремой существования и единственности* для уравнения (1.1). Ниже эта теорема будет сформулирована и для более общих линейных дифференциальных уравнений и систем.

Теорема 1.1 *Предположим, что функции a, b в уравнении* (1.1) *определены на интервале* (α, β) *и непрерывны на нем. Тогда для любого $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и любого числа x_0 существует единственное решение $x(t)$ уравнения* (1.1), *удовлетворяющее равенству $x(t_0) = x_0$. Это решение определено для всех $t \in (\alpha, \beta)$.*

Общая идея при изучении линейных уравнений (не обязательно дифференциальных) состоит в том, что сначала нужно изучить однородное уравнение, а зная его решения – искать решения неоднородного уравнения. Поэтому рассмотрим сначала случай однородного линейного дифференциального уравнения: $\dot{x} = a(t)x$. Это уравнение имеет очевидное решение $x \equiv 0$, поэтому, в силу единственности решения, никакое другое решение $x(t)$ не может обращаться в нуль при $t \in (\alpha, \beta)$. Значит можно отдельно рассматривать решения, чьи и. кривые лежат в полуплоскости $x > 0$ и, соответственно, решения с и. кривыми в полуплоскости $x < 0$. Кроме того, однородное дифференциальное уравнение обладает свойством симметрии: если $x(t)$ – решение уравнения, то функция $x_1(t) = -x(t)$ также является его решением, поэтому достаточно найти решения, графики которых лежат в верхней полуплоскости: $x(t) > 0$.

Перепишем дифференциальное уравнение в виде равенства дифференциалов, рассуждая следующим образом: если $x(t)$ есть решение уравнения, то имеет место тождество $x'(t) \equiv a(t)x(t)$, поэтому дифференциал функции $x(t)$ равен: $dx(t) = x'(t)dt = a(t)x(t)dt$, откуда, деля обе части на положительную функцию $x(t)$, получаем

$$\frac{dx(t)}{x(t)} \equiv a(t)dt.$$

Используя инвариантность формы первого дифференциала (независимость от того, является ли дифференцируемая функция функцией независимой переменной или является сложной функцией от другой независимой переменной), можем переписать это равенство в виде

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt.$$

Интегрируя левые и правые части получаем равенство

$$\ln|x| = \int a(t)dt + C,$$

с произвольной постоянной C. Поскольку мы ищем положительные решения, то знак модуля можно опустить и после потенцирования получаем:

$$x(t) = e^C e^{\int a(t)dt}.$$

Переобозначим постоянную: $L = e^C$. Мы получили, что все положительные решения однородного уравнения имеют вид

$$x(t) = Le^{\int a(t)dt},\ L > 0.$$

Чтобы получить отрицательные решения достаточно взять в этой формуле постоянную L отрицательной, т.к. в силу указанной выше симметрии полученная функция также будет решением. При $L = 0$ получаем нулевое решение. Теперь докажем, что из этой формулы мы можем получить решение следующей задачи: найти решение $x(t)$ уравнения с заданными начальными условиями (t_0, x_0), т.е. $x(t_0) = x_0$. Эта задача для дифференциального уравнения называется *задачей Коши*. Для ее решения нужно показать, что существует постоянная L, которая дает решение уравнения с этими начальными условиями. Для этого в полученной формуле запишем первообразную в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом:

$$x(t) = L\exp[\int_{t_0}^{t} a(s)ds].$$

Чтобы удовлетворить начальному условию $x(t_0) = x_0$, положим $L = x_0$, т.е. искомое решение задачи Коши имеет вид

$$x(t) = x_0\exp[\int_{t_0}^{t} a(s)ds]. \tag{1.2}$$

Пример 1.2 *Рассмотрим скалярное линейное однородное уравнение с периодическим коэффициентом:* $a(t+T) = a(t)$. *Запишем периодическую функцию в виде* $a(t) = \mu+\tilde{a}(t)$, *где* $\mu = T^{-1}\int\limits_0^T a(s)ds$ *– среднее значение периодической функции на периоде, а функция* $\tilde{a}(t)$ *– колебательная часть функции* a. *Покажите, что функция* $\int_0^t \tilde{a}(s)ds$ *является* T*-периодической функцией.*

Из полученной формулы (1.2) *следует, что решение с начальным условием* $x(t_0) = x_0$ *можно записать в виде:*

$$x(t) = x_0\exp[\int_{t_0}^{t} a(s)ds] = \mathrm{e}^{\mu t}\exp[\int_{t_0}^{t} \tilde{a}(s)ds]x_0 = e^{t\mu}s(t)x_0$$

с положительной T*-периодической функцией* s. *Отсюда, в частности, следует, что при* $\mu < 0$, *все решения уравнения стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *а если* $\mu > 0$, *то все решения уравнения, кроме нулевого, неограниченно растут при* $t \to \infty$. *При* $\mu = 0$ *все решения уравнения являются* T*-периодическими функциями. Кроме того, после замены переменной* $x = s(t)y$ *получается линейное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом* μ *(проверьте).*

Теперь перейдем к решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$. Сделаем замену переменной в дифференциальном уравнении: $x = u(t)y$, где $u(t)$ есть экспоненциальная функция в (1.2), $u'(t) = a(t)u(t)$, $u(t_0) = 1$. После замены уравнение преобразуется следующим образом:

$$x' = u'y + uy', \text{ или } auy + b = auy + uy', \text{ т.е. } y' = u^{-1}b(t),$$

откуда $y(t) = C + \int_{t_0}^t u^{-1}(s)b(s)ds$ и подставляя в формулу замены, получаем решение задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^t a(s)ds} b(\tau)d\tau. \tag{1.3}$$

Отметим для дальнейшего использования, что фактически было сделано следующее: мы искали решение неоднородного уравнения в виде $x = u(t)C$ где $u(t)$ есть решение однородного уравнения, но считали, что C (мы ее обозначали y) не постоянна, а является функцией от t. Затем это выражение подставили в обе части неоднородного уравнения и нашли уравнение для функции $C(t)$, которое легко решается. Поэтому этот метод называется *метод вариации произвольных постоянных.* Он обобщается и на случай линейных уравнений n-го порядка и систем линейных дифференциальных уравнений.

Пример 1.3 *Иногда дифференциальное уравнение относительно заданной зависимой переменной не является линейным, но становится таковым, если поменять ролями зависимые и независимые переменные. Рассмотрим в качестве примера уравнение* $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$. *Меняя ролями x и y, запишем его в виде*

$$\frac{dx}{dy} = \sin^2 y + x \operatorname{ctg} y.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно x, которое решается указанным выше способом. Областью определения исходного уравнения является плоскость $\mathbb{R}^2$ переменных (x, y), из которой выброшены прямые $y_k = k\pi$. Отметим одно полезное свойство этого уравнения: оно не меняется (инвариантно) относительно следующей группы сдвигов плоскости: $(x, y) \to (x, y + k\pi)$. Поэтому достаточно решить уравнение в полосе $0 < y < \pi$, а остальные решения получаются сдвигами из группы. В полосе имеем $\sin y > 0$ и решение однородного уравнения есть $x = \sin y$, а решение неоднородного уравнения получается в виде $x = c \sin y - \sin y \cos y$. Напишите решение задачи Коши с начальными данными (y_0, x_0).

1.2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка, системы линейных дифференциальных уравнений

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется скалярное уравнение следующего вида:

$$L[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{1.4}$$

где функции a_i, f, $i = 1, \dots, n$, предполагаются непрерывными, заданными на одном и том же интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ и функция a_0 не имеет нулей. В случае, когда $f \equiv 0$ на (a, b), уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным. Решением* уравнения (1.4) называется n раз непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, определенная на интервале (a, b), которая при подстановке в левую часть уравнения дает тождество, верное при всех значениях $x \in (a, b)$.

Системой n линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка называется следующая система:

$$\begin{array}{lll} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + & \cdots + a_{1n}(t)x_n & +f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + & \cdots + a_{2n}(t)x_n & +f_2(t), \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + & \cdots + a_{nn}(t)x_n & +f_n(t). \end{array} \tag{1.5}$$

Здесь предполагается, что все коэффициенты системы, т.е. функции a_{ij}, f_i, определены и непрерывны на одном и том же интервале $t \in (a, b)$, который может быть и бесконечным. *Решением* этой системы называется набор из n непрерывно дифференцируемых функций $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на том же интервале (a, b), которые при подстановке в каждое из n уравнений (1.5) обращает его в тождество, верное при всех значениях $t \in (a, b)$.

Удобно использовать векторные обозначения: набор функций $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ записывать в виде вектора-столбца $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, аналогично ввести вектор-функцию $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^\top$, а для записи коэффициентов при неизвестных использовать матрицу, элементами которой являются функции $a_{ij}(t) : A(t) = (a_{ij}(t))$. Тогда система запишется в виде

$$\dot{X} = A(t)X + F(t),$$

что по форме выглядит как скалярное уравнение. *Решением* такой системы называется вектор-функция $X(t)$, определенная на некотором интервале $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$, которая при подстановке в правую и левую части уравнения дает векторное тождество при всех значениях $t \in (a_1, b_1)$.

Отметим связь между решениями скалярного дифференциального уравнения n-го порядка (1.4) и решениями некоторой системы n дифференциальных уравнений первого порядка. Имея скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка, введем новые переменные:

$$u_1 = y,\ u_2 = y', \ldots, u_n = y^{(n-1)}.$$

Согласно этой замене переменных, получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{array}{l} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3, \\ \cdots, \\ u_{n-1}' = u_n, \\ u_n' = [-a_n(x)u_1 - a_{n-1}(x)u_2 - \cdots - a_1(x)u_n + f(x)]/a_0(x) \end{array} . \tag{1.6}$$

Последнее уравнение системы получится, если мы продифференцируем обе части последнего равенства в замене переменных и вместо $y^{(n)}$ подставим его выражение через новые переменные из исходного уравнения.

1.3 Глобальность существования решений для линейных уравнений и систем

В этом параграфе мы сформулируем теорему существования и единственности для линейных уравнений и систем, гарантирующую существование решения для значений независимой переменной t на всем интервале существования коэффициентов, входящих в правые части уравнений. Это свойство мы будем называть *глобальностью существования решений* линейной системы. Далее эта теорема будет использоваться при построении теории линейных уравнений и систем.

Теорема 1.2 *Для линейной дифференциальной системы*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ t \in (a, b)$$

с непрерывными функциями $A : (a, b) \to L(n, \mathbb{R}),\ f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *для любого начального условия* $(t_0, x_0),\ t_0 \in (a, b),\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, *существует единственное решение* $x(t; t_0, x_0)$ *системы, определенное при всех* $t \in (a, b)$ *и удовлетворяющее равенству* $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

Доказательство этой теоремы дано в Приложении 3.

Глава 2

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно неизвестной функции $x(t)$

$$L[x] = a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t). \tag{2.1}$$

В этом уравнении дифференциальный оператор L слева, действующий на n раз непрерывно дифференцируемую функцию x, является линейным, т.е. при любых постоянных α, β и любых n раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t), y(t)$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, выполнено равенство $L[\alpha x + \beta y] = \alpha L[x] + \beta L[y]$. Как уже говорилось в параграфе 1.2, мы предполагаем, что функции a_i, f являются непрерывными функциями от t на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, а функция a_0 не обращается в нуль на этом интервале (последнее условие означает, что уравнение относится к типу уравнений, разрешенных относительно старшей производной). Поэтому обе части уравнения можно поделить на a_0, после чего будем далее предполагать, что $a_0 \equiv 1$. Теория линейных дифференциальных уравнений в случае, когда a_0 имеет нули, гораздо более сложна при изучении свойств решений в окрестности нуля функции a_0, и это является предметом другого курса.

Как обычно в математике при решении линейных задач (вспомни теорию линейных уравнений в алгебре), сначала нужно решить однородную задачу, а затем найти какое-нибудь решение неоднородной задачи. Поэтому сначала изучим линейное однородное уравнение. Основной результат теории для такого уравнения состоит в том, что **множество решений однородного уравнения образует линейное пространство, в нем имеется конечное число решений (фундаментальная система решений, базис), через которые все остальные решения получаются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами**.

Прежде всего сформулируем для данного случая теорему существования и единственности. Она получается непосредственно из вышеприведенной теоремы для систем, если использовать указанную там замену переменных. Поскольку после замены переменными являются $u_1 = x,\ u_2 = x', \ldots, u_n = x^{(n-1)}$, то начальными данными задачи Коши являются числа $(t_0; u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$, являющиеся значениями искомого решения уравнения $x(t)$ и его производных до порядка $n-1$ в начальной точке t_0.

Теорема 2.1 *Для любого набора из $n+1$ чисел $(t_0; u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$, $t_0 \in (a,b)$, $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \in \mathbb{R}^n$, существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши для линейного однородного уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям: $x(t_0) = u_1^0$, $x'(t_0) = u_2^0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = u_n^0$. Это решение существует при всех $t \in (a,b)$.*

Для развития теории необходимо ввести понятие линейной зависимости и независимости для конечных наборов функций, заданных на одном и том же промежутке. В дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые функции являются по крайней мере непрерывными на рассматриваемых промежутках.

Определение 2.1 *Функции $x_1, \dots, x_k$, определенные на интервале $t \in (a,b)$ (отрезке, полуинтервале), называются линейно зависимыми над полем $\mathbb{R}$ (соответственно, $\mathbb{C}$), если существует ненулевой набор постоянных $(c_1, \dots, c_k)$ из этого поля, для которого выполнено тождество $\sum_{i=1}^k c_i x_i(t) \equiv 0$.*

Если такого набора постоянных не существует, то функции $x_1, \dots, x_k$ называются *линейно независимыми*. Это эквивалентно такому условию: если при некотором наборе постоянных $(c_1, \dots, c_k)$ выполнено тождество $\sum_1^k c_i x_i(t) \equiv 0$, то все постоянные равны нулю. Отметим, что это определение зависит от выбранного интервала (a,b). Фактически мы рассматриваем множество $C(a,b)$ непрерывных функций на промежутке (a,b) как линейное пространство (см. Дополнение 1), т.е. определяем в нем сложение функций (поточечно) и умножение функции на число из поля (также поточечно). Как в линейной алгебре, в полученном линейном функциональном пространстве тогда можно рассматривать линейные комбинации элементов пространства, их линейную зависимость и независимость.

Задача 2.1 *Доказать линейную независимость функций: а) $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $t \in [-1,1]$; б) $x_1 = \sin t$, $x_2 = \cos t$, $t \in \mathbb{R}$; в) $x_1 = e^t$, $x_2 = te^t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Задача 2.2 *Определить линейную зависимость/независимость функций: $x_1 = 1$, $x_2 = \sin^2 t$, $x_3 = \cos 2t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Первое основное свойство решений линейного однородного дифференциального уравнения было указано выше и состоит в том, что множество его решений образует линейное пространство, т.е. сумма двух решений является решением и произведение решения на число из поля ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) также является решением. Это следует из указанной выше линейности оператора L.

Возникает естественный вопрос: можно ли каким-то способом определить, что функции из заданного набора являются линейно зависимыми?

Лемма 2.1 (*Необходимое условие линейной зависимости функций*) *Если набор функций $x_1, \dots, x_k$, определенных на интервале $t \in (a,b)$, является линейно зависимым, и на нем функции $k-1$ раз непрерывно дифференцируемы, то определитель*

$W[x_1, \dots, x_k]:$

$$W[x_1, \dots, x_k] = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_1' & \dots & x_k' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(k-1)} & \dots & x_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

равен нулю тождественно при $t \in (a, b)$.

Доказательство. Если функции $x_1, \dots, x_k$ линейно зависимы, то существует ненулевой набор постоянных $(c_1, \dots, c_k)$ (т.е. не все постоянные этого набора равны нулю), для которого выполнено тождество $\sum_1^k c_i x_i(t) \equiv 0$. Поскольку все функции дифференцируемы $k-1$ раз, то продифференцировав это тождество $k-1$ раз, получим при фиксированном $t \in (a, b)$ систему k линейных однородных алгебраических уравнений относительно переменных $(c_1, \dots, c_k)$, имеющую ненулевое решение. Но тогда, по известной теореме теории линейных алгебраических уравнений, определитель этой системы при всех $t \in (a, b)$ равен нулю. ■

Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 2.1 *Функции $x_1 = t^2$ и $x_2 = t|t|$ на интервале $(-1, 1)$ обладают тем свойством, что для них $W[x_1, x_2] \equiv 0$ (проверьте). Докажите, что эти функции линейно независимы.*

Полученный определитель $W[x_1, \dots, x_k]$ называется *определителем Вронского* системы функций $x_1, \dots, x_k$. Оказывается, что в отличие от случая произвольного набора функций, для набора из n решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка равенство или неравенство нулю определителя Вронского является критерием их линейной зависимости или независимости. Именно, справедливо следующее

Предложение 2.1 *Для набора n решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка справедлива следующая альтернатива: либо определитель Вронского $W[x_1, \dots, x_n](t)$ не равен нулю при всех $t \in (a, b)$ и тогда эти решения линейно независимы, либо $W[x_1, \dots, x_n](t)$ равен нулю в некоторой точке $t_0 \in (a, b)$ и тогда он равен нулю тождественно при всех $t \in (a, b)$ и эти решения линейно зависимы.*

Доказательство. Тот факт, что при линейной зависимости решений их определитель Вронского тождественно равен нулю, доказан выше. Докажем теперь, что если определитель Вронского набора n решений равен нулю в некоторой точке $t_0 \in (a, b)$, то эти решения линейно зависимы. Действительно, в этом случае векторы-столбцы этого определителя, вычисленные в точке t_0, линейно зависимы. Поэтому существует ненулевой набор чисел $(c_1, \dots, c_n)$ из поля, для которого линейная комбинация столбцов есть нулевой вектор. Рассмотрим теперь линейную комбинацию решений с этими коэффициентами: $x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$. Эта функция является решением, и она сама и ее $n-1$ производных обращаются в нуль в точке $t_0 \in (a, b)$. В силу единственности решение однородного уравнения с такими начальными условиями при $t = t_0$ может быть только нулевым: $x(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t) \equiv 0$. Отсюда следует, что набор функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейно зависим при $t_0 \in (a, b)$. Поэтому для набора из n линейно независимых решений определитель Вронского не равен нулю во всех точках $t \in (a, b)$. ■

Ввиду важности определителя Вронского для изучения линейной зависимости/зависимости решений, следующая *формула Лиувилля-Остроградского*, позволяющая вычислять этот определитель по коэффициентам уравнения, является очень полезной.

Предложение 2.2 *Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – набор из n решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Справедлива следующая формула Лиувилля-Остроградского:*

$$W[x_1, \dots, x_n](t) = W[x_1, \dots, x_n](t_0) \exp[-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds]. \tag{2.2}$$

Доказательство. Продифференцируем определитель Вронского. В силу формулы вычисления определителя [3], производная определителя равна сумме n определителей W_k, каждый из которых получен из основного заменой его k строки на строку из производных функций этой строки. Отсюда следует, что первые $n-1$ определителей будут равны нулю, т.к. у них есть одинаковые строки. Для определителя W_n его n-я строка состоит из производных порядка n функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, которые, в силу того, что они являются решениями уравнения, мы заменим на их выражения через производные меньшего порядка: $x_k^{(n)} = -a_1x_k^{(n-1)} - a_2x_k^{(n-2)} - \dots - a_nx_k$. Тогда W_n равен линейной комбинации n определителей с коэффициентами $-a_1$, $-a_2$ и т.д. до $-a_n$ (напомним, что определитель является полилинейной функцией от своих векторов-строк [2], т.е. он линейно зависит от последней вектор-строки), причем все из этих определителей, кроме первого с коэффициентом $-a_1$, равны нулю (у них последняя строка, состоящая из производных тех же функций порядков $n-2$, $n-3$, $\dots, 0$, совпадает с одной из средних строк). Поэтому $W_n = -a_1W$ и получаем скалярное дифференциальное уравнение $W' = -a_1W$, решением которого является функция в правой части формулы Лиувилля-Остроградского (2.2). ■

Эта формула еще раз показывает, что если в начальный момент времени t_0 определитель Вронского отличен от нуля, то он отличен от нуля при всех $t \in (a, b)$.

Замечание 2.1 *Заметим, что в случае, когда коэффициенты уравнения зависят от времени, невозможно в общем случае выразить решения дифференциального уравнения через его коэффициенты, однако определитель Вронского фундаментальной системы решений может быть вычислен через коэффициенты уравнения!*

2.1 Пространство решений однородного уравнения

Теперь перейдем к свойствам решений однородного линейного дифференциального уравнения. Нам нужно определить размерность линейного пространства решений и указать способ нахождения его базиса.

Выше было показано, что множество решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка является линейным пространством, поскольку сумма решений является решением и при умножении решения на число из основного поля ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) также получаем решение. Покажем теперь, что

Теорема 2.2 *В пространстве решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка существуют n линейно независимых решений. Все остальные решения являются линейными комбинациями этих n решений.*

Доказательство. Для построения n линейно независимых решений применим теорему существования для линейного дифференциального уравнения (2.1). Зададим в начальный момент $t_0 \in (a, b)$ набор из n линейно независимых n-мерных векторов $(Y_1^0, \dots Y_n^0)$ из $\mathbb{R}^n$ или, соответственно, $\mathbb{C}^n$, и получим n решений, принимая эти векторы за начальные условия задачи Коши: для k-го решения возьмем $x_k(t_0) = y_{1k}^0, \dots, x_k^{(n-1)}(t_0) = y_{nk}^0$, здесь $Y_k^0 = (y_{1k}^0, \dots, y_{nk}^0)^\top$. Поскольку в начальный момент времени t_0 определитель Вронского полученного набора решений совпадает с определителем, составленным из независимых векторов, то по формуле Лиувилля-Остроградского этот определитель отличен от нуля, т.е. решения линейно независимы. Тем самым, мы доказали первое утверждение теоремы.

Теперь покажем, что любое другое решение $x(t)$ дифференциального уравнения является линейной комбинацией решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Для этого составим n-мерный вектор $(x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))^\top$. Он является линейной комбинацией векторов $(Y_1^0, \dots, Y_n^0)$, образующих базис в $\mathbb{R}^n$ или, соответственно, в $\mathbb{C}^n$. Пусть $(c_1, \dots, c_n)$ – коэффициенты этой линейной комбинации, по ним составим решение уравнения $y(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$. Это решение обладает тем свойством, что в точке t_0 оно и его производные до порядка $n - 1$ совпадают с соответствующими значениями решения $x(t)$. В силу единственности решения с такими начальными данными эти два решения совпадают, т.е. $x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$.$\blacksquare$

Итак, мы показали, что решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка образуют линейное n-мерное пространство (вещественное, если все коэффициенты вещественные, или комплексное, если они комплексные). Любые n линейно независимых решений образуют базис этого пространства. В теории дифференциальных уравнений такой базис называется *фундаментальной системой решений* линейного дифференциального уравнения. Поэтому любое решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка является линейной комбинацией с коэффициентами из поля фундаментальной системы решений. Иногда такое представление решений называют *общим решением линейного однородного дифференциального уравнения* n-го порядка.

Вопрос. Любые ли n линейно независимых n раз непрерывно дифференцируемых функций от переменной t, определенных на некотором общем интервале изменения $t \in (a, b)$, являются фундаментальной системой решений некоторого однородного дифференциального уравнения n-го порядка? Понятно, что необходимым условием для этого должно быть отличие от нуля при $t \in (a, b)$ их определителя Вронского. Оказывается, этого и достаточно. Именно, справедливо

Предложение 2.3 *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – n линейно независимых n раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на интервале (a, b), для которых определитель Вронского отличен от нуля на этом интервале. Тогда существует линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка, для которого эти функции образуют фундаментальную систему решений.*

Доказательство. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, задаваемое равенством

$$\begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_n & x \\ u_1' & \ldots & u_n' & x' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} & x^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} & x^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по последнему столбцу, получаем уравнение относительно переменной x: $a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0$, $a_0(t) = W[u_1, u_2, \ldots, u_n] \neq 0$, решениями которого являются функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$. ■

2.2 Понижение порядка линейного однородного уравнения

Предположим, что линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка (2.1) имеет частное решение $x_1(t) \neq 0$. Сделаем замену переменной $x = x_1 y$. Формула Лейбница дает

$$x^{(k)} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s x_1^{(s)} y^{(k-s)}, \ k = 1, \ldots, n.$$

Подставим эти выражения в (2.1). Тогда получим уравнение

$$b_0(t)y^{(n)} + b_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(t)y^{(\prime)} + b_n(t)y = 0, \ b_0 = a_0 x_1 \neq 0.$$

Это уравнение должно иметь решение $y \equiv 1$, поэтому $b_n(t) \equiv 0$. Теперь порядок уравнения понижается заменой $y' = z$.

2.3 Решения неоднородного уравнения

Рассмотрим теперь линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка $L[x] = f$ и пусть $x_1, \ldots, x_n$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения. Покажем сначала, что для получения всех решений неоднородного уравнения достаточно найти какое-нибудь (частное) решение неоднородного уравнения.

Предложение 2.4 *Любое решение неоднородного линейного дифференциального уравнения есть сумма его частного решения и некоторого решения однородного уравнения.*

Доказательство. Пусть известно частное решение неоднородного уравнения $x_0(t)$ и $x(t)$ – любое другое его решение. Тогда их разность $y(t) = x(t) - x_0(t)$ является решением однородного уравнения, что проверяется подстановкой, используя линейность оператора L. Поэтому $y(t)$ есть линейная комбинация фундаментальной системы решений $y(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$. Тем самым для решения неоднородного уравнения получаем $x(t) = x_0(t) + c_1x_(t) + \cdots + c_nx_n(t)$. Чтобы показать, что любое решение неоднородного уравнения имеет этот вид, нужно показать, что для решения неоднородного уравнения с любыми начальными данными $(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ можно однозначно найти постоянные $(c_1, \ldots, c_n)$ так, чтобы это решение имело вид $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$. Это следует из того, что при фиксированном t_0 и векторе $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ решение $x(t)$ с этими начальными данными однозначно определено и вектор $(x(t_0) - x_0(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0) - x_0^{(n-1)}(t_0))$ имеет единственное представление через векторы $Y_k^0 = (x_k(t_0) \ldots, x_k^{(n-1)}(t_0))$. Однозначность постоянных $(c_1, \ldots, c_n)$ имеет место тогда, когда выбраны частное решение и фундаментальная система решений однородного уравнения. ■

Итак, для решения неоднородного уравнения нужно уметь находить частное решение. Для его поиска поступим следующим образом. Вспоминая, что для получения единственного решения нужно задать n постоянных, например начальные условия при некотором $t_0 \in (a, b)$, сделаем замену переменных: перейдем от набора функций $(x, x', \ldots, x^{(n-1)})$, соответствующих искомому решению $x(t)$, к набору функций $(c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))$ по формулам

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \ \ldots, \ x^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n-1)}. \tag{2.3}$$

Определитель этой линейной замены переменных – определитель Вронского фундаментальной системы решений, т.е. отличен от нуля при всех $t \in (a, b)$. Найдем уравнения для поиска c_i. В формулах для замены умножим обе части первого соотношения на a_n, второго – на a_{n-1}, и т.д. до последнего, которое умножим на a_1, а затем все равенства сложим почленно. Мы хотим, чтобы $x(t)$ было решением неоднородного уравнения, а $x_i(t)$ являются решениями однородного, отсюда получаем:

$$f - x^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n)}, \text{ или } f = x^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n)}. \tag{2.4}$$

Теперь продифференцируем каждое из первых $n - 1$ соотношений для замены. Тогда с учетом каждой последующей строки из первых $n - 1$ соотношений получим первые $n - 1$ уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' x_i = 0, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i^{(n-2)} = 0.$$

Последнее уравнение получится дифференцированием последнего соотношения

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i^{(n-1)},$$

из которого, используя (2.4), получим последнее уравнение. Окончательно имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $(c'_1, c'_2, \ldots, c'_n)$:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} c'_i x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i x'_i = 0, \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i x_i^{(n-1)} = f. \end{array}$$

Определитель системы отличен от нуля, она имеет единственное решение:

$$c_1(t) = c_1^0 + \int_{t_0}^{t} \frac{W_1}{W} dt, \ \ldots, c_n(t) = c_n^0 + \int_{t_0}^{t} \frac{W_n}{W} dt,$$

где определители $W_i(t)$ получаются из $W(t)$ заменой $i-$го столбца на столбец в правой части системы. Подставляя полученные выражения для $c_i(t)$ в формулы замены (2.3), получим общее решение неоднородного уравнения. Искомое частное решение получается, если зафиксировать постоянные c_i^0, например, положить их равными нулю.

Формулы замены (2.3) можно неформально рассматривать как нахождение частного решения в виде, аналогичном как для решений однородного уравнения: линейная комбинация фундаментальной системы решений однородного уравнения с некоторыми коэффициентами. Однако эти коэффициенты $(c_1, \ldots, c_n)$ не могут быть постоянными (иначе мы получим решение однородного уравнения!). Далее при дифференцировании соотношений (2.3) для подстановки в уравнение мы стараемся сохранять формулы как при постоянных $(c_1, \ldots, c_n)$ до того порядка, покуда это возможно, т.е. $n-1$, для нахождения же n-ой производной мы уже используем неоднородное уравнение. Эта идея удержания величин постоянными, пока возможно, и была ведущей при построении этого метода нахождения частного решения. Поэтому метод носит название *метод вариации произвольных постоянных.*

Глава 3

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Для линейного однородного дифференциального уравнения, вообще говоря, невозможно найти фундаментальную систему решений в явном виде. Одним из немногих случаев, когда такая фундаментальная система решений может быть получена в явном виде – это случай постоянных коэффициентов уравнения. Мы увидим ниже, в каком смысле эта система может быть явно выписана.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \tag{3.1}$$

с постоянными коэффициентами (вещественными или комплексными). Вспомним, что k-я производная экспоненты $\exp[\lambda t]$ равна $\lambda^k \exp[\lambda t]$. Следуя Л.Эйлеру, будем искать решение уравнения в виде экспоненты с неизвестным пока показателем λ. Подстановка в левую часть уравнения (3.1) дает уравнение:

$$\mathcal{X}_n(\lambda) e^{\lambda t} = 0, \text{ где } \mathcal{X}_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

для которого экспонента является решением (дает тождественный нуль по t в левой части) только, если число λ является корнем полиномиального уравнения $\mathcal{X}_n(\lambda) = 0$, которое называется *характеристическим уравнением* линейного уравнения (3.1). Сам полином $\mathcal{X}_n(\lambda)$ называется *характеристическим полиномом* оператора L. Основная теорема алгебры утверждает [2], что *полином степени n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность*. Полиномы n-ой степени, имеющие n простых корней, образуют открытое плотное множество в пространстве всех полиномов n-ой степени с комплексными коэффициентами. Поэтому рассмотрим сначала этот общий случай.

3.1 Случай простых корней характеристического уравнения

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения $\mathcal{X}_n(\lambda) = 0$, предполагая их попарно различными. Тогда имеем n решений уравнения в виде экспонент с различными показателями

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}.$$

Этот набор из n решений образует фундаментальную систему решений, если функции в наборе линейно независимы. Для проверки линейной независимости нужно доказать неравенство нулю их определителя Вронского. Подставляя решения в определитель, получаем:

$$W[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}] = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdots \mathrm{e}^{\lambda_n t} B_n[\lambda_1, \dots, \lambda_n],$$

где $B_n[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ есть определитель Вандермонда чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$B_n[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Лемма 3.1 *Определитель Вандермонда равен*

$$B_n[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

и отличен от нуля, если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различны.

Доказательство. Доказательство леммы проводится по индукции, начиная с $n = 2$, тогда $B_2[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_2 - \lambda_1$. При $n = k$, умножая предпоследнюю строку определителя на λ_1 и вычитая ее из последней, затем умножая третью строку снизу на λ_1 и вычитая ее из предпоследней, и т.д., мы получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & \lambda_k - \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{k-2} - \lambda_1 \lambda_2^{k-3} & \dots & \lambda_k^{k-2} - \lambda_1 \lambda_k^{k-3} \\ 0 & \lambda_2^{k-1} - \lambda_1 \lambda_2^{k-2} & \dots & \lambda_k^{k-1} - \lambda_1 \lambda_k^{k-2} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_2^{k-2} & \dots & \lambda_k^{k-2} \end{vmatrix}.$$

В силу предположения индукции. получаем формулу. ■

Итак, справедливо утверждение

Предложение 3.1 *Если корни характеристического уравнения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ линейного однородного дифференциального уравнения* (6.1) *попарно различны, то набор функций $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}$ образует фундаментальную систему решений.*

3.2 Случай кратных корней характеристического уравнения

Теперь рассмотрим случай, когда характеристический полином линейного дифференциального оператора L имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ кратностей соответственно $k_1, k_2, \dots, k_r$, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ (при $k_i = 1$ соответствующий корень λ_i является простым). В этом случае также имеются решения в виде экспонент $\exp[\lambda t]$ с показателями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, однако число этих решений меньше n, поэтому мы должны найти дополнительные решения, которые вместе с экспонентами составляют фундаментальную систему решений. Напомним, что число λ_0 является *корнем кратности* m полинома P, если $P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, но $P^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$.

Для поиска соответствующих дополнительных решений вспомним полученную выше формулу

$$L[\exp[\lambda t]] \equiv \mathcal{X}(\lambda) \exp[\lambda t]. \tag{3.2}$$

Это соотношение является тождеством относительно входящих в него переменных $t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому полученное тождество можно дифференцировать по λ любое число раз. Вспомним, что для полиномов производная определяется чисто алгебраически: если $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, то $P'(z) = n z^{n-1} + (n-1) z^{n-2} + \dots + a_{n-1}$. Для дифференцирования экспоненты используем ее разложение в равномерно сходящийся степенной ряд, известный из анализа:

$$\exp[z] = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \cdots .$$

Дифференцирование по комплексной переменной z определяется так же как и по вещественной переменной:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

здесь переход к пределу при $h \to 0$ означает, что вычисляется предел отношения при $|h| \to 0$. В частности, для экспоненциального ряда получаем

$$\frac{d}{d\lambda} \exp[\lambda t] = t \exp[\lambda t],$$

а поэтому по индукции

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \exp[\lambda t] = t^n \exp[\lambda t].$$

Кроме этого, нужно учесть, что производные по t и по λ можно менять местами. Поэтому дифференцируя тождество (3.2) по переменной λ k раз, получим слева

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} L[\exp[\lambda t]] = L[t^k \exp[\lambda t]],$$

а справа, по формуле Лейбница

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} (\mathcal{X}(\lambda) \exp[\lambda t]) = (\sum_{s=0}^{k} C_k^s \mathcal{X}^{(s)}(\lambda) t^{k-s}) \exp[\lambda t].$$

Таким образом, получаем тождество:

$$L[t^k \exp[\lambda t]] \equiv (\sum_{s=0}^{k} C_k^s \mathcal{X}^{(s)}(\lambda) t^{k-s}) \exp[\lambda t]. \tag{3.3}$$

Предположим теперь, что λ_0 является корнем кратности $m > 1$ характеристического уравнения. Тогда при $\lambda = \lambda_0$ выражение справа в (3.3) при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ обращается в нуль, поскольку характеристический полином и его производные до порядка $m-1$ включительно обращаются в нуль. Отсюда получаем, что $L[t^k \exp[\lambda_0 t]] \equiv 0$, т.е. m функций $t^k \exp[\lambda_0 t]$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ являются решениями уравнения. В силу равенства $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ получаем n решений уравнения n-го порядка, перебирая решения с различными экспонентами. Осталось доказать, что полученные решения линейно независимы.

Предположим противное, т.е. что они линейно зависимы. Тогда существует такой ненулевой набор постоянных $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что линейная комбинация найденных решений с этими коэффициентами равна тождественно (по t) нулю. Эту комбинацию можно представить в виде

$$P_1(t) \exp[\lambda_1 t] + P_2(t) \exp[\lambda_2 t] + \cdots + P_r(t) \exp[\lambda_r t] \equiv 0. \tag{3.4}$$

Среди полиномов P_j есть хотя бы один, отличный от нуля (иначе все $c_j = 0$). Пусть это будет, для определенности, полином $P_1 = a_0 t^q + \cdots$, $a_0 \neq 0$. Умножим тождество (3.4) на $\exp[-\lambda_r t]$. Тогда слева в полученном равенстве последний член равен $P_r(t)$. Дифференцируя тождество нужное число l раз по t, мы исключим этот полином. Полученное равенство тогда имеет вид

$$P_1^{[1]}(t) \exp[(\lambda_1 - \lambda_r)t] + P_2^{[2]}(t) \exp[(\lambda_2 - \lambda_r)t] + \cdots + P_{r-1}^{[r-1]}(t) \exp[(\lambda_{r-1} - \lambda_r)t] \equiv 0,$$

где полином $P_1^{[1]}(t)$ равен $a_0(\lambda_1 - \lambda_r)^l t^q + \cdots$, т.е. степень полинома сохраняется. Умножая полученное выражение на $\exp[\lambda_r t]$, мы получаем то же самое (по форме) тождество, но с числом экспонент меньшим на единицу. Продолжая по индукции, мы приходим к тождеству

$$P_1^{[r-1]}(t) \exp[\lambda_1 t] \equiv 0,$$

что невозможно, т.к. ни первый, ни второй сомножитель не равны нулю тождественно. Это противоречие доказывает линейную независимость найденных решений и поэтому – следующую теорему:

Теорема 3.1 *Если характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_r$ соответственно, $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, то фундаментальная система решений этого уравнения состоит из n функций:*

$$t^k \exp[\lambda_1 t],\ 0 \le k \le k_1 - 1,\ \ldots,\ t^k \exp[\lambda_r t],\ 0 \le k \le k_r - 1.$$

3.3 Вещественные решения вещественного уравнения

До сих пор, мы не обращали внимания. являются ли коэффициенты уравнения вещественными или комплексными. Результаты изучения не зависели от этого. Более того, комплексная теория проще, т.к. комплексное характеристическое уравнение всегда имеет комплексный корень. Однако обычно приходится работать с вещественными уравнениями и важно уметь строить фундаментальные системы решений, состоящие из вещественных функций. Перейдем к этому вопросу. Сначала докажем некоторое общее утверждение.

Лемма 3.2 *Предположим, что линейный дифференциальный оператор L имеет вещественные коэффициенты (функции $a_i(t)$ вещественны). Если уравнение $L[x] = 0$ имеет комплекснозначное решение $x(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in \mathbb{R}$, u, v – вещественные функции, то вещественная $u(t)$ и мнимая части $v(t)$ решения являются решениями дифференциального уравнения.*

Доказательство. Это следует из линейности и вещественности дифференциального оператора.$\blacksquare$

Рассмотрим теперь вопрос о построении вещественной фундаментальной системы решений в случае вещественного дифференциального оператора L. Напомним, что в этом случае корни характеристического полинома с вещественными коэффициентами (будем называть такой полином *вещественным*) состоят из вещественных чисел и мнимых комплексно-сопряженных пар, причем кратности комплексно-сопряженных корней одинаковы. Упорядочим набор корней следующим образом: вещественные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ с их кратностями $k_1, k_2, \dots, k_s$, затем пары $(\lambda_{s+1}, \bar{\lambda}_{s+1}), \dots, (\lambda_{s+r}, \bar{\lambda}_{s+r})$ комплексно-сопряженных корней с их кратностями $k_{s+1}, \dots, k_{s+r}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2(k_{s+1} + \dots + k_{s+r}) = n$. Согласно этому упорядочению имеем фундаментальную систему решений, состоящую из вещественных и комплексных экспонент (с множителями t^k), причем комплексные экспоненты входят комплексно-сопряженными парами. Множители t^k являются вещественными, поэтому не нарушают комплексную сопряженность пар. Теперь для каждой комплексно-сопряженной пары вида $t^k \exp[(a_j + ib_j)t]$, $t^k \exp[(a_j - ib_j)t]$, используя формулу Эйлера для экспоненты с чисто мнимым показателем, имеем действительную и мнимую части решений $t^k \exp[a_j t]\cos(b_j t)$, $t^k \exp[a_j t]\sin(b_j t)$, являющиеся, по доказанному выше, вещественными решениями. Эти соотношения удобно записать в матричном виде:

$$t^k \left(\exp[a_j t]\cos(b_j t),\ \exp[a_j t]\sin(b_j t)\right) = t^k \left(\exp[(a_j + ib_j)t],\ \exp[(a_j - ib_j)t]\right) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что набор вещественных решений получается из набора комплексных экспонент в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\big(\exp[\lambda_1 t], \dots, t^{k_1-1}\exp[\lambda_1 t], \dots, \exp[\lambda_s t], \dots, t^{k_s-1}\exp[\lambda_s t],\\
&\exp[\lambda_{s+1} t], \dots, t^{k_{s+1}-1}\exp[\lambda_{s+1} t], \exp[\bar\lambda_{s+1} t], \dots, t^{k_{s+1}-1}\exp[\bar\lambda_{s+1} t], \dots,\\
&\exp[\lambda_{s+r} t], \dots, t^{k_{s+1}-1}\exp[\lambda_{s+r} t], \exp[\bar\lambda_{s+r} t], \dots, t^{k_{s+r}-1}\exp[\bar\lambda_{s+r} t]\big)\, R =\\
&\big(\exp[\lambda_1 t], \dots, t^{k_1-1}\exp[\lambda_1 t], \dots, \exp[\lambda_s t], \dots, t^{k_s-1}\exp[\lambda_s t], , \dots,\\
&\exp[a_{s+1} t]\cos(b_{s+1} t), \exp[a_{s+1} t]\sin(b_{s+1} t), \dots,\\
&t^{k_{s+1}-1}\exp[a_{s+1} t]\cos(b_{s+1} t), t^{k_{s+1}-1}\exp[a_{s+1} t]\sin(b_{s+1} t), \dots,\\
&\exp[a_{s+r} t]\cos(b_{s+r} t), \exp[a_{s+r} t]\sin(b_{s+r} t), \dots,\\
&t^{k_{s+r}-1}\exp[a_{s+r} t]\cos(b_{s+r} t), t^{k_{s+r}-1}\exp[a_{s+r} t]\sin(b_{s+r} t)\big)\,,
\end{aligned}$$

где $n \times n$ матрица R невырождена и имеет блочно-диагональный вид, у которой в верхнем левом углу стоит единичная $(k_1 + \dots + k_s) \times (k_1 + \dots + k_s)$ матрица, а остальные блоки вдоль диагонали размера 2×2 (их $(k_{s+1} + \dots + k_{s+r})$ штук) и они имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}.$$

Пример 3.1 *Рассмотрим построение вещественной фундаментальной системы решений для линейного дифференциального уравнения* $x^{(4)} + 2x'' - 8x' + 5x = 0$, *для которого характеристическое уравнение есть* $\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$. *Имеем двукратный корень* $\lambda = 1$ *и два простых комплексно-сопряженных корня* $\lambda = -1 \pm 2i$. *Поэтому фундаментальная система комплексных решений есть* $\exp[t], t\exp[t]$, $\exp[(-1+2i)t]$, $\exp[(-1-2i)t]$, *а вещественные решения получаются выделением действительной и мнимой частей комплексных решений:* $\exp[t], t\exp[t]$, $\exp[-t]\cos(2t)$, $\exp[-t]\sin(2t)$. *Постройте матрицу перехода от комплексных решений к вещественным.*

Чтобы доказать линейную независимость полученных n вещественных решений, докажем лемму

Лемма 3.3 *Пусть* $x_1(t), \dots, x_n(t)$ *– фундаментальная система решений уравнения с постоянными коэффициентами, а* $n \times n$ *постоянная матрица* R *невырождена. Тогда набор функций* $(y_1(t), \dots, y_n(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))R$ *является фундаментальной системой решений этого уравнения.*

Доказательство. Тот факт, что все $y_j(t)$ являются решениями, следует из условия леммы, т.к. каждая функция $y_j(t)$ является линейной комбинацией решений. Линейная независимость решений следует из следующего равенства для определителей Вронского

$$W[y_1(t), \dots, y_n(t)] = W[x_1(t), \dots, x_n(t)] \det R. \blacksquare$$

Из этой леммы следует, что полученный выше набор вещественных функций является фундаментальной системой решений вещественного уравнения.

Пример 3.2 *Уравнение* $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ *имеет характеристическое уравнение* $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = 0$, *корнями которого является два двукратных комплексно сопряженных корня* $\pm i$. *Поэтому фундаментальная система решений состоит из комплексных функций* $\exp[ix], x\exp[ix], \exp[-ix], x\exp[-ix]$ *или вещественных решений* $\cos x, \sin x,\ x\cos x, x\sin x$.

Пример 3.3 *Для уравнения* $y^{(6)} - 16y''' + 64 = 0$ *характеристическое уравнение* $\lambda^6 - 16\lambda^3 + 64 = (\lambda^3-8)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda^2+2\lambda+4)^2 = 0$ *имеет три двукратных корня:* $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_{3,4} = -1 + i\sqrt{3},\ \lambda_{5,6} = -1 - i\sqrt{3}$, *которым соответствуют вещественные решения* $\exp[2x], x\exp[2x],\ \exp[-x]\cos(x\sqrt{3}),\ x\exp[-x]\cos(x\sqrt{3}),\ \exp[-x]\sin(x\sqrt{3}),$ $x\exp[-x]\sin(x\sqrt{3})$.

Замечание 3.1 *Теперь становится понятно (см. начало этой главы), что условие "явного" задания фундаментальной системы решений уравнения с постоянными коэффициентами зависит от возможности получить в явном виде корни характеристического уравнения через коэффициенты уравнения. Как мы знаем из алгебры [2], для многочленов степени выше четвертой это, вообще говоря, невозможно. Поскольку корни характеристического уравнения входят в выражения для решения, то в таких случаях найти явный вид решений нельзя. Однако важно то, что мы знаем, что нужно искать и как. В практических задачах подобные величины с любой заданной точностью можно найти численно.*

3.4 Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

Как мы уже знаем, для построения общего решения такого уравнения нам достаточно найти только частное решение неоднородного уравнения, т.к. мы умеем строить фундаментальную систему решений. Для нахождения частного решения можно использовать метод вариации постоянных, при этом нужно находить первообразные. Иногда этого можно избежать, если неоднородность является функцией $\sum_i P_i(t)\exp[\gamma_i t]$, $P_i(t) = a_0 t^{k_i} + \cdots + a_{k_i}$, называемой иногда *квазиполиномом*. Оказывается, что для уравнения с неоднородностью этого вида частное решение существует в той же форме и тогда для его поиска можно использовать метод поиска коэффициентов неизвестного полинома (*метод неопределенных коэффициентов*). Достаточно рассмотреть квазиполином с одной экспонентой, т.к. найдя частное решения для каждой экспоненты, мы получим решение с полным квазиполиномом, взяв их сумму.

Теорема 3.2 *В случае неоднородности* $P_k(t)\exp[\gamma t]$, *где* P_k *– полином* k*-ой степени, имеется частное решение вида* $x_0(t) = t^s Q_k(t)\exp[\gamma t]$, $Q_k(t) = b_0 t^k + \cdots + b_k$, *где* $s = 0$, *если* γ *не является корнем характеристического уравнения, и* s *равно кратности корня* γ, *если* γ *является корнем характеристического уравнения.*

Доказательство. Ищем частное решение в виде $t^s Q_k(t)\exp[\gamma t] = (b_0 t^{k+s} + \cdots)\exp[\gamma t]$. Применим для вычислений полученную выше формулу (3.3):

$$L[t^{m+s}\exp[\gamma t]] = (\sum_{r=0}^{m+s} C^r_{m+s}\mathcal{X}^{(r)}(\gamma)t^{m+s-r})\exp[\gamma t].$$

Если γ не является корнем характеристического уравнения, то положим $s = 0$ и получим, что коэффициент $\mathcal{X}(\gamma)$ при старшей степени t^m справа отличен от нуля. Если же γ является корнем характеристического уравнения, то положим s равным кратности этого корня. Тогда в полученной формуле разложение справа начинается с члена, где $r = s$, коэффициент которого при t^m равен $C^s_{m+s}\mathcal{X}^{(s)}(\gamma) \neq 0$.

Теперь применим оператор L к функции $x_0(t) = t^s(b_0 t^k + \cdots + b_k)\exp[\gamma t]$

$$\sum_{j=0}^{k} b_j L[t^{s+k-j}\exp[\gamma t]] = \sum_{j=0}^{k} b_j \left(\sum_{r=s}^{s+k-j} C^r_{s+k-j}\mathcal{X}^{(r)}(\gamma)t^{s+k-j-r})\exp[\gamma t]\right).$$

Отметим следующую важную особенность полученного выражения в правой части: член со старшей степенью t^k входит только в один член суммы ($j = 0, r = s$), член степени t^{k-1} – в два члена суммы ($j = 0, r = s+1$ и $j = 1, r = s$) и т.д. по убывающим степеням. Приравнивая правую часть полученного равенства правой части уравнения, получим следующую треугольную систему линейных уравнений относительно неизвестных $b_0, b_1, \ldots, b_k$, у которой на главной диагонали стоят ненулевые коэффициенты:

$$\begin{array}{l}
C^s_{s+k}\mathcal{X}^{(s)}(\gamma)b_0 = a_0,\\
C^{s+1}_{s+k}\mathcal{X}^{(s+1)}(\gamma)b_0 + C^s_{s+k-1}\mathcal{X}^{(s)}(\gamma)b_1 = a_1,\\
\ldots\\
C^{s+k}_{s+k}\mathcal{X}^{(s+k)}(\gamma)b_0 + \cdots + C^s_s\mathcal{X}^{(s)}(\gamma)b_k = a_k.
\end{array}$$

Отметим, что в полученной системе некоторые коэффициенты могут обращаться в нуль: например, если $k + j > n$, то соответствующая производная характеристического полинома равна нулю тождественно. Окончательно получаем, что коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_k$ однозначно находятся из этой линейной треугольной невырожденной системы. ■

Пример 3.4 *Решим неоднородное уравнение* $x'' - 5x' = 3t^2 + \sin 5t$. *Характеристическое уравнение однородного уравнения* $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ *имеет два простых корня* $\lambda = 0$, $\lambda = 5$, *поэтому фундаментальная система решений состоит из двух функций:* $1, \exp[5t]$. *Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде суммы двух функций: решения неоднородного уравнения* $x'' - 5x' = 3t^2$ *(здесь показатель экспоненты* $\gamma = 0$, *поэтому решение нужно искать в виде* $t(at^2 + bt + c)$*) и решения неоднородного уравнения* $x'' - 5x' = \sin 5t = (\exp[5it] - \exp[-5it])/2i$ *(здесь оба показателя экспонент* $\gamma = \pm 5i$ *не являются корнями характеристического уравнения, поэтому достаточно найти решение уравнения* $x'' - 5x' = \exp[5it]/2i$, *тогда для второй экспоненты правая* *часть* $-\exp[-5it]/2i$ *есть комплексно сопряженная функция и решение, ввиду вещественности линейного дифференциального оператора, будет комплексно сопряженной функцией). Сравнение коэффициентов дает для первого уравнения решение*

$$x_1(t) = -\frac{t}{125}(25t^3 + 15t^2 + 6t),$$

а для второго уравнения получим сумму

$$x_2(t) = \frac{1+i}{100}\mathrm{e}^{5it} + \frac{1-i}{100}\mathrm{e}^{-5it} = \frac{\cos 5t - \sin 5t}{50}.$$

3.5 Уравнения Эйлера

Так называют линейные дифференциальные уравнения n-го порядка следующего специального типа:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

Заменой переменной $x = \mathrm{e}^t$ при $x > 0$, или $x = -\mathrm{e}^t$ при $x < 0$, решение таких уравнений сводится к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для доказательства этого утверждения обозначим $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$ и продифференцируем обе части этого равенства нужное число раз по t. При этом мы найдем выражения для производных $y_x^{(k)}$ через $u^{(k)}$ и производные меньшего порядка. Последовательное дифференцирование с использованием формулы производной от сложной функции дает:

$$y'_x = \mathrm{e}^{-t}u',\ y''_x = \mathrm{e}^{-2t}[u'' - u'],\ y'''_x = \mathrm{e}^{-3t}[u''' - 3u'' + 2u'],$$

что подсказывает общую формулу: $y_x^{(k)} = \mathrm{e}^{-kt}L_k[u]$, где линейный дифференциальный оператор $L_k[u]$ имеет постоянные коэффициенты. Докажем это утверждение. Оно уже проверено для производных порядка 1, 2, 3. Предположим, что для k-ой производной утверждение справедливо. Продифференцируем по t соотношение $y_x^{(k)}(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{-kt}L_k[u]$. Используя предположение индукции, имеем $y_x^{(k+1)}\mathrm{e}^t = -k\mathrm{e}^{-kt}L_k[u] + \mathrm{e}^{-kt}L_k[u']$, или

$$y_x^{(k+1)} = \mathrm{e}^{-(k+1)t}\left(L_k[u'] - kL_k[u]\right) = \mathrm{e}^{-(k+1)t}L_{k+1}[u].$$

Поэтому равенство справедливо при любых n.

Подставим теперь полученные выражения в уравнение. Тогда $x^k y^{(k)}$ переходит в $\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{-kt}L_k[u] = L_k[u]$, т.е. однородное уравнение превращается в линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами относительно переменной t. Найдем его характеристическое уравнение. Оно получается, если в однородное уравнение с постоянными коэффициентами подставить $\mathrm{e}^{\lambda t}$ и в полученном уравнении сократить обе части на $\mathrm{e}^{\lambda t}$. В случае уравнения Эйлера имеем $\mathrm{e}^{\lambda t} = x^\lambda$, поэтому подстановка x^λ вместо y в исходное уравнение дает в каждом члене суммы

$$x^k (x^\lambda)^{(k)} = \lambda(\lambda - 1)\cdots(\lambda - k + 1)x^\lambda$$

и после сокращения на x^λ получаем характеристическое уравнение:

$$a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Затем нужно найти, как указано выше, фундаментальную систему решений уравнения с постоянными коэффициентами и для каждого ее решения вида $t^k\mathrm{e}^{\lambda t}$ вернуться к исходной переменной $t=(\ln x)/\lambda$. Аналогично делается при $x<0$.

Пример 3.5 *Решить уравнение* $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$. *Находим характеристическое уравнение* $\mathcal{X}(\lambda)=0$ *для однородного уравнения, для чего подставляем* $y=x^\lambda$ *в уравнение, дифференцируем и сокращаем на* x^λ*:* $\lambda(\lambda-1)-3\lambda+5=\lambda^2-4\lambda+5=0$. *Корни уравнения равны* $2\pm i$. *После подстановки* $x=e^t$ *уравнение для* $u(t)=y(e^t)$ *имеет вид* $u''-4u'+5u=3e^{2t}$, *общим решением однородного уравнения является* $e^{2t}(3+A\cos t+B\sin t)$, *т.е. общим решением исходного уравнения при* $x>0$ *является* $x^2(3+A\cos\ln x+B\sin\ln x)$.

Глава 4

Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений

В этой главе мы рассмотрим другой способ выделения частного решения дифференциального уравнения, отличный от задачи Коши. Необходимость этого способа задания решений возникла в математической физике и теории уравнений с частными производными. Там часто требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения, если известны значения этого решения при двух значениях независимой переменной, т.е. на границе некоторого подмножества из $I \subset \mathbb{R}$. Задачи о поиске решений, удовлетворяющих таким условиям, называются *краевыми задачами*. Мы рассмотрим простейшие из них – двухточечные линейные краевые задачи, для которых как само дифференциальное уравнение, так и краевые условия линейны, т.е. краевые условия задаются как линейные комбинации искомой функции и ее производных в точках t_i, $i = 1, 2$, на границе интервала. При изложении материала этой главы мы следуем, в основном, книге [8]. Примерами линейных краевых условий являются следующие:

$$\begin{aligned}
&1) y(t_1) = a; y'(t_2) = b;\\
&2) \alpha y(t_1) + \beta y'(t_2) = c,\ |\alpha| + |\beta| \neq 0;\\
&3) y(t_1) - y(t_2) = d; y'(t_1) - y'(t_2) = f.
\end{aligned}$$

Если постоянные в правых частях краевых условий равны нулю, то краевые условия называются *однородными*, если не все равны нулю – то *неоднородными*.

Из теоремы существования решений задачи Коши мы знаем, что решение уравнения n-го порядка зависит от n произвольных постоянных, поэтому следует ожидать, что решение такого уравнения требует задания n краевых условий. *Однородная краевая задача* – это случай, когда уравнение и краевые условия однородны. В отличие от решений задачи с начальными данными, краевая задача может иметь решения, иметь бесчисленное множество решений или не иметь решений вовсе. Например, уравнение $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = a$, имеет единственное решение $y = a \sin t$, а то же уравнение с краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(\pi) = b$, при $b \neq 0$ не имеет решений, а при $b = 0$

имеет бесчисленное множество решений $y = c\sin t$, $c \in \mathbb{R}$.

Общий вид линейных краевых условий двухточечной краевой задачи для уравнения n-го порядка имеет вид:

$$MY = g,$$

где M – заданная постоянная $(n \times 2n)$-матрица, Y – $2n$-мерный вектор, составленный из значений функции $y(t)$ и ее производных до порядка $n-1$, вычисленных в точке t_1 (n первых координат) и в точке t_2 (n вторых координат), g – n-мерный постоянный вектор. Произведение MY является n-мерным вектором.

Имеет место следующая *теорема об альтернативе*:

Теорема 4.1 *Рассмотрим линейную краевую задачу*

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t),\ n \geq 2,$$

с непрерывными функциями a_i, f, $a_0 \neq 0$, определенными на интервале $t \in (a,b)$, с линейными краевыми условиями $MY = g$ на отрезке $[t_0, t_1] \subset (a,b)$. Тогда возможны только следующие два случая: 1) краевая задача имеет решение при любых правых частях в уравнении и краевых условиях; 2) однородная краевая задача имеет бесчисленное множество решений, а неоднородная задача при некоторых правых частях имеет бесчисленное множество решений, а при всех других – не имеет решений.

Доказательство. Рассмотрим общее решение уравнения $y(t) = y_0(t) + c_1y_1(t) + \cdots + c_ny_n(t)$, где y_0 – частное решение неоднородного уравнения, $y_1, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $c_1 \ldots, c_n$ – произвольные постоянные. Среди всех решений уравнения нужно найти то, которое удовлетворяет краевым условиям. Подставим это решение в краевые условия, для чего для каждой функции $y_i(t)$ вычислим соответствующий ей $2n$-мерный вектор Y_i. Тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i MY_i = g - MY_0.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $c_1 \ldots, c_n$ с коэффициентами $(n \times n)$-матрицы, задаваемой столбцами MY_i, $i = 1, \ldots, n$, имеет либо ненулевой определитель и тогда единственное решение при любой правой части (т.е. любой неоднородности в уравнении и краевых условиях), либо ее определитель равен нулю и тогда, если выполнены условия теоремы Кронекера-Капелли (см., например, [3]), то система имеет бесчисленное множество решений, либо при нарушении этих условий – решения отсутствуют.$\blacksquare$

Проиллюстрируем теорему следующим примером ([7]).

Пример 4.1 *При каких значениях a уравнение $y'' + ay = 1$ с краевыми условиями $y(0) = 0, y(1) = 0$ не имеет решений?*

Матрица краевых условий M имеет 2 строки и 4 столбца: $m_{11} = 1$, $m_{1i} = 0$, $i \geq 2$, $m_{23} = 1$, $m_{2j} = 0$, $j \neq 3$. Векторы Y являются четырехмерными, MY – двумерными, g – двумерный нулевой вектор. Будем сразу вычислять векторы $Z = MY$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет следующий вид, в зависимости от знака коэффициента a: 1) $a > 0$, $y(x) = a^{-1} + c_1 \cos(\sqrt{a}x) + c_2 \sin(\sqrt{a}x)$*;* 2) $a = 0$, $y(x) = x^2/2 + c_1 x + c_1$; 3) $a < 0$, $y(x) = a^{-1} + c_1 \exp[\sqrt{-a}x] + c_1 \exp[\sqrt{-a}x]$*. В каждом из этих случаев двумерные векторы* Z_0*,* Z_1, Z_2 *имеют вид:*

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/a \end{pmatrix}, \; Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sqrt{a}) \end{pmatrix}, \; Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\sqrt{a}) \end{pmatrix}.$$

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \; Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/a \end{pmatrix}, \; Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\sqrt{-a}) \end{pmatrix}, \; Z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(-\sqrt{-a}) \end{pmatrix}.$$

Поэтому определитель матрицы $(Z_1\ Z_2)$ *в первом случае равен* $\sin(\sqrt{a})$ *и равен нулю при* $a = k^2\pi^2$*. Ранг матрицы* $(Z_1\ Z_2)$ *в этом последнем случае равен единице, а ранг расширенной матрицы*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/a \\ (-1)^k & 0 & -1/a \end{pmatrix}$$

равен двум при k *нечетном и равен единице при* k *четном. Поэтому в первом случае решение не существует только при* $a = (2n+1)^2\pi^2$*. Во втором и третьем случаях ранг матрицы* $(Z_1\ Z_2)$ *равен двум (определитель равен* -1 *и* $-2\,\mathrm{sh}(\sqrt{-a})$*), поэтому имеем первый случай альтернативы и краевая задача имеет единственное решение.*

4.1 Краевая задача для уравнения второго порядка. Функция Грина

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением двухточечной краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка с однородными краевыми условиями на краях интервала $t \in (t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} L[y] = a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t), \\ \alpha y(t_1) + \beta y'(t_1) = 0, \\ \gamma y(t_2) + \delta y'(t_2) = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Предполагается, что функции a_0, a_1, a_2 непрерывны на интервале, $a_0 \neq 0$, и выполнены неравенства: $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$. Нашей целью в этом параграфе будет построение некоторой функции, которая позволяет записать решение неоднородной краевой задачи (4.1) в виде:

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,s) f(s) ds.$$

Функция G, стоящая в качестве ядра этого интеграла, носит название *функции Грина*[1]. Дадим точное определение.

[1]George Green (1793–1841), английский физик и математик.

Определение 4.1 *Функцией Грина краевой задачи* (4.1) *называется функция двух переменных* $G(t,s)$, $t \in [t_1,t_2]$, $s \in (t_1,t_2)$, *для которой выполнены следующие условия:*

1. *При любом* $s \in (t_1,t_2)$ *функция* $G(t,s)$ *как функция от переменной* t *при* $t \neq s$ *является решением однородного уравнения* $Ly = 0$.

2. *При* $t = t_1$ *и* $t = t_2$ *функция* $G(t,s)$ *удовлетворяет краевым условиям в* (4.1).

3. *При* $t = s$ *функция* G *непрерывна по* t*, а ее производная по* t *имеет скачок (разрыв первого рода), равный* $1/a_0(s)$*:*

$$G(s+0,s) = G(s-0,s),\ G_t(s+0,s) - G(s-0,s) = \frac{1}{a_0(s)}.$$

Докажем теорему, которая гарантирует существование функции Грина. Доказательство теоремы конструктивно, оно указывает способ построения этой функции.

Теорема 4.2 *Предположим, что* $a_0 \neq 0$, *функции* a_0, a_1, a_2 *непрерывны на отрезке* $[t_1,t_2]$ *и однородная краевая задача, получаемая при* $f \equiv 0$, *не имеет ненулевых решений. Тогда функция Грина существует и имеет вид:*

$$G(t,s) = \left\{ \begin{array}{l} ay_1(t),\ \textit{при}\ t_1 \le t \le s, \\ by_2(t),\ \textit{при}\ s \le t \le t_2 \end{array} \right. ,$$

где y_1, y_2 *– ненулевые решения однородного уравнения* $L[y] = 0$, *удовлетворяющие соответственно первому и второму краевым условиям. Коэффициенты* a, b *являются функциями от* s *и определяются из условия выполнения равенств п.3 в определении функции Грина:*

$$ay_1(s) = by_2(s),\ by_2'(s) - ay_1'(s) = 1/a_0(s). \tag{4.2}$$

Доказательство. Решения y_1, y_2 однородного уравнения определяются с точностью до умножения на произвольную постоянную. Например, в качестве y_1 можно взять решение задачи Коши с начальными данными $y_1(t_1) = \beta$, $y_1'(t_1) = -\alpha$, а в качестве y_2 – решение задачи Коши с начальными данными $y_2(t_2) = \delta$, $y_2'(t_2) = -\gamma$. Полученные решения линейно независимы, т.к. в противном случае $y_2(t) = cy_1(t)$ и решение y_2 удовлетворяло бы и второму краевому условия (по построению) и первому. Но это противоречит условию теоремы, т.к. y_2 – ненулевое решение (ибо $|\gamma| + |\delta| \neq 0$).

Таким образом, y_1, y_2 – фундаментальная система решений однородного уравнения и любое его решение имеет вид $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Теперь условия 1, 2 определения функции Грина говорят, что G, если она существует, должна совпадать с y_1 слева от точки s и с y_2 – справа от s. Осталось удовлетворить условиям 3. Запишем их в виде системы относительно неизвестных коэффициентов a, b:

$$\left\{ \begin{array}{l} ay_1(s) - by_2(s) = 0, \\ by_2'(s) - ay_1'(s) = 1/a_0(s). \end{array} \right. ,$$

определителем которой является определитель Вронского $W[y_1, y_2]$ в точке $t = s$. Ввиду линейной независимости решений y_1, y_2, определитель отличен от нуля и решение системы единственно. Отметим, что при замене решений y_1, y_2 на решения cy_1, dy_2 функция Грина не меняется, т.к. коэффициенты a, b изменятся на ca, db, которые находится из тех же уравнений.■

Теперь мы можем вернуться к представлению решений неоднородной краевой задачи (4.1) через функцию f.

Теорема 4.3 *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и функция f непрерывна на $[t_1, t_2]$. Тогда решение краевой задачи* (4.1) *выражается в виде*

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,s)f(s)ds, \tag{4.3}$$

где G – функция Грина.

Доказательство. Разобьем интеграл в (4.3) на два интеграла:

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,s)f(s)ds = \int_{t_1}^{t} G(t,s)f(s)ds + \int_{t}^{t_2} G(t,s)f(s)ds.$$

Используя представление функции Грина, эти интегралы можно записать:

$$y_2(t)\int_{t_1}^{s} b(s)f(s)ds \quad (s < t), \text{ и } y_1(t)\int_{t}^{t_2} a(s)f(s)ds \quad (s > t).$$

Нужно проверить, что функция $y(t)$ является решением неоднородного уравнения, поэтому найдем первую и вторую производные y', y'':

$$y'(t) = y_2'(t)\int_{t_1}^{t} b(s)f(s)ds + y_2(t)b(t)f(t) + y_1'(t)\int_{t}^{t_2} a(s)f(s)ds - y_1(t)a(t)f(t) =$$
$$= y_2'(t)\int_{t_1}^{t} b(s)f(s)ds + y_1'(t)\int_{t}^{t_2} a(s)f(s)ds,$$

поскольку на диагонали $s = t$ функция G непрерывна (см. (4.2)) и

$$y''(t) = y_2''(t)\int_{t_1}^{t} b(s)f(s)ds + y_1''(t)\int_{t}^{t_2} a(s)f(s)ds + y_2'(t)b(t)f(t) - y_1'(t)a(t)f(t) =$$
$$= y_2''(t)\int_{t_1}^{t} b(s)f(s)ds + y_1''(t)\int_{t}^{t_2} a(s)f(s)ds + \frac{f(t)}{a_0(t)}.$$

Тогда $L[y] = a_0(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = f(t)$, поскольку $L[y_1] \equiv 0$, $L[y_2] \equiv 0$, и члены с интегралами в правой части равенства в сумме равны нулю. Поэтому y, задаваемое формулой (4.3), является решением неоднородного уравнения. Выражение $\alpha y(t_1) + \beta y'(t_1)$ совпадает с той же комбинацией для y_1, т.е. равно нулю, а выражение $\gamma y(t_2) + \delta y'(t_2)$ совпадает с той же комбинацией для y_2, т.е. также равно нулю. Тем самым, y – решение краевой задачи.■

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу ([7]).

Пример 4.2 *При каких r существует функция Грина краевой задачи: $y'' + ry = f(t)$, $y(0) = 0, y(1) = 0$?*

Фундаментальная система решений однородного уравнения зависит от знака r и была найдена в примере 4.1. При $r > 0$ решение, удовлетворяющее однородному уравнению и первому краевому условию, есть $y_1(t) = a\sin(t\sqrt{r})$, а решение того же уравнения, удовлетворяющее второму краевому условию, есть $y_2(t) = b\sin((t-1)\sqrt{r})$. Поэтому функция Грина при $r > 0$ и $\sin(\sqrt{r}) \neq 0$ равна

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin((s-1)\sqrt{r})}{\sqrt{r}\sin(\sqrt{r})}\sin(t\sqrt{r}), \ \textit{при}\ 0 \le t \le s, \\ \dfrac{\sin(s\sqrt{r})}{\sqrt{r}\sin(\sqrt{r})}\sin((t-1)\sqrt{r}), \ \textit{при}\ s \le t \le 1. \end{cases}$$

Если $\sin(\sqrt{r}) = 0$, т.е. $r = k^2\pi^2$, то однородное уравнение имеет решение $\sin(k\pi t)$, которое удовлетворяет обоим краевым условиям, т.е. не выполнены условия теоремы о существовании функции Грина.

При $r = 0$ функция $y_1(t) = t$ удовлетворяет однородному уравнению и первому краевому условию, а функция $y_2(t) = t - 1$ – второму краевому условию и однородному уравнению. Поэтому условия (4.2) дают следующие выражения для функций a, b : $a(s) = s - 1, b(s) = s$.

Наконец для $r < 0$ функция $y_1(t) = \operatorname{sh}(t\sqrt{-r})$ удовлетворяет однородному уравнению и первому краевому условию, а функция $\operatorname{sh}((t-1)\sqrt{-r})$ – второму краевому условию и однородному уравнению. Поэтому коэффициенты a, b функции Грина находятся из системы:

$$a\operatorname{sh}(s\sqrt{-r}) - b\operatorname{sh}((s-1)\sqrt{-r}) = 0, \ b\operatorname{ch}((s-1)\sqrt{-r}) - a\operatorname{ch}(s\sqrt{-r}) = 1/\sqrt{-r}$$

и имеют вид:

$$a(s) = \frac{\operatorname{sh}((s-1)\sqrt{-r})}{\sqrt{r}\operatorname{sh}(\sqrt{-r})}, \ b(s) = \frac{\operatorname{sh}(s\sqrt{-r})}{\sqrt{-r}\operatorname{sh}(\sqrt{-r})}.$$

Окончательный ответ задачи: при всех $r \in \mathbb{R}$, кроме точек $r_k = k^2\pi^2, \ k \in \mathbb{N}$, функция Грина существует.

В математической физике и теории уравнений с частными производными важную роль играют однородные краевые задачи для линейного дифференциального уравнения, содержащие параметр. Примером является задача:

$$L[y] - \lambda y = 0, \ \alpha y(t_1) + \beta y'(t_1) = 0, \ \gamma y(t_2) + \delta y'(t_2) = 0.$$

Для этой краевой задачи ищут те значения параметра λ, при которых задача имеет нетривиальное (т.е. ненулевое) решение. Значения параметра, при которых такие решения существуют, называются *собственными значениями* краевой задачи, а сами нетривиальные решения, существующие при этих собственных значениях, называют *собственными функциями* краевой задачи. Здесь видна аналогия с известной задачей линейной алгебры о поиске собственных значений и собственных векторов матрицы, т.е. линейного оператора в линейном конечномерном пространстве. В нашем случае этот оператор дифференциальный и действует он в пространстве дифференцируемых функций, а однородные краевые условия выделяют в этом пространстве некоторое линейное подпространство. Собственные функции – это функции из этого подпространства, имеющие важные свойства, похожие на свойства функций типа $\sin(kx), \cos(kx)$ (см., например, [6]). Мы не будем заниматься такими задачами в нашем курсе, рассмотрим только один пример ([7]).

Пример 4.3 *Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи:* $x^2y'' = \lambda y$, $y(1) = y(a) = 0$, $a > 1$.

Для решения задачи заметим, что рассматриваемое уравнение является уравнением Эйлера (см. параграф 3.5). Поэтому для его решения сделаем замену $x = e^t$, $y(e^t) = u(t)$. *Тогда уравнение перепишется в виде уравнения с постоянными коэффициентами* $u'' - u' = \lambda u$, $u(0) = u(\ln a) = 0$. *Характеристическое уравнение* $\nu(\nu-1) - \lambda = 0$ *при* $\lambda < -1/4$ *имеет два комплексно-сопряженных корня* $1/2 \pm i\sqrt{-(1+4\lambda)}/2$. *При* $\lambda = -1/4$ *уравнение имеет двукратный корень* $\nu = 1/2$, *а при* $\lambda > -1/4$ *– корни* ν_1, ν_2 *простые вещественные. Поэтому при* $\lambda > -1/4$ *фундаментальная система решений уравнения состоит из суммы экспонент с разными показателями:* $c_1 \exp[\nu_1 t] + c_2 \exp[\nu_2 t]$. *Если записать для такого решения краевые условия, то получим систему однородных линейных уравнений относительно коэффициентов* c_1, c_2 : $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 \exp[\nu_1 \ln a] + c_2 \exp[\nu_1 \ln a] = 0$, *определитель которой отличен от нуля при* $\nu_1 \neq \nu_2$, *т.е.* $c_1 = c_2 = 0$ *и нетривиальных решений нет. Поэтому собственные значения, если они есть, лежат на полуоси* $\lambda < -1/4$. *В этом случае вещественные решения для комплексных корней* $\sigma \pm i\rho = 1/2 \pm i\sqrt{-(1+4\lambda)}/2$ *имеют вид:* $\exp[\sigma t]\cos(\rho t)$ *и* $\exp[\sigma t]\sin(\rho t)$. *Их линейная комбинация* $\exp[\sigma t](c_1\cos(\rho t) + c_2\sin(\rho t))$ *при подстановке в первое краевое условие дает* $c_1 = 0$, *поэтому семейство таких решений есть* $c\exp[\sigma t]\sin(\rho t) = 0$. *Чтобы полученные функции удовлетворяли второму краевому условию, нужно выполнение равенства* $\sin(\rho \ln a) = 0$, *откуда* $\rho \ln a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Подставляя значение* ρ, *получаем выражения для собственных значений:* $\lambda_k = -1/4 - k^2\pi^2/\ln^2 a$. *Соответствующая собственная функция для* λ_k *есть* $\exp[t/2]\sin(k\pi t/\ln a)$, *или в исходных переменных* $\sqrt{x}\sin(k\pi \ln x/\ln a)$.

В качестве заключения к этой главе отметим, что краевые задачи для одних и тех же линейных дифференциальных уравнений второго порядка появляются в различных задачах математической физики. Собственные функции таких задач называют специальными функциями и они применяются при разложении других функций в ряды аналогично тому, как функции раскладывают в ряды Фурье по тригонометрическим функциям. Эти специальные функции тщательно изучаются, имеются справочники таких функций и т.д. [11]. В качестве примера можно привести *уравнение Бесселя* $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)x = 0$. При граничном условии $y(0) = 0$ решением этого уравнения является функция, обозначаемая $J_\nu(x)$ и называемая *функцией Бесселя первого рода.* Если ищется решение этого уравнения, зависящее от параметра ν, удовлетворяющее дополнительному граничному условию на втором конце, например $y'(1) = 0$, то это условие выделяет дискретное множество значений ν_k, при которых оба краевых условия выполнены. Эти значения ν_k представляют собой собственные значения соответствующей краевой задачи, а соответствующие решения уравнения – ее собственные функции.

Глава 5

Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ систему линейных дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{5.1}$$

где x рассматривается как вектор-столбец, A – $n \times n$ матрица, элементами которой являются непрерывные на одном и том же интервале (a, b) функции $a_{ij}(t)$, f – вектор-столбец, состоящий из непрерывных функций $f_i(t)$, определенных на том же интервале (a, b). В скалярной форме система (5.1) записывается в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t),\ i = 1, \ldots, n.$$

Для удобства и краткости мы будем использовать векторную запись (5.1). Как мы уже видели выше, к виду системы дифференциальных уравнений первого порядка можно свести любое скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной. В случае линейного уравнения мы получим систему линейных уравнений первого порядка, но, вообще говоря, системы являются более общим объектом, чем скалярные уравнения. Тем не менее, основные идеи теории для линейных систем аналогичны идеям развитой выше теории для скалярных линейных уравнений. Систему (5.1) в случае, когда $f \equiv \underline{0}$, будем называть *однородной*, в противном случае – *неоднородной*. Теорема существования и единственности для системы (5.1) была сформулирована в первой главе.

Дадим понятие о линейной зависимости и независимости вектор-функций, определенных на одном и том же интервале (a, b). Пусть дан конечный набор вектор-функций, зависящих от переменной $t \in (a, b)$: $X_1(t), \ldots, X_k(t)$. Будем говорить, что этот набор вектор-функций является *линейно зависимым*, если существует такой ненулевой набор постоянных $(c_1, \dots, c_k)$ из поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, что линейная комбинация $\sum_i c_i X_i(t)$ равна нулевой вектор-функции. В противном случае набор вектор-функций называется *линейно независимым.*

Рассмотрим сначала однородные системы

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{5.2}$$

В дальнейшем нам потребуется выбирать наборы из n линейно независимых вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ для построения базиса в пространстве решений однородной системы. Для этого полезно иметь некоторый критерий для проверки линейной независимости вектор-функций набора. Рассмотрим вектор-функции $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Составим их них $n \times n$ матрицу, взяв $X_k(t)$ в качестве k-го столбца этой матрицы, $k = 1, \dots, n$. Определитель $W[X_1, \dots, X_n](t)$ полученной матрицы назовем *определителем Вронского* указанного набора вектор-функций.

Лемма 5.1 *Если набор вектор-функций $X_1(t), \dots, X_n(t)$ является линейно зависимым на интервале (a, b), то его определитель Вронского тождественно равен нулю на (a, b).*

Доказательство. По определению линейной зависимости для набора $X_1(t), \dots, X_n(t)$ существует ненулевой набор постоянных $(c_1, \dots, c_n)$, для которого выполнено тождество $\sum_i c_i X_i(t) \equiv \underline{0}$. При построчной записи этого векторного тождества при любом фиксированном $t \in (a, b)$ получим однородную линейную система относительно переменных $(c_1, \dots, c_n)$, которая имеет ненулевое решение. Определитель такой однородной системы равен нулю при всех $t \in (a, b)$. ■

Пример 5.1 *Приведем пример линейно независимого набора вектор-функций, для которого определитель Вронского равен нулю: $X_1(t) = (t^2, t)^\top$, $X_2(t) = (t|t|, |t|)^\top$, $t \in (-1, 1)$ (докажите).*

Таким образом, для произвольных наборов вектор-функций равенство нулю определителя Вронского является только необходимым условием и линейной зависимости. Однако, для наборов из n вектор-функций, являющихся решениями однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка, условие тождественного обращения в нуль их определителя Вронского является необходимым и достаточным условием их линейной зависимости. Для доказательства этого утверждения предварительно проверим справедливость следующего простого утверждения.

Лемма 5.2 *Если вектор-функции $X_1(t), \dots, X_k(t)$ являются решениями однородной системы (5.2) ($f \equiv \underline{0}$) и $(c_1, \dots, c_k)$ – произвольный набор постоянных, то вектор-функция $Y(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_k X_k(t)$ является решением однородной системы.*

Доказательство. $Y'(t) = c_1 X_1'(t) + \dots + c_k X_k'(t) \equiv c_1 A(t) X_1(t) + \dots + c_k A(t) X_k(t) = A(t)(c_1 X_1(t) + \dots + c_k X_k(t)) = A(t) Y(t)$. ■

Теорема 5.1 *Предположим, что n вектор-функции $X_1(t), \dots, X_n(t)$, $t \in (a, b)$, являются решениями системы* (5.2)*. Тогда их определитель Вронского $W[X_1, \dots, X_n](t)$ обращается в нуль при некотором $t_0 \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда вектор-функции этого набора линейно зависимы. В этом случае $W(t) \equiv 0$.*

Доказательство. Необходимость леммы доказана в лемме 5.2. Докажем достаточность. Пусть при некотором $t_0 \in (a, b)$ выполнено равенство $W[X_1, \dots, X_n](t_0) = 0$. Тогда однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $(c_1, \dots, c_n)$

$$c_1 X_1(t_0) + \cdots + c_n X_n(t_0) = \underline{0}$$

имеет ненулевое решение $(c_1^0, \dots, c_n^0)$. Рассмотрим вектор-функцию $Y(t) = c_1^0 X_1(t) + \cdots + c_n^0 X_n(t)$. Поскольку это линейная комбинация решений системы, то $Y(t)$ является решением. При $t = t_0$ этот вектор является нулевым, в силу выбора постоянных, но единственным решением однородной системы с нулевыми начальными данными при $t = t_0$ является нулевая вектор-функция. По теореме единственности, имеем $Y(t) \equiv \underline{0}$, т.е. набор решений линейно зависим, а поэтому $W(t) \equiv 0$. ■

Теперь покажем, как построить набор из n линейно независимых решений системы (5.2). В силу доказанной теоремы, нужно просто зафиксировать некоторое $t = t_0$ и набор из n линейно независимых векторов $X_1^0, \dots, X_n^0$, затем, согласно теореме существования, взять решения $X_1(t), \dots, X_n(t)$ с этими начальными условиями. Поскольку выбранные векторы независимы, то определитель матрицы, составленной из этих векторов, отличен от нуля. Но этот определитель есть просто определитель Вронского решений $X_1(t), \dots, X_n(t)$ при $t = t_0$, поэтому решения будут независимы при всех $t \in (a, b)$. Итак, множество решений однородной системы n линейных дифференциальных уравнений первого порядка образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в этом пространстве имеется n линейно независимых решений.

Осталось доказать, что любое решение системы является линейной комбинацией полученных n решений, т.е. что число линейно независимых решений не больше, чем n. Пусть $Y(t)$ произвольное решение системы. Зафиксируем $t = t_0 \in (a, b)$ и разложим вектор $Y(t_0)$ по векторам $X_1^0, \dots, X_n^0$: $Y(t_0) = c_1 X_1^0 + \cdots + c_n X_n^0$. Рассмотрим вектор-функцию $Z(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$, также являющуюся решением системы. Это решение при $t = t_0$ равно вектору $Y(t_0)$. Но решение системы с такими начальными условиями единственно, поэтому $Z(t) \equiv Y(t)$, $t \in (a, b)$. Тем самым мы доказали, что n линейно независимых решений образует базис в пространстве решений. В теории дифференциальных уравнений базис в пространстве решений называется *фундаментальной системой решений*. Для произвольной линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, вообще говоря, невозможно построить в явном виде фундаментальную систему решений. Это удается сделать только для некоторых специальных типов систем (см. ниже). Тот факт, что любое решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка можно представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений позволяет говорить, что это представление дает *общее решение системы.*

5.1 Формула Лиувилля-Остроградского

Мы уже видели полезность определителя Вронского. Для его вычисления нужно, казалось бы, знать фундаментальную систему решений системы, но при непостоянных коэффициентах эти решения, вообще говоря, невозможно выразить через коэффициенты системы. Оказывается, тем не менее, сам определитель Вронского можно вычислить по *коэффициентам системы* без вычисления фундаментальной системы решений. Соответствующая формула носит название *формулы Лиувилля-Остроградского.* Получим ее.

Лемма 5.3 *Если элементы определителя порядка n являются дифференцируемыми функциями от t на некотором интервале $t \in (a, b)$, то производная определителя по t равна сумме n определителей, каждый из которых получен заменой k-строки (k-го столбца) исходного определителя строкой (столбцом) из производных этих функций.*

Доказательство. Применим формулу вычисления определителя как сумму произведений элементов по одному в каждой строке и столбце с коэффициентами ± 1 в зависимости от четности/нечетности постановки соответствующего набора индексов (см. [3]). ■

Предложение 5.1 *Определитель Вронского $W(t)$ набора из n решений однородной системы* (5.2) *равен*

$$W(t) = W(t_0) \exp[\int_{t_0}^{t} trA(s)ds],$$

где $trA(t)$ – след матрицы $A(t)$.

Доказательство. Найдем производную определителя Вронского. Обозначим m-ый столбец определителя как вектор-функцию $X_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm})^\top$, $m = 1, \dots, n$, являющуюся решением фундаментальной системы, $X_m'(t) \equiv A(t)X_m(t)$. Тогда построчно имеем

$$x_{im}' \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jm},\ i = 1, \dots, n.$$

Используя формулу дифференцирования определителя, получаем сумму n определителей, в каждом из которых одна строка заменена на строку из производных соответствующих функций:

$$W[X_1, \dots, X_n]'(t) = \sum_k W_k(t),\ W_k(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1}' & x_{k2}' & \dots & x_{kn}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.3}$$

Подставим вместо производных их выражения из полученных тождеств при $i = k, m = 1, \dots, n$. Тогда этот определитель равен сумме: $W_k = a_{k1}W_{k1} + a_{k2}W_{k2} + \dots + a_{kn}W_{kn}$, где определители W_{ks} получаются из определителя Вронского заменой k-ой строки на s-ую. Поэтому все эти определители равны нулю, кроме W_{kk}, который равен самому определителю Вронского. Отсюда получаем в (5.3) справа $(a_{11} + \cdots + a_{nn})W(t)$, т.е. функция $W(t)$ является решением уравнения $W'(t) = [trA(t)]W(t)$, откуда и следует формула. ■

5.2 Фундаментальные матрицы и их описание

Рассмотрим снова однородную линейную систему (5.2). Мы уже ввели понятие фундаментальной системы решений этой системы. Для многих вопросов теории очень удобно ввести матрицу, столбцами которой являются компоненты вектор-функций, входящих в фундаментальную систему решений. Любая такая матрица $\Phi(t)$ называется *фундаментальной матрицей решений* системы. Тем самым, фундаментальная матрица невырождена (ее определитель есть определитель Вронского). Поскольку столбцы этой матрицы являются решениями, то сама матрица является решением следующего матричного дифференциального уравнения:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \tag{5.4}$$

которое нужно понимать так: k-й столбец X'_k матрицы слева тождественно при всех t равен k-му столбцу $A(t)X_k(t)$ справа, поскольку X_k является решением системы. Поэтому все столбцы матрицы справа равны столбцам матрицы слева, т.е. эти матрицы равны.

Данная система дифференциальных уравнений имеет много фундаментальных матриц, т.к. имеется много фундаментальных систем решений. Опишем все фундаментальные матрицы данной системы, тем самым мы опишем и все фундаментальные системы решений.

Предложение 5.2 *Если* $\Phi(t)$ *является фундаментальной матрицей системы* (5.2)*, то все остальные ее фундаментальные матрицы имеют вид* $\Phi(t)C$*, где* C *– постоянная невырожденная матрица.*

Доказательство. Тот факт. что $\Phi(t)C$ является фундаментальной матрицей, проверяется непосредственно подстановкой в матричное уравнение (5.4). Теперь пусть дана другая фундаментальная матрица $\Psi(t)$. Рассмотрим невырожденную матрицу $\Phi^{-1}(t)\Psi(t)$ и покажем, что она постоянна (не зависит от t), тогда утверждение будет доказано. Продифференцируем произведение этих матриц. Производная произведения матриц вычисляется по формуле:

$$[\Phi_1\Phi_2]' = \Phi_1'\Phi_2 + \Phi_1\Phi_2'.$$

Для доказательства этой формулы нужно продифференцировать формулу для вычисления элемента матрицы-произведения двух матриц через элементы матриц-сомножителей. Производная обратной матрицы вычисляется дифференцированием тождества

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(t) \equiv E : \quad [\Phi^{-1}(t)]' = -\Phi^{-1}(t)A(t).$$

Поэтому получаем $[\Phi^{-1}(t)\Psi(t)]' = -\Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) \equiv \hat{0}$. ■

5.3 Двумерные линейные системы и уравнение Риккати

Напомним, что уравнением Риккати называется (нелинейное) скалярное уравнение следующего вида

$$x' = f(t) + g(t)xh(t)x^2,$$

где функции f, g, h определены и непрерывны на некотором общем интервале $t = in(\alpha, \beta)$. Решения системы двух линейных однородных уравнений первого порядка тесно связаны с решениями уравнения Риккати, которое определяется этой системой. Рассмотрим двумерную линейную систему

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)y,\ \dot{y} = c(t)x + d(t)y,$$

с непрерывными функциями a, b, c, d, определенными на общем интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим в начальный момент времени $t_0 \in (\alpha, \beta)$ прямую $y = k_0x$ и найдем уравнение движения этой прямой, определяемое решениями заданной системы. Для этого рассмотрим пространство $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^2$ переменных (t, x, y) и выпустим из каждой точки (x_0, y_0) прямой $y = k_0x$ на плоскости $t = t_0$ решение с начальными условиями (t_0, x_0, y_0) и выясним положение этих точек в момент времени $t \in (\alpha, \beta)$. Поскольку отображение $(x_0, y_0) \to (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ линейно и задается фундаментальной матрицей системы, то образ прямой $y = k_0x$ при фиксированных t_0, t будет прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $k(t),\ k(t_0) = k_0$. Предположим сначала, для простоты, что во время движения прямая не проходит через вертикальное положение ($k(t) \neq \pm\infty$). Тогда уравнение для изменения углового коэффициента получается следующим образом:

$$k'(t) = \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' = \frac{y'x - yx'}{x^2} = \frac{c(t)x^2 + [d(t) - a(t)]xy - b(t)y^2}{x^2} = c(t) + [d(t) - a(t)]k - b(t)k^2,$$

т.е. изменение углового коэффициента прямой описывается уравнением Риккати. Более правильно считать k координатой на проективной прямой[1] $\mathbb{R}P^1 = S^1$. Тогда интегральные кривые полученного дифференциального уравнения Риккати являются кривыми на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}$, эти кривые могут обходить цилиндр, являясь винтовыми линиями на нем. Это соответствует тому, что функция $k(t)$ при некоторых t может обращаться в бесконечность (в окрестности этой точки следует использовать уравнение для $k_1 = 1/k$).

Пример 5.2 *Рассмотрим уравнение Риккати с постоянными коэффициентами, у которого соответствующий квадратный трехчлен не имеет действительных корней*

---

[1] Проективная прямая – это множество, элементами которого являются прямые на плоскости (x, y), проходящие через начало координат. Прямая задается своим угловым коэффициентом $k = y/x$, если она не совпадает с прямой $x = 0$. Прямая $x = 0$ и все прямые, близкие к ней по углу, задаются отношением $k_1 = 1/k = x/y$. Если прямая не совпадает с прямыми $x = 0$ и $y = 0$, то она может быть задана и координатой k и k_1, при этом пересчет координат будет $k_1 = 1/k$. Очевидно, что склейка двух прямых, на одной из которых координатой является k, а на другой k_1, в соответствии с равенством $k_1 = 1/k$, дает окружность.

(т.е. дискриминант отрицателен). Тогда заменой переменных уравнение превращается в уравнение Риккати следующего вида: $k' = a + k^2 = 0$, $a > 0$. Его решение с начальным условием k_0 при $t = 0$ имеет вид:

$$k(t) = \frac{k_0\sqrt{a} + a\,\mathrm{tg}(t/\sqrt{a})}{\sqrt{a} - k_0\,\mathrm{tg}(t/\sqrt{a})} = \frac{k_0\sqrt{a}\cos(t/\sqrt{a}) + a\sin(t/\sqrt{a})}{\sqrt{a}\cos(t/\sqrt{a}) - k_0\sin(t/\sqrt{a})}.$$

Функция $k(t)$ обращается в бесконечность, когда знаменатель равен нулю, т.е. при $t = t_n = \mathrm{arctg}(\sqrt{a}/k_0) + n\pi$. Нетрудно проверить, что при $t = t_n$ получаем $k_1(t_n) = 0$, и решение продолжается через точку $(k_1, t_n) = (0, t_n)$, поскольку $k_1' = -k'/k^2 = -1 - ak_1^2$.

Такой подход, состоящий в предварительном изучении уравнения Риккати, связанного с системой, особенно полезен при изучении линейных уравнений с периодическими коэффициентами, а также – с квазипериодическими [?], примером такой функции является $\cos t + \cos(t\sqrt{2})$ (см. [4]).

5.4 Неоднородные системы и вариация постоянных

Нашей следующей задачей будет получение общего решения неоднородной системы. Рассмотрим какое-нибудь решение $X_0(t)$ неоднородной системы n-го порядка (5.1). Тогда сумма вектор-функции $X_0(t)$ и любого решения однородной системы является решением неоднородной системы. Более того, справедливо простое утверждение

Предложение 5.3 *Если $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ – фундаментальная система решений однородной системы, а $X_0(t)$ – решение неоднородной системы, то общее решение неоднородной системы имеет вид:*

$$X(t) = c_1Y_1(t) + \cdots + c_nY_n(t) + X_0(t), \tag{5.5}$$

где $(c_1, \ldots, c_n)$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Сначала покажем, что если $X(t)$ – какое-то решение неоднородной системы, то разность $X(t) - X_0(t)$ есть решение однородной системы. Это доказывается подстановкой этой разности вектор-функций в однородную систему: $X'(t) - X_0'(t) = A(t)X(t) - A(t)X_0(t) = A(t)[X(t) - X_0(t)] = f(t) - f(t) = \underline{0}$. Поэтому по уже доказанному получаем, что существует единственный набор постоянных $(c_1, \ldots, c_n)$ из поля $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) для которого выполнено равенство:

$$X(t) - X_0(t) = c_1Y_1(t) + \cdots + c_nY_n(t).$$

Теперь пусть имеется произвольное решение $X(t)$ неоднородной системы. Зафиксируем $t_0 \in (a, b)$, тогда решение определяет начальный вектор $Y_0 = X(t_0)$. Неоднородная линейная система алгебраических уравнений относительно неизвестных $(c_1, \ldots, c_n)$

$$c_1Y_1(t_0) + \cdots + c_nY_n(t_0) = Y_0 - X_0(t_0)$$

имеет единственное решение $(c_1^0, \dots, c_n^0)$, т.к. ее определитель, являющийся определителем Вронского в точке t_0, отличен от нуля. По уже доказанному, сумма $c_1^0 Y_1(t) + \cdots + c_n^0 Y_n(t) + X_0(t)$ является решением неоднородной системы, и при $t = t_0$ оно равно Y_0. По теореме единственности решения с данным начальным условием, полученное решение совпадает с $X(t)$.$\blacksquare$

Таким образом, если мы знаем фундаментальную систему решений $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ однородной системы, то для нахождения общего решения неоднородной системы достаточно найти частное решение неоднородной системы. Тем самым формула (5.5) дает общее решение неоднородной системы. Получим формулу *вариации произвольных постоянных* для поиска частного решения. Рассмотрим следующую замену переменных $X = (x_1, \dots, x_n)^\top \to C = (c_1, \dots, c_n)^\top$: $X = U(t)C$, где $U(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы, т.е. ее столбцами являются векторы $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$. Дифференцируя соотношение для замены и используя матричное тождество $\dot{U}(t) \equiv A(t)U(t))$, запишем систему в новых координатах:

$$\dot{C} = U^{-1} f.$$

Поэтому в новых переменных общее решение имеет вид: $C(t) = C_0 + \int U^{-1}(t) f(t) dt$. Полагая $C_0 = \hat{0}$, получим частное решение исходной системы в виде

$$X_0(t) = U(t) \int_{t_0}^{t} U^{-1}(s) f(s) ds = \int_{t_0}^{t} U(t,s) f(s) ds, \text{ где } U(t,s) = U(t)U^{-1}(s),\ U(t,t) = E.$$

Полученная формула для частного решения и называется формулой *вариации произвольных постоянных.* С помощью этой формулы запишем решение линейной неоднородной системы с заданным начальным вектором x_0 при $t = t_0$:

$$x(t; t_0, x_0) = U(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s) f(s) ds. \tag{5.6}$$

Пример 5.3 *Рассмотрим систему:* $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + 1/\sin t,\ t \in (0, \pi)$. *Однородная система сводится к уравнению* $\ddot{x} + x = 0$, *поэтому ее фундаментальной системой решений являются функции* $\cos t,\ \sin t$, *вторые координаты векторов-решений вычисляются из первого уравнения* $y = x'$, *т.е. фундаментальная матрица* $U(t)$ *имеет вид*

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Поэтому для поиска c_1, c_2 *получаем систему*

$$\dot{c}_1 = -1,\ \dot{c}_2 = \operatorname{ctg} t,$$

решение которой имеет вид $c_1 = -t + c_1^0,\ \ c_2 = \ln \sin t + c_2^0$, *а общее решение исходной системы записывается в виде* $x(t) = c_1^0 \cos t + c_2^0 \sin t - t \cos t + \sin t \ln \sin t$, $y(t) = -c_1^0 \sin t + c_2^0 \cos t + t \sin t + \cos t \ln \sin t$.

Глава 6

Линейные системы с постоянными коэффициентами

Нашей следующей задачей будет изучение систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Мы получим явное представление фундаментальной матрицы однородной системы. Это, фактически, единственный случай, когда фундаментальную систему решений можно вычислить в явном виде (ниже будет объяснено, в каком смысле следует понимать это утверждение).

В векторной форме однородная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\dot{x} = Ax, \tag{6.1}$$

где элементы постоянной $n \times n$ матрицы A принадлежат полю $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Нашей задачей будет построение фундаментальной системы решений для этой системы. Следуя Л. Эйлеру, будем искать решение этой системы в виде

$$x(t) = e^{\lambda t} c,$$

где ненулевой вектор c и постоянная λ должны быть определены. Если эта вектор-функция является решением системы, то при подстановке в систему мы получим тождество $\lambda e^{\lambda t} c \equiv e^{\lambda t} Ac$ относительно независимой переменной t. Отсюда следует равенство $\lambda c = Ac$ или $(A - \lambda E)c = \underline{0}$. Поскольку вектор c должен быть ненулевым, то матрица $A - \lambda E$ должна иметь нулевой определитель. Следовательно, λ должно быть собственным значением, а c – соответствующим ему собственным вектором матрицы A. Обратно, если λ – собственное значение, а c – соответствующий ему собственный вектор матрицы A, то вектор-функция $\exp[\lambda t]c$ является решением системы.

Полученное уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ для поиска соответствующего числа λ в решении называется *характеристическим уравнением* матрицы A, а его левая часть – *характеристическим многочленом* матрицы A. Таким образом, получаем следующий метод построения решений системы:

- по матрице A системы (6.1) записываем ее характеристическое уравнение и находим его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (среди них могут быть одинаковые, а также мнимые даже в случае вещественной матрицы);

- для каждого корня λ_k находим соответствующий собственный вектор c_k и получаем решение $x_k(t) = \exp[\lambda_k t]c_k$.

6.1 Случай простых корней характеристического уравнения

Будем сначала предполагать поле коэффициентов комплексным $\mathbb{C}$. Тогда, если характеристическое уравнение имеет только простые корни, то по основной теореме алгебры многочлен n-ой степени имеет ровно n корней.

Предложение 6.1 *Если характеристическое уравнение системы n линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет n простых корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, а $c_1, \dots, c_n$ – соответствующие собственные векторы матрицы A, то вектор-функции $\exp[\lambda_k t]c_k$, $k = 1, \dots, n$, составляют фундаментальную систему решений.*

Доказательство. Известный результат линейной алгебры [1, 3] говорит, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы. Используя решения $\exp[\lambda_k t]c_k$ в качестве столбцов, составим матрицу. Определитель этой матрицы есть определитель Вронского системы решений и он отличен от нуля, т.к. при $t = 0$ столбцы соответствующей матрицы являются n линейно независимыми собственными векторами.■

Итак, **в случае простых корней характеристического уравнения общее решение системы имеет вид**:

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} c_n,$$

где произвольные постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ **принадлежат полю** $\mathbb{C}$.

Пример 6.1 *Решить систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z. \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$$

Характеристический многочлен матрицы системы равен

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0,$$

собственные векторы: $(1,1,0)^\top$, $(0,1,2)^\top$, $(1,0,-1)^\top$, *общее решение:*

$$\alpha_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.2 Случай кратных корней характеристического уравнения

Более сложным является случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. Здесь уравнение имеет только $m < n$ различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, каждое кратности соответственно $k_1, \dots, k_m$, $k_1 + \dots + k_m = n$. Для каждого корня λ_i существует хотя бы один собственный вектор c_i, но других собственных векторов может и не быть. Поэтому метод Эйлера дает только m линейно независимых решений.

Пример 6.2 *Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет двукратное собственное значение 1 и только один собственный вектор $(1, 0)^\top$.

Пример 6.3 *Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет трехкратное собственное значение 1 и двумерное подпространство собственных векторов, порожденное линейно независимыми векторами $(1, 0, 0)^\top$, $(0, 1, 0)^\top$.

Чтобы получить недостающие решения фундаментальной системы, мы будем приводить систему (6.1) к более простому виду с помощью замены координат вида $x = By$. Тогда в новых переменных y система запишется: $\dot{y} = B^{-1}ABy$. Будем подбирать матрицу B так, чтобы подобная ей матрица $B^{-1}AB$ преобразованной системы имела возможно более простой вид. Как известно из линейной алгебры, наиболее простой является жорданова форма матрицы. Вспомним некоторые результаты теории жордановой формы матрицы [1, 3].

Теорема 6.1 *Для всякой матрицы A с комплексными элементами существует такая невырожденная матрица B, что матрица $B^{-1}AB$ имеет жорданов блочно-диагональный вид*

$$J = \operatorname{diag}(J_0, J_1, \dots, J_s)$$

со следующими матрицами ("жордановыми блоками") $J_0, J_1, \dots, J_s$, стоящими на диагонали:

- $J_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_0})$ *диагональная с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ на главной диагонали;*

- *каждая матрица J_k, $k > 0$, размера $p \times p$, $p \geq 2$, имеет вид*

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + N,$$

где λ – одно из собственных значений матрицы A кратности не меньше двух, E – единичная $p \times p$ матрица, а матрица N обладает свойством $N^p = \hat{0}$.

При $k > 0$ матрица J_k имеет единственный с точностью до умножения на постоянную собственный вектор $h = (1, 0 \ldots, 0)^\top$. Чтобы получить стандартный набор p независимых векторов, связанный с данным жордановым блоком, вводятся еще $p - 1$ векторов с помощью соотношений:

$$J_k h_1 = \lambda h_1 + h,\ J_k h_2 = \lambda h_2 + h_1,\ \ldots,\ J_k h_{p-1} = \lambda h_{p-1} + h_{p-2}, \tag{6.2}$$

или, используя обозначение $J_k - \lambda E = N$, получаем:

$$N h_1 = h,\ N^2 h_2 = h_1,\ \ldots,\ N^{p-1} h_{p-1} = h_{p-2}. \tag{6.3}$$

Векторы $h_1, \ldots, h_{p-1}$ называются *присоединенными* к h.

Рассмотрим теперь, как действует матрица J в пространстве $\mathbb{C}^n$. В соответствии с разложением матрицы J на блоки, пространство разлагается в прямую сумму подпространств $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, где V_0 – это подпространство векторов, у которых на всех местах, кроме первых p_0, стоят нули, V_1 – это подпространство векторов, у которых нули стоят на первых p_0 местах и на всех местах, кроме тех, которые соответствуют блоку J_1, и т.д. Понятно, что матрица J, действуя на вектор из V_k, переводит его в вектор из того же V_k, т.е. подпространства V_k *инвариантны относительно действия матрицы* J. Вспомним теперь, что в исходных переменных x матрицей системы является A, а переход от исходных переменных к новым осуществляется заменой $x = By$, после чего матрица системы в переменных y становится $J = B^{-1}AB$. Подпространства V_k в переменных y являются подпространствами $L_k = BV_k$ в переменных x и они инвариантны относительно матрицы A. Действительно, пусть $x \in L_k$, тогда $Ax = ABy = BJy = By' = x'$, $y, y' \in V_k$. Отсюда получаем, что уравнения для поиска собственного вектора h и присоединенных векторов $h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}$ для одного блока размера p в исходных переменных превращаются в следующие:

$$Ah = \lambda h,\ Ah_1 = \lambda h_1 + h,\ Ah_2 = \lambda h_2 + h_1, \ldots, Ah_{p-1} = \lambda h_{p-1} + h_{p-2}.$$

Эти уравнения можно использовать при поиске собственных и присоединенных векторов для данного собственного значения. Дело в том, что матрица B, приводящая матрицу A к жордановой форме заранее неизвестна!

Вернемся к случаю одного жорданова блока. Решая уравнения (6.3), получаем координатную запись векторов h_i (легко видеть, что при каждом возведении в степень матрицы N линия из единиц, параллельная диагонали, сдвигается на единицу вправо вверх):

$$h_1 = (0, 1, \ldots, 0)^\top, \ldots,\ h_{s-1} = (0, 0, \ldots, 1)^\top,$$

в частности, набор s векторов $h, h_1, \ldots, h_{s-1}$ независим.

Итак, пусть характеристическое уравнение имеет кратные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ кратностей соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Предположим теперь, что матрица B, приводящая к жордановой нормальной форме, известна. Сделаем в системе (6.1) замену переменных $x = By$. В новых переменных система записывается в виде $\dot{y} = B^{-1}ABy$, т.е. матрица системы имеет жорданов вид. Поскольку все элементы жордановой матрицы, кроме тех, которые входят в блоки, равны нулю, то система распадается на независимые подсистемы меньшей размерности: каждая из этих подсистем имеет размерность, равную размерности соответствующего блока, а число независимых подсистем равно числу самих блоков в жордановой форме матрицы. Для нахождения решений нужно проинтегрировать каждую из подсистем и из них "собрать" решение полной системы. Здесь следует иметь в виду (и это одна из сложностей при получении решений), что одному собственному значению матрицы A может отвечать несколько жордановых блоков, и кратность этого собственного значения равна сумме размеров всех блоков, куда входит данное собственное значение. Все простые собственные значения, а также кратные собственные значения, для которых имеются одномерные жордановы блоки, входят в блок J_0.

Поскольку указанные подсистемы не связаны, то рассмотрим систему с одним жордановым блоком и обозначим входящие в нее переменные через $u_1, u_2, \ldots, u_s$. Тогда система приобретает вид:

$$\dot{u}_1 = \lambda u_1 + u_2,\ \dot{u}_2 = \lambda u_2 + u_3,\ \ldots,\ \dot{u}_{s-1} = \lambda u_{s-1} + u_s,\ \dot{u}_s = \lambda u_s$$

или в векторной форме

$$\dot{u} = \lambda E u + N u, \tag{6.4}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_s)^\top$. В полученной системе перейдем к новым переменным $c : u = \exp[\lambda t]c$. В новых переменных система запишется $\dot{c} = Nc$. Интегрируя эту систему снизу вверх с начальными условиями $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_s^0)$ при $t = 0$, получаем следующий вид решений:

$$c_s(t) = c_s^0,\ c_{s-1}(t) = c_{s-1}^0 + c_s^0 t, \ldots, c_1(t) = c_1^0 + tc_2^0 + \cdots + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}c_s^0,$$

или в векторной форме $c(t) = L(t)c^0$ с матрицей $L(t)$ вида

$$L(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = E + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}N^{s-1}.$$

Поэтому решение в переменных u имеет вид: $u(t) = e^{\lambda t}L(t)c^0$. Перепишем полученные решения в виде линейной комбинации s решений с постоянными коэффициентами $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_s^0$:

$$u(t) = c_1^0 \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2^0\mathrm{e}^{\lambda t}[t\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}] + \cdots + c_s^0\mathrm{e}^{\lambda t}[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}].$$

Теперь используем введенные выше собственный и присоединенные векторы матрицы J_k. Тогда полученное представление для решений можно записать в следующей форме:

$$u(t) = c_1^0 e^{\lambda t} h + c_2^0 e^{\lambda t}[th + h_1] + \cdots + c_s^0 e^{\lambda t}[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}h + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}h_1 + \cdots + th_{s-2} + h_{s-1}].$$

Лемма 6.1 *Для системы* $\dot{u} = J_k u$ *вектор-функции* $e^{\lambda t}h, e^{\lambda t}[th + h_1], \ldots, e^{\lambda t}[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}h + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}h_1 + \cdots + th_{s-2} + h_{s-1}]$ *являются линейно независимыми решениями.*

Доказательство. Обозначим $h_1(t) = th + h_1, \ldots, h_{s-1}(t) = \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}h + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}h_1 + \cdots + th_{s-2} + h_{s-1}$. Тогда справедливы равенства: $h_i'(t) = h_{i-1}(t)$, $i = 1, \ldots, s-1$, где обозначено $h_0 = h$. Поэтому получаем: $(e^{\lambda t}h_i(t))' = \lambda e^{\lambda t}h_i(t) + e^{\lambda t}h_{i-1}(t)$. С другой стороны, используя равенства (6.2) и определение $h_i(t)$, имеем: $J_k e^{\lambda t}h_i(t) = e^{\lambda t}J_k h_i(t) = e^{\lambda t}[\lambda h_i(t) + h_{i-1}(t)]$. Отметим, что при $t = 0$ построенные s решений превращаются в векторы $e_1 = (1, 0 \ldots, 0)^\top$, $e_2 = (0, 1 \ldots, 0)^\top, \ldots, e_s = (0, 0 \ldots, 1)^\top$. Поэтому полученные решения являются линейно независимыми решениями подсистемы (6.4), а их линейная комбинация есть общее решение этой подсистемы, т.к. число найденных линейно независимых решений равно порядку системы. ■

Для матрицы J_0 система распадается на систему из p_0 скалярных не зависимых друг от друга однородных уравнений. Чтобы теперь "собрать" из полученных решений подсистем решение исходной системы в переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$, представим вектор y в виде прямой суммы n-мерных векторов $y^0, y^1, \ldots, y^s$, причем вектор y^0 имеет нулевые координаты на всех местах, кроме быть может первых p, соответствующих блоку J_0, у вектора y^1 ненулевыми могут быть только координаты с номерами от $p+1$ до $p + m_1$, и т.д., до последнего вектора y^s, у которого ненулевыми могут быть только координаты с номерами от $p + m_1 + \cdots + m_{s-1}$ до $p + m_1 + \cdots + m_{s-1} + m_s$. Теперь в подпространстве векторов y^0 размерности p ограничение исходной системы совпадает с подсистемой, определяемой матрицей J_0, в подпространстве векторов y^1 – с системой, определяемой матрицей J_1 и т.д., в подпространстве векторов y^s – с системой, определяемой матрицей J_s. Выбирая при $t = 0$ начальные векторы единичными базисными в соответствующем подпространстве, как выше, получим набор решений, образующих фундаментальную систему в случае кратных корней характеристического уравнения, поскольку сумма размерностей всех жордановых клеток для данного собственного значения равна кратности этого корня характеристического уравнения.

Итак, получаем следующий алгоритм поиска фундаментальной системы решений при наличии кратных корней характеристического уравнения:
находим корни характеристического уравнения и для каждого кратного корня, в соответствии с его кратностью и набором жордановых клеток, строим серии собственных и присоединенных векторов $h, h_1, \ldots, h_{s-1}$, при этом для одного корня может быть несколько таких серий; затем по каждой серии строим соответствующий набор решений как в лемме 6.1, тогда объединение всех таких решений дает полный набор фундаментальных решений. Окончательно, возвращаясь к исходным координатам, получаем следующую теорему

Теорема 6.2 *Общее решение системы $\dot{x} = Ax$ есть вектор-функция вида*

$$x(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_m(t)e^{\lambda_m t},$$

где $P_i(t)$ – векторные полиномы степени на единицу меньше размера наибольшей жордановой клетки, соответствующей характеристическому корню λ_i. В этом представлении для общего решения n произвольных постоянных входят в коэффициенты многочленов $P_i(t)$.

Нахождение базиса в данном конечномерном векторном пространстве, в котором матрица заданного линейного преобразования имеет жорданову форму – задача линейной алгебры и подробно описана в [1, **?**]. Этот базис состоит из набора всех собственных и присоединенных векторов данной матрицы.

Пример 6.4

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0, (\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2),$$

1) *для собственного значения $\lambda = 1$ собственный вектор есть $h = (1,1,1)^\top$, а система линейных уравнений для поиска собственных векторов имеет вид $-y + z = 0,\ x - z = 0,\ -y + z = 0$; ее пространство решений одномерно, поэтому нужно искать присоединенный вектор из уравнения $(A - \lambda E)h_1 = h$, т.е. $h_1 = (1,-1,0)^\top$;* 2) *собственный вектор для $\lambda_2 = 2$ равен $(1,0,1)^\top$, и общее решение:*

$$c_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.5

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

Характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3.$$

Собственное подпространство для $\lambda = 1$ здесь двумерно, т.к. система для поиска собственных векторов состоит из одного уравнения $x - y - z = 0$, решения которого *образуют двумерное подпространство. В качестве базиса в собственном подпространстве можно взять $h_1 = (1, 0, 1)^\top$, $h_2 = (1, 1, 0)^\top$. Поэтому для поиска третьего вектора нужно искать присоединенный вектор из уравнения $(A - E)h_3 = \alpha h_1 + \beta h_2$, где постоянные α, β выбираются так, чтобы выполнялись условия теоремы Кронекера-Капелли [3], например, $\alpha = -1, \beta = 2$, тогда в качестве решения системы можно взять $h_3 = (0, 0, -1)^\top$. Поэтому существует одномерная клетка, соответствующая собственному значению 1 ($J_0 = 1$), и двумерная клетка J_1 для него же. Таким образом, общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:*

$$c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

6.3 О связи линейных дифференциальных уравнений и систем

В предыдущих главах были изучены фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. Выше в этой главе мы изучили фундаментальные системы решений систем n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Поскольку линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами стандартной заменой переменных сводится к системе n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, интересно выяснить связи между решениями в скалярной и векторной форме и понять, почему в случае кратных корней характеристического уравнения фундаментальная система решений для системы, соответствующей уравнению n-го порядка, имеет более простой вид, чем для системы общего вида. Понятно, что это как-то связано со специальными свойствами матрицы системы, которая получается после замены переменных. Напомним, что в случае линейного дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ замена $y = x_1,\ y' = x_2,\ \dots, y^{(n-1)} = x_n$ приводит уравнение к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$x_1' = x_2,\ x_2' = x_3, \dots, x_{n-1}' = x_n,\ x_n' = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n,$$

матрица которой имеет специальный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Такая матрица обладает некоторым указанным ниже свойством, которое объясняет, почему для уравнения каждому k-кратному корню λ характеристического уравнения соответствует единственная серия в фундаментальной системе решений:

$$\exp[\lambda t],\ t\exp[\lambda t], \dots, t^{k-1}\exp[\lambda t]. \tag{6.6}$$

Напомним, что для матрицы A в $\mathbb{C}^n$ имеется инвариантное подпространство, натянутое на все собственные и присоединенные векторы для заданного собственного значения λ. Из структуры жордановой формы матрицы следует, что *число всех жордановых блоков, соответствующих этому собственному значению, равно размерности подпространства собственных векторов*, т.к. каждому блоку соответствует единственный (с точностью до нормировки) собственный вектор. Определим размерность собственного подпространства для собственного значения λ. Матрица $A - \lambda E$ содержит матрицу размера $(n-1) \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

ранг которой равен $n-1$, поэтому ранг самой матрицы $A - \lambda E$ равен либо n, либо $n-1$. Но поскольку λ – собственное значение, то ранг не может равняться n, поэтому он равен $n-1$. Следовательно пространство решений системы $(A - \lambda E)x = \underline{0}$, т.е. подпространство собственных векторов, одномерно и имеется только один жорданов блок для собственного значения λ. Итак, для системы с матрицей вида (6.5) для корня λ кратности k имеется единственная серия в фундаментальной системе решений:

$$\mathrm{e}^{\lambda t}h,\ \mathrm{e}^{\lambda t}[th + h_1], \dots, \mathrm{e}^{\lambda t}[t^{k-1}h + t^{k-2}h_1 + \ldots + h_{k-1}],$$

где h – собственный вектор для собственного значения λ, а $h_1, \dots, h_{k-1}$ – присоединенные векторы для этого собственного значения:

$$Ah = \lambda h,\ Ah_1 = \lambda h_1 + h,\ Ah_2 = \lambda h_2 + h_1, \dots, Ah_{k-1} = \lambda h_{k-1} + h_{k-2}.$$

Возьмем в полученных вектор-функциях первые координатные функции, они составляют систему из k линейно независимых решений (6.6) линейного однородного уравнения n-го порядка.

6.4 Матричная экспонента и ее свойства

Получим теперь удобное в теоретических исследованиях представление для фундаментальной матрицы системы с постоянными коэффициентами. Его польза будет ясна далее, при исследовании систем с периодическими коэффициентами. Формально оно позволяет записать фундаментальную матрицу в виде, аналогичном скалярному, через матричную экспоненциальную функцию.

В алгебре для любой матрицы A и заданного полинома с комплексными коэффициентами $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ определялся полином от матрицы A, как матрица вида $P(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n$. Аналогично этому определению, можно для заданного всюду сходящегося степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ определить матричный ряд $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$. В частности, рассмотрим степенной ряд для экспоненты и определим экспоненту матрицы A как степенной матричный ряд

$$\exp[A] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{6.8}$$

Напомним некоторые факты относительно матричных рядов. Ниже будем рассматривать матрицы с комплексными элементами. Предполагается, что в линейном пространстве квадратных $n \times n$ матриц с обычными операциями сложения матриц и умножения на числа из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ задана норма $|| \cdot ||$, порожденная какой-либо нормой вектора из $\mathbb{C}^n$ (см. Дополнение 1).

Пусть дана последовательность матриц $A_n = (a_{ij}^{(n)})$. Матричный ряд $\sum_n A_n$ называется *сходящимся* к матрице A, если

$$||\sum_{n=1}^{N} A_n - A|| \to 0, \quad \text{при } N \to \infty.$$

Это эквивалентно условию, что каждый элемент $s_{ij} = \sum a_{ij}^{(n)}$ матрицы в конечной сумме ряда $\sum A_n$ сходится к соответствующему элементу a_{ij} матрицы A. Достаточным условием сходимости матричного ряда является следующее:

Лемма 6.2 *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *сходится, если ряд из норм* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||A_n||$ *сходится.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства: $|a_{ij}| \leq ||A||$. Поэтому в матрице – сумме ряда – каждый элемент есть сумма сходящегося ряда. ■

Если элементы матрицы – функции, заданные на некотором интервале, то этот признак дает равномерную сходимость матриц, если $||A_n|| \leq \alpha_n$ и числовой ряд $\sum_n \alpha_n$ сходится. Из доказанной леммы следует, что для любой матрицы A экспоненциальный матричный ряд сходится по норме в пространстве матриц в силу неравенства $||A^n|| \leq ||A||^n$:

$$||\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ||A||^k = \exp[||A||].$$

Кроме того, из определения экспоненты следует формула

$$\exp[(t+s)A] = \exp[tA] \exp[sA] = \exp[sA] \exp[tA].$$

На самом деле из формулы для экспоненты следует более общее утверждение: *если две квадратные матрицы A, B одинакового размера коммутируют*, т.е. $A\,B = B\,A$, то верна формула:

$$\exp[A + B] = \exp[A] \exp[B] = \exp[B] \exp[A].$$

Это получается из следующего рассуждения: если A, B числа, то ряды справа и слева одинаковы, что получается перемножением рядов справа с использованием биномиальных формул, т.е. числовые коэффициенты при $A^m B^n$ в рядах справа и слева совпадают. Если матрицы коммутируют, то также справедливы биномиальные формулы, поэтому коэффициенты матричных рядов справа и слева при $A^m B^n$ одинаковы.

Для матричной экспоненты справедлива еще одна полезная формула, которая будет использована ниже: если матрица D невырождена, то

$$\exp[D^{-1}AD] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(D^{-1}AD)^k = D^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k)D = D^{-1}\exp[A]D. \tag{6.9}$$

Важное свойство невырожденной матрицы дает является следующая известная теорема из теории матриц [1], доказательство которой, для удобства читателя, приведено в Дополнении 2 ниже.

Теорема 6.3 *Любая невырожденная комплексная матрица B имеет логарифм, т.е. такую комплексную матрицу $L = \operatorname{Ln} B$, которая удовлетворяет соотношению $\exp[L] = B$.*

Эта теорема будет использована в следующей главе при доказательстве теоремы Флоке.

Пусть теперь дана линейная дифференциальная система (6.1) с постоянными коэффициентами. Фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ будем называть нормированной при $t = t_0$, если $\Phi(t_0) = E$.

Предложение 6.2 *Нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы задается матричной экспонентой матрицы tA:*

$$\Phi(t) = \exp[tA] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k. \tag{6.10}$$

Для любой матрицы A этот матричный ряд сходится по норме в пространстве матриц и является аналитической функцией от t.

Доказательство. Как и в анализе, если ряд функций сходится равномерно и ряд из производных сходится, то этот ряд можно дифференцировать. Оценим члены ряда справа в (6.10), предполагая $|t| \le r$:

$$||\frac{t^m A^m}{m!}|| = \frac{|t|^m}{m!}||A \cdot A \cdot \ldots \cdot A|| \le \frac{|r|^m}{m!}||A||^m = \alpha_m, \quad \sum_1^{\infty} \alpha_m = \sum_1^{\infty} \frac{(r||A||)^m}{m!} = e^{r||A||} - 1.$$

Дифференцируя этот ряд, получаем тождество

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv A\Phi(t) \equiv \Phi(t)A,$$

таким образом, имеется равномерная сходимость ряда и его производной, т.е. ряд можно почленно дифференцировать. Поэтому $\Phi(t)$ является матричным решением уравнения, т.е. его столбцы состоят из решений. Из того же ряда получаем $\Phi(0) = E$, тем самым $\Phi(t)$ является нормированной при $t = 0$ фундаментальной матрицей. ■

Возникает естественный вопрос: как искать экспоненту матрицы? Вычислить сумму матричного ряда весьма проблематично, но доказанное утверждение дает способ вычисления. Поскольку экспонента e^{tA} есть нормированная фундаментальная матрица решений системы с матрицей A, то найдем фундаментальную систему решений для следующих n начальных векторов при $t = 0 : e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\top, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^\top$. Полученные решения образуют фундаментальную систему решений, которые составляют фундаментальную матрицу, она обращается в единичную при $t = 0$, т.е. совпадает с e^{tA}. Полезное следствие доказанного утверждения:

Следствие 6.1 $\det(\mathrm{e}^{tA}) = \mathrm{e}^{(trA)t}$, *где* $trA = a_{11} + a_{22} + \cdot + a_{nn}$.

Доказательство. Применим формулу Лиувилля-Остроградского, пользуясь тем, что $\det(\mathrm{e}^{tA})$ есть вронскиан $W(t)$ фундаментальной системы решений – столбцов матрицы e^{tA}, а $W(0) = E$. ■

Полученная формула (6.10) для фундаментальной матрицы дифференциальной системы с постоянными коэффициентами очень удобна при теоретических исследованиях. Однако если нужно исследовать поведение решений конкретной системы, то полученная формула не эффективна. Обычный метод изучения здесь – изложенный выше поиск решений в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений, которые ищутся методом Эйлера через разложение по собственным и присоединенным векторам матрицы A. Все асимптотические свойства решений определяются собственными значениями матрицы, их кратностями и жордановой формой матрицы.

6.5 Вещественные решения вещественных систем

Во многих задачах, связанных с решением системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с вещественными постоянными коэффициентами, нужно найти вещественные решения и построить вещественную фундаментальную матрицу решений. Метод решения систем, изложенный выше, дает, вообще говоря, комплексные решения, т.к. даже у вещественной матрицы могут быть мнимые корни характеристического уравнения и для них мнимые собственные и присоединенные векторы. Возникает вопрос: как получить вещественные решения из мнимых. Решение этой задачи вытекает из следующей леммы, аналогичной лемме 3.2.

Лемма 6.3 *Если вещественная линейная система $\dot{x} = Ax$ имеет комплексное решение $x(t) = u(t) + iv(t)$, где u, v – вещественные вектор-функции, то каждая из этих вектор-функций является решением системы.*

Доказательство. Поскольку $x(t) = u(t) + iv(t)$ решение, то подстановка в систему с использованием вещественности матрица A дает тождество: $u'(t) + iv'(t) \equiv Au(t) + iAv(t)$. Приравнивая действительные и мнимые части этого комплексного векторного тождества, получаем утверждение леммы.■

Теперь вспомним, что для каждого мнимого характеристического корня λ кратности k имеем набор мнимых собственных и присоединенных векторов $h_1^1, h_2^1, \dots, h_{s_1}^1$ (для жордановой клетки размера $s_1 \times s_1$), $h_1^2, h_2^2, \dots, h_{s_2}^2$ (для жордановой клетки размера $s_2 \times s_2$),..., $h_1^r, h_2^r, \dots, h_{s_r}^r$ (для жордановой клетки размера $s_r \times s_r$), причем $s_1 + \dots + s_r = k$. Поскольку матрица A – вещественная, то имеется комплексно сопряженный корень $\bar{\lambda}$ той же кратности и ему соответствует такая же серия собственных и присоединенных векторов, состоящая из комплексно сопряженных векторов. Рассмотрим некоторое решение фундаментальной системы, состоящее из векторов, входящих в одну серию (мы опускаем нумерацию, чтобы не усложнять обозначения):

$$\mathrm{e}^{\lambda t} h_1, \ \mathrm{e}^{\lambda t}[t h_1 + h_2], \dots, \mathrm{e}^{\lambda t}[t^{r-1} h_1 + t^{r-2} h_2 + \ldots + h_r].$$

Как мы знаем, имеется аналогичная серия, состоящая из комплексно сопряженных решений. Из этих двух серий составим пары, состоящие из вектора-решения и его сопряженного и в каждой такой паре выделим действительную и мнимую части комплексной вектор-функции. Получим пару вещественных решений. Тот факт, что переход от комплексно сопряженной пары решений к паре вещественных решений задается невырожденной матрицей, означает, что мы получим систему линейно независимых вещественных решений системы.

Замечание 6.1 *Другой способ получения вещественных решений часто более удобен. Он основан на том, что сумма двух комплексно сопряженных решений вещественной системы есть вещественное решение системы. Удобство такого представления вещественного решения состоит в том, что в мнимые решения входят экспоненты с мнимыми показателями, которые при дифференцировании (что часто необходимо при вычислениях с решениями) сохраняют свою форму. При выделении действительной и мнимой частей комплексного решения мы переходим к тригонометрическим функциям от t, которые при дифференцировании переходят друг в друга и усложняют вычисления.*

6.6 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородную систему вида

$$\dot{x} = Ax + f(t),$$

где матрица A постоянна, а вектор-функция f зависит от t. Ее частное решение можно получить методом вариации постоянных, поскольку мы знаем фундаментальную систему решений, но тогда нужно вычислять интегралы. В случае, когда неоднородность имеет вид векторного *квазиполинома*, т.е. является конечной суммой вектор-функций вида $P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$, где $P(t) = A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_n$, A_i – векторы, частное решение можно искать в виде суммы квазиполиномов с разными экспонентами *методом неопределенных коэффициентов*. Поскольку решение неоднородной системы, у которой в правой части стоит сумма вектор-функций, можно представить в виде суммы решений неоднородных систем с одной экспонентой в правой части, то рассмотрим именно этот случай.

Сделаем снова замену переменных $x = By$, приводящую однородную систему к жордановой форме, при этом неоднородность сохраняет вид квазиполинома с одной экспонентой (но с другими коэффициентами). Однородная система распадается на независимые блоки, соответствующие разложению на блоки жордановой формы матрицы A. Рассмотрим подсистему для отдельного жорданового блока размера $s \times s$ с числом λ на диагонали, теперь эта система неоднородная

$$\dot{y} = (\lambda E + N)y + p(t)e^{\gamma t},$$

где векторный многочлен имеет степень не выше k. После замены $y = e^{\lambda t}Eu$ получаем

$$\dot{u} = Nu + P(t)e^{(\gamma-\lambda)t}.$$

Полученная система снова интегрируется последовательно, начиная с последнего уравнения. При этом возможны два случая:

- $\gamma \neq \lambda$, тогда при каждом интегрировании получаем квазиполином, у которого полином при экспоненте имеет степень не выше k, т.к. на каждом шаге решается скалярное дифференциальное уравнение вида $\dot{u}_i = p_*(t)\exp[(\gamma - \lambda)t]$, его частным решением является квазиполином того же вида;

- $\gamma = \lambda$, тогда на каждом шаге интегрируется полином и частным решением является полином степени на единицу выше полинома неоднородности, поэтому после s интегрирований получаем полином степени не выше $s + k$.

Таким образом, представляя неоднородность в виде суммы квазиполиномов с разными показателями, мы приходим к решенной выше задаче поиска частного решения. Для нахождения коэффициентов неизвестного квазиполинома используется метод неопределенных коэффициентов, т.к. мы знаем порядок искомого полинома.

6.7 Фазовые портреты линейных систем на плоскости

В этом параграфе мы проиллюстрируем свойства однородных линейных систем с постоянными коэффициентами геометрически. Эта геометрия дает возможность представить поведение решений $(x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ системы, изображая соответствующие кривые в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$, называемом *фазовым пространством*. Кривые в этом пространстве, заданные параметрически как $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$, называются *фазовыми траекториями*. Тривиальным примером фазовой траектории (в силу однородности системы) является $x \equiv 0$, она называется *состоянием равновесия* системы. Фазовые кривые рассматриваемой системы обладают важным свойством, которое и позволяет изображать их в фазовом пространстве: *через любую точку x_0 фазового пространства* *проходит единственная фазовая траектория системы*, т.е. фазовые траектории не могут пересекаться. Действительно, все решения системы (6.1) имеют вид $x(t) = \Phi(t)x_0$, $\Phi(t) = \exp[At]$. Если есть два решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, для которых $x_1(t_1) = x_2(t_2)$ при некоторых t_1, t_2, то обозначим $\xi_1 = x_1(0)$, $\xi_2 = x_2(0)$. Тогда $x_1(t) = \Phi(t)\xi_1$, $x_2(t) = \Phi(t)\xi_2$ и $\Phi(t_1)\xi_1 = \Phi(t_2)\xi_2$, откуда $\xi_2 = \Phi(t_1 - t_2)\xi_1$ (здесь мы используем свойства матричной экспоненты). Поэтому имеем $x_2(t) = \Phi(t)\xi_2 = \Phi(t)\Phi(t_1 - t_2)\xi_1 = \Phi(t + t_1 - t_2)\xi_1$, т.е. точки траектории $x_2(t)$ пробегают ту же самую траекторию, что и $x_1(t)$, но со сдвигом $t_1 - t_2$ по времени.

Для полной наглядности мы рассмотрим только случай $n = 2$, тогда фазовые траектории будут кривыми на фазовой плоскости. Будем обозначать переменные (x, y) вместо (x_1, x_2). Тогда система имеет вид:

$$\dot{x} = ax + by,\ \dot{y} = cx + dy. \tag{6.11}$$

Нашей задачей будет построение фазовых портретов этой системы при различных коэффициентах a, b, c, d, т.е различных матриц A. Как мы знаем, фундаментальная система решений системы зависит от собственных значений λ_1, λ_2 матрицы и ее жордановой формы. Рассмотрим сначала общий случай простых собственных значений. Тогда вещественной линейной заменой переменных систему можно привести к одному из следующих видов:

1. λ_1, λ_2 вещественны, различны и одного знака, в частности, нет нулевых собственных значений. Поэтому $\nu = \lambda_2/\lambda_1$ положительно и будем считать эту величину большей единицы, этого всегда можно добиться в рассматриваемом случае переобозначением переменных. Для различных собственных значений жорданова форма матрицы A диагональна и делая линейную замену переменных, систему можно привести к виду:
$$\dot{u} = \lambda_1 u,\ \dot{v} = \lambda_2 v,$$
решениями которой являются:
$$u(t; x_0) = u_0 \mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ v(t; y_0) = v_0 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$
Для получения формы траектории мы должны построить кривую на плоскости (u, v). Для этого зафиксируем начальную точку (u_0, v_0) и исключим параметр из полученных соотношений время t :
$$v = v_0 \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\nu}.$$
Поскольку $\nu > 1$, то траектории имеют вид полупарабол с вершиной в начале координат, причем для $v_0 > 0$ эти полупараболы расположены ветвями вверх, а при $v_0 < 0$ эти параболы расположены ветвями вниз. Кроме того, имеются траектория – состояние равновесия $(0, 0)$ и четыре траектории, лежащие на собственных прямых $v = 0$ (для λ_1) и $u = 0$ (для λ_2). Это состояние равновесия называется **узлом**. Узел называется *устойчивым*, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, и *неустойчивым*, если

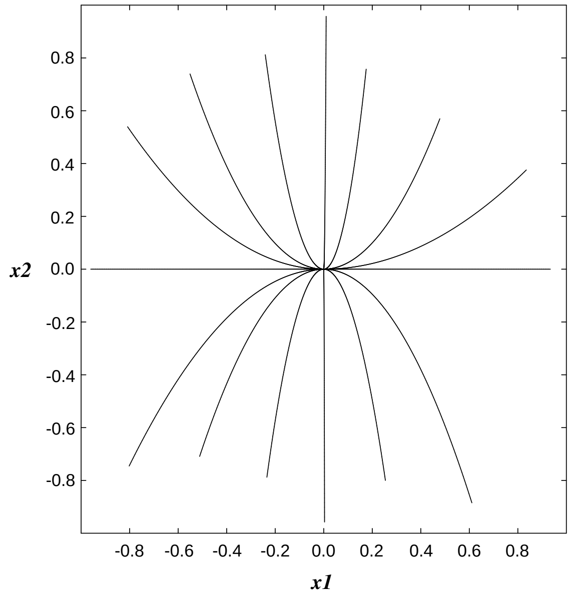

Рис. 6.1: Траектории в окрестности узла

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Фазовый портрет системы (без указания направления движения по времени) изображен на рис. 6.1. Для устойчивого узла все траектории стремятся к состоянию равновесия при $t \to \infty$, для неустойчивого узла все траектории стремятся к состоянию равновесия при $t \to -\infty$, но уходят от него при $t \to \infty$.

2. λ_1, λ_2 вещественны, разных знаков. Для определенности будем считать, что $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Жорданова форма матрицы диагональна и система приводится к виду:

$$\dot{u} = \lambda_1 u,\ \dot{v} = \lambda_2 v,$$

откуда получаем решения:

$$u(t; x_0) = u_0 \mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ v(t; y_0) = v_0 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

Для построения траектории на плоскости (u, v) зафиксируем начальную точку (u_0, v_0) и исключим параметр t :

$$v = v_0 \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Здесь отношение λ_2/λ_1 отрицательно, поэтому траектории имеют вид гипербол. Имеются также состояние равновесия $(0, 0)$ и четыре траектории, лежащие на двух собственных прямых $v = 0$ и $u = 0$. Первая из них соответствует $\lambda_1 < 0$, поэтому все траектории на ней (кроме состояния равновесия) стремятся к состоянию равновесия при $t \to \infty$. Поэтому эта прямая называется *устойчивым многообразием*

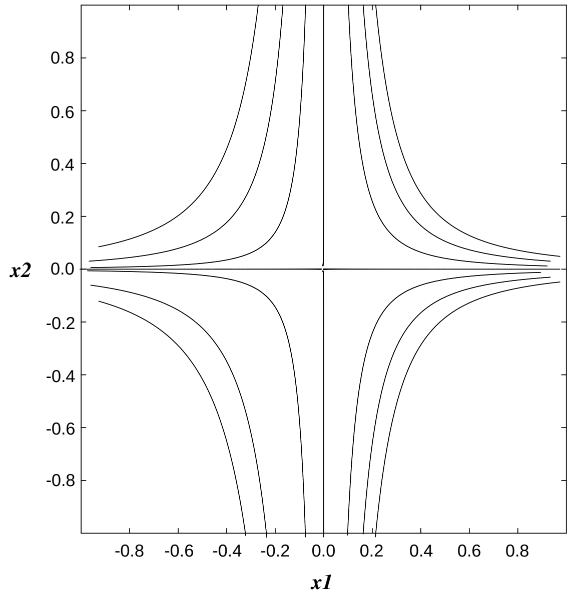

Рис. 6.2: Траектории в окрестности седла

состояния равновесия. Вторая прямая соответствует положительному собственному значению $\lambda_2 > 0$, поэтому все траектории на ней (кроме состояния равновесия) стремятся к состоянию равновесия при $t \to -\infty$. Эта прямая называется *неустойчивым многообразием* состояния равновесия. Такое состояние равновесия называется **седлом**. Поведение траекторий изображено на рис. 6.2.

3. λ_1, λ_2 комплексно сопряженные числа с отличными от нуля реальными и мнимыми частями. В этом случае собственные векторы для λ_1, λ_2 являются комплексно сопряженными векторами, в которых можно выделить действительные и мнимые части, являющиеся парой линейно независимых действительных векторов. Выберем их в качестве базиса и рассмотрим координаты относительно этого базиса. В полученной вещественной системе координат система (6.11) примет вид

$$\dot{u} = \alpha u - \beta v,\ \dot{v} = \beta u + \alpha v,\ \alpha + i\beta = \lambda_1 = \bar{\lambda}_2.$$

Для получения вида траекторий, перейдем к полярным координатам $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$. В полярных координатах система запишется в виде:

$$\dot{r} = \alpha r,\ \dot{\theta} = \beta,$$

решения которых с начальными условиями (r_0, θ_0) при $t_0 = 0$ равны $r(t) = \exp[\alpha t]r_0,\ \theta(t) = \beta t + \theta_0$. Исключая t, получаем логарифмическую спираль: $r = r_0 \exp[\alpha(\theta - \theta_0)/\beta]$. Такое состояние равновесия называется **фокусом**. Движение по спирали при возрастании времени определяется знаком реальной части собственного значения: при $\alpha < 0$ точка движется по спирали, стремясь при возрастании времени к состоянию равновесия, а при $\alpha > 0$ точка уходит от состояния

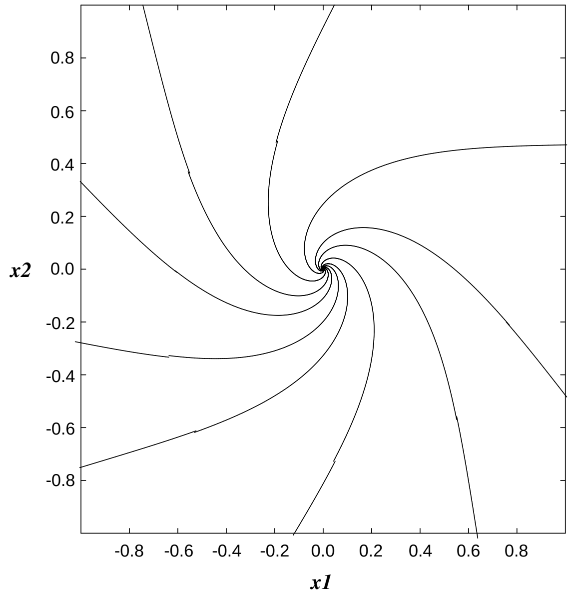

Рис. 6.3: Траектории в окрестности фокуса

равновесия при возрастании времени (и стремится к нему при $t \to -\infty$). Поэтому в первом случае фокус называется *устойчивым*, а во втором случае – *неустойчивым*. Фазовый портрет системы изображен на рис. 6.3.

4. Частным случаем предыдущих рассмотрений для мнимых собственных значений будет случай чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. В этом случае все предыдущие выкладки справедливы, но везде нужно положить $\alpha = 0$. Тогда в полярных координатах получим $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = \beta$. Поэтому вдоль траектории $r = r_0$, т.е. любая окружность $r = r_0$ является траекторией, движение по ней (по угловой координате) является равномерным вращением $\theta(t) = \beta t + \theta_0$ с угловой скоростью β, одинаковой для всех окружностей. Отметим, что переход от исходных координат к координатам, где система записывается в простой форме, делается линейным невырожденным преобразованием. При таком преобразовании, как известно из аналитической геометрии, окружности может перейти в эллипс и наоборот. Поэтому в исходных координатах траекториями системы являются семейство концентрических эллипсов. Рассматриваемое состояние равновесия называется **центром** (см. рис. 6.4).

5. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ вещественны, т.е. корни характеристического уравнения кратные, жорданова форма матрицы A является двумерной жордановой клеткой. Тогда вещественным линейным преобразованием систему можно привести к виду:

$$\dot{u} = \lambda u + v,\ \dot{v} = \lambda v,$$

решениями которой являются

$$u(t; u_0, v_0) = \mathrm{e}^{\lambda t}(u_0 + tv_0),\ v(t; u_0, v_0) = v_0 \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

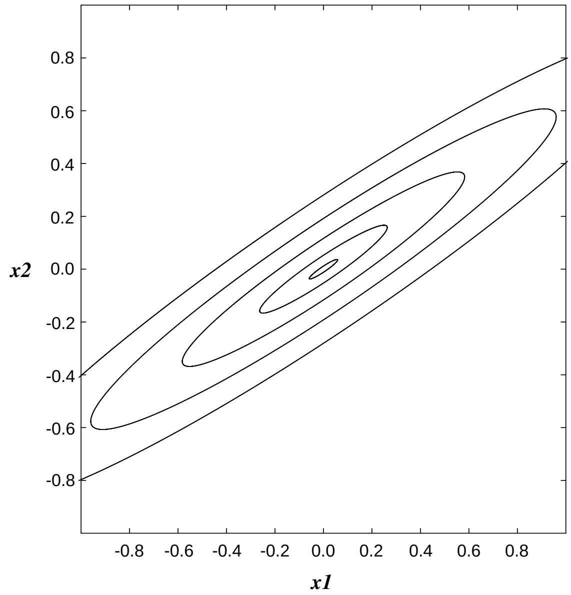

Рис. 6.4: Траектории в окрестности центра

Исключая t из полученных соотношений, находим форму траектории:

$$u = \frac{u_0}{v_0} v + \frac{v}{\lambda} \ln(\frac{v}{v_0}).$$

Прямая $v = 0$ является собственной прямой кратного собственного значения λ, на ней лежат три траектории: состояние равновесия и две траектории на каждом из лучей $u > 0$, $u < 0$. Поэтому траектории не пересекают эту прямую и лежат в каждой из полуплоскостей $v > 0$ и $v < 0$. Такое состояние равновесия называется **вырожденным узлом**, устойчивым, если $\lambda < 0$ и неустойчивым, если $\lambda > 0$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 6.5.

Случаи кратных ненулевых собственных значений с одномерными жордановыми клетками, а также простых собственных значений с одним нулевым корнем мы оставляем читателю в качестве упражнения.

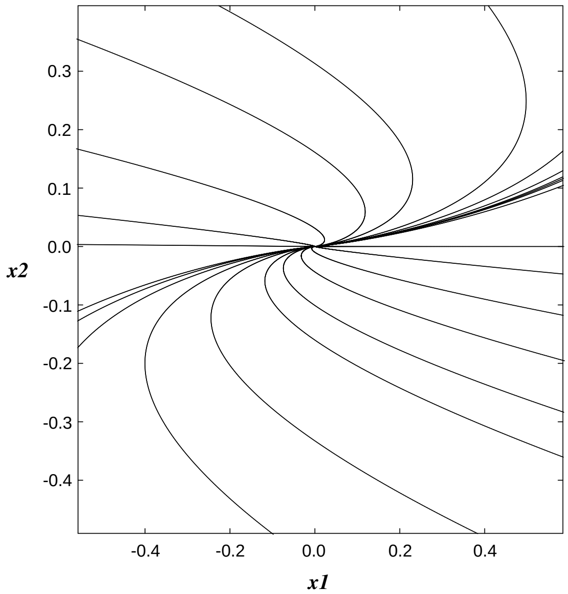

Рис. 6.5: Траектории в окрестности вырожденного узла

Глава 7

Линейные дифференциальные системы с периодическими коэффициентами

Следующим классом систем дифференциальных уравнений первого порядка, которые в принципе допускают полное исследование, являются линейные системы с периодическими коэффициентами. Хотя здесь уже не удается получить фундаментальную систему решений в явном виде, но ее свойства и поведение решений допускают полное исследование. Соответствующая раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений называется теорией Флоке-Ляпунова[1]. Теорема Флоке описывает структуру фундаментальных матриц линейных систем с непрерывными периодическими коэффициентами и вводит некоторые числовые характеристики таких систем, аналогичные по своим свойствам корням характеристического уравнения систем с постоянными коэффициентами. Теорема Ляпунова доказывает существование линейной замены переменных для системы с периодическими коэффициентами, приводящей ее к системе с постоянными коэффициентами и, тем самым, дает возможность полного исследования исходной системы. Эти две теоремы тесно связаны друг с другом, поэтому эти результаты часто объединяют под названием теории Флоке-Ляпунова.

7.1 Теорема Флоке

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ линейную дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = A(t)x, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ A(t) \in L(n, \mathbb{C}), \tag{7.1}$$

с непрерывной периодической матрицей $A(t+T) \equiv A(t)$. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица этой системы. Из периодичности матрицы A следует, что матрица $\Psi(t) =$

[1] Г.Флоке (G.Floquet, 1847-1920) – французский математик, А.М.Ляпунов (1857-1918) – знаменитый русский математик и механик.

$\Phi(t+T)$ также является фундаментальной:

$$\Phi'(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T).$$

Поэтому в силу предложения 5.2, существует единственная невырожденная постоянная матрица C, для которой

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C. \tag{7.2}$$

Смысл матрицы C становится особенно ясен, если $\Phi(t)$ – нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица, т.е. $\Phi(0) = E$. Тогда, подставляя $t = 0$, получаем

$$\Phi(T) = C. \tag{7.3}$$

Определение 7.1 *Матрицу* $\Phi(T)$ *называют* **матрицей монодромии** *системы* (7.1), *а собственные значения матрицы монодромии называют* **мультипликаторами** *системы.*

На геометрическом языке смысл матрицы монодромии особенно понятен. Если x_0 – заданный вектор и $\Phi(t)$ – нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица, то решение системы с начальным условием x_0 при $t = 0$ задается как $x(t) = \Phi(t)x_0$. Положим $t = T$ и будем менять начальные условия. Тогда при $t = T$ получим отображение пространства начальных векторов $\mathbb{R}^n_0$ в пространство $\mathbb{R}^n_T$. Ввиду периодичности системы, пространства $\mathbb{R}^n_0$ и $\mathbb{R}^n_T$ можно отождествить, т.к. продолжение решения $x(t) = \Phi(t)x_0$ с момента $t = T$ можно получить, беря решение с начальным условием $x_1 = x(T)$ при $t = 0$. Действительно, используя (7.2) и (7.3), получаем: $x(t+T) = \Phi(t+T)x_0 = \Phi(t)\Phi(T)x_0 = \Phi(t)x(T) = \Phi(t)x_1$. Поэтому матрицу монодромии можно интерпретировать как задающую отображение $\mathbb{R}^n_0 \to \mathbb{R}^n_T$ за период системы. Если мы знаем это отображение и знаем решения системы при $0 \le t \le T$, то в силу сказанного, мы знаем решение с любым начальным условием в любой момент времени.

Роль мультипликаторов состоит в том, что они определяют асимптотическое поведение решений. Они, в некотором смысле, являются полным аналогом собственных значений для случая системы с постоянными коэффициентами.

Лемма 7.1 *Число* μ *является мультипликатором системы* (7.1) *тогда и только тогда, когда существует решение* $x(t)$ *системы, для которого* $x(t+T) \equiv \mu x(t)$.

Доказательство. Пусть μ – мультипликатором и x_0 – соответствующий ему собственный вектор матрицы $\Phi(T) : \Phi(T)x_0 = \mu x_0$. Рассмотрим решение системы с начальным вектором $x_0 : x(t) = \Phi(t)x_0$. Тогда $x(t+T) = \Phi(t+T)x_0 = \Phi(t)\Phi(T)x_0 = \mu\Phi(t)x_0 = \mu x(t)$. Обратно, если есть решение $x(t)$, то $x(t) = \Phi(t)x_0$ для некоторого начального вектора x_0. Поэтому, если условия леммы выполнены для $x(t)$, то $x(t+T) = \Phi(t+T)x_0$ $= \Phi(t)\Phi(T)x_0 = \mu\Phi(t)x_0$. Умножая в последнем равенстве обе части на матрицу $\Phi^{-1}(t)$, получим, что x_0 – собственный вектор матрицы монодромии с собственным значением μ, т.е. μ – мультипликатор. ■

При определении матрицы монодромии мы использовали нормированную фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ и из нее получили матрицу монодромии $\Phi(T) = M$, так что

$\Phi(t+T) = \Phi(t)M$. Естественно возникает вопрос: что изменится, если мы выберем в качестве начальной другую фундаментальную матрицу $\Psi(t)$ (не нормированную) и по ней построим матрицу $C : \Psi(t+T) = \Psi(t)C$, как связаны матрицы M и C?

В силу доказанного выше, две фундаментальные матрицы связаны равенством: $\Psi(t) \equiv \Phi(t)D$, $\det D \neq 0$, поэтому

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C = \Phi(t)DC = \Phi(t+T)D = \Phi(t)MD,$$

откуда получаем $C = D^{-1}MD$, т.е. матрица C, полученная с помощью фундаментальной матрицы $\Psi(t)$, *подобна матрице монодромии.* Следовательно, мультипликаторы и другие алгебраические инварианты (например. элементарные делители) матрицы монодромии можно вычислять как собственные значения и другие инварианты матрицы C.

Задача 7.1 *1. Для системы с периодическими коэффициентами*

$$\dot{x} = a(t)x - b(t)y,\ \dot{y} = b(t)x + a(t)y,\ a(t+T) \equiv a(t),\ b(t+T) \equiv b(t)$$

найти матрицу монодромии, записать представление Флоке, указать T-периодическую матрицу $S(t)$ и постоянную матрицу Λ, к которой приводится периодическая матрица системы после замены (Указание: использовать комплексную переменную $z = x + iy$).

2. Найти матрицу монодромии для системы, определяемой скалярным 2π-периодическим линейным дифференциальным уравнением $\ddot{x} + p(t)x = 0$ с кусочно-постоянной функцией

$$p(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t \leq c, \\ -1, & \text{при } c < t \leq 2\pi \end{cases}$$

Найти ее мультипликаторы и их зависимость от параметра c. Решения системы при переходе через плоскость разрыва $t = c$ в пространстве $(t, x, \dot{x})$ продолжаются по непрерывности.

Теперь мы можем найти вид фундаментальной матрицы периодической системы.

Теорема 7.1 (**Флоке**) *Любая фундаментальная матрица $\Psi(t)$ линейной дифференциальной системы с T-периодическими коэффициентами имеет вид*

$$\Psi(t) = S(t)\exp[tB],$$

где матрица $S(t)$ является T-периодической, невырожденной и дифференцируемой по t, а матрица B постоянна и подобна матрице $T^{-1}\operatorname{Ln}\Phi(T)$, где $\Phi(t)$ – нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица системы.

Доказательство. Найдем сначала представление Флоке для нормированной при $t = 0$ фундаментальной матрицы $\Phi(t)$. Введем матрицу $\Lambda = T^{-1}\mathrm{Ln}\Phi(\mathrm{T})$, т.е. $\exp[\Lambda T] = \Phi(T)$. Поскольку матрица монодромии невырождена, то для нее существует логарифм (см.

доказательство в Дополнении 2). Теорема будет доказана, если мы покажем периодичность, гладкость и невырожденность матрицы $P(t) = \Phi(t)\exp[-t\Lambda]$. Последние 2 условия заключения теоремы для P (невырожденность и дифференцируемость) очевидны. Докажем ее периодичность, используя вышеуказанные свойства матричной экспоненты и определение матрицы Λ:

$$\begin{aligned}&P(t+T) = \Phi(t+T)\exp[-(t+T)\Lambda] = \Phi(t)\Phi(T)\exp[-T\Lambda]\exp[-t\Lambda] = \\ &= \Phi(t)\exp[-t\Lambda] = P(t).\end{aligned}$$

Пусть теперь $\Psi(t)$ – произвольная фундаментальная матрица. Тогда, как мы знаем, существует невырожденная постоянная матрица D, для которой $\Psi(t) = \Phi(t)D$. Поэтому, используя формулу (6.9), получаем следующее представление для $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \Phi(t)D = P(t)\exp[t\Lambda]D = P(t)D\,D^{-1}\exp[t\Lambda]D = P(t)D\exp[tD^{-1}\Lambda D].$$

Выбирая $S(t) = P(t)D$, $B = D^{-1}\Lambda D$, получаем утверждение теоремы. ■

Отметим следующее свойство матриц $P(t), \Lambda$: даже если исходная система была вещественной, т.е. матрица A, векторы x, а следовательно, и фундаментальная матрица $\Phi(t)$ были вещественными, матрицы $P(t), \Lambda$ могут быть мнимыми, аналогично тому, как у вещественной матрицы могут быть мнимые собственные числа и соответствующие им мнимые собственные векторы. Однако, при работе с вещественными системами важно иметь вещественное представление для ее фундаментальной матрицы. Как следует из доказательства теоремы, возможность такого представления это связана с возможностью выбрать вещественный логарифм. Ниже будет показано, как это можно сделать, если рассматривать вещественную систему периода T как систему периода $2T$.

7.2 Теорема Ляпунова о приводимости

Имея представление Флоке для фундаментальной матрицы, легко доказать теорему Ляпунова о приводимости периодической дифференциальной системы к системе с постоянными коэффициентами.

Теорема 7.2 (**Ляпунова о приводимости**). *Для дифференциальной системы* (7.1) *с T-периодическими непрерывными коэффициентами существует, вообще говоря, комплексная замена переменных вида $x = S(t)y$ с непрерывно дифференцируемой невырожденной обратимой T-периодической матрицей $S(t)$, которая приводит систему к системе с постоянными коэффициентами $\dot{y} = By$.*

Доказательство. Используем представление теоремы Флоке для фундаментальной матрицы $\Psi(t)$. В качестве периодической матрицы замены возьмем матрицу $S(t) = \Psi(t)\exp[-tB]$: $x = S(t)y$. Дифференцируя формулу для замены, получим

$$\dot{x} = S'(t)y + S(t)\dot{y},$$

или в переменных y:

$$\dot{y} = \left[-S^{-1}(t)S' + S^{-1}A(t)S(t))\right]y.$$

Продифференцируем выражение для $S(t)$:

$$S'(t) = \Psi'(t)\exp[-tB] - \Psi(t)\exp[-tB]B = A(t)\Psi(t)\exp[-tB]$$
$$- - \Psi(t)\exp[-tB]B = A(t)S(t) - S(t)B.$$

Подставим это выражение в правую часть выражения для $\dot{y}$, тогда получим

$$\dot{y} = [-S^{-1}(t)S'^{-1}(t)A(t)S(t)]\,y =$$
$$= [-S^{-1}(t)A(t)S(t) + B + S^{-1}(t)A(t)S(t)]\,y = By.\blacksquare$$

Пример 7.1 *Рассмотрим скалярное линейное уравнение*

$$\dot{x} = a(t)x$$

с T-периодической непрерывной функцией $a(t) = \lambda + \tilde{a}(t)$, где число λ является средним значением периодической функции $a(t)$ на периоде:

$$\lambda = \frac{1}{T}\int\limits_0^T a(t)dt.$$

Фундаментальное (нормированное) решение этого уравнения имеет вид

$$\exp[\int\limits_0^t a(s)ds] = \exp[\int\limits_0^t \tilde{a}(s)ds]\exp[\lambda\, t]$$

и дает представление Флоке, т.к. определенный интеграл от периодической функции $\tilde{a}(t)$ с нулевым средним является T-периодической функцией.

В векторном случае, вообще говоря, невозможно найти представление Флоке в явном виде, но матрица монодромии может быть получена численно с любой степенью точности интегрированием системы на периоде. В теоретическом плане представление Флоке позволяет полностью изучить все возможные типы асимптотического поведения решений, что сводится в основном к изучению спектральных и алгебраических свойств матрицы монодромии.

7.3 Теорема Ляпунова в вещественном случае

Для данной невырожденной матрицы существует много матриц, являющихся ее логарифмами, что аналогично скалярному случаю. Напомним, что $\mathrm{Ln}\,\lambda = \ln|\lambda| + i\,\mathrm{arg}\lambda + 2\pi i\,k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда ясно, что даже для вещественной матрицы A ее логарифм может быть мнимой матрицей. Возникает естественный вопрос, важный для различных приложений: пусть матрица A вещественна и невырождена, при каких условиях на матрицу A у нее существует вещественный матричный логарифм? Очевидным достаточным условием является отсутствие у A отрицательных собственных значений (докажите!). Однако, это не всегда выполняется.

Задача 7.2 *Вычислить* $\operatorname{Ln}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Для нахождения необходимого условия рассмотрим случай, когда матрица $B = \operatorname{Ln} A$ является вещественной и предположим, что она имеет мнимое собственное значение $\rho + i\pi$, которому отвечают несколько элементарных делителей: $(\lambda - \rho - i\pi)^{p_1}$, $\ldots, (\lambda-\rho-i\pi)^{p_m}$ (напомним, что каждому элементарному делителю характеристического многочлена отвечает жорданова клетка соответствующей размерности p_i). Поскольку матрица B вещественна, то у нее имеются и сопряженные элементарные делители $(\lambda - \rho + i\pi)^{p_1}, \ldots, (\lambda - \rho + i\pi)^{p_m}$. Тогда у матрицы $A = \exp[B]$ соответствующие элементарные делители имеют ту же структуру (не расщепляются), но соответствующими собственными значениями становятся вещественные числа $\mathrm{e}^{\rho\pm i\pi} = -\mathrm{e}^{\rho}$, причем, в силу сопряженности чисел $\rho + i\pi, \rho - i\pi$, их число удваивается. Таким образом, матрица A вещественна, имеет отрицательные собственные значения и имеет, тем не менее, вещественный логарифм B. Оказывается, это необходимое условие является и достаточным, именно, справедлива

Теорема 7.3 *Вещественная неособая матрица A тогда и только тогда имеет вещественный логарифм B, когда у матрицы A либо вообще нет элементарных делителей, соответствующих отрицательным собственным значениям, либо каждый такой элементарный делитель повторяется четное число раз.*

Доказательство этой теоремы может быть получено, используя доказательство существования логарифма (Дополнение 2).

Теперь вернемся к задаче приведения линейной вещественной периодической дифференциальной системы к системе с постоянными вещественными коэффициентами. Как мы выяснили выше, такую систему, вообще говоря, нельзя привести к системе с постоянными коэффициентами вещественным периодическим преобразованием, т.к. приводящая матрица может быть невещественной. Причиной является возможная невещественность логарифма вещественной матрицы. Однако справедливо утверждение

Предложение 7.1 *Вещественную линейную систему с T-периодическими коэффициентами всегда можно привести вещественным $2T$-периодическим преобразованием к системе с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Будем рассматривать систему (7.1) как $2T$-периодическую систему. Пусть $\Psi(t)$ – вещественная фундаментальная матрица системы. Тогда для нее можно записать представление

$$\Psi(t + 2T) = \Psi(t + T + T) = \Psi(t + T)C = \Psi(t)C^2.$$

Отметим важное свойство: *квадрат вещественной матрицы C^2 имеет вещественный логарифм.* Действительно, матрица C^2 удовлетворяет условиям теоремы 7.3, поскольку, если матрица C^2 имеет отрицательное вещественное собственное значение, то являясь квадратом вещественной матрицы C, она имеет собственными значениями квадраты собственных значений матрицы C. Пусть у матрицы C^2 имеется отрицательное собственное значение $\lambda^2 < 0$, тогда $\lambda = \rho \exp[\pm i\pi/2]$, причем у вещественной матрицы C есть оба комплексно сопряженных собственных значения, а поэтому и элементарные делители, соответствующие этим собственным значениям, также комплексно сопряжены. Но тогда у матрицы C^2 элементарные делители, соответствующие отрицательному собственному значению λ^2, входят парами.

Теперь $2T$-периодическая система в силу теоремы Ляпунова приводится $2T$-периодической заменой координат к системе с постоянными коэффициентами, поскольку матрица $\Psi(t) \exp[-tB]$, у которой $B = (2T)^{-1} \operatorname{Ln}(C^2)$, является вещественной $2T$-периодической. ■

При анализе доказательства приводимости может показаться, что возможная неприводимость к системе с постоянными коэффициентами вещественным T-периодическим преобразованием связана с методом доказательства. В действительности же причина неприводимости вещественной T-периодической системы линейным вещественным T-периодическим преобразованием к системе с постоянными коэффициентами – чисто топологическая. Для объяснения вещественной T-неприводимости рассмотрим простейший пример, где это происходит. Пусть в $\mathbb{R}^2$ дана система (7.1) с периодическими коэффициентами, у которой матрица монодромии $\Phi(T)$ имеет отрицательный мультипликатор $\mu_1 < 0$, и предположим, для определенности, что второй мультипликатор является также отрицательным: $\mu_2 < 0$. Предположим, что существует гладкая T-периодическая невырожденная вещественная матрица, приводящая систему с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами с матрицей B. Тогда $\exp[Bt]$ – фундаментальная матрица этой системы и $\exp[BT]$ – матрица отображения за период. Собственные значения этой матрицы положительны и должны совпадать с мультипликаторами, чего быть не может. Собственные направления, соответствующие этим собственным значениям, в пространстве $\mathbb{R}^2 \times S^1$ задают цилиндры, являющиеся инвариантными множествами автономной системы, рассматриваемой как T-периодическая (устойчивым и неустойчивым многообразиями нулевого периодического решения). Если бы периодическая система была приводима к этой системе с постоянными коэффициентами, то у периодической системы в $\mathbb{R}^2 \times S^1$ тоже были бы инвариантными многообразиями цилиндры. Но поскольку ее мультипликаторы отрицательны, то собственным направлениям матрицы монодромии, соответствующим мультипликаторам, соответствуют листы Мебиуса (при отображении за период точка x на этом направлении переходит под действием матрицы монодромии в точку μx). Поэтому диффеоморфное отображение пространства $\mathbb{R}^2 \times S^1$ исходной периодической системы в пространство $\mathbb{R}^2 \times S^1$ системы с постоянными коэффициентами, определяемое послойно (при каждом $t \in S^1$) матрицей с периодическими коэффициентами, не может существовать.

Приведем пример вещественной линейной системы с периодическими коэффициентами, обладающей отрицательными мультипликаторами [5].

Пример 7.2 *Рассмотрим линейную систему второго порядка* $\dot{x} = A(t)x$ *с* $2\pi/\omega$-

периодической матрицей следующего вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta_1 + \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2)\cos\omega t}{2} & \dfrac{(\beta_1 - \beta_2)\sin\omega t - \omega}{2} \\ \\ \dfrac{(\beta_1 - \beta_2)\sin\omega t + \omega}{2} & \dfrac{\beta_1 + \beta_2 - (\beta_1 - \beta_2)\cos\omega t}{2} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что для этой вещественной системы вещественной нормированной при $t = 0$ фундаментальной матрицей является матрица

$$U(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta_1 t}\cos(\omega t/2) & -\mathrm{e}^{\beta_2 t}\sin(\omega t/2) \\ \mathrm{e}^{\beta_1 t}\sin(\omega t/2) & \mathrm{e}^{\beta_2 t}\cos(\omega t/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t/2) & -\sin(\omega t/2) \\ \sin(\omega t/2) & \cos(\omega t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta_1 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\beta_2 t} \end{pmatrix},$$

а ее матрицей монодромии $U(2\pi/\omega)$ является матрица

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2\pi\beta_1/\omega} & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{2\pi\beta_2/\omega} \end{pmatrix}$$

с двумя отрицательными мультипликаторами. Отметим, что представление для $U(t)$ является вещественным представлением Флоке для системы, рассматриваемой как $4\pi/\omega$-периодическая, ее $2\pi/\omega$-периодическое представление Флоке имеет комплексную форму:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2} & \frac{1-\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i} \\ \frac{1-\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i} & \frac{1+\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(\beta_1 + i\omega/2)t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{(\beta_2 + i\omega/2).t} \end{pmatrix}$$

7.4 Параметрический резонанс

Как пример использования идей теории Флоке-Ляпунова рассмотрим задачу о параметрическом резонансе, т.е. о появлении неустойчивости в линейной периодической системе, близкой к автономной нейтрально устойчивой. Мы рассмотрим самый простой вариант этой задачи – двумерную систему, порожденную уравнением Матье, многомерный случай изучается, например, в книге [9].

Рассмотрим уравнение Матье – уравнение параметрически возбуждаемого линейного маятника (у которого параметр – частота – является периодической функцией времени):

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon\cos t)x = 0.$$

Здесь ε – малый параметр, $\omega > 0$ – частота колебаний невозмущенной системы. При $\varepsilon = 0$ система устойчива, все ее решения периодические с периодом $2\pi/\omega$.

Для изучения устойчивости системы при $\varepsilon \neq 0$ перейдем от уравнения второго порядка к системе линейных уравнений первого порядка, вводя дополнительную переменную $y = -\dot{x}/\omega$. Соответствующая система запишется в виде

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega(1 + \varepsilon\cos t)x. \tag{7.4}$$

Это линейная система с 2π-периодическими коэффициентами, аналитически зависящими от параметров ε, ω, и для изучения устойчивости и неустойчивости нужно найти мультипликаторы системы. Отметим следующий важный для дальнейшего факт: матрица $A_\varepsilon(t)$ системы (7.4) имеет нулевой след (это следствие гамильтоновости системы), что по теореме Остроградского-Гаусса означает, что определитель фундаментальной матрицы $\Phi_\varepsilon(t)$ этой системы постоянен:

$$\det \Phi_\varepsilon(t) = \det \Phi_\varepsilon(0) \int\limits_0^t tr A_\varepsilon(s) ds = \det \Phi_\varepsilon(0).$$

Для нормированной фундаментальной матрицы имеем: $\det \Phi_\varepsilon(0) = 1$. Поэтому характеристическое уравнение для матрицы монодромии $\Phi_\varepsilon(2\pi)$ имеет вид: $\mu^2 - \sigma\mu + 1 = 0$, $\sigma = tr\Phi_\varepsilon(2\pi) = \mu_1 + \mu_2$. Отсюда следует, что при $|\sigma| < 2$ корни уравнения мнимые $\mathrm{e}^{\pm i\alpha}$, а при $|\sigma| > 2$ – корни действительные: $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $|\mu_1| < 1$, $|\mu_2| = |\mu_1^{-1}| > 1$. Таким образом, устойчивость здесь может быть только нейтральная и условие устойчивости задается неравенством $|\sigma| < 2$, а граница между устойчивыми и неустойчивыми системами в плоскости параметров (ω, ε) определяется равенством $|\sigma(\omega, \varepsilon)| = 2$.

Попытаемся найти часть этой границы, считая ε малым параметром. Естественно использовать метод малого параметра, т.е. искать мультипликаторы возмущенной системы как возмущения мультипликаторов невозмущенной (автономной) системы, но рассматриваемой формально как 2π-периодическая. Для этого сначала определим точки пересечения границы с осью $\varepsilon = 0$. Нужно вычислить фундаментальную матрицу системы в конце периода $t = 2\pi$:

$$\Phi_0(2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi A} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}.$$

Ее след равен $2\cos 2\pi\omega$, поэтому равенство $|\sigma(\omega, 0)| = 2$ дает $\cos 2\pi\omega = \pm 1$, т.е. $\omega = k/2$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, для достаточно малых $|\varepsilon|$ границу областей устойчивости можно искать с помощью разложения кривых, определяющих границы этих областей, вблизи точек $\varepsilon = 0, \omega = k/2$, сами эти кривые, в силу леммы 3.4, определяются условиями: система, соответствующая точке на границе области устойчивости, должна иметь либо 2π-периодическое решение ($\mu = 1$):

$$x(t + 2\pi) \equiv x(t),\ y(t + 2\pi) \equiv y(t),$$

либо анти-периодическое решение ($\mu = -1$):

$$x(t + 2\pi) \equiv -x(t),\ y(t + 2\pi) \equiv -y(t).$$

Найдем такие системы вблизи точки первого резонанса $\varepsilon = 0$, $k = 1/2$. Для этого перейдем от переменных (x, y) к полярным координатам r, φ: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В этих координатах система перепишется в виде

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon\omega}{2} r \cos t \sin 2\varphi,\ \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon\omega \cos t \cos^2 \varphi. \tag{7.5}$$

Отметим, что второе уравнение не зависит от первого, поэтому его можно решать независимо. Ввиду периодичности его правой части по обеим переменным, его можно рассматривать как уравнение на торе с циклическими координатами (t, φ). Отсюда следует, что любое решение второго уравнения существует при всех значениях $t \in \mathbb{R}$. Поскольку первое уравнение линейно по r, то и и решения первого уравнения (после подстановки в него решения второго уравнения) существуют при всех $t \in \mathbb{R}$. Условие существования у системы периодического или анти-периодического решения в полярных координатах выражается как существование решения $(r(t),\ \varphi(t))$, для которого

$$r(2\pi) = r(0),\ \varphi(2\pi) = \varphi(0) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

причем при четном k получаем периодическое решение, а при нечетном k – антипериодическое. Полученные соотношения определяют начальные значения соответствующих решений. Отметим, что ввиду гладкости правых частей системы по параметрам ω, ε, любое решение системы является гладкой функцией от начальных условий и параметров на заданном конечном промежутке времени. В частности, при $\varepsilon = 0$ второе уравнение системы (7.5) имеет общее решение $\varphi(t; \varphi_0, \omega, 0) = \omega t + \varphi_0$, а решение с начальным условием φ_0 при $t = 0$ на конечном промежутке времени $t \in [0, 2\pi]$ при достаточно малых ε можно представить как $\varphi(t; \varphi_0, \omega, \varepsilon) = \omega t + \varphi_0 + \varepsilon\Phi(t; \varphi_0, \omega, \varepsilon)$ с гладкой функцией Φ. Однако нам нужно искать решения не с заданными начальными условиями, а из условий периодичности/антипериодичности.

Перепишем систему (7.5) в виде системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \ln r(t) - \ln r(0) &= \frac{\varepsilon\omega}{2} \int\limits_0^t \cos\tau \sin 2\varphi(\tau; \varphi_0) d\tau, \\ \varphi(t; \varphi_0) &= \varphi_0 + \omega t + \varepsilon\omega \int\limits_0^t \cos\tau \cos^2 \varphi(\tau; \varphi_0) d\tau, \end{aligned} \tag{7.6}$$

где решения зависят не только от начальных условий, но и от параметров системы ε, ω. Отметим важное свойство системы дифференциальных уравнений (7.5), а потому и полученных интегральных: она инвариантна при замене $\varphi \mapsto \varphi + \pi$, т.е. если есть решение системы $r(t), \varphi(t)$, то решением является и $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \pi$. Отсюда следует, что достаточно искать решения с начальными условиями φ_0 на полуокружности $0 \le \varphi_0 < \pi$. Отметим еще одну особенность системы (7.6): при поиске членов порядка ε^n в интеграл во втором уравнении нужно подставлять члены предыдущего порядка ε^{n-1}, найденные из первого уравнения, т.е. решения можно искать рекуррентно.

В интегральном виде условия существования периодического или антипериодического решения переписываются в следующем виде

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_0^{2\pi} \cos\tau \sin 2\varphi(\tau; \varphi_0) d\tau = F(\varphi_0; \omega, \varepsilon), \\ k\pi &= 2\pi\omega + \varepsilon\omega \int\limits_0^{2\pi} \cos\tau \cos^2 \varphi(\tau; \varphi_0) d\tau. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Мы рассматриваем эти уравнения как систему для поиска неизвестных функций $\varphi_0(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$. Второе уравнение системы (7.7) при $\varepsilon = 0$ и любом φ_0 имеет счетное множество решений $\omega_k(0) = k/2$. Зафиксируем k и при достаточно малых $|\varepsilon|$ будем искать решения $(\varphi_0(\varepsilon), \omega_k(\varepsilon))$, $\omega_k(0) = k/2$ системы, используя теорему о неявной функции. Как мы увидим, это возможно, т.к. якобиан от функций в правых частях по переменным (φ_0, ω) равен $2\pi(\partial F/\partial\varphi_0)$ и отличен от нуля при $\varepsilon = 0$. Проверим это и заодно найдем представление для $\varphi_0(\varepsilon)$. Для этого рассмотрим первое уравнение в (7.7). При $\varepsilon = 0$ оно превращается в уравнение

$$\int_0^{2\pi} \cos\tau \sin(2\varphi_0 + k\tau)d\tau = 0,$$

поскольку решением второго уравнения в (7.6) при $\varepsilon = 0$ и $\omega = k/2$ является функция $\varphi(t; \varphi_0; \omega, 0) = kt/2 + \varphi_0$. Интегрируя, получаем уравнение

$$a_k \sin 2\varphi_0 + b_k \cos 2\varphi_0 = 0,\ a_k = \int_0^{2\pi} \cos s \cos ks\ ds,\ b_k = \int_0^{2\pi} \cos s \sin ks\ ds.$$

Выберем $k = 1$ (первая зона неустойчивости). Тогда $a_1 = \pi$, $b_1 = 0$ и получаем уравнение $\pi \sin 2\varphi_0 = 0$, т.е на полуинтервале $[0, \pi)$ имеем решения $\varphi_0^{(1)} = 0$, $\varphi_0^{(2)} = \pi/2$. Производная по φ_0 в первом уравнении (7.7) при $\varepsilon = 0$ равна

$$\begin{aligned} &2\int_0^{2\pi} \cos\tau \cos 2\varphi(\tau; \varphi_0; \omega, 0) \frac{\partial\varphi(\tau; \varphi_0; \omega, 0)}{\partial\varphi_0} d\tau = \\ &= 2\int_0^{2\pi} \cos\tau \cos(2\varphi_0 + \tau) \cdot 1 \cdot d\tau = 2\pi \cos 2\varphi_0, \end{aligned}$$

что дает $\pm 2\pi$ при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$, соответственно. Отсюда получаем, что при $k = 1$ и достаточно малых ε должны быть два решения для $\omega(\varepsilon) : \omega_1(\varepsilon), \omega_2(\varepsilon)$, одно соответствует решению второго уравнения в (7.6) с начальным условием $\varphi_0^{(1)}$, $\omega_1(0) = 1/2$, а другое соответствует решению с начальным условиям $\varphi_0^{(2)}$, $\omega_2(0) = 1/2$. Функции $\omega_1(\varepsilon), \omega_2(\varepsilon)$ в линейном приближении по ε находятся из второго уравнения в (7.6) при подстановке в него под интегралом функции $\varphi(t; \varphi_0^{(i)}, 1/2, 0) = t/2 + \varphi_0^{(i)}$. Записывая $\omega_1(\varepsilon) = 1/2 + A_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $\omega_2(\varepsilon) = 1/2 + A_2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, и подставляя их во второе уравнение в (7.7), получаем для коэффициентов A_i следующие выражения:

$$A_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos s\ \cos^2(s/2)ds = -1/8,\ A_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos s\ \sin^2(s/2)ds = 1/8.$$

После получения линейных приближений для частоты, можно искать линейное приближение для начальных условий по φ_0. При этом нужно будет решать уравнения в вариациях для нахождения линейных поправок к зависимости по углу. Отсюда понятно, что для практического нахождения границ зон устойчивости этот алгоритм плохо приспособлен. Тем более это относится к вопросу о продолжении этих границ для не малых ε.

Дополнение 1: Основные понятия линейной алгебры

В нашем курсе мы постоянно используем векторные обозначения и элементарные понятия анализа в конечномерных векторных пространствах. Для удобства читателя приведем сводку соответствующих понятий в этом дополнении. Более подробно с этим материалом можно познакомиться по книгам [3, 10].

Будем рассматривать *векторные пространства* над полем вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел. Таким пространством называется множество V, состоящее из элементов $x, y, \ldots$, в V определены две операции: сложения, т.е. для каждой пары элементов x, y однозначно определен третий элемент z этого множества, эту операцию будем обозначать знаком $+$ и называть суммой, и операция умножения элементов множества на вещественные или комплексные числа, т.е. если задан элемент $x \in V$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\lambda \in \mathbb{C}$), то однозначно определен элемент пространства $\lambda \cdot x$ (в дальнейшем обычно точку не пишем). Эти операции должны удовлетворять аксиомам коммутативности (перестановочности) $x + y = y + x$ и ассоциативности (правило расстановки скобок) $(x + y) + z = x + (y + z)$, должен существовать нулевой элемент $\underline{0}$, т.е. элемент, для которого выполнены тождества $x + \underline{0} = x$ для любого $x \in V$ и для каждого элемента $x \in V$ должен существовать обратный элемент $-x \in V$ такой, что $x + (-x) = \underline{0}$. Кроме того, $1 \cdot x = x$, $\alpha(\beta x) = \alpha\beta \cdot x$ и должен выполняться дистрибутивный (сочетательный) закон: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$. Элементы векторного пространства V будем называть *векторами*.

В векторном пространстве определяется понятие линейной зависимости векторов. Конечный набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ называется *линейно зависимым*, если существует набор постоянных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не все из которых равны нулю (ненулевой набор), для которых равна нулю линейная комбинация: $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \underline{0}$. Если такого ненулевого набора не существует, то соответствующий набор векторов называется *линейно независимым*. Понятие линейной независимости позволяет определить размерность линейного векторного пространства. Максимальное число линейно независимых векторов, существующих в пространстве, называется его *размерностью*. Это означает, что пространство n-мерно, если в нем существует $n \in \mathbb{N}$ линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов линейно зависимы. Если в линейном пространстве существует любое число линейно независимых векторов, то пространство называется бесконечномерным.

Если линейное пространство n-мерно, то в нем существует набор из n линейно независимых векторов. Такой упорядоченный набор $e_1, \ldots, e_n$ векторов называется *базисом* пространства V. Любой вектор x пространства V представляется в виде линейной комбинации векторов базиса: $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, причем для заданного вектора x коэффициенты этого разложения определяются однозначно. Наличие базиса позволяет установить однозначное соответствие J между элементами n-мерного векторного пространства V и элементами стандартного n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$, если поле постоянных $\mathbb{C}$). Для этого векторам базиса $e_1, \ldots, e_n$ ставится в соответствие векторы $l_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, l_n = (0, 0, \ldots, 1)$ соответственно, а линейной комбинации $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ ставится в соответствие линейная комбинация векторов $l_1, \ldots, l_n$ с теми же коэффициентами. Полученное отображение $J : V \to \mathbb{R}^n$ является линейным изоморфизмом, т.е. $J(x + y) = Jx + Jy$, $J(\lambda x) = \lambda Jx$. Отсюда следует, что *все n-мерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны.*

Полученное выше отображение J является частным случаем линейного оператора в линейном пространстве. Отображение $S : V \to V$ линейного пространства V в себя называется *линейным*, если оно сохраняет линейную структуру пространства, т.е. $S(x + y) = S(x) + S(y)$, $S(\lambda x) = \lambda S(x)$, $\forall x \in U$. Такое отображение также называют *линейным оператором*, действующим в V. Если для S существует обратное отображение, являющееся линейным оператором, то говорят, что S – *линейный изоморфизм*, или *линейный обратимый оператор*. Предположим, что в V задан базис: $e_1, \ldots, e_n$. Тогда линейному оператору S можно поставить в соответствие матрицу. Действительно, задавая вектор $x \in V$ получаем $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, и в силу линейности S: $y = Sx = \lambda_1 Se_1 + \cdots + \lambda_n Se_n$. Но $Se_j = a_{1j} e_1 + \cdots + a_{nj} e_n$, поэтому $y = \sum_i (\sum_j a_{ij} \lambda_j) e_i$. Поскольку разложения векторов по базису однозначны, то оператор S задается действием матрицы $A = (a_{ij})$ на векторы-столбцы коэффициентов разложения

$$(\mu_1, \ldots, \mu_m)^\top = A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top,$$

где $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ – коэффициенты разложения вектора $y = S(x)$ по базису. Если оператор S обратимый, то матрица A невырождена. Переход в пространстве V от одного базиса $e_1, \ldots, e_n$ к другому $f_1, \ldots, f_n$ осуществляется с помощью невырожденной матрицы B: $f_j = b_{1j} e_1 + \cdots + b_{nj} e_n$, $\det B \neq 0$. Тогда матрица $\hat{A}$ оператора $S : V \to V$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$ выглядит следующим образом: $\hat{A} = B^{-1} A B$. Две матрицы $A, \hat{A}$, связанные таким соотношением, называются *подобными.*

Вещественные и комплексные линейные пространства связаны операциями *комплексификации* и *овеществления.* Рассмотрим вещественное линейное пространство V и рассмотрим прямую сумму $V \oplus V$ двух таких пространств. Элементами прямой суммы являются пары (x, y), $x, y \in V$, а операции определяются покоординатно: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Определим в полученном пространстве умножение на комплексные числа: для комплексного числа $\xi = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и элемента (x, y) определим $\xi \cdot (x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$. Проверяется, что полученное пространство является комплексным линейным пространством, т.е. введенные операции удовлетворяют обычным аксиомам. Для сложения это выполнено автоматически, нужно проверить аксиомы для умножения и закон дистрибутивности.

Задача 7.3 *Проверить выполнение аксиом комплексного линейного пространства.*

Полученное комплексное линейное пространство называется *комплексификацией* вещественного пространства V. В нем выделяются два вещественных линейных подпространства $V \oplus \{\underline{0}\}$ и $\{\underline{0}\} \oplus V$ – вещественное и мнимое подпространства.

В комплексном n-мерном пространстве автоматически определено умножение на вещественные числа, поэтому оно автоматически имеет структуру вещественного пространства, но размерности $2n$, т.к. если имеется базис из n линейно независимых над полем $\mathbb{C}$ векторов $e_1, \ldots, e_n$, то векторы $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ линейно независимы над полем $\mathbb{R}$. Полученное линейное вещественное пространство называется *овеществлением комплексного пространства* V.

Можно поставить вопрос о наиболее простом виде данной матрицы A, к которому ее можно привести преобразованиями подобия. Этот вопрос эквивалентен следующему: дан линейный оператор S в линейном n-мерном векторном пространстве (вещественном или комплексном). Каков наиболее простое представление этого оператора в некотором базисе? Ответ на оба эти вопроса дает теорема Жордана о нормальной форме матрицы [3, 1]: существует такая невырожденная, вообще говоря комплексная даже в вещественном пространстве, матрица B, что матрица $B^{-1}AB$ имеет *жорданову нормальную форму.* Вид этой жордановой формы зависит от числа и кратности собственных значений матрицы A, а также от структуры инвариантных подпространств матрицы, которые соответствуют каждому собственному значению. В вещественном пространстве для применения этой теоремы нужно перейти к комплексификации.

При рассмотрении линейных пространств часто важно задать в этих пространствах длину вектора. Это достигается введением нормы в линейном пространстве, после чего оно становится линейным нормированным пространством. Пусть V – линейное пространство. Неотрицательная функция $n : V \to \mathbb{R}_+$ в этом пространстве называется *нормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам: $n(x) \geq 0$, $n(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \underline{0}$, $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$, $n(x + y) \leq n(x) + n(y)$ (неравенство треугольника). Обычно норму вектора x обозначают $||x||$. Примерами норм в $\mathbb{R}^n$ являются: 1) $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ (евклидова норма); 2) $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \max_i |x_i|$; 3) $||(x_1, \ldots, x_n)|| = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Задание нормы позволяет определить расстояние d между векторами в пространстве: $d(x, y) = ||x - y||$. Легко проверить, в силу аксиом нормы, что полученная функция удовлетворяет обычным аксиомам расстояния. В конечномерном векторном пространстве эта метрика определяет сходимость последовательностей векторов, относительно которой это пространство является *полным*, т.е. сходящаяся по Коши последовательность имеет пределом вектор из этого пространства. В бесконечномерном линейном нормированном пространстве это может быть не так.

Норма в линейном пространстве V позволяет определить норму линейного оператора. Множество линейных операторов $S : V \to V$ само становится линейным пространством, если в нем определить сложение и умножение на число поточечно: $(S_1 + S_2)x = S_1 x + S_2 x$, $(\lambda S)x = \lambda Sx$. Если $S : V \to V$ – линейный оператор в нормированном пространстве, то по определению

$$||S|| = \max_{||x||=1} ||Sx||.$$

Задача 7.4 *Проверьте аксиомы нормы.*

В качестве основного примера рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ векторов-столбцов с евклидовой нормой. Линейный оператор в нем зададим квадратной матрицей $S = (s_{ij})$, а действие оператора – обычное умножение матрицы на вектор-столбец: $y = Sx$.

Задача 7.5 *Вычислите норму этого оператора. Указание: рассмотрите единичную сферу в* $\mathbb{R}^n$*:* $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. *Тогда* $||S||^2 = \max_x ||Sx||^2 = \max_x \sum_i (\sum_j s_{ij} x_j)^2$. *Используйте метод неопределенных множителей Лагранжа для поиска экстремума. Ответ:* $||S|| = \sqrt{\max Spec(S^\top S)}$, *где* $Spec(S^\top S)$ *– собственные значения неотрицательной симметричной матрицы* $S^\top S$ *(*$(S^\top Sx, x) = (Sx, Sx) \geq 0$*), см. подробнее в* [1].

Задача 7.6 *Найдите норму операторную норму матрицы в случае, когда в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *задана норма 2) (соответственно – норма 3)).*

Дополнение 2: Логарифм невырожденной матрицы

В этом разделе, для полноты изложения, мы докажем теорему 6.3, гарантирующую для любой невырожденной матрицы A существование такой матрицы B, что $A = \exp[B]$. Любую такую матрицу B будем называть *логарифмом матрицы* A и обозначать $B = \mathrm{LnA}$. Идея доказательства теоремы состоит в построении решения уравнения $A = \exp[X]$ в виде матричного степенного ряда.

Матричным степенным рядом от матрицы A с коэффициентами $a_n \in \mathbb{C}$ называется ряд вида

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A^n, \quad A^n = A \cdot A \cdots A \ (n \text{ раз}).$$

Как известно из линейной алгебры [1, 3], всякая матрица A над полем $\mathbb{C}$ подобна своей жордановой форме J, т.е. существует такая невырожденная комплексная матрица B, что $A = B^{-1}JB$, $J = \mathrm{diag}\ (J_0, J_1, \ldots, J_q)$, где J_0 – диагональная матрица, а матрицы J_r, $r \leq 1$, имеют вид $J_r = \lambda E + N$, здесь E – единичная матрица соответствующего размера m, а матрица N является верхне-треугольной, все элементы которой равны нулю, кроме элементов $n_{i,i+1} = 1$, в частности, эта матрица *нильпотентна*, т.е. ее m-я степень является нулевой матрицей. Среди собственных чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ могут быть одинаковые (одному собственному значению может соответствовать несколько жордановых блоков).

Сначала покажем, что вместо того, чтобы решать уравнение с матрицей A, можно решать уравнение с ее жордановой формой J.

Лемма 7.2 *Пусть $f(A)$ – матричный степенной ряд, а $A = B^{-1}JB$. Тогда ряды $f(A)$ и $f(J)$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Непосредственно проверяется следующее равенство

$$(B^{-1}JB)^k = B^{-1}J^kB.$$

Поэтому формально (т.е. не обращая пока внимание на сходимость) имеем

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (B^{-1}JB)^k = B^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k)B = B^{-1}f(J)B.$$

Пусть теперь $S_k(A)$ – частичная сумма ряда для $f(A)$. Тогда $S_k(A) = B^{-1}S_k(J)B$. Переход к пределу в обеих частях равенства доказывает лемму.■

Лемма 7.3 *Пусть $J = \mathrm{diag}(J_0, J_1, \ldots, J_q)$, как и выше. Тогда если сходятся ряды $f(J_0)$, $f(J_1), \ldots, f(J_q)$, то сходится ряд $f(J)$. Если хотя бы один из рядов $f(J_i)$ расходится, то расходится и $f(J)$.*

Доказательство. Имеем равенства

$$S_k(J) = \sum_{m=1}^{k} a_m J^m = \sum_{m=1}^{k} a_m \,\mathrm{diag}(J_0, J_1, \ldots, J_q)^m =$$
$$\mathrm{diag}\Big(\sum_{m=1}^{k} a_m J_0^m, \sum_{m=1}^{k} a_m J_1^m, \ldots, \sum_{m=1}^{k} a_m J_q^m\Big) = \mathrm{diag}(S_k(J_0), S_k(J_1), \ldots, S_k(J_q)).$$

Устремляя $k \to \infty$, получаем утверждение. ■

Пусть задан числовой степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, и ρ – радиус сходимости ряда.

Предложение 7.2 *Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A простые и лежат внутри круга радиуса ρ, то ряд $f(A)$ сходится и*

$$f(A) = B^{-1}\,\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))B.$$

Если же существуют λ_i такие, что $|\lambda_i| > \rho$, то ряд $f(A)$ расходится.

Доказательство. Из предположения о простоте собственных значений следует, что для A жордановой формой является диагональная матрица J_0, и тогда $f(A) = B^{-1}f(J_0)B$. Из этого следует утверждение, поскольку $f(J_0) = \mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$. ■

Если у матрицы A есть кратные собственные значения, то нужно вычислить $f(J_k)$, где J_k – жорданова клетка.

Лемма 7.4 *Пусть J_r – жорданова клетка, $J_r = \lambda E_r + N_r$, и предположим, что $|\lambda| < \rho$. Тогда ряд $f(J_k)$ сходится и имеет вид*

$$f(J_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Если $|\lambda| > \rho$, то ряд $f(J_k)$ расходится.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму

$$S_k(J_r) = \sum_{m=0}^{k} a_m(\lambda E_r + N_r)^m.$$

В силу очевидного тождества $E_r N_r = N_r E_r = N_r$ получаем по формуле бинома Ньютона

$$(\lambda E_r + N_r)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^{m-j} N_r^j,$$

где C_m^j – биномиальные коэффициенты. Для матрицы N_r, являющейся нильпотентной, имеем $N_r^{i+r} = 0$ при $i \geq 0$. Поэтому получаем

$$(\lambda E_r + N_r)^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \dots & \frac{m(m-1)\cdots(m-r+2)}{(r-1)!}\lambda^{m-r+1} \\ 0 & \lambda^m & \dots & \frac{m(m-1)\cdots(m-r+3)}{(r-2)!}\lambda^{m-r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^m \end{pmatrix}.$$

Таким образом имеем

$$S_k(J_r) = \begin{pmatrix} S_k(\lambda) & S_k'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(r-1)!}S_k^{(r-1)}(\lambda) \\ 0 & S_k(\lambda) & \dots & \frac{1}{(r-2)!}S_k^{(r-2)}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_k(\lambda) \end{pmatrix}.$$

При условии $|\lambda| < \rho$ все частичные суммы справа сходятся при $k \to \infty$ к соответствующим функциям f и их производным. Если же $|\lambda| > \rho$, то ряды расходятся.

7.5 Существование матричного логарифма

Из доказанных утверждений вытекает следующая теорема

Теорема 7.4 *Пусть функция $f(z)$ задана сходящимся степенным рядом и $\rho > 0$ – его радиус сходимости. Тогда если у матрицы A все ее собственные значения λ_i лежат внутри круга сходимости ряда, то матричный ряд $f(A)$ сходится, а собственными значениями матрицы $f(A)$ являются числа $f(\lambda_i)$.*

Пример 7.3 *Матричный ряд $\mathrm{e}^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$ сходится для любой матрицы A.*

Задача 7.7 *Пользуясь определением матричной экспоненты, проверьте следующее свойство: если две квадратные матрицы A, B коммутируют, т.е. $AB = BA$, то справедливо тождество $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$.*

Теперь перейдем к построению логарифма невырожденной матрицы, т.е. мы докажем теорему 6.3.

Теорема 7.5 *Любая невырожденная комплексная матрица B имеет логарифм, т.е. такую комплексную матрицу $L = \operatorname{Ln} B$, которая удовлетворяет соотношению $\exp[L] = B$.*

Доказательство. Пусть J – жорданова форма матрицы A, $A = R^{-1}JR$.
1). Если $\operatorname{Ln} J$ существует, т.е. $J = \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} J}$, тогда $\operatorname{Ln} A = R^{-1}(\operatorname{Ln} J)R$.
Это вытекает из следующих равенств

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{R^{-1}(\operatorname{Ln} J)R} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}[R^{-1}(\operatorname{Ln} J)R]^k = R^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}[\operatorname{Ln} J]^k)R = \\ &= R^{-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} J}R = R^{-1}JR = A.\end{aligned}$$

2). Пусть теперь $J = \operatorname{diag}(J_0, J_1, \ldots, J_q)$ и существуют все $\operatorname{Ln} J_i$. Тогда имеем

$$\operatorname{Ln} J = \operatorname{diag}(\operatorname{Ln} J_0, \operatorname{Ln} J_1, \ldots, \operatorname{Ln} J_q).$$

Действительно, для блочно-диагональной матрицы вычислим экспоненту (вычисление ведется в каждом блоке независимо от остальных!):

$$\begin{aligned}&\exp[\operatorname{diag}(\operatorname{Ln} J_0, \operatorname{Ln} J_1, \ldots, \operatorname{Ln} J_q)] = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}[\operatorname{diag}(\operatorname{Ln} J_0, \operatorname{Ln} J_1, \ldots, \operatorname{Ln} J_q)^k] = \\ &= \operatorname{diag}[\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} J_0}, \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} J_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} J_q}] = \operatorname{diag}[J_0, J_1, \ldots, J_q] = J.\end{aligned}$$

3). Теперь найдем логарифмы для каждой жордановой клетки $J_i = \lambda_i E_r + N_r$, $\lambda_i \neq 0$. Для диагональной матрицы $J_0 = \operatorname{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$ очевидно имеем

$$\operatorname{Ln} J_0 = \operatorname{diag}(\operatorname{Ln} \lambda_0, \ldots, \operatorname{Ln} \lambda_p).$$

Представим матрицу J_i в виде $\lambda_i(E_r + \frac{1}{\lambda_i}N_r)$. Если формально прологарифмировать это произведение, используя формулу $\ln(1+z) = z - z^2/2 + \cdots + (-1)^{k+1}z^k/k + \cdots$, то получится

$$\operatorname{Ln} J_i = (\operatorname{Ln} \lambda_i)E_r + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(N_r/\lambda_i)^k. \tag{7.8}$$

Однако в силу нильпотентности матрицы N_r, при $k \geq r$ матрицы N_r^k являются нулевыми, поэтому ряд в (7.8) является фактически конечной суммой. Проверим, что правая часть полученного выражения удовлетворяет логарифмическому тождеству $\mathrm{e}^{\operatorname{Ln} J_i} = J_i$. Вычисления мы будем делать так, как будто ряд является бесконечным. Напомним, что равенство рядов эквивалентно равенству соответствующих коэффициентов. Для скалярных рядов мы имеем тождество $1 + z/\lambda \equiv \exp[\ln(1 + z/\lambda)]$, т.е. если правую и левую часть разложить в степенные ряды, то их соответствующие коэффициенты будут одинаковы. Поэтому и для матричных рядов имеем

$$\exp[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(N_r^k/k\lambda_i^k)] \equiv E_r + N_r/\lambda_i.$$

Но тогда, используя тот факт, что скалярная матрица $(\operatorname{Ln} \lambda_i)E_r$ перестановочна с любой матрицей, получаем:

$$\begin{aligned}&\exp[(\operatorname{Ln} \lambda_i)E_r + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(N_r^k/k\lambda_i^k)] = \exp[\operatorname{Ln} \lambda_i]E_r \exp[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(N_r^k/k\lambda_i^k)] \\ &= \lambda_i(E_r + N_r/\lambda_i) = \lambda_i E_r + N_r.\end{aligned}$$

Теорема доказана.■

Дополнение 3: Теорема существования для линейных уравнений и систем

В этом дополнении мы приведем доказательство теоремы существования для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Как уже говорилось выше, эта теорема, в отличие от стандартной теоремы существования для произвольных нелинейных систем, является *глобальной* в том смысле, что интервал, на котором определено решение системы, совпадает с интервалом, на котором определены функции – коэффициенты линейной системы.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = A(t)x + f(t). \tag{7.9}$$

Теорема 7.6 *Предположим, что* A, f *в уравнении* (7.9) *определены на интервале* (α, β) *и непрерывны на нем. Тогда для любого* $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *и любого вектора* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *(или* $\mathbb{C}^n$*) существует единственная непрерывно дифференцируемая вектор-функция* $x(t)$*, являющаяся решением уравнения* (7.9) *и удовлетворяющая равенству* $x(t_0) = x_0$*. Это решение определено для всех* $t \in (\alpha, \beta)$*.*

Доказательство. Заметим, что доказательство достаточно провести для случая однородной системы, т.к. если теорема доказана для однородной системы, ее справедливость для неоднородной системы следует из формулы вариации произвольных постоянных. Рассмотрим сегмент $[t_1, t_2] \subset (a, b)$, $t_0 \in (t_1, t_2)$. В силу непрерывности матрицы A имеем неравенство $||A(t)|| \leq M$ при $t \in [t_1, t_2]$, где величина постоянной M зависит, вообще говоря, от выбранного отрезка $[t_1, t_2]$ и может стремиться к бесконечности, когда t_1 или t_2 стремится к границе интервала (a, b). Рассмотрим соответствующее интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds,$$

которое получается из дифференциального уравнения (7.9), если в него подставить искомое решение (предполагая его существующим) и проинтегрировать полученное тождество.

Задача 7.8 *Докажите, что непрерывное решение этого интегрального уравнения дифференцируемо и является решением дифференциального уравнения.*

Интегральное уравнение будем решать методом последовательных приближений по схеме:

$$x_0(t) \equiv x_0,\ x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x_{k-1}(s)ds. \tag{7.10}$$

Вместо доказательства сходимости получающейся последовательности вектор-функций $\{x_k(t)\}$ будем доказывать сходимость ряда $x_0 + \sum_1^\infty (x_k(t) - x_{k-1}(t))$. Очевидно, что конечные суммы этого ряда совпадают с соответствующими членами последовательности. Вектор-функции $x_k(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$, т.к. являются интегралами от непрерывных вектор-функций. По индукции получаем неравенства:

$$\begin{aligned}
&||x_1(t) - x_0|| \le |\int_{t_0}^{t} ||A(s)||||x_0||ds| \le M||x_0|||t - t_0|,\\
&||x_{k+1}(t) - x_k(t)|| \le |\int_{t_0}^{t} ||A(s)||||x_k(s) - x_{k-1}(s)||ds| \le\\
&\le MM^k||x_0||\frac{1}{k!}|\int_{t_0}^{t} |t - t_0|^k ds| = M^{k+1}||x_0||\frac{1}{(k+1)!}|t - t_0|^{k+1}.
\end{aligned}$$

Из этих оценок получаем, что для ряда $x_0 + \sum_1^\infty (x_k(t) - x_{k-1}(t))$ мажорирующим является ряд, дающий разложение экспоненты:

$$||x_0 + \sum_1^\infty (x_k(t) - x_{k-1}(t))|| \le ||x_0|| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k |t - t_0|^k \right) = ||x_0|| \exp[M|t - t_0|].$$

Ряд справа сходится равномерно на любом ограниченном отрезке времени. Поэтому равномерно сходится ряд слева и предельная вектор-функция $x(t)$ является непрерывной на $t \in [t_1, t_2]$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (7.10), получаем, что на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ вектор-функция $x(t)$ является решением интегрального уравнения, а потому и решением соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Единственность решения доказывается от противного. Предположим, что имеются два решения $x(t), y(t)$ с одним и тем же начальным условием x_0 при $t = t_0$, определенные на одном и том же отрезке $t \in [t_1, t_2] \subset (a, b)$. Оба они тогда являются решениями интегрального уравнения. Рассмотрим разность $x(t) - y(t)$ и оценим ее, используя интегральное уравнение:

$$||x(t) - y(t)|| = ||\int_{t_0}^{t} A(s)(x(s) - y(s))ds|| \le M|t - t_0| \max_t ||x(t) - y(t)||.$$

Обозначим $\Delta = \max_t ||x(t) - y(t)||$. Зададим число $q,\ 0 < q < 1$, и разобьем отрезок $[t_0, t_2]$ на некоторое число частей так, чтобы длина максимальной из них не превышала q/M. Применим полученное неравенство к каждому из этих подотрезков, начиная с первого левого. Тогда получим неравенство $(1 - q)\Delta \le 0$, т.к. $M|t - t_0| \le Mq/M = q$. Следовательно на этом подотрезке справедливо тождество $\Delta \equiv 0$. Далее возьмем правый конец подотрезка и примем его за новое t_0 и получим, что тождество сохранится на следующем отрезке. Продолжая таким образом, мы получим, что $x(t) - y(t) \equiv 0$ на всем отрезке $[t_1, t_2]$.

Теперь осталось доказать, что полученное на отрезке $[t_1, t_2]$ решение можно продолжить на весь интервал (a, b). Интервал (a, b) можно покрыть счетным множеством расширяющихся отрезков $[t_1^{(n)}, t_2^{(n)}]$, $t_1^{(n)} \to a$, $t_2^{(n)} \to b$, на каждом из которых можно выбрать постоянные M_n. Поскольку при фиксированном n существование и единственность доказана, то при $n \to \infty$ получаем справедливость утверждения на всем интервале (a, b).$\blacksquare$

Литература

[1] Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. М: Наука, 1967. – 575 с.

[2] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. 3-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

[3] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: Физматлит, 2000. — 368 с.

[4] L. Lerman, Remarks on the quasi-periodic Riccatti equation, Intern. J. Bifurcation and Chaos, Vol. 15 (2005), No. 11, 3675–3689.

[5] Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров. Особые точки роторного типа неавтономных систем дифференциальных уравнений и их роль в рождении сингулярных аттракторов нелинейных автономных систем, Дифф. уравнения, Т.40 (2004), No.11, 1579-93.

[6] М.А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. – 526 с.

[7] А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ "РХД" , 2000. – 176 с.

[8] А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007. – 240 с.

[9] В.А. Якубович, В.М. Старжинский. Линейные дифференциальные уравввнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М.: Наука, 1972. – 718 с.

[10] П. Халмош. Конечномерные векторные пространства, М.: Физматгиз, 1963. – 264 с.

[11] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции, М.: Наука, 1977. – 342 с.