Круглова С.С.   Галкина С.Ю.   Галкин О.Е.

Теория пределов
Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Электронное учебно-методическое пособие

Нижний Новгород
2010 г.

Оглавление

Аннотация

Настоящее пособие имеет своей целью дать студентам физического факультета в систематическом изложении те сведения из математического анализа, которые необходимы для успешного усвоения общетеоретических и специальных дисциплин.

Математика является точной абстрактной наукой, изучающей количественные соотношения и пространственные формы. Точность математики означает, что основным методом в математических исследованиях являются строгие логические рассуждения. Абстрактность математики означает, что объектами ее изучения являются математические модели.

Математические методы исследования всегда играли и продолжают играть огромную роль в естествознании. В качестве примера можно привести такие теоретические открытия, как обнаружение планеты Нептун, доказательство существования электромагнитных волн или открытие позитрона, осуществленные сначала математически и лишь потом нашедшие экспериментальное подтверждение.

Математический анализ изучает функциональные зависимости и является той частью классической математики, которая служит основой для почти любой математической дисциплины.

Задачи курса

Дать достаточно глубокое, систематическое изложение основных фактов. На их базе студент или молодой специалист, когда это ему понадобится, сможет достаточно легко освоить другие вопросы, то есть будет иметь возможность «доучиваться».

Свободное владение математическими методами, знания и интуиция приобретаются, развиваются и накапливаются в процессе систематических занятий, в результате длительной и настойчивой работы. При изучении математики весьма важно, чтобы учащийся понял и хорошо усвоил основные математические понятия, а не составил о них приближенное расплывчатое представление. Часто мнение о трудности изучении математики связано с туманным и нечистым ее изложением на интуитивном уровне. Наилучший и кратчайший способ разъяснить какое-либо математическое понятие – это дать его точную формулировку. Лучший способ на первом этапе обучения объяснить теорему, выявить ее смысл, установить ее связь с ранее изученными фактами – это доказать теорему.

Однако при изложении курса математического анализа на физическом факультете следует соблюдать известную умеренность в отношении полноты и математической строгости доказательств. Особое внимание необходимо сосредоточить на выявлении конкретного содержания понятий и на методике применения математического аппарата в физике и других смежных науках.

При изучении математики особенно важна последовательность освоения материала. Например, тема «Дифференцирование» основывается на теории пределов. Интегрирование функций нельзя понять, не усвоив теорию дифференцирования и, естественно, теорию пределов.

На практике возможны незначительные перестановки в последовательности изложения. Но, безусловно, обязательно содержание материала в целом, знать его необходимо в полном объеме программы. При самостоятельном изучении из множеств учебников лучше выбрать какой-либо один, наиболее соответствующий курсу, которым и пользоваться систематически, в случае необходимости обращаясь и к другим пособиям.

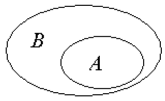
Успешно освоить курс можно только при условии, если изучать его активно, с карандашом в руках, выполняя рисунки, воспроизводя выводы, не глядя в пособие или учебник, решая достаточное число упражнений к каждой теме.

Некоторые темы, например «Методы приближенных вычислений определенных интегралов», «Общий критерий Коши сходимости и равномерной сходимости последовательностей, рядов, интегралов», «Равномерная непрерывность функций» и другие можно рекомендовать для самостоятельного изучения.

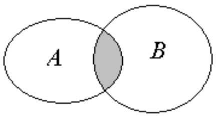
§1. Множества, действия над множествами

1.1. Общие свойства множеств

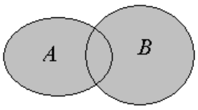
Множество – набор (совокупность) объектов (*элементов множества*), которые объединяются одним и тем же характерным свойством. Обозначаются множества большими буквами латинского алфавита A, B, … , а их элементы – маленькими: a, b, … .
Введем и другие обозначения. Для множеств:
$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A (лежит в множестве A);



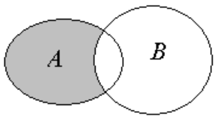
$A \subset B$ – множество A *включено* в множество B; это значит, что каждый элемент множества A принадлежит также множеству B;



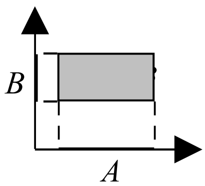
$A \cap B$ – *пересечение* множеств A и B; это множество, которое состоит из элементов, лежащих одновременно и в A и в B:
$A \cap B = \{c \mid c \in A, c \in B\}$;



$A \cup B$ – *объединение* множеств A и B; это множество, которое состоит из элементов, лежащих либо в A либо в B:
$A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ или } c \in B\}$;



$A \setminus B$ – *разность* множеств A и B; это множество, которое состоит из элементов, лежащих в A, но не лежащих в B:
$A \setminus B = \{c \mid c \in A, c \notin B\}$;



$A \times B$ – *декартово* (*прямое*) *произведение* множеств A и B; это множество, которое состоит из всех таких пар элементов, что первый лежит в A, второй в B:
$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Часто для сокращения записи в математике используются кванторы:
$\forall$ – любой, каждый;
$\exists$ – существует;
$\exists\,!$ – существует единственный.

Следующие знаки обозначают:
$\Rightarrow$ – следует;
$\Leftrightarrow$ – равносильно;
$f : A \to B$ – функция f отображает множество A в множество B;
$f : a \to b$ – функция f ставит в соответствие элементу a элемент b.

Числовые множества

1.2. Натуральные числа

Натуральные числа – это числа, возникающие при счете. Множество натуральных чисел обозначается $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

С множеством натуральных чисел тесно связан *метод математической индукции*. Он применяется, если нужно доказать множество утверждений $A(n)$, где n – произвольное натуральное число.

Метод математической индукции (ММИ).

Требуется доказать утверждение $A(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$.

1. Проверяем *базу индукции*: $A(1)$, то что утверждение верно при $n = 1$.
2. Выдвигается *гипотеза* (*предположение*): при $n = k$ утверждение $A(k)$ – верно.
3. Доказывается верность утверждения $A(k+1)$ при $n = k+1$, опираясь на предположение индукции.

Если пункты 1-3 проверены, то *из принципа математической индукции следует*, что утверждение $A(n)$ верно для каждого $n \in \boldsymbol{N}$.

При помощи ММИ можно доказывать утверждение $A(n)$, где $n \geq n_0$, где n_0 – любое начальное натуральное число.

Пример 1. *Геометрическая прогрессия* – это последовательность $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$, в которой каждый последующий член получается из предыдущего умножением на одно и то же число: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где *q – знаменатель прогрессии.*

1) Докажем ММИ формулу для общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:

1. *При n = 1 формула* $b_1 = b_1 \cdot q^0$ *– верна.*

2. *При n = k предположим, что* $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$ *– верно.*

3. *При n = k + 1 докажем, что* $b_{k+1} = b_1 \cdot q^k$. *Из определения геометрической прогрессии следует, что* $b_{k+1} = b_k \cdot q$. *Подставляя сюда формулу для* b_k *из пункта 2), получаем*

$b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^k$. Ч.т.д.

Из принципа математической индукции следует, что $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ при всех $n \in \boldsymbol{N}$.

2) Докажем ММИ формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$:

1. *При n = 1 формула* $S_1 = \dfrac{b_1 \cdot (1 - q^1)}{1 - q} = b_1$ *– верна.*

2. *При n = k предположим, что* $S_k = \dfrac{b_1 \cdot (1 - q^k)}{1 - q}$ *– верно.*

3. *При n = k + 1 докажем, что* $S_{k+1} = \dfrac{b_1 \cdot (1 - q^{k+1})}{1 - q}$. *Из определения суммы, предположения индукции а также из формулы общего члена геометрической прогрессии получаем*

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = \frac{b_1 \cdot (1 - q^k)}{1 - q} + b_1 \cdot q^k = b_1 \frac{1 - q^k + q^k - q^{k+1}}{1 - q} = \frac{b_1 \cdot (1 - q^{k+1})}{1 - q}.$$

Пример 2. *Арифметическая прогрессия* – это последовательность $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, в которой каждый последующий член получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа $a_{n+1} = a_n + d$, где d – *разность прогрессии.*

1) Докажем ММИ формулу для общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$:

***1.** При n = 1 формула* $a_1 = a_1 + d \cdot 0$ *– верна.*

***2.** При n = k предположим, что* $a_k = a_1 + d(k-1)$ *– верно.*

***3.** При n = k + 1 докажем, что* $a_{k+1} = a_1 + d \cdot k$. *Действительно,*

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + d \cdot k$.

Из принципа математической индукции следует, что $a_n = a_1 + d(n-1)$ при всех $n \in \boldsymbol{N}$.

2) Докажем ММИ формулу для суммы *n* первых членов арифметической прогрессии

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$:

***1.** При n = 1 формула* $S_1 = \dfrac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 = a_1$ *– верна.*

***2.** При n = k предположим, что* $S_k = \dfrac{a_1 + a_k}{2} k$ *– верно.*

***3.** При n = k + 1 докажем, что* $S_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1)$. *Из определения суммы n первых членов арифметической прогрессии, предположения индукции, а также из формулы общего члена*

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k}{2} k + a_1 + d \cdot k = \frac{a_1 \cdot k + a_1 + a_k \cdot k + a_1}{2} + d \cdot k =$$

$$= \frac{a_1(k+1) + (a_k + d)k + (a_1 + d \cdot k)}{2} = \frac{a_1(k+1) + a_{k+1}(k+1)}{2} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1).$$

Замечания. 1) Обозначим $\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + ... + x_n$ *– сумма элементов x_k по k от 0 до n* **.**

2) Обозначим через C_n^k *число сочетаний из n по k*, которое вычисляется по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где при $k \geqslant 1$ $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$, и по определению $0! = 1$.

Пример 3. *Бином Ньютона:* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.

(В силу этой формулы числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами.*)

Докажем бином Ньютона ММИ:

1. При *n* = 1 равенство $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k \cdot a^{1-k} \cdot b^k = C_1^0 \cdot a^1 \cdot b^0 + C_1^1 \cdot a^0 \cdot b^1 = a + b$ верно.

2. Допустим, что при некотором натуральном *n* формула $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ верна.

3. Докажем, что при замене *n* на $n+1$ эта формула останется верной, то есть $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$. Преобразуем левую часть:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) = a \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k +$$

$$+ b \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^{k+1}.$$

Обозначим $k+1=m$, тогда второе слагаемое примет вид
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^{k+1} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} \cdot a^{n-m+1} \cdot b^m = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^k$. Подставим это выражение в формулу

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^k =$$
$$= C_n^0 \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^{k-1} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^{n+1} =$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1}.$$

Используя свойство биномиальных коэффициентов
$C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$, получаем

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k.$$

1.2. Целые числа

Целые числа – это множество, состоящее из натуральных чисел, им противоположных и нуля. Множество целых чисел обозначается
Z = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}.

1.3. Рациональные числа

Рациональные числа – это числа, представимые в виде обыкновенных дробей. Множество рациональных чисел обозначается

Q$=\dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.4. Иррациональные числа

Иррациональные числа – это числа, которые нельзя представить в виде обыкновенных дробей. Множество иррациональных чисел обозначается ***I***. В него включены такие числа, как ***π***, ***e*** и другие.

Пример. Докажем иррациональность числа $\sqrt{2}$ методом *от противного*.

Пусть $\sqrt{2} \in$ **Q**, тогда $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, где $m \in$ **Z**, $n \in$ **N**, а дробь $\dfrac{m}{n}$ - несократимая.

$m = \sqrt{2}n$. Возведем обе части равенства в квадрат: $m^2 = 2n^2$.

Так как правая часть делится нацело на 2, то левая часть также должна делиться на 2 нацело.

Тогда $m = 2k$ и $\begin{matrix} 2n^2 = (2k)^2 \\ n^2 = 2k^2 \Rightarrow n \vdots 2 \end{matrix}$, то есть n делится нацело на 2. Получили противоречие с условием, что дробь $\dfrac{m}{n}$ - несократимая. Значит, предположение неверно, и $\sqrt{2} \notin$ **Q**.

1.5. Действительные числа

Множество *действительных чисел* обозначается буквой ***R*** и состоит из рациональных и иррациональных чисел. Существуют различные подходы к понятию действительного числа, три основных из них сформулированы Кантором, Вейерштрассом и Дедекиндом. Приведем самое простое определение множества действительных чисел – *аксиоматическое.*

Определение. **R** – это множество, в котором введены действия сложения и умножения, а также отношения равенства и порядка, удовлетворяющие следующим аксиомам:

I. Аксиомы сложения.

1. Ассоциативность сложения: для любых действительных чисел *a*, *b* и *c* выполняется равенство $a+(b+c)=(a+b)+c$;

2. Существование нейтрального элемента относительно сложения:
$\exists\, 0\in R: \forall\, a\in R,\ a+0=a,\ 0+a=a$;

3. Существование противоположного элемента:
$\forall\, a\in R\ \exists\,(-a)\in R: a+(-a)=0,\ (-a)+a=0$;

4. Коммутативность сложения: $\forall\, a\in R, \forall\, b\in R\quad a+b=b+a$.

II. *Аксиомы умножения.*

*1. А*ссоциативность умножения: для любых действительных чисел *a*, *b* и *c*

выполняется равенство $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

2. Существование нейтрального (единичного) элемента: $\exists\, 1\in R: \forall\, a\in R,\ a\cdot 1=a$;

3. Существование обратного элемента: $\forall\, a\in R, a\neq 0\ \exists\left(\frac{1}{a}\right)\in R: a\cdot\frac{1}{a}=1$;

4. Коммутативность умножения: $\forall\, a\in R, \forall\, b\in R: a\cdot b=b\cdot a$.

III. *Связь сложения и умножения.* Дистрибутивность:

$$\forall\, a\in R, \forall\, b\in R, \forall\, c\in R: (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

IV. *Аксиомы равенства.*

$\forall\, a\in R, \forall\, b\in R, \forall\, c\in R$:

1. $a=a$;
2. $a=b\Rightarrow b=a$;
3. $a=b$, $b=c\Rightarrow a=c$ (транзитивность);
4. $a=b\Rightarrow a+c=b+c$;
5. $a=b\Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$.

V. *Аксиомы порядка.*

1. $\forall\, a\in R$ выполняется одно из соотношений $a>0$ или $a<0$ или $a=0$;

2. $\forall\, a>0, \forall\, b>0\Rightarrow a+b>0$;

3. $\forall\, a>0, \forall\, b>0\Rightarrow a\cdot b>0$.

VI. *Аксиома непрерывности.*

Для любых двух подмножеств действительных чисел таких, что *A* лежит левее *B*, найдется число *c*, которое лежит между ними:
$\forall\, A\subset R, \forall\, B\subset R$ таких, что $\forall\, a\in A, \forall\, b\in B, a\le b\ \exists\, c\in R: a\le c\le b$,
(*c* – число, разделяющее множества *A* и *B*).

Замечания.

1) Если для элементов множества выполняются аксиомы I.1-3, то такое множество является *группой* относительно операции сложения. Если для элементов множества выполняются аксиомы II.1-3, то такое множество является *группой* относительно операции умножения. Аксиомы I.4 и II.4 говорят о том, что каждая из этих групп коммутативна.)

2) Если для некоторого множества выполняются аксиомы I – IV, то такое множество называется *полем*. Аксиомы I – VI говорят о том, что **R** является *упорядоченным непрерывным полем*.

Множество **Q** также удовлетворяет аксиомам I – V и является упорядоченным полем, но для **Q** аксиома VI не выполняется.

Пример. Для подмножеств рациональных чисел $A = \{r \in \mathbf{Q} | r^2 < 2\}$ и $B = \{r \in \mathbf{Q} | r^2 > 2\}$ нет разделяющего числа, т.к. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Из аксиом множества действительных чисел следуют

Основные свойства числовых неравенств

1. $\forall a \in R, \forall b \in R$ верно одно из соотношений $a < b, a = b, a > b$;
2. $\forall a \in R, \forall b \in R: a < b \Rightarrow b > a$;
3. $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R: a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (транзитивность);
4. $a > b \Rightarrow a + c > b + c \ \forall c \in R$;
5. $a < b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$; $a < b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$;
6. $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$;
7. $a < b, c < d, a > 0, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$.

1.6. Модуль действительного числа

Модуль или *абсолютная величина* числа a обозначается $|a|$ и определяется одним из двух следующих способов:

1) Аналитическое определение модуля: $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

2) Действительные числа можно изображать на *числовой прямой*, где задано начало отсчета и направление отсчета. Тогда можно дать другое определение модуля.

Геометрическое определение модуля: модуль числа – это расстояние на числовой прямой от нуля до этого числа.

Свойства модуля

1. $a \leq |a|, \quad -a \leq |a|$;
2. $|a| \geq 0$;
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4. $|a| = |-a|$;
5. $|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k \ (k > 0)$.

   Доказательства этих свойств легко получить из определения модуля.
6. Модуль суммы не превосходит сумму модулей: $|a + b| \leq |a| + |b|$

   Доказательство.

$$\begin{cases} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{cases} \Rightarrow \quad a + b \leq |a| + |b| \qquad (1)$$

$$\begin{cases} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{cases} \Rightarrow \quad -(a + b) \leq |a| + |b| \qquad (2)$$

   Из (1) и (2) следует, что $|a + b| \leq |a| + |b|$.
7. $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \ n \geq 2, n \in \boldsymbol{N}$.

   Доказательство (ММИ):
   1. *При n = 2 формула* $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$ *верна по свойству 6.*
   2. *При n = k предположим, что неравенство* $|a_1 + \ldots + a_k| \leq |a_1| + \ldots + |a_k|$ *верно.*

2. *При n = k + 1 докажем, что* $|a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}| \le |a_1| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|$.

Из пунктов 1 и 2 следует, что

$|a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}| \le |a_1 + \ldots + a_k| + |a_{k+1}| \le |a_1| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|$.

8. $|a - b| \ge ||a| - |b||$

Доказательство.

$|a - b| + |b| \ge |a|$ *(по свойству 6)* $\Rightarrow$ $|a - b| \ge |a| - |b|$ *(1)*

$|b - a| + |a| \ge |b|$ *(по свойству 6)* $\Rightarrow$ $|b - a| \ge -(|a| - |b|)$ *(2)*

из (1) и (2) получаем $|a - b| \ge ||a| - |b||$.

1.7. Подмножества множества R

Определение. Множество $P \subset \mathbf{R}$ называется *промежутком*, если для любых двух чисел, лежащих в *P*, число, лежащее между ними, также лежит в *P*

$\forall x \in P, \forall y \in P, \forall z : x < z < y \Rightarrow z \in P$.

Промежутки на прямой бывают следующих видов:

$[a,b]$ - отрезок : $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$

(a,b) - интервал : $\{x \in R \mid a < x < b\}$

$[a,b)$ - полуинтервал : $\{x \in R \mid a \le x < b\}$

$(a,b]$ - полуинтервал : $\{x \in R \mid a < x \le b\}$

$[a,+\infty)$ - правый замкнутый луч : $\{x \in R \mid x \ge a\}$

$(a,+\infty)$ - правый открытый луч : $\{x \in R \mid x > a\}$

$(-\infty,a]$ - левый замкнутый луч : $\{x \in R \mid x \le a\}$

$(-\infty,a)$ - левый открытый луч : $\{x \in R \mid x < a\}$.

Ограниченные и неограниченные множества

Понятие ограниченности можно ввести в любом упорядоченном поле.

Определение. Множество *A ограничено сверху* в **R**, если существует такое $M \in \mathbf{R}$, что $a \le M$ для всех $a \in A$ (т.е. $\exists\, M \in \mathbf{R} : \forall\, a \in A \;\; a \le M$). (При этом число *M* называется *верхней границей* множества *A*.)

Если множество ограничено сверху, то верхних границ существует сколь угодно много.

Определение Множество *A не ограничено сверху*, если $\forall\, M \in \mathbf{R}\; \exists\, a \in A$: $a > M$.

Пример. Множество $A = (0,+\infty)$ не ограничено сверху.

Определение. *Точной верхней гранью* множества *A* называется число $\xi = \sup A$ такое, что выполняются следующие условия:

1 $\forall a \in A \;\; a \le \xi$ (т.е. ξ - верхняя граница).

2. $\forall \xi' < \xi \;\; \exists a_0 \in A \;\; a_0 > \xi'$ (т.е. ξ - наименьшая верхняя граница).

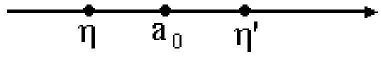
Другими словами, точная верхняя грань – это наименьшая из всех верхних границ.

Аналогично вводятся следующие определения.

Определение. Множество A *ограничено снизу*, если $\exists\, m \in \mathbf{R} : \forall\, a \in A \;\; a \ge m$. (При этом *M* – *нижняя граница*).

Определение. Множество A *не ограничено снизу*, если $\forall\, m \in \mathbf{R}\; \exists\, a \in A$: $a < m$.

Определение. *Точная нижняя грань* $\eta = \inf A$ – это наибольшая из всех нижних границ, то есть выполняются условия:.



1. $\forall a \in A \;\; a \ge \eta$ (т.е. η - нижняя граница);

2. $\forall \eta' > \eta \quad \exists a_0 \in A \quad a_0 < \eta'$ (т.е. η - наибольшая нижняя граница).

Пример. Если $A = (0, +\infty)$, то $\eta = 0$.

1.8. Свойства множества R

Теорема 1. Любое непустое ограниченное сверху подмножество **R** имеет конечную точную верхнюю грань.

Доказательство. Так как множество A ограничено сверху, то у него существуют верхние границы b. Пусть B – множество всех верхних границ, тогда $\forall b \in B, \forall a \in A: a \le b$. Значит, по аксиоме непрерывности, существует действительное число c, разделяющее эти множества: $\exists c \in R : \forall a \in A, \forall b \in B \; a \le c \le b$.

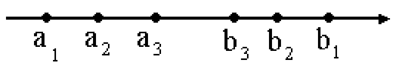
Поскольку $a \le c \; \forall a \in A$, то c – верхняя граница, а так как $c \le b \; \forall b \in B$, то c – наименьшая из всех верхних границ, т.е. $c = \sup A$. Теорема доказана. ■

Теорема 2 (*свойство Архимеда*). Множество **N** всех натуральных чисел не ограничено сверху в **R**.

Доказательство (методом от противного). Предположим, что натуральный ряд **N** ограничен сверху в **R.** Тогда, по теореме 1, $\exists \xi = \sup \mathbf{N}$. Так как ξ – наименьшая верхняя граница, то число $\xi - 1$ уже не является верхней границей. Поэтому $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, такое что $n_0 > \xi - 1$. Отсюда $n_0 + 1 > \xi$. Получили противоречие с тем, что любое натуральное число должно быть не больше ξ. Значит, натуральный ряд не ограничен сверху во множестве **R.** ■

Заметим, что существуют упорядоченные поля, в которых натуральный ряд ограничен сверху.

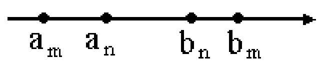
Теорема 3. (*Теорема Кантора о вложенных отрезках.*)



Пусть дана система вложенных друг в друга отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, длина которых стремится к нулю. Тогда существует единственная общая точка всех этих отрезков (то есть $\exists!\, c$: $\forall n \in \mathbf{N} \; c \in [a_n, b_n]$).

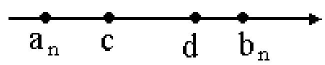
Доказательство. Рассмотрим множество A, состоящее из всех левых концов отрезков и множество B, состоящее из всех правых концов отрезков.

Покажем, что каждый элемент $a = a_m$ множества A не превосходит любого элемента $b = b_n$ множества B. Если эти элементы являются концами одного и того же отрезка, то есть $m = n$, то $a_m < b_n$. Если же $m < n$, то, так как отрезок $[a_n, b_n]$ вложен в $[a_m, b_m]$, будет $a_m \le a_n$. А так как $a_n < b_n$, то $a_m < b_n$.



Итак, $\forall a \in A, \forall b \in B \; a \le b$. По аксиоме непрерывности VI существует точка $c \in$ **R**, такая что $\forall a \in A, \forall b \in B \; a \le c \le b$. Поэтому $\forall a = a_n \in A, \forall b = b_n \in B \; a_n \le c \le b_n$, то есть $\forall n \in \mathbf{N} \; c \in [a_n, b_n]$. Существование общей точки всех отрезков доказано.

Покажем, что она одна (методом от противного). Пусть $\exists d \ne c : \forall n \in \mathbf{N} \; c \in [a_n, b_n]$, $d \in [a_n, b_n]$. Тогда $\forall n \in \mathbf{N} \; 0 < |d - c| \le b_n - a_n$. Получили противоречие с условием, что длина отрезков стремится к нулю. Значит, общая точка единственная. ■



Теорема 4. Множество **Q** всюду плотно в множестве **R** (это означает, что между любыми двумя различными действительными числами всегда найдется рациональное число, т.е. $\forall a \in \mathbf{R}, \forall b \in \mathbf{R} \; [\, a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbf{Q}: a < r < b \,]$).

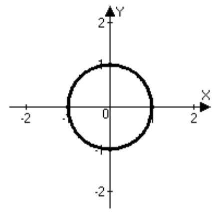
Доказательство. По свойству Архимеда $\exists n_0 \in \mathbf{N}:\ n_0 > \dfrac{1}{b-a}$. Тогда $a < a + \dfrac{1}{n_0} < b$.

Постараемся найти между a и b рациональное число r вида $\dfrac{m}{n_0}$. Для этого рассмотрим множество $A = \{m \in \mathbf{Z} \,|\, a < \dfrac{m}{n_0}\} = \{m \in \mathbf{Z} \,|\, m > n_0 \cdot a\}$. Оно ограничено снизу, значит в нем существует наименьший элемент m_0. При этом $m_0 \in A$, но $m_0 - 1 \notin A$. Значит $a < \dfrac{m_0}{n_0}$, и в то же время $a \geq \dfrac{m_0 - 1}{n_0}$, то есть $\dfrac{m_0}{n_0} \leq a + \dfrac{1}{n_0}$. Отсюда, учитывая, что $a + \dfrac{1}{n_0} < b$, получаем $a < \dfrac{m_0}{n_0} < b$. Итак, между a и b нашлось рациональное число $r = \dfrac{m_0}{n_0}$. ■

§2. Функции действительного переменного

Определение. Функцией f, действующей из множества X в множество Y, называется правило, по которому каждому элементу x из X сопоставляется один и только один элемент из Y. При этом множество X называется областью определения для f.

Записывается: $f: X \to Y$, $f(x) = y$ или $f: x \mapsto y$.



Пример. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ – не является функцией.

2.1. Способы задания функции

1. *Аналитический.* Функция задана формулой.

   а) $y = f(x)$ – *функция задана явно.* Например: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

   б) $F(x, y) = 0$ – *функция задана неявно.* Например: $x^3 + y^3 - 1 = 0$.

   Любую функцию, заданную явно, можно задать неявно: $f(x) - y = 0$. Из неявной функции, в общем случае, явную сделать нельзя.

   в) $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in T$ – *функция задана параметрически.* Например: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

2. *Словесный*. Например, функция Дирихле $D(x)$ может быть задана так: «в рациональных точках функция равна единице, а в иррациональных – нулю».

3. *Графический.* Функция задана графиком.

4. *Табличный* . Функция задана таблицей (это возможно, если область определения – конечное множество).

Определение. Две функции *(тождественно) равны* ($f \equiv g$), если их области определения совпадают, и $f(x) = g(x)$ для любого элемента x из области определения.

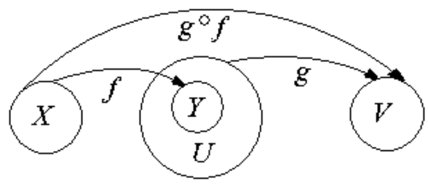
Определение. Суммой двух функций f и g называется такая функция $\varphi = f + g$, что

1. её область определения X_φ является пересечением областей определения X_f и X_g функций f и g: $X_\varphi = X_f \cap X_g$;
2. для всех x из X_φ выполняется равенство $\varphi(x) = f(x) + g(x)$.

Разность $f - g$ и произведение $f \cdot g$ двух функций f и g определяется аналогично.

Определение. *Композицией* функций $f: X \to Y \subset U$ и $g: U \to V$, называется такая функция $g \circ f$, что

$$\forall x \in X \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



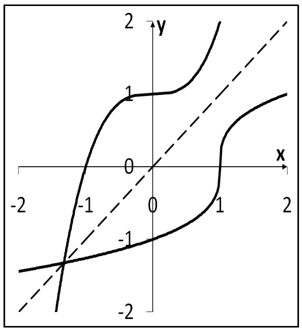
Пример. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2^x$. Тогда

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{\cos x}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \cos(2^x)$$

Определение. id – тождественная функция: $id(x) = x \quad \forall x \in X$.

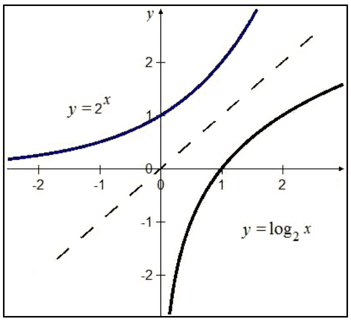
Определение. Пусть задана функция $f : X \to Y$. Обратной к ней функцией называется такая функция $f^{-1} : Y \to X$, что $f^{-1} \circ f = id$ и $f \circ f^{-1} = id$.

Обратная функция f^{-1} *существует*, например, если функция f монотонна. Для того чтобы найти обратную функцию, нужно выразить x через y, затем поменять местами функцию и переменную. Если нарисовать графики прямой и обратной функции на одном чертеже, то они будут симметричны относительно прямой $y = x$.

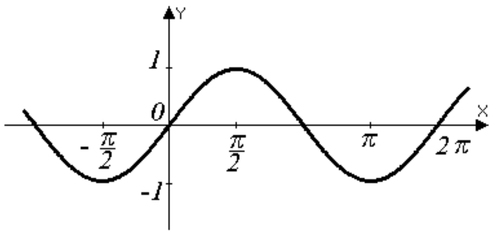


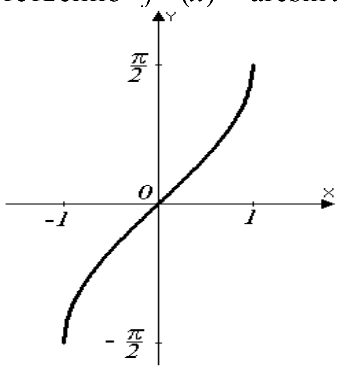
Пример 1. Для того чтобы найти обратную к функции $y = f(x) = x^3 + 1$, выразим переменную x через y, получим $x = \sqrt[3]{y - 1}$.
Тогда обратная функция $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$.

Пример 2. $f(x) = \log_a x$.
Обратная к ней функция: $f^{-1}(y) = a^y$, так как $(f^{-1} \circ f)(x) = a^{\log_a x} = x, \ \forall x > 0$,
$(f \circ f^{-1})(y) = \log_a a^y = y, \ \forall y \in R$.



Пример 3. $y = f(x) = \sin x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.
Обратная функция: $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$, $-1 \le y \le 1$; соответственно $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $-1 \le x \le 1$.



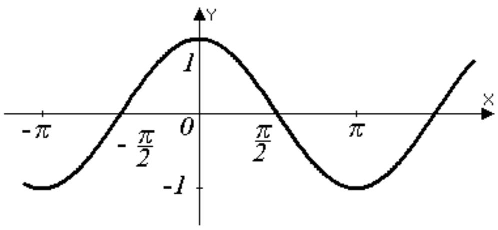


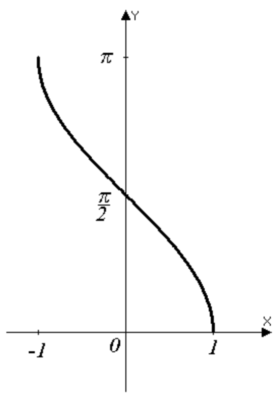
Действительно,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \arcsin(\sin x) = x, \ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2};$$

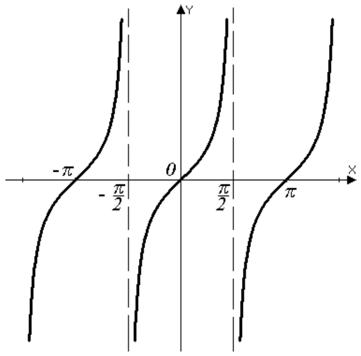
$$(f \circ f^{-1})(y) = \sin(\arcsin y) = y, \ -1 \le y \le 1.$$

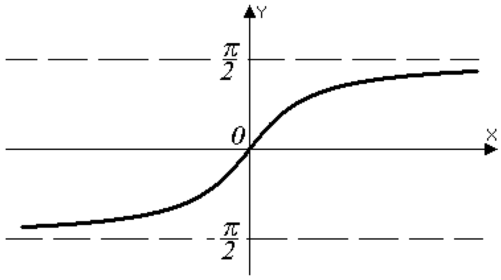
Пример 4. $y = f(x) = \cos x$, $0 \le x \le \pi$.
Обратная функция: $y = f^{-1}(x) = \arccos x$, $-1 \le x \le 1$.



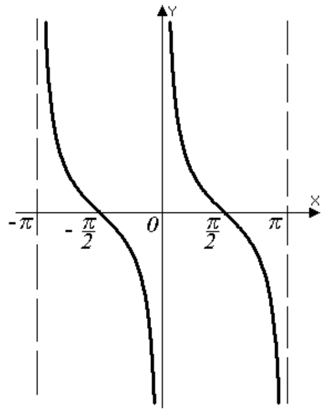


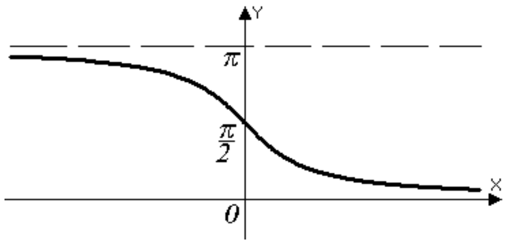
Пример 5. $y = f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.
Обратная функция: $y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < \infty$.





Пример 6. $y = f(x) = \text{ctg}\, x,\ -\pi/2 < x < \pi/2$.
Обратная функция: $y = f^{-1}(x) = \text{arcctg}\, x,\ -\infty < x < \infty$.





2.2. Элементарные свойства функций

1. ***Монотонность***

__Определение.__ Функция называется *монотонной на промежутке*, если она либо возрастает на этом промежутке, либо убывает.

Определение. $f: X \to Y$ *возрастает*, если $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

$f: X \to Y$ *убывает*, если $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

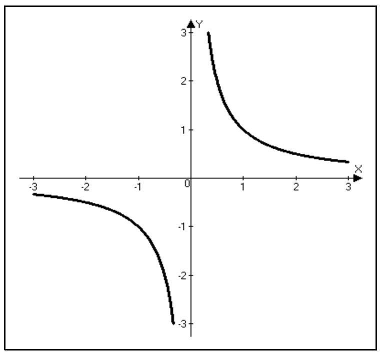
Определение. $f: X \to Y$ называется *неубывающей*, если $\forall x_1, x_2 \in X \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

$f: X \to Y$ называется *невозрастающей*, если $\forall x_1, x_2 \in X \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Определение. Функция *монотонна в широком смысле*, если она либо невозрастающая, либо неубывающая.

Пример. Неверно, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на всей области определения $\{x \ne 0\}$, т.к. $f(-1) = -1$, а $f(1) = 1$.

Верно, что $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ области определения.



Свойства возрастающих и убывающих функций

I. $f \nearrow \ \Rightarrow \ kf \nearrow$ при $k>0$; $kf \searrow$ при $k<0$.

II. $f \nearrow,\ g \nearrow \ \Rightarrow \ (f+g) \nearrow$.

III. $f \nearrow,\ g \nearrow \ \Rightarrow \ (f \cdot g) \nearrow$, если f>0 и g>0.

IV. $f \nearrow,\ g \nearrow \ \Rightarrow \ f \circ g \nearrow,\ g \circ f \nearrow$.

V. $f \nearrow,\ g \searrow \ \Rightarrow \ f \circ g \searrow$.

VI. $f \searrow, g \searrow \Rightarrow f \circ g \nearrow$.

2. ***Четность (нечетность)***

Определение. Функция $f: X \to Y$ называется *четной*, если $\forall x \in X$ выполнено: 1) $-x \in X$; 2) $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение. Функция $f: X \to Y$ называется *нечетной*, если $\forall x \in X$
1) $-x \in X$; 2) $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Определение. Функция называется *функцией общего вида*, если она не является ни четной, ни нечетной.

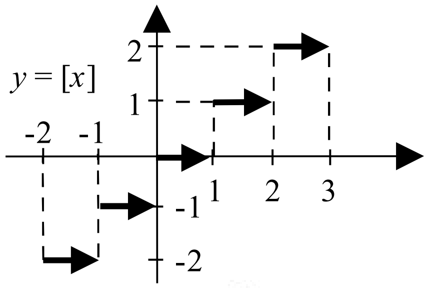
3. ***Периодичность***

Определение. Функция $f: X \to Y$ называется периодической с периодом $T>0$, если $\forall x \in X$
1) $x+T \in X$, $x-T \in X$;
2) $f(x+T) = f(x)$ (то есть при сдвиге вправо на период график переходит сам в себя).

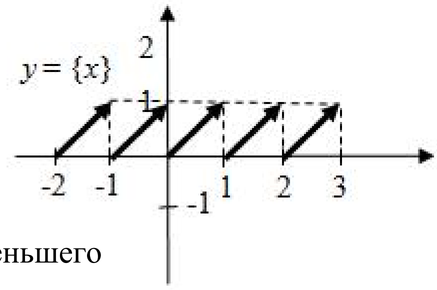
Ясно, что если T – период, то $2T$, $3T$, ... – также периоды. Обычно, говоря «период», подразумевают наименьший период.

Пример 1. $y = \cos 2x$, наименьший период $T = \pi$.

Пример 2. $y = [x]$ – целая часть числа (это - наибольшее целое число, не превосходящее x). Функция $y = [x]$ не является периодической.



Пример 3. Функция $y = \{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа. Она является периодической с (наименьшим) периодом $T = 1$.



Пример 4. У функции Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in I \end{cases}$ нет наименьшего периода, так как в качестве периода можно взять любое рациональное число q.

Действительно, при этом $D(x+q) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in I \end{cases} = D(x)$ для любого x из **R**.

4. ***Ограниченность***

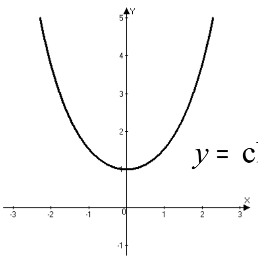
Определение. Функция называется *ограниченной*, если ограничено множество ее значений. Аналогично определяется ограниченность функции сверху и снизу.

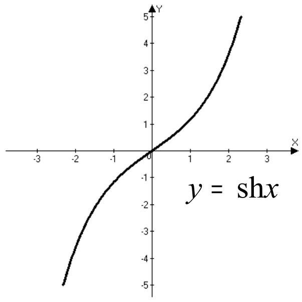
Раскрывая понятие ограниченного множества, получим следующие определения:
функция ограничена сверху, если $\exists M \in \mathbf{R}: \ \forall x \in X \quad f(x) \leq M$;
функция ограничена снизу, если $\exists M \in \mathbf{R}: \ \forall x \in X \quad f(x) \geq M$;
функция ограничена, если $\exists m \in \mathbf{R}\ \exists M \in \mathbf{R}: \ \forall x \in X \quad m \leq f(x) \leq M$.

Гиперболические функции

1) $y = \operatorname{ch} x$ - косинус гиперболический; 2) $y = \operatorname{sh} x$ - синус гиперболический;

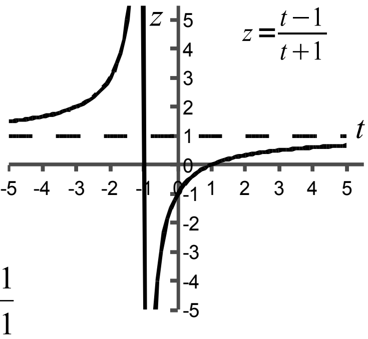
$\mathrm{ch}x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$





3) $y = \mathrm{th}\,x$ - тангенс гиперболический.

$\mathrm{th}\,x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.



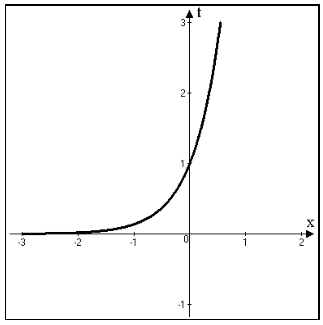
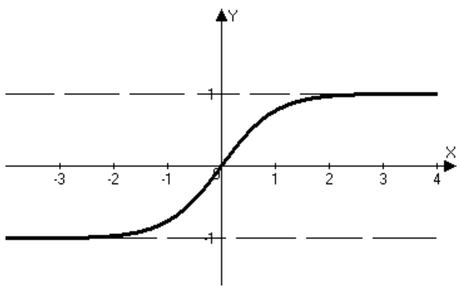


График $y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}y}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
можно построить как график композиции
$y = z \circ t$ функций $t(x) = e^{2x}$ и

$z(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1} = 1 - \dfrac{2}{t + 1}, t > 0$.

Если $x \to -\infty$, то $t \to +0$, и $z \to -1 + 0$.
Если $x \to -0$, то $t \to 1 - 0$, и $z \to -0$.
Если $x \to +0$, то $t \to 1 + 0$, и $z \to +0$.
Если $x \to +\infty$, то $t \to +\infty$, и $z \to 1 - 0$.



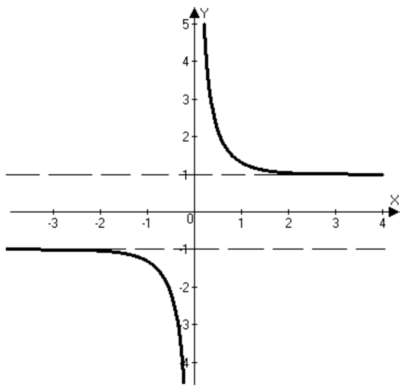
$y = \mathrm{th}x$

4) $y = \mathrm{cth}\,x$ - котангенс гиперболический.

$\mathrm{cth}\,x = \dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$.

График $y = \mathrm{cth}\,x$ можно построить, учтя, что $\mathrm{cth}\,x = \dfrac{1}{\mathrm{th}\,x}$.

Если $x \to -\infty$, то $y \to -1 - 0$.
Если $x \to -0$, то $y \to -\infty$.
Если $x \to +0$, то $y \to +\infty$.
Если $x \to +\infty$, то $y \to 1 + 0$.



$y = \mathrm{cth}x$

Свойства гиперболических функций

1) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ - основное гиперболическое тождество.

2) $\begin{array}{l} \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}2x \\ 2 \cdot \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}x = \mathrm{sh}2x \end{array}$ - формулы двойного угла.

3) $\begin{array}{l} \mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y \\ \mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y \mp \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y \end{array}$ - формулы сложения.

2.3. Элементарные функции

Определение.

1) *Основные элементарные функции* – это постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные к тригонометрическим: C, x^a, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

2) *Элементарные функции* – это функции, которые получаются из основных элементарных функций путем конечного числа арифметических действий и композиций.

Примеры элементарных функций: $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$, $\operatorname{arcsh} x$, $\operatorname{arcch} x$, $\operatorname{arcth} x$, $\operatorname{arccth} x$, $\dfrac{\cos(2^x)+3\log_5 x}{\operatorname{arctg}(\arccos x-8)}$.

§3. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

3.1. Расширенная числовая прямая. Окрестности точек расширенной числовой прямой

Расширенная числовая прямая $\overline{\mathbf{R}}$ – это множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, к которым добавляются символы бесконечности $+\infty$, $-\infty$ и ∞ :

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}.$$

Символ ∞ означает $+\infty$ или $-\infty$.

Действия с символом бесконечности определяются следующим образом (здесь C — любое действительное число):

$\infty + C = \infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

$\infty \cdot C = \infty$ (при $C \neq 0$), $\infty \cdot \infty = \infty$;

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$, $(+\infty)^{-\infty} = 0$;

$\dfrac{C}{\infty} = 0$, $\dfrac{C}{0} = \infty$, $\dfrac{0}{C} = 0$ (при $C \neq 0$).

Не определены следующие действия:

$\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}, 0 \cdot \infty, (+\infty) + (-\infty), (+\infty) - (+\infty), 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ - *неопределенности*.

Понятие ε-окрестности точки a расширенной числовой прямой

I. $a \in \mathbf{R}$

$U_{\varepsilon}(a) = \{x \in \mathbf{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$

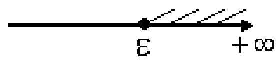
$\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(a) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ - выколотая окрестность

(ε – маленькое).

II. $a = +\infty$

$U_{\varepsilon}(+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > \varepsilon\}$

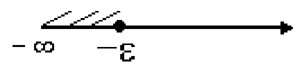
(ε – большое).



III. $a = -\infty$

$U_{\varepsilon}(-\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -\varepsilon\}$

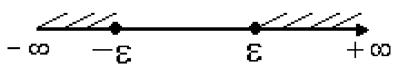
(ε – большое).



IV. $a = \infty$

$U_{\varepsilon}(\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| > \varepsilon\}$

(ε – большое).



3.2. Определение числовой последовательности и ее предела

Определение. *Числовая последовательность* – это функция натурального аргумента, принимающая действительные (или комплексные) значения. При этом каждому натуральному числу по некоторому правилу сопоставляется действительное (или комплексное) число: $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \mapsto f(n) = f_n$.

Последовательностью называют также множество значений этой функции. Обычно ее записывают в виде $\{f_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ или $\{f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$, где f_1 – *первый член последовательности*, f_2 – *второй член последовательности*, f_n – *общий (n-й) член последовательности*.

Пример. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$

$$x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{2}{3},\quad x_3 = \frac{3}{4},\quad x_4 = \frac{4}{5}, ...$$

Определение. *Предел числовой последовательности* $\{x_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ - это точка a расширенной числовой прямой, такая что для любой её окрестности все члены последовательности, начиная с некоторого, попадают в эту окрестность.

Запись на языке символов: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \quad \forall\, n > n_0 \quad x_n \in U_\varepsilon(a)$.

Обозначение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ $(n \to \infty)$.

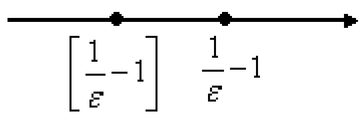
Поскольку a – это либо число, либо одна из бесконечностей, определение предела можно уточнить, рассмотрев следующие 4 случая.

1 случай. a – число ($a \in \mathbf{R}$).

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \quad \forall\, n > n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Когда предел последовательности конечен, для любого $\varepsilon > 0$ внутрь интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ попадут все члены последовательности, начиная с некоторого номера n_0+1. Вне этого интервала может находиться только конечное число членов последовательности (не более n_0). С уменьшением ε номер n_0 может увеличиваться.

Пример. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.



$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \quad \forall\, n > n_0 \quad |x_n - 1| < \varepsilon$

Зафиксируем ε и найдем n_0:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \qquad \left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \qquad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \qquad \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \qquad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \qquad n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right].$$

Если $\varepsilon = 0{,}01$, то $n_0 = 99$; если $\varepsilon = 0{,}001$, то $n_0 = 999$ и так далее.

2 случай. $a = +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \quad \forall\, n > n_0 \quad x_n > \varepsilon.$$

Пример. $x_n = 2n + 5$.

3 случай. $a = -\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \quad \forall\, n > n_0 \quad x_n < -\varepsilon.$$

Пример. $x_n = -n^2$.

4 случай. $a = \infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \quad \forall\, n > n_0 \quad |x_n| > \varepsilon.$$

Пример. $\boldsymbol{x_n} = (-1)^n \cdot n$.

Не каждая последовательность имеет предел:

Пример последовательности, не имеющей ни конечного, ни бесконечного предела: $x_n = (-1)^n$.

Определения.

1). Последовательность *сходится*, если у нее существует конечный предел (число).
2). Последовательность называется *бесконечно большой*, если ее предел равен бесконечности (с любым знаком: $+\infty$, $-\infty$ или ∞).
3). Последовательность называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.
4). Последовательность *возрастает*, если $\forall n\in \mathbf{N}$ $a_{n+1}>a_n$ (или $a_{n+1}/a_n>1$ для положительной последовательности).
5). Последовательность *убывает*, если $\forall n\in \mathbf{N}$ $a_{n+1}<a_n$ (или $a_{n+1}/a_n<1$ для положительной последовательности).
6). Последовательность *ограничена сверху*, если существует $M\in \mathbf{R}$, такое что $\forall n\in \mathbf{N}$ $a_n\le M$.
7). Последовательность *ограничена снизу*, если существует $m\in \mathbf{R}$, такое что $\forall n\in \mathbf{N}$ $a_n\ge m$.
8). Последовательность *ограниченна*, если она ограничена и сверху и снизу (то есть существуют $m, M\in \mathbf{R}$, такие что $\forall n\in \mathbf{N}$ $m\le a_n\le M$.

3.3. Основные свойства предела последовательности

Теорема 1. Если последовательность сходится, то ее предел единственный.
Доказательство (методом от противного).

Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, и предположим, что $a\ne b$. Зафиксируем $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$.

По определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$: $\exists n_1\in N:\ \forall n>n_1\ \ |x_n-a|<\dfrac{|b-a|}{2}$. (*)

Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, то $\exists n_2\in N:\ \forall n>n_2\ \ |x_n-b|<\dfrac{|b-a|}{2}$. (**)

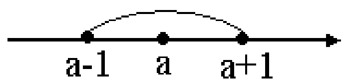
Тогда при $n>\max\{n_1, n_2\}$ верны оба неравенства (*) и (**). Поэтому при таких n выполняются соотношения:

$$|b-a| = |b-x_n+x_n-a| \le |b-x_n|+|x_n-a| < \frac{|b-a|}{2}+\frac{|b-a|}{2} = |b-a|.$$

Получили противоречие: $|b-a|<|b-a|$. Значит предположение $a\ne b$ не верно, и двух разных пределов у последовательности быть не может. ♦

Теорема 2. Если последовательность сходится, то она ограничена (то есть если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a\in \mathbf{R}$, то $\exists m\in \mathbf{R}, \exists M\in \mathbf{R}:\ \forall n\in \mathbf{N}\ m\le x_n\le M$).

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда, по определению предела, $\exists n_0\in \mathbf{N}:\ \forall n>n_0\ \ a-1<x_n<a+1$, то есть, начиная с номера n_0+1, все члены последовательности ограничены числами a-1 и a+1. Вне окрестности (a-1, a+1) могут находиться только элементы $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$.



Положим $M = \max\{a+1, x_1, x_2, ..., x_{n_0}\}$, $m = \min\{a-1, x_1, x_2, ..., x_{n_0}\}$. Тогда $\forall n\in \mathbf{N}$ выполнены неравенства $x_n\le M$ и $x_n\ge m$. Таким образом, последовательность ограничена и сверху и снизу. ■

Обратное утверждение (если последовательность ограничена, то она сходится) не верно:
Пример ограниченной последовательности, не имеющей предела: $x_n = (-1)^n$.

Хотя при всех $n\in \mathbf{N}$ $-1\le x_n\le 1$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ не существует.

Определение. Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ называется последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots$, где $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$.

Несмотря на то, что ограниченная последовательность не всегда сходится, верна следующая теорема:

Теорема 3 (***Больцано-Вейерштрасса***). Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.
Без доказательства.

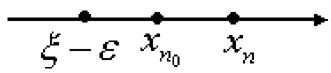
Пример. Ограниченная последовательность $x_n = (-1)^n$ имеет сходящиеся подпоследовательности $x_{2n} = 1$ (сходится к 1) и $x_{2n-1} = -1$ (сходится к -1).

Определение.
1) *Частичный предел последовательности* – предел любой из ее подпоследовательностей.
2) *Верхний предел последовательности* $\{x_n\}$ – это наибольший из всех ее частичных пределов. Он обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n$.
3) *Нижний предел последовательности* $\{x_n\}$ – это наименьший из всех ее частичных пределов. Обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n$.

Пример. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,(-1)^n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,(-1)^n = -1$.

Теорема 4. (***Критерий Коши сходимости последовательности.***)
Последовательность сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \forall n > n_0, \forall m > n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$
(т.е. далекие члены последовательности близки между собой).
Без доказательства.

Теорема 5. (***О существовании предела монотонной ограниченной последовательности.***)
Любая неубывающая и ограниченная сверху последовательность сходится к своей точной верхней грани (то есть если $\{x_n\}\nearrow$ и ограничена сверху, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n \in \mathbf{R}$).
Доказательство. Так как по свойству 1 множества действительных чисел любое непустое ограниченное сверху подмножество **R** имеет точную верхнюю грань, то существует $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n = \xi \in \mathbf{R}$. Покажем, что ξ и есть предел последовательности $\{x_n\}$.
По определению sup имеем:
$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \le \xi, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : x_{n_0} > \xi - \varepsilon$.



А так как $\{x_n\}$ – неубывающая, то $\forall n > n_0 \quad x_n > x_{n_0} > \xi - \varepsilon$.
Поэтому при любом $n > n_0$ выполнено $\xi-\varepsilon < x_n < \xi$.
Значит по любому $\varepsilon > 0$ нашли номер n_0, такой что $\forall n > n_0 \quad |x_n - \xi| < \varepsilon$.
По определению предела это означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \xi$. ■

Ниже мы применим эту теорему для доказательства существования числа *e*.

Теорема 6. (***О предельных переходах в неравенствах.***)
Пусть $\forall n \in \mathbf{N}\ x_n \le y_n$, и $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Тогда $a \le b$.

Доказательство (методом от противного).

Допустим, что $a > b$. По определению предела последовательности для $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$

$$\exists\, n_1 \in \mathbf{N}: \quad \forall\, n > n_1 \quad |x_n - a| < \frac{a-b}{2}, \qquad (*)$$

$$\exists\, n_2 \in \mathbf{N}: \quad \forall\, n > n_2 \quad |y_n - b| < \frac{a-b}{2}. \qquad (**)$$

Тогда при $n > \max\{n_1, n_2\}$ верны оба неравенства (*) и (**). Поэтому при таких n выполняются соотношения:

$$a - b = a - x_n + x_n - b \le a - x_n + y_n - b \le |a - x_n| + |y_n - b| < \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} = a - b.$$

Получили противоречие: $a–b < a–b$. Значит допущение $a > b$ не верно, и $a \le b$. ■

Нужно обратить внимание на то, что при переходе к пределу в неравенствах строгое неравенство может перейти в нестрогое. Например, $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}$.

Число e

Число e определяется как предел последовательности $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$:

Определение. $$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.}$$

Число e в математике играет особую роль. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов. Число e – иррационально, а значит представимо в виде бесконечной десятичной непериодической дроби: $e = 2{,}718281828459045\ldots$

Докажем существование предела последовательности $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Согласно теореме 5, достаточно доказать, что последовательность ограничена сверху и возрастает.

1) Ограниченность сверху. Применим бином Ньютона:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ n\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + 1\cdot\frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{n^{n-2}} + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{n^n}.$$

Поэтому

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-2}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (*)$$

Каждая скобка положительна и ограничена сверху единицей, поэтому произведение скобок также ограничено сверху единицей. Отсюда

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Таким образом, показали, что $\forall n\in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n < 3$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.

2) Покажем, что $\{x_n\}$ возрастает. Из формулы (*) получаем выражение для $\{x_{n+1}\}$:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \qquad (**)$$

В записи x_{n+1} каждое слагаемое больше, чем соответствующее слагаемое в записи x_n, причем запись x_{n+1} длиннее на одно положительное слагаемое. Поэтому $x_{n+1} > x_n$, то есть последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая.

Значит, предел $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ существует по Теореме 5. ■

Из пункта 2) доказательства видно, что последовательность $\{x_n\}$ также ограничена снизу первым членом. Тогда для любого номера n выполняется неравенство $2 \le x_n < 3$. По теореме 6 отсюда вытекает, что $2 \le e < 3$.

3.4. Бесконечно малые последовательности и их свойства

Напомним определение бесконечно малой (слово «последовательность» часто опускают, и даже пишут просто «б.м.»):

Определение. Последовательность называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Теорема 7. (*Свойства бесконечно малых последовательностей.*)

1) Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой (т.е. если x_n, y_n - б.м., то $x_n + y_n$ - б.м.).

2) Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой.

3) Произведение бесконечно малой последовательности на сходящуюся последовательность есть бесконечно малая.

Доказательство.

1). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$\exists\, n_1 \in \mathbf{N}: \ \forall\, n > n_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (*)

Аналогично, по определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$\exists\, n_2 \in N: \ \forall\, n > n_2 \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (**)

Тогда для всех $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ выполняются оба неравенства (*) и (**), поэтому

$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Итак, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathrm{N}: \ \forall\, n > n_0 \quad |(x_n + y_n) - 0| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = 0$. 2).

2). Пусть $\{x_n\}$ - б.м., $\{y_n\}$ - ограниченная. Докажем, что $\{x_n \cdot y_n\}$ - б.м.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{y_n\}$ – ограниченная, то $\exists\, M \in \mathbf{R}: \ \forall\, n \in \mathbf{N} \quad |y_n| \le M$.

По определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, для $\frac{\varepsilon}{M} > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \ \forall\, n > n_0 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Поэтому $\forall\, n > n_0 \quad \left|x_n \cdot y_n\right| = \left|x_n\right| \cdot \left|y_n\right| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, то есть $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая.

3). Сходящаяся последовательность по теореме 2 является ограниченной, а по предыдущему пункту произведение б.м. на ограниченную есть б.м.
Теорема доказана. ■

Пример 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n!}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sin n!\right) = 0.$

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\ldots+n}{n^3} \cdot \operatorname{arctg} n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2n^3} \cdot \operatorname{arctg} n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \cdot \operatorname{arctg} n\right) = 0$.

3.5. Арифметические действия над пределами последовательностей

Теорема 8. Последовательность x_n сходится к числу a тогда и только тогда, когда последовательность (x_n-a) является бесконечно малой (т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \{x_n - a\}$ - б.м.).

Доказательство. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \exists\, n_0 \in N: \ \forall\, n > n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \{x_n - a\}$ - б.м. ■

Теорема 9. (*О свойствах пределов при арифметических действиях над последовательностями.*)
Пусть $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbf{R}$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b \in \mathbf{R}$. Тогда

1) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} c \cdot x_n = c \cdot a$, где $c = const$;

2) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

3) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

4) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, если $\forall n \in \mathbf{N}\ y_n \neq 0$, и $b \neq 0$.

Доказательство следует из двух предыдущих теорем.
Докажем, например, последнее свойство 4). Для этого достаточно доказать, что последовательность $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ есть б.м. Имеем:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + (x_n - a)}{b + (y_n - b)} - \frac{a}{b} = \frac{b \cdot (x_n - a) - a \cdot (y_n - b)}{b \cdot y_n} = \frac{1}{y_n} \cdot \left((x_n - a) - \frac{a}{b} \cdot (y_n - b) \right).$$

Так как $y_n \to b \neq 0$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}: \forall n > n_0 \ \ |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Поэтому

$|y_n| = |b - (b - y_n)| \geq |b| - |b - y_n| > \frac{|b|}{2}$ и $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ при $\forall n > n_0$. Значит,

последовательность $\frac{1}{y_n}$ ограничена.

Так как $\{x_n - a\}$ – б.м. и $\{y_n - b\}$ – б.м., то $\left((x_n - a) - \frac{a}{b}(y_n - b)\right)$ – б.м. Поэтому

последовательность $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n}\left((x_n - a) - \frac{a}{b}(y_n - b)\right)$, являющаяся произведением ограниченной последовательности $\frac{1}{y_n}$ на эту б.м., также есть б.м. Итак, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. ■

Теорема 10. Если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно малая, и при всех $n \in \mathbf{N}$ $x_n \neq 0$, то последовательность $\frac{1}{x_n}$ – бесконечно большая. Обратное также верно.

Доказательство. По условию $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathrm{N} : \quad \forall n > n_0 \quad |x_n| < \varepsilon$. Тогда $\left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$, положительное число $\frac{1}{\varepsilon}$ – также произвольно. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$. ■

3.6. Вычисление пределов последовательностей

Вычисление предела последовательности опирается на теорему о свойствах последовательностей при арифметических действиях и зависит от типа неопределенности, которая есть в примере.

1. Неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Нужно числитель и знаменатель дроби делить на слагаемое, которое быстрее всего стремится к ∞.

Пример 1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2(1+n^2)^3+n^5}{\left(1+2n^3\right)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{\left(1+n^2\right)^3}{n^6}+\frac{n^5}{n^6}}{\frac{\left(1+2n^3\right)^2}{n^6}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{1}{n^2}+1\right)^3+\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^3}+2\right)^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n}+3)^2\cdot\sqrt{9n^3+5}}{\sqrt{16n^5+n^4-n^3}-2n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{\left(\sqrt{n}+3\right)^2}{n}\cdot\frac{\sqrt{9n^3+5}}{n^{3/2}}}{\frac{\sqrt{16n^5+n^4-n^3}}{n^{5/2}}-\frac{2n^2}{n^{5/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\cdot\sqrt{9+\frac{5}{n^3}}}{\sqrt{16+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}-\frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{3}{4}.$$

Пример 3. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+n)^4+(2+n^2)^2}{\left(2+n\right)^3-\left(1-n\right)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\left\{\left(\frac{1}{n}+1\right)^4+\left(\frac{2}{n^2}+1\right)^2\right\}}{n^3\left\{\left(\frac{2}{n}+1\right)^3-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)^2\right\}} = \infty.$$

Пример 4. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}{n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\left(1+\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}{n\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt[3]{\frac{n}{n^{3/2}}+\frac{1}{n^{3/2}}}}{\sqrt{n}\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 0$$

2. Неопределенность типа **$(\infty - \infty)$.**

Сводится к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right) = (\infty-\infty) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+2n}+3n\right)}{\left(\sqrt{9n^2+2n}+3n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\left(\sqrt{9n^2+2n}+3n\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}.$$

3. Неопределенность типа $\mathbf{(1^{\infty})}$**.**

Раскрывается с помощью числа *e*.

Пример 6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{2n^2}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{n^2+3}\right\}^{\frac{2n^2}{n^2+3}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2+3}}=e^2\cdot$

§4. Предел функции

4.1. Определения предела функции

Пусть на множестве $X \in \mathbf{R}$ задана функция f, принимающая значения в множестве Y. Предел функции определяется только в предельной точке множества X. Далее под проколотой ε-окрестностью точки a понимается множество $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Определение. Точка $a \in \overline{\mathbf{R}}$ называется *предельной точкой множества X* (или *точкой сгущения*), если любая ее проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку множества X (т.е. $\forall \overset{\circ}{U}(a) \quad \overset{\circ}{U}(a) \cap X \neq \varnothing$).

Критерий предельной точки

Точка $a \in \overline{\mathbf{R}}$ - предельная точка множества X $\Leftrightarrow \quad \exists \{x_n\}_{n \in N} \subset X \setminus \{a\}: \quad x_n \to a \ (n \to \infty)$.

Определение предела функции по Коши (через окрестности). Точка $A \in \overline{\mathbf{R}}$ называется *пределом функции f в точке a* тогда и только тогда, когда для любой заданной ε - окрестности точки A найдется такая δ -окрестность точки a, что для всех x из $X \setminus \{a\}$, лежащих в этой δ -окрестности, значение функции $f(x)$ попадает в заданную ε -окрестность точки A, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall U_\varepsilon(A) \ \exists U_\delta(a): \forall x \in (X \setminus \{a\}) \cap U_\delta(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)\right]$,

или, используя символ проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall U_\varepsilon(A) \ \exists U_\delta(a): \ \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)\right].$$

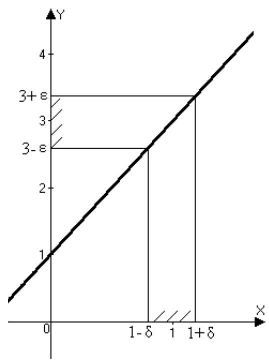
Заметим, что при $a \in \mathbf{R}$, $a = \infty$, $a = +\infty$ и $a = -\infty$ окрестности точки a записываются по-разному. Аналогично, есть 4 варианта записи окрестности точки A. Поэтому, расписывая последнее определение, получаем 16 различных случаев для определения предела по Коши:

Определение предела по Коши (через $\varepsilon - \delta$).

Случай 1. $a \in \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right]$$

Здесь ε и δ - малы.



Пример. $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$\forall x \in \mathbf{R} \quad 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |2x + 1 - 3| < \varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно неравенствам

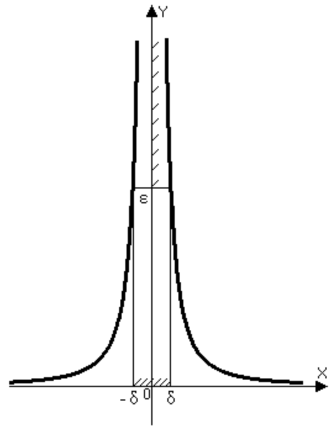
$|2x - 2| < \varepsilon$, $\quad |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, поэтому можно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. ■

Случай 2. $a \in \mathbf{R}$, $A = +\infty$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right].$$

Здесь ε - большое число, δ - мало.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.



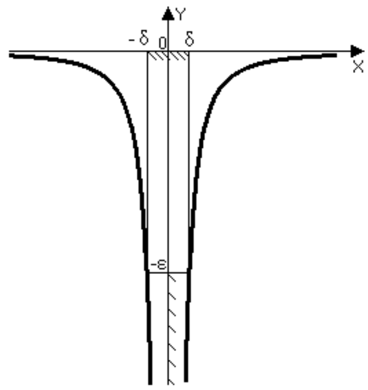
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\neq 0\quad 0<|x-0|<\delta\Rightarrow\ \dfrac{1}{x^2}>\varepsilon$.

$0<x^2<\dfrac{1}{\varepsilon}.\qquad 0<|x|<\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.\qquad \delta=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$

Случай 3. *a*∈**R,** *A* = -∞.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty\ \Leftrightarrow\ \left[\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in X\quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\ f(x)<-\varepsilon\right].$

Здесь ε - большое число, δ - мало.



Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty$.

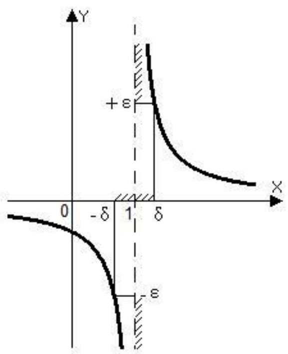
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\forall x\neq 0\quad 0<|x-0|<\delta\Rightarrow\ \dfrac{-1}{x^2}<-\varepsilon$

$0<x^2<\dfrac{1}{\varepsilon}\qquad 0<|x|<\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\qquad \delta=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$

Случай 4. *a*∈**R,** *A* = ∞**.**

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\ \Leftrightarrow\ \left[\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in X\quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\ |f(x)|>\varepsilon\right].$

Здесь ε - большое число, δ - мало.



Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

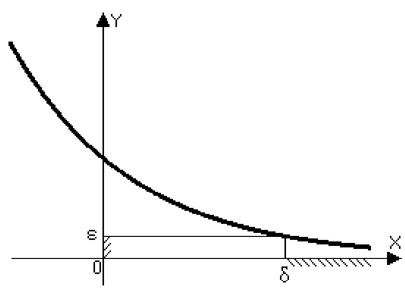
$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\forall x\neq 1\quad 0<|x-1|<\delta\Rightarrow\ \left|\dfrac{1}{x-1}\right|>\varepsilon$

$0<|x-1|<\dfrac{1}{\varepsilon},\qquad \delta=\dfrac{1}{\varepsilon}.$

Случай 5. *a* = +∞, *A* ∈ **R.**

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\left[\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in X\quad x>\delta\Rightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon\right].$

Здесь ε - мало, δ - большое число.



Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$.

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\forall x\in R\quad x>\delta\Rightarrow\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-0\right|<\varepsilon$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\varepsilon\qquad x>\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon\qquad \delta=\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon.$

Случай 6. *a* = +∞, *A* = +∞**.**

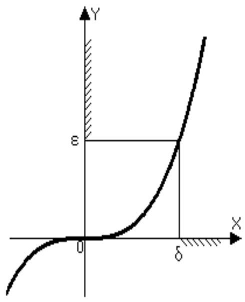
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\ \Leftrightarrow\ \left[\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in X\quad x>\delta\Rightarrow\ f(x)>\varepsilon\right].$

Здесь ε и δ - большие числа.

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : \forall\, x \in R \quad x > \delta \Rightarrow x^3 > \varepsilon$

$x > \sqrt[3]{\varepsilon}, \qquad \delta = \sqrt[3]{\varepsilon}.$



Случай 7. $a = +\infty,\ A = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon\right].$

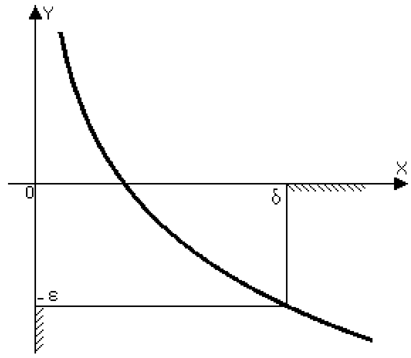
Здесь ε и δ - большие числа.

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$.

$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : \forall\, x > 0 \quad x > \delta \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x < -\varepsilon$

$-\log_2 x < -\varepsilon, \qquad \log_2 x > \varepsilon, \qquad x > 2^{\varepsilon}.$

$\delta = 2^{\varepsilon}$, *ч.т.д.*



Случай 8. $a = +\infty,\ A = \infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \left[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\right].$

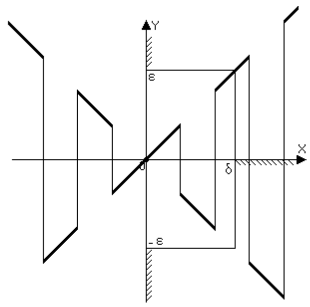
Здесь ε и δ - большие числа.

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \cdot (-1)^{[x]}\right) = \infty$.

$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$

$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad x > \delta \Rightarrow \left|x \cdot (-1)^{[x]}\right| > \varepsilon.$

Последнее неравенство равносильно неравенству $|x| > \varepsilon$, поэтому можно взять $\delta = \varepsilon$. Ч.т.д.



Случай 9. $a = -\infty,\ A \in \mathbf{R}$.

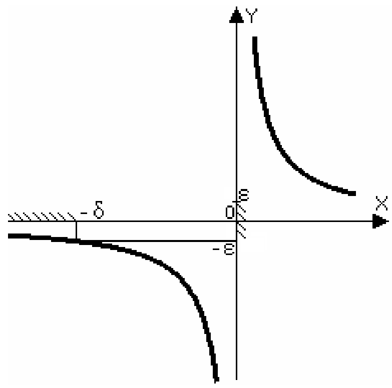
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \left[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right].$

Здесь ε - мало, δ - большое число.

Пример. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : \forall\, x \neq 0 \quad x < -\delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

$\dfrac{1}{|x|} < \varepsilon, \quad |x| > \dfrac{1}{\varepsilon}, \qquad x < -\dfrac{1}{\varepsilon}$ *или* $x > \dfrac{1}{\varepsilon}. \qquad \delta = \dfrac{1}{\varepsilon}.$

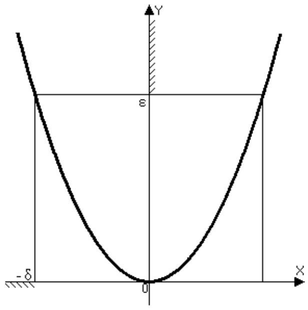


Случай 10. $a = -\infty,\ A = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right].$

Здесь ε и δ - большие числа.

Пример. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$



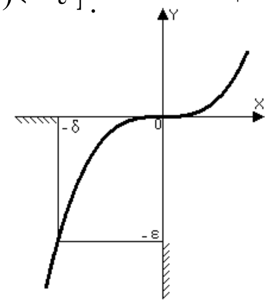
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in R \quad x < -\delta \Rightarrow x^2 > \varepsilon$

$\left[\begin{array}{l} x > \sqrt{\varepsilon} \\ x < -\sqrt{\varepsilon} \end{array}\right. \qquad -\delta = -\sqrt{\varepsilon} \qquad \delta = \sqrt{\varepsilon}.$

Случай 11. $a = -\infty, \; A = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \left[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon\right].$

Здесь ε и δ - большие числа.



Пример. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

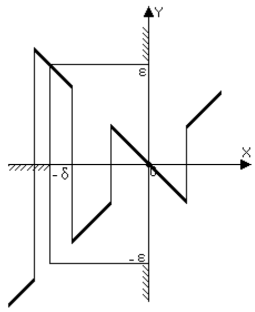
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in R \quad x < -\delta \Rightarrow x^3 < -\varepsilon$

$x < -\sqrt[3]{\varepsilon} \qquad \delta = \sqrt[3]{\varepsilon}.$

Случай 12. $a = -\infty, \; A = \infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \left[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\right].$

Здесь ε и δ - большие числа.



Пример. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|(-1)^{[x]+1} \cdot x\right| = \infty$.

Случай 13. $a = \infty, \; A \in$ **R.**

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right].$

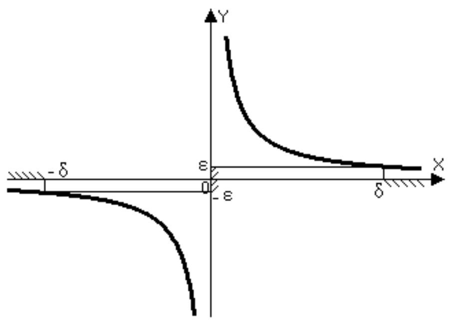
Здесь ε - мало, δ - большое число.

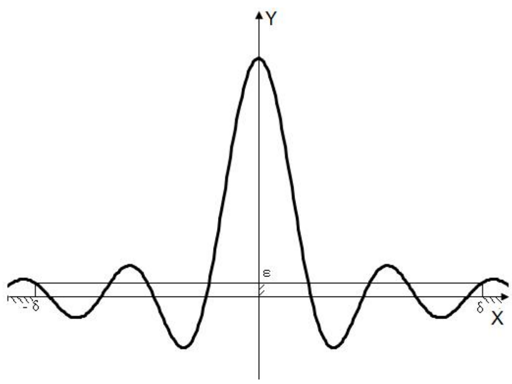
Пример 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \neq 0 \quad |x| > \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

$\dfrac{1}{|x|} < \varepsilon \qquad |x| > \dfrac{1}{\varepsilon} \qquad \delta = \dfrac{1}{\varepsilon}.$

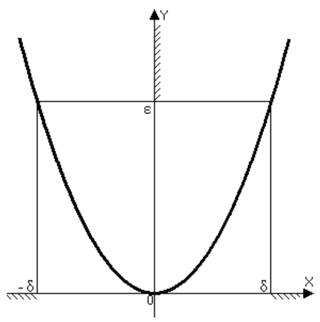




Случай 14. $a = \infty, \; A = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \left[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x \in X \quad |x| > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right].$

Здесь ε и δ - большие числа.



Пример: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$

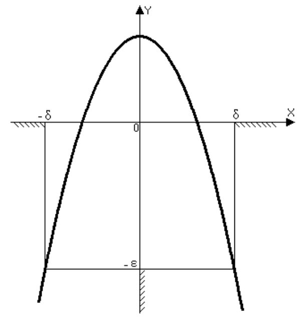
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in R \quad |x| > \delta \Rightarrow x^2 > \varepsilon$

$|x| > \sqrt{\varepsilon} \qquad \delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Случай 15. $a = \infty$, $A = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \quad |x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon\right]$.

Здесь ε и δ - большие числа.



Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^2+5\right) = -\infty$

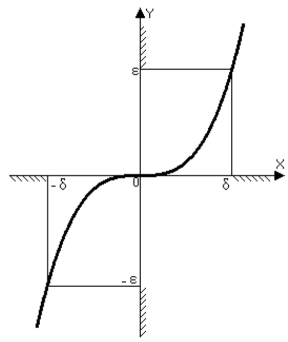
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in R \quad |x| > \delta \Rightarrow \left(-x^2+5\right) < -\varepsilon$

$x^2 > \varepsilon + 5 \qquad |x| > \sqrt{\varepsilon+5} \qquad \delta = \sqrt{\varepsilon+5}$.

Случай 16. $a = \infty$, $A = \infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \quad |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\right]$.

Здесь ε и δ - большие числа.



Пример. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in R \quad |x| > \delta \Rightarrow \left|x^3\right| > \varepsilon$

$|x| > \sqrt[3]{\varepsilon} \qquad \delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Определение предела по Гейне (через предел последовательности). Точка $A \in \overline{\mathbf{R}}$ называется *пределом функции f в точке a* тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ из $X \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность значений функции f в точках x_n сходится к A, то есть

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \left[\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{a\} \quad x_n \to a \ (n\to\infty) \Rightarrow f(x_n) \to A \ (n\to\infty)\right]$.

Пример. Используя определение предела по Гейне, докажем, что $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x\right) = 4$.

Если $x_n \to 1$, то пользуясь арифметическими свойствами предела последовательности, имеем $x_n^{\ 2} \to 1, \quad 3\cdot x_n \to 3, \quad x_n^{\ 2} + 3\cdot x_n \to 4$, то есть $f(x_n) \to 4$.

4.2. Свойства пределов функций

Теорема 1. (*О единственности предела.*)
Если функция имеет конечный предел, то он единственный.
Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. Тогда, согласно определению предела по Гейне: $\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{a\} \quad x_n \to a \ (n\to\infty) \Rightarrow f(x_n) \to A \ (n\to\infty)$ и $f(x_n) \to B \ (n\to\infty)$. Значит, по теореме о единственности предела последовательности, $A = B$. ■

Однако, определение по Гейне обычно используют, чтобы показать, что предел функции не существует.

Пример. Покажем, что предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ не существует.

Возьмем последовательность $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{N}$. Тогда $x_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, и

$\sin(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \to 1$ $(n \to \infty)$.

Теперь возьмем другую последовательность $\widetilde{x}_n = \pi n, n \in \mathbf{N}$. Тогда тоже $\widetilde{x}_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, но $\sin(\widetilde{x}_n) = \sin(\pi n) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\widetilde{x}_n)$, то общего предела у функции $\sin x$ при $x \to +\infty$ нет.

Теорема 2. (***Об ограниченности функции, имеющей конечный предел.***)
Функция, имеющая конечный предел в точке из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Покажем, что найдется окрестность $U(a)$ точки a, в которой функция f ограничена, то есть $\exists\, m, M \in R: \ \forall x \in X \cap U(a) \quad m \leq f(x) \leq M$.
В силу определения предела по Коши для $\varepsilon = 1$ $\exists\, U_\delta(a): \forall x \in (X \setminus \{a\}) \cap U_\delta(a) \ \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$, то есть $\forall x \in X \cap U_\delta(a) \ \ x \neq a \Rightarrow A - 1 < f(x) < A + 1$.
Таким образом, если точка a не принадлежит X, то можно взять $m = A-1$, $M = A+1$,
а если a принадлежит X, то можно взять $m = \min\{A-1, f(a)\}$, $M = \max\{A+1, f(a)\}$. Ч.т.д. ■

Следующие три теоремы посвящены предельным переходам в неравенствах.

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) < B$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) > B$). Тогда

$\exists\, U(a): \ \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a) \ \ f(x) < B$ (соответственно $f(x) > B$).

Доказательство. По определению предела, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то для $\varepsilon = B - A > 0$

$\exists\, U(a): \ \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a) \ \ |f(x) - A| < B - A$. Поэтому $f(x) < A + (B-A) = B$. Ч.т.д. ■

Теорема 4 (*о переходе к пределу в неравенстве*).

Пусть $\exists\, U(a): \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap X_f \cap X_g \quad f(x) \leq g(x)$, и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$.
Тогда $A \leq B$.
Доказательство (методом от противного).
Допустим, что $A > B$. Тогда, так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > \frac{A+B}{2}$, то по предыдущей теореме

$\exists\, U_1(a): \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \ \ f(x) > \frac{A+B}{2}$.

Аналогично, так как $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B < \frac{A+B}{2}$, то по предыдущей теореме

$\exists\, U_2(a): \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(a) \ \ g(x) < \frac{A+B}{2}$.

Поэтому $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap \overset{\circ}{U}_1(a) \cap \overset{\circ}{U}_2(a) \ \ f(x) > \frac{A+B}{2} > g(x)$, то есть $f(x) > g(x)$.

Получили противоречие с условием $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \quad f(x) \leq g(x)$, значит $A \leq B$. ■

Теорема 5 (*о трех функциях*).

Пусть $\exists\, U(a): \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap X_f \cap X_g \cap X_h \quad f(x) \le g(x) \le h(x)$, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.
Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,

$\exists\, U_1(a):\ \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}_1(a)\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$, а значит $f(x) > A-\varepsilon$.

Аналогично, по определению предела $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$,

$\exists\, U_2(a):\ \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}_2(a)\ \ |h(x) - A| < \varepsilon$, а значит $h(x) < A+\varepsilon$.

Поэтому $\forall x \in X\ \ x \in \overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_1(a) \cap \overset{\circ}{U}_2(a) \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < A + \varepsilon$, то есть

$\forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a)\ |g(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. ■

Теорема 6 (***об арифметических действиях над пределами***).
Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbf{R}$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \ne 0$.

Доказательство вытекает из определения предела функции по Гейне и свойств предела последовательности. ■

Теорема 7 (***о пределе композиции***).
Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, и при $x \ne a$ $f(x) \ne A$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = B$.

Доказательство. Воспользуемся определением предела по Гейне. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ из $X\backslash\{a\}$, сходящуюся к a. Тогда, так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $f(x_n) \to A\ (n \to \infty)$. Отсюда, так как $y_n = f(x_n) \to A$ и $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, получаем, что $g\big(f(x_n)\big) \to B\ (n \to \infty)$.

Итак, $\forall \{x_n\} \subset X\backslash\{a\}\ \ x_n \to a\ (n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to A\ (n \to \infty)$.

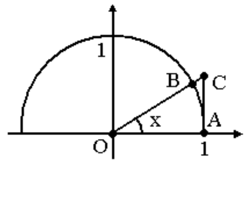
Согласно определению предела по Гейне это означает, что $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = B$. ■

4.3. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}.$$

Доказательство. Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. На окружности радиуса 1 с центром O в начале координат возьмем точку A(1;0). Построим $\Delta\ OAC$ с углами $COA = x$ (радиан) и CAO – прямым. Точка B – пересечение гипотенузы OC с окружностью. Тогда $AC = \mathrm{tg}\, x$, и



$S_{\Delta\, OAB} < S_{\text{сектора}\, OAB} < S_{\Delta\, OAC}$.

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x$.

Умножив это неравенство на $\frac{2}{\sin x} > 0$, получим:

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, откуда $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Так как в каждой части неравенства функции четные, оно выполняется и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Итак, $\exists\, U(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(0) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, и $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Тогда, согласно теореме 5 о трех функциях, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ч.т.д. ■

Полезные пределы, следующие из I замечательного предела.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1$. Ч.т.д. ■

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Доказательство. Замена $x = \sin y,\ y = \arcsin x \to 0$ *при* $x \to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$.Ч.т.д. ■

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Доказательство аналогично пункту 2). ■

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e; \quad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

Доказательство.

1) Докажем сначала для $x \to +\infty$. Для любого $x \in \mathbf{R}$ из неравенства $[x] \le x \le [x] + 1$ (где $[x]$ – целая часть числа x) вытекает неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

откуда

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) \quad (*)$$

По определения числа e следует, что $\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \to e$, $\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \to e$. А так как $\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right) \to 1$, $\left(1+\frac{1}{[x]}\right) \to 1$, то пределы левой и правой частей при $x \to +\infty$ неравенства (*) равны e. Тогда, по теореме о трех функциях, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

2) Докажем для $x \to -\infty$. Сделаем замену $x=-y-1$. Тогда $y = -x-1 \to +\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y-1}\right)^{-y-1} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-y-1}\right)^{-y-1} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right) = e.$$

3) Равенство $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ доказывается с помощью замены $x=1/y$, $y=1/x\to\infty$ $(x\to 0)$. ■

Замечание. Можно доказать также, что

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \text{ если } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to x_0}.$$

Пример вычисления предела с помощью второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+5}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 2}\left(1+\left(\frac{x+5}{3+2x}-1\right)\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{2-x}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{2-x}}\right]^{\frac{2-x}{2x+3}\cdot\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2x+3}\right)} = e^{-\frac{1}{7}}.$$

Законность предпоследнего равенства будет обоснована в следующем параграфе.

Полезные пределы, следующие из II замечательного предела

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(e) = 1$.■

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a}$, частный случай: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$.

Доказательство. Замена: $x = \log_a(y+1)$, $y = a^x - 1 \to 0$ $(x\to 0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\ln a}{\ln(y+1)} = \ln a \text{ .■}$$

3) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu}$.

Доказательство. Замена: $1+x = e^t$, $t = \ln(1+x) \to 0$ $(x\to 0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\mu\cdot t}-1}{e^{t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\mu\cdot t}-1}{\mu\cdot t}\cdot\frac{t}{e^{t}-1}\cdot\mu=\mu\ .\ \blacksquare$$

Замечание. При выводе полезных пределов используется свойство непрерывности, которое будет подробно рассмотрено позднее.

4.4. Сравнение функций. Применение эквивалентностей и метода выделения главной части при вычислении пределов

В этом параграфе речь идет о сравнении функций вблизи предельной точки.

Определение 1. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ *имеют одинаковый порядок* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$, где c – число, отличное от нуля. Если $f(x)$ имеет одинаковый порядок с $g(x)$, то это обозначают $f(x)=O(g(x))$ при $x\to x_0$.

Определение 2. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Для эквивалентных функций используется обозначение $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$.

Смысл этого определения в том, что в достаточно малой окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ ведут себя примерно одинаково. Геометрически это означает, что в такой окрестности т. x_0 их графики близки.

Пример. Функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=x$ являются бесконечно малыми при $x\to 0$. Из первого замечательного предела видно, что при $x\to 0$ они будут эквивалентными.

Из первого и второго замечательного пределов и их следствий вытекает

Таблица эквивалентностей при $x\to 0$

$\sin x\sim x$	$\ln(1+x)\sim x$
$\operatorname{tg}x\sim x$	$a^{x}-1\sim x\cdot\ln a$
$\arcsin x\sim x$	$e^{x}-1\sim x$
$\operatorname{arctg}x\sim x$	$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu\cdot x$

Применение эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов

Теорема 8 (*о замене функций на эквивалентные при вычислении пределов*). При вычислении предела можно в произведении и в частном заменять функции на эквивалентные, а именно: если $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)\cdot\varphi(x)$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\beta(x)}$.

Доказательство.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\beta(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)\cdot\varphi(x)$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\varphi(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\beta(x)}$. $\blacksquare$

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+12x+x^2}-1}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}(12x+x^2)}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12+x}{15}=\dfrac{4}{5}$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Сравнение бесконечно малых функций

Определение 3. Бесконечно малая $\beta(x)$ имеет *больший порядок малости*, чем $\alpha(x)$ при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$. В этом случае пишут: $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to x_0$.

Пример. $1-\cos x=o(\sin x)$ при $x\to 0$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0.$$

Определение 4. Бесконечно малая $\beta(x)$ называется *бесконечно малой порядка n* ($n\in$ **N**) *относительно б.м.* $\alpha(x)$ при $x\to x_0$, если функции $\beta(x)$ и $(\alpha(x))^n$ имеют одинаковый порядок, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{(\alpha(x))^n}=c$ (c – число, $c\neq 0$), или $\beta(x)=O\left((\alpha(x))^n\right)$.

Пример. Б.м. $\beta(x)=\dfrac{1}{x^4}$ является бесконечно малой четвертого порядка относительно б.м. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$.

Определение 5. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *несравнимы* (при $x\to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не существует.

Свойства символа $o(\alpha(x))$

1) $o(\alpha(x))+o(\alpha(x))=o(\alpha(x))$.
2) $o(\alpha(x))-o(\alpha(x))=o(\alpha(x))$.
3) $c\cdot o(\alpha(x))=o(\alpha(x))$.
4) $o(\alpha(x))\cdot o(\beta(x))=o(\alpha(x)\cdot\beta(x))$.
5) $o(o(\alpha(x)))=o(\alpha(x))$.
6) $o(\alpha(x))\cdot o(\alpha(x))=o(\alpha(x))$.

Теорема 9. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x\to x_0$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)$ тогда и только тогда, когда $\beta(x)-\alpha(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to x_0$.

Доказательство. $\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\to 1\Leftrightarrow\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}-1=\dfrac{\beta(x)-\alpha(x)}{\alpha(x)}\to 0$. ■

Метод выделения главной части для вычисления пределов

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x+\ln(1+x+x^2)-10x^3}{tg^2(\sqrt{3}x)+\sin 4x+e^{x^2}-1}$.

$\arcsin 5x = 5x+o(x)$

$\ln(1+x+x^2) = x+x^2+o(x) = x+o(x)$

$10x^3 = o(x)$

$tg^2(\sqrt{3}x) = 3x^2+o(x) = o(x)$

$\sin 4x = 4x+o(x)$

$e^{x^2}-1 = x^2+o(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x+\ln(1+x+x^2)-10x^3}{\mathrm{tg}^2(\sqrt{3}x)+\sin 4x+e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)+x+o(x)-o(x)}{o(x)+4x+o(x)+o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x+o(x)}{4x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6+o(x)/x}{4+o(x)/x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

4.5. Односторонние пределы

Пусть функция f задана на множестве $D_f\subset\mathbf{R}$ и принимает действительные значения (т.е. $f: D_f\to\mathbf{R}$). Пусть x_0 является предельной точкой множества D_f, то есть в любой окрестности точки x_0 найдется точка множества D_f, отличная от x_0.

Определение. *Сужением* функции f на множество G называется функция $f\big|_G$ с областью определения $G\cap D_f$, совпадающая на $G\cap D_f$ с функцией f (то есть $f\big|_G(x) = f(x)\ \forall x\in G\cap D_f$).

Определение. *Пределом функции f в точке x_0 слева* называется предел в точке x_0 сужения функции f на множество $(-\infty, x_0)$: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f\big|_{(-\infty,x_0)}(x)$.

Если $A\in\mathbf{R}$, то

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in D_f\quad x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right].$$

Обозначения предела слева: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x);\ f(x_0-0);\ f(x)\to A\ (x\to x_0-0)$.

Предел функции f в точке x_0 справа определяется аналогично:

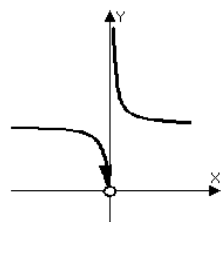
Определение. *Пределом функции f в точке x_0 справа* называется предел в точке x_0 сужения функции f на множество $(x_0, +\infty)$: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f\big|_{(x_0,+\infty)}(x)$.

Обозначения предела справа: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x);\ f(x_0+0);\ f(x)\to A\ (x\to x_0+0)$.

Пример. Вычислить пределы функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0-0$ и $x\to 0+0$.

Если $x\to 0-0$, то $\dfrac{1}{x}\to -\infty$, поэтому $2^{\frac{1}{x}}\to 0$.

Значит $f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$.



Если $x \to 0+0$, то $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, поэтому $2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$.

Значит $f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

На рисунке схематически изображен график функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ в окрестности точки x=0.

Связь существования предела функции в точке с существованием односторонних пределов в этой точке

Теорема 10. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \exists f(x_0 - 0), \ \exists f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$.

Доказательство вытекает из определений пределов и того, факта, что

$$D_f \cap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) = \left[(-\infty, x_0) \cap D_f \cap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\right] \cup \left[(x_0, +\infty) \cap D_f \cap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\right].$$ ■

§5. Непрерывность функции

5.1. Определение непрерывности функции в точке

Пусть функция f задана на множестве $D \subset \mathbf{R}$ и принимает действительные значения, x_0 - точка из D.

Определение. Функция f *непрерывна в точке* x_0 тогда и только тогда, когда предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В этом случае x_0 называется *точкой непрерывности*.

В противном случае, а также, если функция не определена в этой точке, функция f называется *разрывной в точке* x_0 (а сама x_0 - соответственно, *точкой разрыва*).

Подставляя сюда определения предела по Коши или по Гейне, получим:

Определение непрерывности функции в точке ***по Коши:***

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

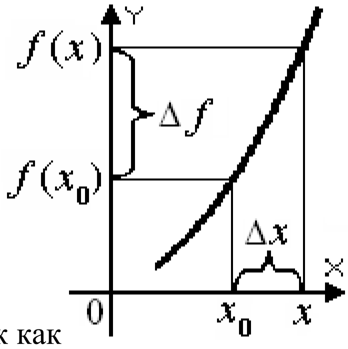
Определение непрерывности функции в точке ***по Гейне:***

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \ \forall \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset D \ \ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

Из связи существования предела и односторонних пределов получаем:

Критерий непрерывности функции в точке *через односторонние пределы.*

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$ существуют $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, равные $f(x_0)$.



Разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением переменной.*

Разность $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ - называется *приращением функции*.

Критерий непрерывности функции в точке *через приращения.*

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

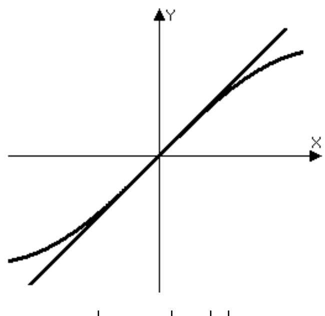
Пример 1. $f(x) = c = const$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, так как $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in R \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |c - c| < \varepsilon$ - верно.

Пример 2. $f(x) = \sin x$ также непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, так как $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in R \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$.

Чтобы доказать это, оценим последний модуль, используя тригонометрию и неравенства $|\sin t| \le |t|$ и $|\cos t| \le 1$ для $t \in \mathbf{R}$:

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = \left|2 \cdot \sin\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le \le 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0|.$$

Поэтому в качестве δ можно взять $\delta = \varepsilon$. ■



$|sin \ t| < |t|$

Определение непрерывности функции на множестве.

Функция $f : D \to \mathbf{R}$ *непрерывна на множестве* $G \subset D$ тогда и только тогда, когда она непрерывна в каждой точке множества G.

Свойства непрерывных функций

Верна следующая теорема:

Теорема 1. Все основные элементарные функции непрерывны на своей области определения.

Теорема 2 (*об арифметических действиях над непрерывными функциями*). Пусть функции f и g непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f+g$, $f\cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ (если $g(x_0)\neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

Примеры.
1) *Многочлен* $P_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ непрерывен в любой точке действительной оси, так как он является суммой непрерывных функций (одночленов).
2) *Рациональная функция* – это отношение двух многочленов:
$R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}$. Она непрерывна в тех точках x, где $Q_m(x)\neq 0$.

Теорема 3 (*о непрерывности композиции*).
Пусть функция f задана на множестве X и принимает значения во множестве Y, а функция g задана на множестве Y. Тогда если функция f непрерывна в точке $x_0\in X$, и функция g непрерывна в точке $f(x_0)\in Y$, то функция $g(f)$ также непрерывна в точке x_0.
Доказательства теорем 2 и 3 следуют из соответствующих теорем о пределе функции. ■

Теорема 4. Если функция задана, возрастает и непрерывна на промежутке X, то множество Y ее значений также является промежутком. На Y определена обратная функция, которая также возрастает и непрерывна.
Без доказательства .

Приведем еще одну важную для вычисления пределов теорему:
Теорема 5 (*о пределе степенно-показательного выражения*).
Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A^B$.

Доказательство. Функцию $f(x)^{g(x)}$ можно представить в виде $e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$. Так как $f(x)\to A$ ($x\to x_0$), и логарифмическая функция непрерывна, то $\ln f(x)\to \ln A$ ($x\to x_0$). Тогда, по теореме 2, $g(x)\cdot\ln f(x)\to B\cdot\ln A$ при $x\to x_0$. Откуда, в силу непрерывности показательной функции, $e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{B\cdot\ln A}=A^B$ при $x\to x_0$. ■

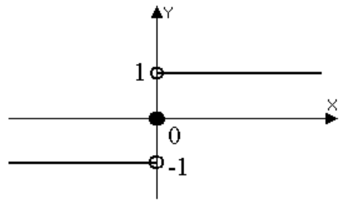
Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, и $f(x_0)>0$, то функция $f(x)^{g(x)}$ также непрерывна в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=f(x_0)^{g(x_0)}$.

5.2. Точки разрыва функции и их классификация

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции f, если f либо не определена в этой точке, либо x_0 не является точкой *непрерывности*. Классифицируем точки разрыва в зависимости от поведения в них односторонних пределов:
Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы (возможно разные), т.е. $\exists\, f(x_0-0),\ \exists\, f(x_0+0)$.

При этом величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком* функции f в точке x_0.

Пример 1. Определим тип точки разрыва $x_0=0$ у функции



$$y=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

$\begin{array}{l} y(x_0-0)=-1\in R\\ y(x_0+0)=1\in R\end{array}$. Следовательно, $x_0=0$ - точка разрыва I рода.

Пример 2. Определим тип точки разрыва $x_0=0$ у функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Если $x\to 0-0$, то $\dfrac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\to -\dfrac{\pi}{2}$, $y(0-0)=-\dfrac{\pi}{2}$;

Если $x\to 0+0$ то $\dfrac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\to \dfrac{\pi}{2}$, $y(0+0)=\dfrac{\pi}{2}$.

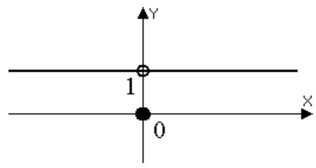
Поэтому $x_0=0$ - точка разрыва I рода.

Частный случай точки разрыва I рода:

Определение. Если пределы в точке слева и справа одинаковы, то она называется *точкой устранимого разрыва*.

Если x_0 - точка устранимого разрыва, то достаточно изменить (или определить) функцию лишь в этой точке, чтобы функция стала непрерывной в точке x_0 (устранить разрыв).

Пример 3. $y=|\operatorname{sign}x|=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

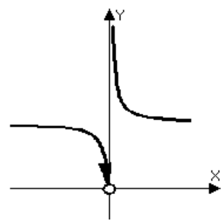


$x_0=0$ - точка устранимого разрыва.

Для устранения разрыва достаточно взять $y(0)=1$.

Определение. Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва II рода*, если она не является точкой разрыва I рода, то есть хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или вообще не существует.

Пример 4. $y=2^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$. Выше было вычислено, что



при $x\to 0-0$ $y\to 0$, а при $x\to 0+0$ $y\to +\infty$.

Поэтому $y(0\text{-}0)=0$, $y(0+0)=+\infty$. Значит $x_0=0$ - точка разрыва II рода.

Пример 5. $y=\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$.

Покажем по определению Гейне, что предел $y(0+0)$ не существует.

Возьмем $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n\in \mathbf{N}$. Тогда $x_n\in(0,+\infty)$, $x_n\to 0\ (n\to\infty)$, и

$y(x_n)=\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi n)=1\to 1\ (n\to\infty)$. Теперь возьмем другую последовательность

$\tilde{x}_n=\dfrac{1}{\pi n}$, $n\in\mathbf{N}$. Тогда тоже $\tilde{x}_n\in(0,+\infty)$, $\tilde{x}_n\to 0\ (n\to\infty)$, но $y(\tilde{x}_n)=\sin(\pi n)=0\to 0\ (n\to\infty)$.

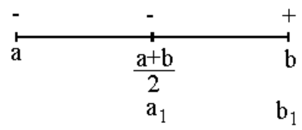
Так как $\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}y(\tilde{x}_n)$, то предел справа $y(0+0)$ не существует.

Значит $x_0=0$ - точка разрыва II рода.

5.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Напомним, что функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна в каждой точке этого отрезка. Множество всех функций, непрерывных на отрезке [a,b], обозначается C [a,b].

Теорема 1 (*Первая теорема Больцано-Коши*).
Если функция непрерывна на отрезке и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри этого отрезка найдется точка, в которой функция обращается в нуль (т.е. если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$, то $\exists\ c\in(a,b): f(c)=0$).
Доказательство.

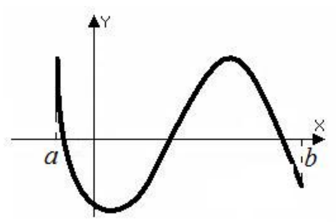


Шаг 1. Поделив отрезок $[a,b]$ пополам, получим два отрезка: $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$. Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, то $c=\dfrac{a+b}{2}$, теорема доказана. А если нет, то из двух половинок обязательно найдется отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Обозначим его $[a_1,b_1]$. Тогда $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$, длина отрезка $[a_1,b_1]$ равна $\dfrac{b-a}{2}$.

Шаг 2. Теперь делим пополам отрезок $[a_1,b_1]$. Если $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, то $c=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, теорема доказана. А если нет, то выбираем из двух половинок такой отрезок $[a_2,b_2]$, на концах которого значения функции имеют разные знаки: $f(a_2)\cdot f(b_2)<0$. Длина $[a_2,b_2]$ равна $\dfrac{b_1-a_1}{2}=\dfrac{b-a}{2^2}$.

Далее продолжаем процесс деления. На n-м шаге снова: либо найдем с, либо получим отрезок $[a_n,b_n]$, такой что $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$. Длина $[a_n,b_n]$ равна $\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом, либо найдем с на каком-либо шаге, либо получим систему вложенных отрезков $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\supset\ldots$ со стремящимися к нулю длинами. В первом случае теорема доказана.
Во втором случае из теоремы Кантора о вложенных отрезках следует, что $\exists!c$: $\forall n\in\mathbf{N}\ c\in[a_n,b_n]$. Так как длины отрезков стремятся к нулю, то $a_n\to c$ и $b_n\to c$. Поэтому, в силу непрерывности функции *f*, $f(a_n)\to f(c)$ и $f(b_n)\to f(c)$. Значит $f(a_n)\cdot f(b_n)\to f^2(c)$. Так как $\forall n\in\mathbf{N}\ f(a_n)\cdot f(b_n)<0$, то $f^2(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\cdot f(b_n)\le 0$. Следовательно, $f(c)=0$. ■



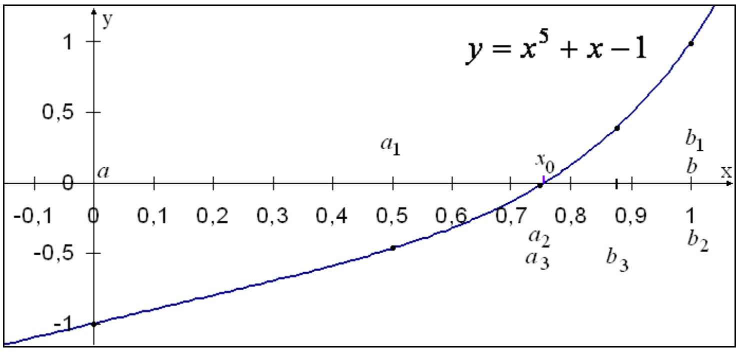
Замечание 1. Точек, в которых функция обращается в ноль, может быть несколько (см. рисунок).
Замечание 2. Если функция монотонно возрастает, то такая точка единственна.

Геометрический смысл этой теоремы очень прост: непрерывная линия, соединяющая две точки, лежащие по разные стороны оси OX, обязательно пересекает эту ось.

Приведенное доказательство ценно тем, что в нем содержится метод приближенного поиска корней уравнения *f*(*x*)=0 (метод половинного деления).

Пример. Приближенно решить методом половинного деления уравнение $x^5 + x - 1 = 0$.

Решение. Возможные рациональные корни: 1 и -1. Ни один из них не подходит. Поэтому все корни, если они есть, иррациональны.



Положим $f(x) = x^5 + x - 1$. Функция возрастает, как сумма двух возрастающих функций, поэтому уравнение имеет не более одного действительного корня.

Так как f непрерывна на **R** и $f(0) = -1,\ f(1) = 1$, то по доказанной теореме внутри отрезка [0; 1] найдется точка x_0, в которой функция обращается в нуль. Вычислим ее.

Шаг 1. Середина отрезка: $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$; значение функции: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} + \frac{1}{2} - 1 < 0$,

значит $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Шаг 2. Середина отрезка: $\frac{1/2+1}{2} = \frac{3}{4}$; значение функции: $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{243}{1024} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{-13}{1024} < 0$,

значит $x_0 \in [\frac{3}{4}, 1]$.

Шаг 3. Середина отрезка: $\frac{3/4+1}{2} = \frac{7}{8}$; значение функции: $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{16807}{32768} + \frac{7}{8} - 1 = \frac{12711}{32768} > 0$

значит $x_0 \in [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$, то есть $0{,}75 < x_0 < 0{,}875$.

И т.д. В качестве приближенного значения можно взять середину последнего отрезка: (0,75+0,875)/2=0,8125, поэтому $x_0 = 0{,}8125 \pm 0{,}0625$. ■

Пример 2. Любой многочлен нечетной степени $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_0$, где $a_{2n+1} \neq 0$, имеет хотя бы один действительный корень.

Доказательство. Запишем $P(x)$ в виде $x^{2n+1}(a_{2n+1} + a_{2n}/x + \ldots + a_0/x^{2n+1})$. Отсюда видно, что при достаточно больших положительных значениях переменной x знак $P(x)$ совпадает со знаком a_{2n+1}, а если x - достаточно большое отрицательное, то знак $P(x)$ противоположен знаку a_{2n+1}. Поскольку ***многочлен непрерывен на всей действительной прямой***, то по первой теореме Больцано-Коши найдется промежуточная точка с, в которой $P(x)$ обращается в ноль. ■

Теорема 2 (*Вторая теорема Больцано-Коши*).

Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает любое промежуточное значение между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Допустим, что $f(a) < f(b)$. Покажем, что $\forall\, k \in (f(a), f(b))$ $\exists\, c \in [a,b]: f(c) = k$). Введем вспомогательную непрерывную функцию $g(x) = f(x) - k$. Тогда $g(a) = f(a) - k < 0$, $g(b) = f(b) - k > 0$. Поэтому по Теореме 1 $\exists\, c \in [a,b]: g(c) = 0$, значит $f(c) - k = 0 \Rightarrow f(c) = k$. Случай $f(a)$ больше $f(b)$ рассматривается аналогично. ■

Теорема 3 (*первая теорема Вейерштрасса*).

Если функция определена и непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке (т.е. если $f \in C[a,b]$, то $\exists\, M \in \mathbf{R}, \exists\, m \in \mathbf{R}:\ m \le f(x) \le M \quad \forall\, x \in [a,b]$).

Доказательство. От противного. Допустим, что функция не ограничена сверху.

Тогда $\forall\, n\in\mathbf{N}\ \ \exists x_n\in[a\,,b]: f\,(x_n)\geq n$. Последовательность x_n ограничена, так как лежит на отрезке $[a\,,b]$. По теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}\to x_0$, где $x_0\in[a\,,b]$. Поскольку функция f непрерывна в точке x_0 , то $f\,(x_{n_k})\to f\,(x_0)$. Но это противоречит тому, что $\forall\, n_k\in\mathbf{N}\ \ f\,(x_{n_k})\geq n_k$. Поэтому функция ограничена сверху.

Аналогично доказывается ограниченность снизу. ■

Теорема 4 (*вторая теорема Вейерштрасса*).
Если функция определена и непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.
Доказательство. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a\,,b]$. По первой теореме Вейерштрасса функция ограничена, поэтому существуют конечные $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Нужно показать, что они достигаются в некоторых точках отрезка, то есть $\exists x_1\in[a,b], \exists x_2\in[a,b]:\ f(x_1)=M,\ f(x_2)=m$.
Докажем это методом от противного. Предположим, что значение $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ не достигается. Тогда $\forall\, x\in[a\,,b]\ \ f\,(x)<M$. Поэтому функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f\,(x)}$
на отрезке $[a\,,b]$ непрерывна и положительна. По предыдущей теореме она ограничена, поэтому $\exists K\in\mathbb{R}:\ \forall\, x\in[a\,,b]\ \ 0<\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f\,(x)}\leq K$. Отсюда $\forall\, x\in[a\,,b]\ \ f\,(x)\leq M-\dfrac{1}{K}$,
значит число M не является наименьшей верхней границей, то есть супремумом. Полученное противоречие показывет, что наше предположение неверно, и супремум достигается. ■

Можно привести другое доказательство этих теорем:

Теорема 3-4 (*первая и вторая теоремы Вейерштрасса*).
Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке и достигает на нем своих точных верхней и нижней граней (т.е. если $f\in C[a,b]$, то $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)\in\mathbf{R}$, и $\exists\, c\in[a,b]: f(c)=M$).
Доказательство. 1) Сначала докажем, что $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (либо конечный, либо $+\infty$) достигается, т.е. $\exists\, c\in[a,b]: f(c)=M$.

Возьмем последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, сходящуюся к M, такую что $\forall\, n\in\mathbf{N}\quad a_n<M$. Поскольку M - наименьшая верхняя граница, то $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \ a_n$ не является верхней границей, значит $\exists x_n\in[a,b]: f(x_n)>a_n$.

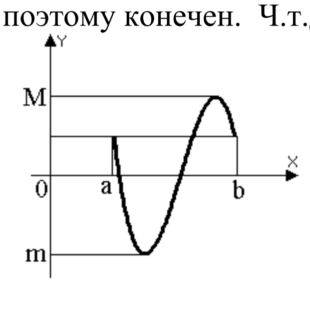
По теореме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}\to c$, где $c\in[a\,,b]$. Поскольку функция f непрерывна в точке c, то $f\,(x_{n_k})\to f\,(c)$ при $k\to+\infty$.

Так как при всех $\forall\, k\in\mathbb{N}\ \ a_{n_k}<f(x_{n_k})\leq M$, то по теореме о трех последовательностях получаем: $f\,(x_{n_k})\to M$ при $k\to+\infty$.

Итак, $f(c)=M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

2) Теперь докажем, что $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ конечен: $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(c)\in\mathbf{R}$, поэтому конечен. Ч.т.д. ■

Замечание. Из теорем 2 и 4 следует, что непрерывная функция на отрезке, принимает все промежуточные значения между



$m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Следствие. Непрерывный образ отрезка есть отрезок. Пусть $f\in C[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, тогда значения функции заполняют отрезок $[m,M]$.

Понятие равномерной непрерывности.

Пусть функция непрерывна на промежутке X. Это значит, что для любой точки $x_0\in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, зависящее от точки x_0 и от ε, такое что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Понятие равномерной непрерывности – это более сильное ограничение на функцию.

Определение. Функция $f(x)$ *равномерно непрерывна* на промежутке X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее только от ε, такое что $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Если функция равномерно непрерывна на промежутке X, то она также является непрерывной на нем. Обратное неверно, как видно из следующего примера.

Пример. $f(x) = \sin\frac{1}{x},\ X = \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$.

$x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$; $x'_n = \frac{1}{\pi n}$.

$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n$; $f(x'_n) = \sin \pi n = 0$.

$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1$.

$|x_n - x'_n| = \frac{1}{n(2n+1)\cdot\pi} \to 0$.

Для $\varepsilon \le 1$ нельзя найти единого $\delta > 0$ для всех точек из $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Однако, если функция непрерывна на отрезке, то ситуация меняется.

Теорема *Кантора*. Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство (от противного).

Пусть функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a, b]$. Тогда

$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_1 \in [a,b], \exists x_2 \in [a,b]\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon_0$.

При каждом $n\in \mathbf{N}$ возьмем $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\exists x_1^{(n)} \in [a,b], \exists x_2^{(n)} \in [a,b]: \left|x_1^{(n)} - x_2^{(n)}\right| < \frac{1}{n} \Rightarrow \left|f\left(x_1^{(n)}\right) - f\left(x_2^{(n)}\right)\right| \ge \varepsilon_0 .$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ можно выделить сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ подпоследовательность.

Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что уже сама последовательность $x_1^{(n)} \to x_0$.

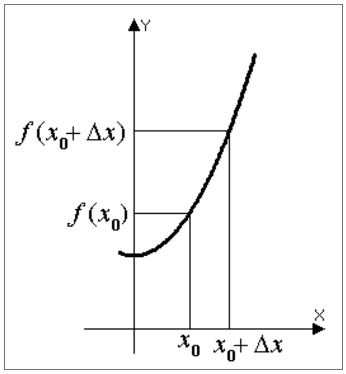
Тогда $x_2^{(n)} \to x_0$, т.к. $\left|x_1^{(n)} - x_2^{(n)}\right| < \frac{1}{n}$. Поскольку функция непрерывна в точке x_0, то $f\left(x_1^{(n)}\right) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$, тогда $f\left(x_2^{(n)}\right) \to f(x_0)$.

Отсюда $\left|f\left(x_1^{(n)}\right)-f\left(x_2^{(n)}\right)\right|\to 0$, а это противоречит тому, что $\left|f\left(x_1^{(n)}\right)-f\left(x_2^{(n)}\right)\right|\geq \varepsilon$. Значит, предположение неверно, и функция равномерно непрерывна на отрезке [a, b]. ■

§6. Производная функции одной переменной

6.1. Определение производной функции в точке

Рассмотрим функцию f, заданную на множестве X, и принимающую действительные значения. Пусть x_0 - внутренняя точка из области определения, т.е. она лежит в области определения вместе с некоторой своей окрестностью ($\exists U(x_0): U(x_0) \subset X$). Если x − точка из X, то величина $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением переменной в точке* x_0, а величина $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приращением функции в точке* x_0.



Определение. *Производной* функции *f (x)* в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Замечание. Производная может быть как конечной, так и бесконечной.
Пример . Функция $y(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеет бесконечную производную:

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - 0}{\Delta x} = +\infty .$$

Примеры вычисления по определению производных некоторых основных элементарных функций

При вычислении следующих пределов используются известные эквивалентности.
1) Производная от константы $f(x) = c$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0 .$$

$$\boxed{c' = 0}.$$

2) Производная степенной функции $f(x) = x^{\alpha}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha} \cdot \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\alpha} - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

$$\boxed{\left(x^{\alpha} \right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}}.$$

3) Производная показательной функции $f(x) = a^x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot \left(a^{\Delta x} - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot \Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

$$\boxed{\left(a^x \right)' = a^x \cdot \ln a; \quad \left(e^x \right)' = e^x}.$$

4) $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \cos x$$

(в силу непрерывности функции $\cos x$).

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}.$$

5) $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

6.2. Односторонние производные. Связь непрерывности функции в точке с существованием конечной производной

Пусть $f : X \to \mathbf{R}$, $x_0 \in X$.

Определение. 1) Если функция определена в левосторонней окрестности точки x_0, то

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ - *производная слева* функции f в точке x_0.

2). Соответственно, если функция определена в правосторонней окрестности точки x_0, то

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ - *производная справа* функции f в точке x_0.

По теореме о связи существования предела и односторонних пределов:
$\exists\ f'(x_0) = A \in R \Leftrightarrow \exists\ f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A$.

Теорема (*о связи непрерывности функции в точке с существованием конечной производной*).
Если функция имеет конечную производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. По условию $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A \in R$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x = A \cdot 0 = 0.$$

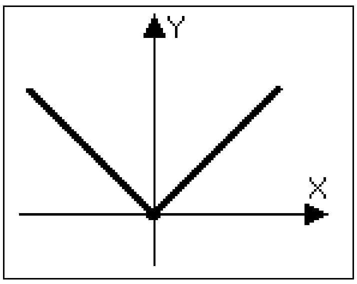
Значит, по определению, $f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Обратное не верно. Как показывает следующий пример, функция, непрерывная в точке, может не иметь производной в этой точке.

Пример 1. Функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ непрерывна, т.к.

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = 0 \quad f(0) = 0.$$

Найдем ее односторонние производные в этой точке:

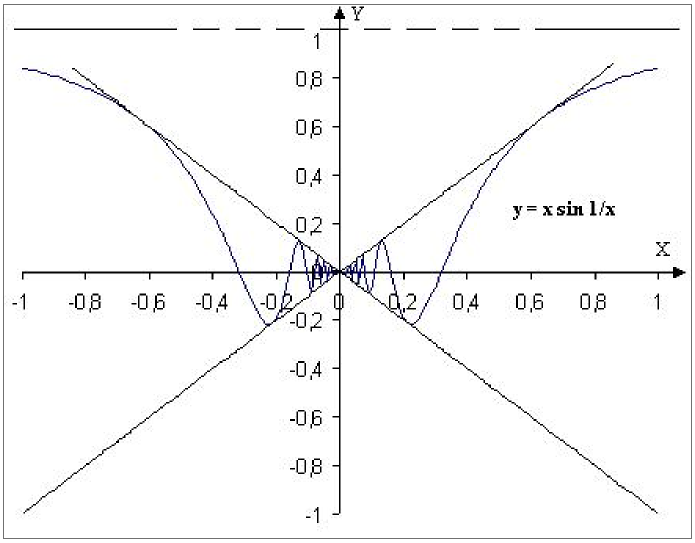


$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \left(-\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = -1;$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Так как $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то не существует производной $f'(0)$.

Пример 2. $y(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.



$\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$

(так как x — б.м., а $\sin\dfrac{1}{x}$ - ограничена).

Так как $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=y(0)\Rightarrow$, то

$y(x)$ непрерывна в точке $x_0=0$.

В то же время,

$y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ не существует.

При $x\to\infty$ у функции $y(x)$ существует асимптота $y=1$.

6.3. Правила вычисления производной. Таблица производных

Правила вычисления производной

Пусть $\exists\ f'(x)\in R, \exists\ g'(x)\in R$. Тогда

1) $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\left(f(x)\right)'$, где c – число.

2) $\left(f(x)+g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'+\left(g(x)\right)'$.

3) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'\cdot g(x)+f(x)\cdot\left(g(x)\right)'$.

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{\left(f(x)\right)'\cdot g(x)-f(x)\cdot\left(g(x)\right)'}{\left(g(x)\right)^2}$, где $g(x)\neq 0$.

5) Производная сложной функции

$\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

6) Производная обратной функции

$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, где $y_0=f(x_0)$, $f'(x_0)\neq 0$, $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0.

Доказательство.

Свойства 1) и 2) предлагается проверить самостоятельно.

3) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)\cdot\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot\left(g(x+\Delta x)-g(x)\right)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$

$=\left(f(x)\right)'\cdot g(x)+f(x)\cdot\left(g(x)\right)'$.

Здесь использовалось то, что если функция $g(x)$ имеет конечную производную в точке, то она непрерывна в этой точке и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$.

4) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}\cdot\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}\cdot\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)-\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\right)=$$

$$=\frac{(f(x))'\cdot g(x)-f(x)\cdot(g(x))'}{(g(x))^2}, \text{ ч.т.д.}$$

5) $$(f(g(x)))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}.$$

Обозначим $\Delta g=g(x+\Delta x)-g(x)$. Тогда $\Delta g\to 0$ при $\Delta x\to 0$ в силу непрерывности функции $g(x)$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta g\to 0}\frac{f(g(x)+\Delta g)-f(g(x))}{\Delta g}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

6) $$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y}. \quad (*)$$

Так как $y_0=f(x_0)$, то $f^{-1}(y_0)=x_0$. Обозначим $x=f^{-1}(y_0+\Delta y)$. Тогда $\Delta x=x-x_0=f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)\to 0$ при $\Delta y\to 0$, т.к. f^{-1} Непрерывна.

При этом $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. Поэтому из (*):

$$(f^{-1})'(y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}. \ ■$$

Примеры.

1) $\boxed{(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

Доказательство. По правилу 4) получаем:

$$(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}. \ ■$$

2) $\boxed{(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

Доказательство. Также по правилу 4):

$$(\mathrm{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}. \ ■$$

3) $\boxed{\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}}$, $\quad \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. По правилу 6): $f'(x_0) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y_0)}$. У нас $f(x) = \log_a x = y$, значит $x = a^y = f^{-1}(y)$. Поэтому $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{\left(a^y\right)'} = \dfrac{1}{a^y \cdot \ln a} = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$. ■

4) $\boxed{\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}}$.

Доказательство. Снова применяя правило 6) для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x = y$, $x = \operatorname{tg} y = f^{-1}(y)$, получаем:

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{\left(\operatorname{tg} y\right)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.\ ■$$

5) $\boxed{\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}}$.

Доказательство. Опять по правилу 6) для $f(x) = \operatorname{arcctg} x = y$, $x = \operatorname{ctg} y = f^{-1}(y)$:

$$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = \frac{1}{\left(\operatorname{ctg} y\right)'} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.\ ■$$

6) $\boxed{\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Доказательство. Снова по правилу 6): $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ при $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда $|x|<1$, и

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\left(\sin y\right)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\ ■$$

7) $\boxed{\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Доказательство. По правилу 6): $y = \arccos x$, $x = \cos y$ при $0 < y < \pi$, $|x|<1$ и

$$\left(\arccos x\right)' = \frac{1}{\left(\cos y\right)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\ ■$$

8) $\boxed{\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x}$.

Доказательство. $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$. ■

9) $\boxed{\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x}$.

Доказательство. $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. ■

10) $\boxed{\left(\mathrm{th}x\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}}$.

Доказательство. По правилу 4):

$$\left(\mathrm{th}x\right)' = \left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right)' = \frac{\left(\mathrm{sh}x\right)' \cdot \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x \cdot \left(\mathrm{ch}x\right)'}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}. \quad ■$$

11) $\boxed{\left(\mathrm{cth}x\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}}$.

Доказательство. Снова по правилу 4):

$$\left(\mathrm{cth}x\right)' = \left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}\right)' = \frac{\left(\mathrm{ch}x\right)' \cdot \mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x \cdot \left(\mathrm{sh}x\right)'}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}. \quad ■$$

6.4. Таблица производных

1) $c' = 0$
2) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$
3) $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4) $\left(e^x\right)' = e^x$
5) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
6) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
7) $\left(\sin x\right)' = \cos x$
8) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$
9) $\left(\mathrm{tg}x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10) $\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11) $\left(\mathrm{arctg}x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
12) $\left(\mathrm{arcctg}x\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
13) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15) $\left(\mathrm{sh}x\right)' = \mathrm{ch}x$
16) $\left(\mathrm{ch}x\right)' = \mathrm{sh}x$
17) $\left(\mathrm{th}x\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
18) $\left(\mathrm{cth}x\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Процесс вычисления производной непосредственно по правилам и таблице называется *дифференцированием функции*.

6.5. Физический и геометрический смысл производной

Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - путь, пройденный точкой к моменту времени t.

Тогда $S(t + \Delta t)$ - путь, пройденный к моменту $t + \Delta t$,

$S(t + \Delta t) - S(t)$ - путь, пройденный за промежуток времени Δt,

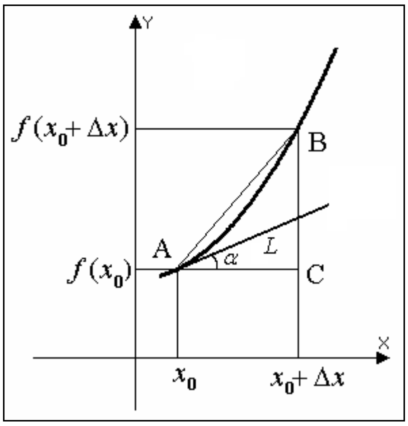
$\dfrac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ - средняя скорость точки на промежутке времени Δt.

Если Δt устремить к нулю, то средняя скорость будет стремиться к мгновенной скорости в момент времени t:

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = V(t)$ - мгновенная скорость в момент времени t.

Поскольку выражение слева есть производная $S'(t)$, то мы получаем:

Физический смысл производной: производная пути по времени в момент времени равна мгновенной скорости, то есть $S'(t)=v(t)$.
Соответственно, производная скорости по времени в момент времени t равна мгновенному ускорению, то есть $v'(t)=a(t)$.



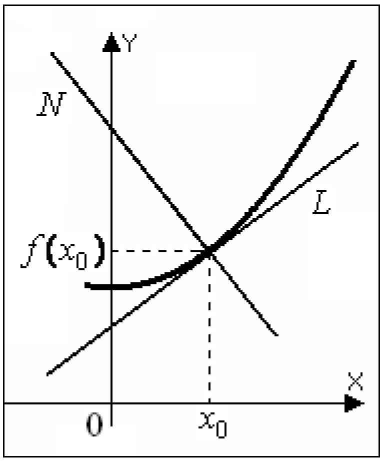
Геометрический смысл производной

Из ΔABC: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{BC}{AC}=\mathrm{tg}(\angle BAC)$,
т.е. отношение приращения функции к приращению аргумента равно тангенсу угла наклона секущей AB.
Если $\Delta x\to 0$, то точка B стремится к точке A,
и секущая AB стремится к касательной L. Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha,$$

где α - угол наклона к оси Ox касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0.
Геометрический смысл производной: производная функции в точке равна тангенсу угла наклона к оси Ox касательной к графику этой функции в данной точке, то есть $f'(x_0)=\mathrm{tg}\,\alpha$.
Замечание. Если производная в точке равна ∞, то в этой точке касательная вертикальна.

Уравнение касательной



$y=kx+b \qquad k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0) \qquad y=f'(x_0)\cdot x+b$

Число b найдем из условия, что точка $(x_0;f(x_0))$ лежит на прямой $b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$. Отсюда
$y=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.
$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ - уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$.

Уравнение нормали

Нормаль – это прямая, проходящая через точку $(x_0;f(x_0))$ и перпендикулярная касательной.
Две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1\cdot k_2=-1$. Значит, угловой коэффициент нормали равен: $k_2=-\frac{1}{f'(x_0)}$. Поэтому уравнение нормали N к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$ имеет вид: $\boxed{y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)}$.

6.6. Логарифмическое дифференцирование. Степенно-показательная функция

1) ***Логарифмическое дифференцирование.***
Пусть функция $y(x)$ положительна и имеет конечную производную в данной точке x.
Вычислим производную от $\ln y(x)$ как от сложной функции:

$\left(\ln y(x)\right)' = (\ln y)' \cdot y'(x) = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$. Отсюда $y'(x) = y(x) \cdot \left(\ln y(x)\right)'$. Или, более кратко,

$$\boxed{y' = y \cdot \left(\ln y\right)'}$$ - *формула логарифмического дифференцирования.*

Эту формулу удобно применять в случае вычисления производных степенно-показательных функций, а также если производная от ln *y* проще, чем производная от самой функции. Важно помнить, что при вычислении производной от ln *y нужно сначала использовать свойства логарифмов*, а затем считать производную.

Пример 1. Вычислить производную функции $y = (x^2 + 5)^{\sin x}$.

По формуле логарифмического дифференцирования:

$$y' = y \cdot \left(\ln(x^2 + 5)^{\sin x}\right)' = y \cdot \left(\sin x \cdot \ln(x^2 + 5)\right)' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^2 + 5) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 5}\right).$$

Итак, $y' = (x^2 + 5)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^2 + 5) + \dfrac{2x \cdot \sin x}{x^2 + 5}\right)$.

Пример 2. Вычислить производную функции $y = \dfrac{\sqrt{x+2} \cdot (3 - x)^4}{(x+1)^5}$.

Снова по формуле логарифмического дифференцирования:

$$y' = y \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{x+2} \cdot (3 - x)^4}{(x+1)^5}\right)' = y \cdot \left(\frac{1}{2}\ln(x+2) + 4\ln(3 - x) - 5\ln(x+1)\right)'.$$

Откуда $y' = \dfrac{\sqrt{x+2} \cdot (3 - x)^4}{(x+1)^5} \cdot \left(\dfrac{1}{2(x+2)} - \dfrac{4}{3 - x} - \dfrac{5}{x+1}\right)$.

2) Для вычисления ***производной степенно-показательной функции*** $\left(a(x)\right)^{b(x)}$ можно применять также другой способ дифференцирования.

Поскольку

$$\left(a(x)\right)^{b(x)} = e^{\ln\left(\left(a(x)\right)^{b(x)}\right)} = e^{b(x) \cdot \ln\left(a(x)\right)},$$

то по правилу производной сложной функции:

$$\left(\left(a(x)\right)^{b(x)}\right)' = \left(e^{b(x) \cdot \ln\left(a(x)\right)}\right)' = e^{b(x)\ln a(x)} \cdot \left(b'(x) \cdot \ln a(x) + b(x) \cdot \frac{a'(x)}{a(x)}\right) =$$

$$= \left(a(x)\right)^{b(x)} \cdot \left(b'(x) \cdot \ln a(x) + b(x) \cdot \frac{a'(x)}{a(x)}\right) =$$

$$= \left(a(x)\right)^{b(x)} \cdot b'(x) \cdot \ln a(x) + b(x) \cdot a'(x) \cdot \left(a(x)\right)^{b(x)-1}.$$

Итак, получили формулу:

$$\left(\left(a(x)\right)^{b(x)}\right)' = \left(a(x)\right)^{b(x)} \cdot \ln\left(a(x)\right) \cdot b'(x) + b(x) \cdot \left(a(x)\right)^{b(x)-1} \cdot a'(x) \cdot$$

Из этой формулы видно, что производная степенно-показательной функции состоит из двух слагаемых: первое получается, если считать функцию показательной, а второе - степенной.

6.7. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал.

Определение. Функция *дифференцируема* в точке, если ее приращение представимо в виде суммы главной линейной части (относительно приращения переменной Δ*x*) и бесконечно малой более высокого порядка, чем Δ*x*:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\quad A\in\mathbf{R}.$$

При этом главная линейная часть приращения называется *дифференциалом* df:

$$df(x_0)=A\cdot\Delta x.$$

Пример. $f(x)=x^2,\quad x_0=1$. Приращение:

$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(1+\Delta x)^2-1=2\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$.

Дифференциал, т.е. главная линейная часть приращения, равен $2\cdot\Delta x$, $o(\Delta x)=(\Delta x)^2$.

Теорема. (*Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.*)
Функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда у нее существует конечная производная в этой точке, причем

$$\boxed{df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x}$$

(т.е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\quad A\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\exists f'(x_0)=A\in\mathbf{R}$).

Доказательство.

$\Rightarrow$) (*необходимость*). Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е.

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, где $A\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$.

Тогда

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A+0=A.$$

$\Leftarrow$) (*достаточность*). Пусть существует конечная производная $f'(x_0)=A\in\mathbf{R}$.

Значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\cdot\Delta x}{\Delta x}=0$.

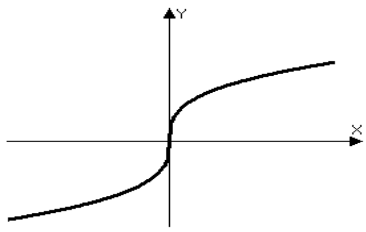
Следовательно, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\cdot\Delta x=o(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$.

Отсюда $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\quad A\in\mathbf{R}$. Ч.т.д. ■

Примеры.

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ не дифференцируема в точке $x_0=0$.

Действительно, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=\infty$.



Так как не существует конечной производной, то функция не дифференцируема в точке $x_0=0$. Отметим, что касательная в этой точке вертикальна.

2) Если $f(x)=x$, то $df=1\cdot\Delta x=\Delta x$, то есть $dx=\Delta x$.

Поэтому получаем следующую формулу для вычисления дифференциала:

$$\boxed{df=f'(x)\cdot dx}.$$

Замечания.

1) Если $A=0$, то $df=0$, а $\Delta f=o(\Delta x)$.
2) Если $A\neq 0$, то $\Delta f\sim df$ при $\Delta x\to 0$.
3) Из формулы для дифференциала следует равенство $\dfrac{df}{dx}=f'(x)$, которое часто используется при решении дифференциальных уравнений.

Правила вычисления дифференциала

1) $d(c\cdot f)=c\cdot df$

2) $d(f+g)=df+dg$

3) $d(f\cdot g)=df\cdot g+f\cdot dg$

4) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^2}$

Доказательство вытекает из формулы вычисления дифференциала и правил вычисления производной. Докажем, например, формулу 4):

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)'dx=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}dx=\frac{f'dx\cdot g-f\cdot g'dx}{g^2}=\frac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^2}.\quad\blacksquare$$

Инвариантность дифференциала

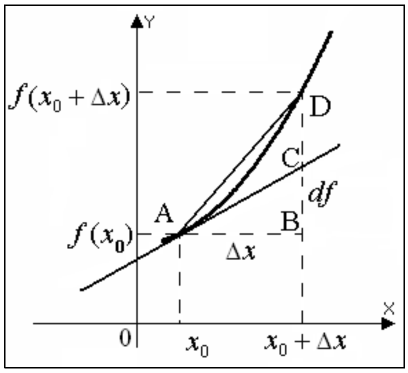
Формула $df=f'(x)\cdot dx$ была получена для случая, когда x - независимая переменная.

Пусть теперь x будет функцией от некоторой переменной t: $x=x(t)$. Тогда $dx=x'(t)\cdot dt$, и $df(x(t))=(f(x(t)))'\cdot dt=f'(x(t))\cdot x'(t)\cdot dt=f'(x)\cdot dx$ (по правилу производ-ной сложной функции). Итак, формула $df=f'(x)\cdot dx$ верна и в этом случае.

Инвариантность дифференциала заключается в том, что дифференциал всегда можно записать в одном и том же виде - произведение производной по некоторой переменной на приращение этой переменной - независимо от того, будет эта переменная независимой переменной или функцией от какой-то другой переменной.

Геометрический смысл дифференциала

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда $df=f'(x_0)\cdot\Delta x$. Проведем касательную AC к графику $y=f(x)$ в точке x_0 (см. рис.). Из геометрического смысла производной: $f'(x_0)=\mathrm{tg}(\angle CAB)$. Так как в ΔABC $AB=\Delta x$, то $df=f'(x_0)\cdot\Delta x=\mathrm{tg}(\angle CAB)\cdot AB=BC$. Таким образом, геометрический смысл дифференциала в точке x_0 состоит в том, что он равен приращению, которое получает ордината касательной к графику $y=f(x)$, проведенной в точке $(x_0,f(x_0))$, при переходе от точки x_0 к точке $x_0+\Delta x$.



Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$.

При малых Δx последнее слагаемое мало по сравнению с Δx, т.е. $\Delta f\sim df$ при $\Delta x\to 0$, поэтому $\Delta f\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$. Отсюда следует *формула приближенных вычислений* значений функции:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x}.$$

Пример 1. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{7{,}98}$.

Введем функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ и точку $x_0=8$, так чтобы искомая величина была значением функции f в некоторой точке, близкой к x_0. Тогда $\Delta x=7{,}98-8=-0{,}02$. По формуле приближенных вычислений находим:

$$f(7{,}98)\approx f(8)+f'(8)\cdot\Delta x=2+\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\cdot\Delta x=2+\frac{1}{12}\cdot(-0{,}02)=2-\frac{0{,}02}{12}\approx 1{,}998.$$

Пример 2. Вычислить приближенно $\sin 31^\circ$.

Положим $f(x)=\sin x$ и $x_0=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}(рад)$. Тогда $\Delta x=1^\circ=\dfrac{\pi}{180}(рад)$. Из формулы приближенных вычислений получаем:

$$\sin 31^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\Delta x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0{,}5+0{,}866\cdot 0{,}0175\approx 0{,}5152\,.$$

6.8. Производные высших порядков

Пусть $f\colon X\to\mathbf{R}$, x_0 - внутренняя точка области определения X, и пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 везде существует производная (т.е. $\forall\, x\in U(x_0)\ \exists\ f'(x)$).
Тогда в окрестности $U(x_0)$ определена функция $\varphi(x)=f'(x)$, поэтому x_0 - внутренняя точка области определения функции φ. Значит, в этой точке определена производная для функции φ, называемая *второй производной функции f* (или *производной второго порядка*) в точке x_0: $f''(x_0)=\varphi'(x_0)$, или

$$f''(x_0)=\left(f'\right)'(x_0)\,.$$

Аналогично определяется *производная третьего, четвертого порядка* и т.д.:
$f'''=f^{(3)}=\left(f''\right)',\ \ f^{IV}=f^{(4)}=\left(f'''\right)',\ldots$

Пример. $y=\sin x$

$f'(x)=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$f''(x)=-\sin x=\sin(\pi+x)$

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$

Методом математической индукции можно доказать формулу

$$\boxed{\sin^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{2}+x\right)}\,.$$

Аналогично получается формула

$$\boxed{\cos^{(n)}(x)=\cos\left(\frac{\pi\cdot n}{2}+x\right)}\,.$$

Правила вычисления производных высших порядков

1) $\left(c\cdot f\right)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}$

2) $\left(f+g\right)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$

3) $\left(f\cdot g\right)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$ - формула Лейбница

Доказательство.
Утверждения пунктов 1) и 2) очевидно. Для пункта 3) проведем доказательство методом математической индукции:

1). При $n=1$: $(f\cdot g)'=\sum\limits_{k=0}^{1}C_1^k\cdot f^{(1-k)}\cdot g^{(k)}=f'\cdot g+f\cdot g'$ - верно.

2). Пусть для n формула верна: $(f\cdot g)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$. Покажем, что она верна для следующего натурального числа n+1, то есть что $(f\cdot g)^{(n+1)}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}$.

Из определения производной порядка (n+1) и предположения индукции получаем

$$(f\cdot g)^{(n+1)}=\left((f\cdot g)^{(n)}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\left(f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\left(f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}$$

Во втором слагаемом заменим сначала $k+1$ на m, а затем m на k:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}=\sum_{m=1}^{n+1}C_n^{m-1}\cdot f^{(n-m+1)}\cdot g^{(m)}=\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}\cdot f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}.$$

Отсюда получаем:

$$(f\cdot g)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}\cdot f^{(n-k+1)}\cdot g^{(k)}=$$

$$=C_n^0\cdot f^{(n+1)}\cdot g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n}C_n^{k-1}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+C_n^n\cdot f^{(0)}\cdot g^{(n+1)}=$$

$$=f^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+g^{(n+1)}.$$

Так как $C_n^k+C_n^{k-1}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}+\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\dfrac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!}=\dfrac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=C_{n+1}^k$,

то $(f\cdot g)^{(n+1)}=f^{(n+1)}+g^{(n+1)}+\sum\limits_{k=1}^{n}C_{n+1}^k\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}$. ■

Пример. Вычислим $\left(x^2\cdot\sin x\right)^{(20)}$.

Пусть $f(x)=\sin x,\quad g(x)=x^2$. Тогда по формуле Лейбница

$$\left(x^2\cdot\sin x\right)^{(20)}=C_{20}^0\cdot x^2\cdot(\sin x)^{(20)}+C_{20}^1\cdot 2\cdot x\cdot(\sin x)^{(19)}+C_{20}^2\cdot 2\cdot(\sin x)^{(18)}+0=$$

$$=x^2\cdot\sin x-20\cdot\cos x\cdot 2\cdot x-2\cdot 190\cdot\sin x=(x^2-380)\cdot\sin x-40\cdot x\cdot\cos x.$$

6.9. Производная функции, заданной параметрически

Говорят, что функция $y(x)$ задана параметрически, если и переменная x, и функция y заданы как функции некоторого параметра t: $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\quad t\in T.$

Физический смысл функции, заданной параметрически:
пару ($x(t)$,$y(t)$) можно понимать как координаты точки на плоскости в момент времени t.

Иногда параметр можно исключить из системы и представить функцию в явном виде:

Пример. Функция $y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases}x=\operatorname{tg}t,\\ y=\sin 2t\text{-}2\cos 2t.\end{cases}$

Применяя тригонометрические формулы $\sin 2t = \dfrac{2\cdot \operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$ и $\cos 2t = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$, находим явное выражение для $y(x)$:

$y = \dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{2-2x^2}{1+x^2} \Rightarrow y = \dfrac{2x^2+2x-2}{1+x^2}$ - функция задана явно.

Однако чаще всего найти явное выражение для $y(x)$ сложно или невозможно. Как считать производную функции, заданной параметрически, когда нельзя выразить функцию явно?

Из формулы вычисления дифференциала $dy = y'(x)\cdot dx$, учитывая равенства $dx = x'(t)dt$ и $dy = y'(t)dt$, получаем: $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)\cdot dt}{x'(t)\cdot dt} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Итак,

$$\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$ - *формула для производной функции, заданной параметрически.*

Заметим, что здесь производная, как и сама функция, тоже задана параметрически:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, \end{cases} \quad t \in T.$ От нее тоже можно брать производную. Вторая производная – это производная от первой производной: $y''(x) = \left(y'(x)\right)'_x$.

Отсюда

$$\boxed{y''(x) = \frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'_t} = \frac{1}{x'_t}\cdot\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}$$ - *формула для второй производной функции, заданной параметрически.*

Пример 1. Вычислите первую и вторую производную функции заданной с помощью системы $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right) \\ y = t - \operatorname{arctg}t \end{cases}$.

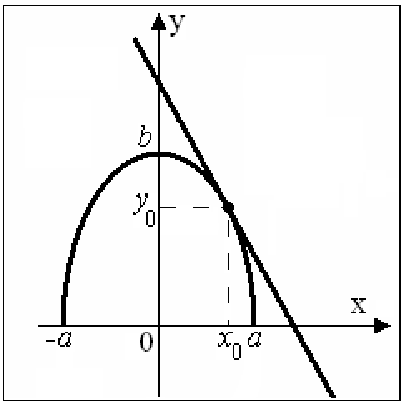
Решение. Первую производную вычисляем по формуле производной функции, заданной параметрически: $y'(x) = \dfrac{\left(t-\operatorname{arctg}t\right)'_t}{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)'_t} = \dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{1+t^2-1}{2t} = \dfrac{t}{2}$. Итак, $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right) \\ y' = \dfrac{t}{2} \end{cases}$.

Так как $y''(x) = \left(y'(x)\right)'_x$, то $y''(x) = \dfrac{\left(\dfrac{t}{2}\right)'_t}{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)'_t} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{1+t^2}{4t}$.

Пример 2. Написать уравнение касательной к графику функции $\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi$ в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = y'(x_0)\cdot(x - x_0) + y(x_0)$. Подставляя в уравнения для x и y значение $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, находим:

$x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $y(x_0) = y(t_0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$. Вычислим производную $y'(x)$:

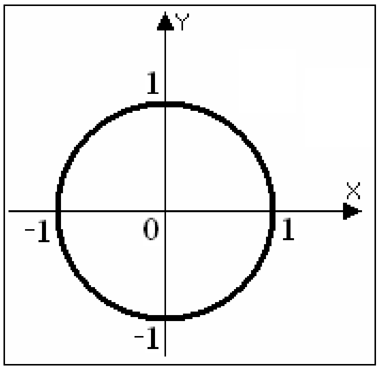


$$y'(x) = \frac{(b\cdot\sin t)_t'}{(a\cdot\cos t)_t'} = -\frac{b\cdot\cos t}{a\cdot\sin t}, \qquad y'(x_0) = -\frac{b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{b}{a}.$$

Подставим найденные значения в уравнение касательной $y = -\dfrac{b}{a}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$, получим

$y = -\dfrac{b}{a}x + \sqrt{2}b$ - уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a; \dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$.

6.10. Производная функции, заданной неявно



Неявное задание – один из способов задания функции. Функция задана явно, если $y = y(x)$.
Уравнение $F(x, y) = 0$ задает функцию $y(x)$ неявно.
Одну и ту же функцию можно задать разными способами.
Пример 1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - неявное задание окружности радиуса 1 с центром в точке (0;0).
Эту же окружность можно задать параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \le t < 2\pi .$$

Также эту окружность можно задать явно парой функций: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

***Как считать производную функции, заданной неявно*?**

Нужно равенство $F(x, y) = 0$ дифференцировать как тождество, считая x независимой переменной, а y - функцией от x.

Пример 2. Вычислить первую и вторую производные функции $y(x)$, заданной уравнением $e^y + x\cdot y = e$.

Решение. Продифференцируем обе части равенства по x, считая, что $y = y(x)$:

$$(e^y + x\cdot y)_x' = (e)_x' . \quad \begin{gathered} e^y\cdot y_x' + y + x\cdot y_x' = 0 \\ y_x'\cdot(e^y + x) = -y \end{gathered} .$$

$y_x' = -\dfrac{y}{e^y + x}$ - первая производная функции $y(x)$. Она выражается не только через x, но и через y. Теперь найдем вторую производную функции $y(x)$:

$$y_x'' = -\left(\frac{y}{e^y + x}\right)_x' = -\frac{y_x'\cdot(e^y + x) - y\cdot\left(e^y\cdot y_x' + 1\right)}{(e^y + x)^2} = -\frac{y_x'\cdot(e^y - e^y\cdot y + x) - y}{(e^y + x)^2} =$$

$$= \frac{y_x'\cdot(e^y\cdot y - e^y - x) + y}{(e^y + x)^2} = \frac{-y\cdot(e^y\cdot y - e^y - x) + y\cdot(e^y + x)}{(e^y + x)^3} = \frac{2y(e^y + x) - y^2e^y}{(e^y + x)^3}.$$

Иногда полученные результаты можно упрощать, используя первоначальное уравнение $F(x, y) = 0$.

6.11. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$.

Дифференциал первого порядка – это функция от двух переменных: x и приращения dx. Зафиксируем dx, будем считать, что меняется только переменная x. Подставляя $dy = y`(x)dx$ и пользуясь правилами вычисления дифференциала, получаем: $d^2y = d(y'(x)\cdot dx) = dx\cdot d(y'(x)) = dx\cdot y''(x)\cdot dx = y''(x)\cdot(dx)^2$. Итак, получили формулу для вычисления дифференциала второго порядка:

$$\boxed{d^2y = y''(x)\cdot dx^2} \qquad (1)$$

Аналогично выводится формула для вычисления дифференциала n-го порядка:

$$\boxed{d^n y = y^{(n)}dx^n}.$$

Свойства дифференциала n-го порядка

1) $d^n(c\cdot f) = c\cdot d^n f$

2) $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$

3) $d^n(f\cdot g) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot d^{n-k} f \cdot d^k g$

Свойство инвариантности, справедливое для дифференциала первого порядка, для дифференциала n-го порядка неверно. Действительно, пусть $x = x(t)$. Тогда, пользуясь правилом для вычисления дифференциала от произведения, получим: $d^2y = d\left(y'(x)\cdot dx\right) = d\left(y'(x)\right)\cdot dx + y'(x)\cdot d^2x$, откуда

$$d^2y = y''(x)\cdot dx^2 + y'(x)\cdot x_t'' \cdot dt^2. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) отличаются вторым слагаемым. Если оно не равно нулю, то свойство инвариантности дифференциала 2-го порядка не выполняется. Второе слагаемое обращается в нуль в том случае, если функция $x(t)$ линейна. Поэтому при линейной замене $x(t) = at + b$ свойство инвариантности дифференциала 2-го (и n-го) порядка верно.

§7. Основные теоремы дифференциального исчисления. Формула Тейлора

7.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Пусть выполняются следующие условия:

1) функция определена на промежутке *X*;
2) x_0 - внутренняя точка промежутка *X*;
3) функция в точке x_0 принимает наибольшее значение, т.е. $f(x) \le f(x_0)$ для всех точек *x* из промежутка *X*;
4) существует конечная производная в точке x_0.

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. По условию $\exists\ f'(x_0) = A \in R \Leftrightarrow \exists\ f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A$.

Производная слева вычисляется по формуле

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Так как по условию в точке x_0 функция принимает наибольшее значение, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$ и $f'_-(x_0) \ge 0$.

Из формулы для производной справа видно, что она неположительна

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$. Итак, $\begin{matrix} f'_-(x_0) \ge 0 \\ f'_+(x_0) \le 0 \end{matrix} \Rightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$,

то есть $f'(x_0) = 0$. ■

Замечание. Теорема также верна, если функция в точке x_0 принимает наименьшее значение.

Геометрический смысл теоремы Ферма: если в точке, в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, существует касательная, то она параллельна оси Ox.

Теорема Ролля. Пусть

1. функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2. $\forall x \in (a,b)\ \exists\ f'(x) \in \mathbf{R}$;
3. $f(a) = f(b)$.

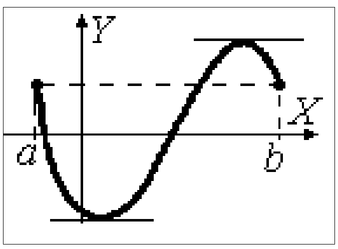
Тогда внутри отрезка найдется точка, в которой производная функции обращается в нуль (то есть $\exists\ c \in (a,b) : f'(c) = 0$).

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса, она достигает на этом отрезке своих верхней и нижней граней. Обозначим $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Рассмотрим два возможных случая.

Первый случай: m = M. Тогда $\forall x \in [a,b] \quad m \le f(x) \le M \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow$
$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Второй случай: m < M. Поскольку функция на концах отрезка принимает одинаковые значения, то одно из значений (либо *m*, либо *M*) достигается во внутренней точке *c*. Тогда для точки *c* выполняются все условия теоремы Ферма, поэтому $f'(c) = 0$. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля: если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, тогда найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox. Такая точка может быть не одна (см. рис.).



Теорема Лагранжа. Пусть

1) функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) функция f дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда $\exists\ c \in (a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$.

Вычислим значения функции $F(x)$ на концах отрезка:

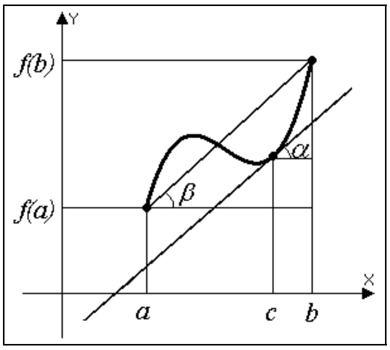
$F(a) = f(a)$; $\quad F(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a)$.

Видим, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке $[a, b]$ (как разность двух непрерывных функций), дифференцируема на интервале, и $F(a) = F(b)$. Значит, по теореме Ролля $\exists\ c \in (a,b) : F'(c) = 0$.

Поскольку $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Отсюда $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



Поскольку $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\beta$, где β - угол наклона секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, и $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$, где α - угол наклона касательной в точке $x = c$, то геометрически теорема Лагранжа означает, что внутри отрезка найдется точка, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Таких точек также может быть несколько (см. рисунок).

Формула конечных приращений Лагранжа

Из теоремы Лагранжа вытекает формула

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}\ .$$

Взяв $a = x$, $b = x+\Delta x$, придем к другому варианту формулы конечных приращений:

$$\boxed{f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \cdot \Delta x}$$

или

$$\boxed{\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x}\ .$$

Представив c в виде $c = x + \theta \cdot \Delta x$, где $0 < \theta < 1$, получаем

$$\boxed{f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.}$$

Эта формула часто используется в математическом анализе и других математических дисциплинах.

Теорема Коши. Пусть

1. функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2. $\forall\ x \in (a,b)\ \ \exists\ f'(x) \in R, \quad g'(x) \in R, \quad g'(x) \neq 0$;

Тогда существует точка $c \in (a,b)$, такая что

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}.$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$

Тогда $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), и $F(a)=f(a),\quad F(b)=f(a)$. То есть $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

Значит $\exists\ c\in(a,b):F'(c)=0$. Поскольку $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$, то

$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$. Отсюда $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. ■

Замечание. Теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа. При $g(x)=x$ из теоремы Коши следует теорема Лагранжа, из которой, в свою очередь, можно получить теорему Ролля, если $f(a)=f(b)$.

7.2. Правила Лопиталя

Правила Лопиталя – это правила для вычисления пределов функций (раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$).

Теорема 1. (*Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ в случае конечного промежутка.*)

Пусть

1) функции f и g определены на полуинтервале $(a,b]$;
2) функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и $\forall\ x\in(a,b)\ \ g'(x)\neq 0$;
3) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=0$;
4) $\exists\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$, и $\boxed{\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Доказательство. Доопределим f и g в точке a по непрерывности, положив $f(a)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=0,\ g(a)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=0$. Согласно теореме Коши:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},\text{ где } a<c(x)<x.$$

Поскольку $x\to a+0$, то $c(x)\to a+0$. Сделаем замену $c(x)=y$, Тогда

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to a+0}\frac{f'(y)}{g'(y)}.\ ■$$

Теорема 2 (*Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ в случае бесконечного промежутка.*)

Пусть

1) функции f и g определены на луче $[a,+\infty)$;
2) функции f и g дифференцируемы на $(a,+\infty)$, $g'(x)\neq 0\quad\forall\ x\in(a,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Доказательство. Пусть для определенности $a > 0$. Сделаем замену $y = \dfrac{1}{x}$. Тогда $x = \dfrac{1}{y}$, $y \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right]$ при $x \in [a, +\infty)$, и $y \to 0+0$ при $x \to +\infty$. Значит можно применить предыдущую теорему 1:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0+0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{y\to 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'} = \lim_{y\to 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

Правила Лопиталя для неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ из теорем 1 и 2 можно сокращенно записать в виде одной формулы:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}, \text{ где } a \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Теорема 3. (***Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа*** $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***в случае конечного промежутка.***)

Пусть

1) функции f и g определены на полуинтервале $(a, b]$;

2) функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b), и $\forall x \in (a, b)$ $g'(x) \neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и $\boxed{\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Без доказательства.

Теорема 4. (***Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа*** $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***в случае бесконечного промежутка.***)

Пусть

1) функции f и g определены на луче $[a, +\infty)$;

2) функции f и g дифференцируемы на $(a, +\infty)$; $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, и $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Без доказательства.

Правила Лопиталя для неопределенностей типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ из теорем 3 и 4 можно сокращенно записать в виде одной формулы:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}\text{, где } a\in\overline{\mathbf{R}}.$$

Замечание 1. Случай, когда точка a является левым концом промежутка, взят для определенности. Можно было бы считать, что a является правым концом промежутка, и $x\to a-0$. Наконец, допустим двусторонний предельный переход.

Замечание 2. При выполнении условий теорем правила Лопиталя можно применять повторно.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{\log_b x}$, $\alpha>0$, $b>0, b\neq 1$.

Решение. Убедимся, что присутствует соответствующая неопределенность, и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\log_b x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^\alpha\right)'}{\left(\log_b x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{\dfrac{1}{x\ln b}}=\lim_{x\to+\infty}\alpha\ln b\cdot x^\alpha=\infty.$$

Вывод. Степенная функция $y=x^\alpha$ $(\alpha>0)$ растет быстрее логарифмической $y=\log_b x$ $(b>0, b\neq 1)$ при $x\to+\infty$.

Аналогично можно убедиться, что $y=x^\alpha$ $(\alpha>0)$ растет быстрее, чем $y=(\ln x)^\kappa$ при $k>0$, причем α может быть очень малым, k – большим.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}$, где $a>1, n\in\mathbf{N}$.

Решение. Убедимся, что присутствует соответствующая неопределенность, и применим правило Лопиталя n раз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{a^x\cdot\ln a}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}}{a^x\cdot\ln^2 a}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x\cdot\ln^n a}=0$$

Вывод. Показательная функция $y=a^x$ $(a>1)$ растет быстрее любой степенной функции $y=x^\alpha$ $(\alpha>0)$ при $x\to+\infty$.

Для раскрытия других видов неопределенностей, а именно $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$, необходимо, используя элементарные преобразования, привести их к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и применить правило Лопиталя. А именно

1) Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Тогда имеем $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$. При $x\to a$

выражение $\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, а $\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ - неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2) При условии, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ (или $-\infty$):

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{f(x)}}$$, то есть пришли к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

На практике перехода к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ зачастую удается достигнуть проще.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю, а затем к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ применим правило Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{\ln x\cdot(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x} - 1}{\dfrac{1}{x}(x-1) + \ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

Решение. Сначала применим основное логарифмическое тождество, вынесем показатель за знак логарифма, потом воспользуемся непрерывностью показательной функции, а затем правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x} = \left(\infty^0\right) = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\operatorname{tg}x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{-\ln x}{\operatorname{ctg}x}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} =$$

= [применяем правило Лопиталя к показателю] $= e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^0 = 1$.

7.3. Формулы Тейлора и Маклорена для многочлена

Рассмотрим произвольный многочлен степени n:

$P_n(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + \ldots + a_n\cdot x^n$, где $a_n \neq 0$. (1)

Здесь он разложен по степеням x. Но его всегда можно разложить по степеням $(x\text{-}x_0)$, где x_0 – любое фиксированное число. Одним из способов для этого, как показано в следующем примере, является замена.

Пример. Разложить по степеням $(x\text{-}1)$ многочлен $P_3(x) = 4x^3 + 5x^2 - x$.

Решение. Сделаем замену $t = x\text{-}1$, $x = t+1$. Тогда

$P_3(x) = 4(t+1)^3 + 5(t+1)^2 - (t+1) = 4t^3 + 12t^2 + 12t + 4 + 5t^2 + 10t + 5 - t - 1 =$

$= 4t^3 + 17t^2 + 21t + 8.$

Теперь вернемся к переменной x, подставив $t = x-1$:

$P_3(x) = 4(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 21(x-1) + 8$. Это — искомое разложение.

Таким же образом многочлен $P_n(x)$ с помощью замены $t = x - x_0$, $x = t + x_0$ можно представить в виде

$$P_n(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + c_n \cdot (x - x_0)^n. \quad (2)$$

Найдем выражения для коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_n$ через значения многочлена и его производных:

1) подставив в равенство (2) $x = x_0$, получим: $P_n(x_0) = c_0$;

2) продифференцируем равенство (2) и снова подставим $x = x_0$. Получим:

$P_n'(x) = c_1 + 2c_2 \cdot (x - x_0) + 3c_3 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + nc_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$, $\quad P_n'(x_0) = c_1$.

3) Аналогично далее находим:

$P_n''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 \cdot (x - x_0) + 4 \cdot 3c_4 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + n(n-1)c_n \cdot (x - x_0)^{n-2}$,

$P_n''(x_0) = 2c_2$, т.е. $c_2 = \dfrac{P_n''(x_0)}{2}$;

$P_n'''(x) = 3!c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 \cdot (x - x_0) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n \cdot (x - x_0)^{n-3}$

$P_n'''(x_0) = 3!c_3$, т.е. $c_3 = \dfrac{P_n'''(x_0)}{3!}$;

. . .

$n+1)$ $P_n^{(n)}(x) = n!c_n$, $P_n^{(n)}(x_0) = n!c_n$, то есть

$$c_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$ – *коэффициенты Тейлора для многочлена.*

Подставив выражения для $c_0, c_1, \ldots, c_n$ в (2), получим:

$$\boxed{P_n(x) = P_n(x_0) + P_n'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots +}$$
$$\boxed{+ \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n},$$

или

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}$$ - *формула Тейлора для многочлена.*

В частном случае, когда $x_0 = 0$, формула Тейлора превращается в формулу Маклорена:

$$\boxed{P_n(x) = P_n(0) + P_n'(0) \cdot x + \frac{P_n''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n}$$

или

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k}$$ - *формула Маклорена для многочлена.*

7.4. Формулы Тейлора и Маклорена для произвольной функции

Пусть функция $f(x)$ имеет производные $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ (т.е. все производные с 1-й до $(n-1)$-й существуют в некоторой окрестности точки x_0). Многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \qquad (3)$$

называется *многочленом Тейлора для функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Основное свойство многочлена Тейлора

$T_n(x_0) = f(x_0)$, $T_n'(x_0) = f'(x_0)$, $T_n''(x_0) = f''(x_0)$, …, $T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Доказательство. Из формулы Тейлора для многочленов получаем:

$$T_n(x) = T_n(x_0) + T_n'(x_0)\cdot(x-x_0) + \ldots + \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k \ldots + \frac{T_n^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Сравнивая коэффициенты в этой формуле и формуле (3), получаем нужные равенства. ■

Разность $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$ называется *остаточным членом формулы Тейлора.*

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + r_n(x)}$$ - *формула Тейлора.*

В предыдущем разделе было доказано, что если $f(x)$ является многочленом степени n, то для нее многочлен Тейлора совпадает самой функцией. В общем случае это не так, то есть не всегда остаточный член равен нулю. Для него существуют различные формы записи.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)}.$$

Доказательство. Докажем, что $r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Так как $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$, то $r_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - T_n^{(k)}(x)$, $k = 0,1,\ldots n$.

Из основного свойства многочлена Тейлора следует, что

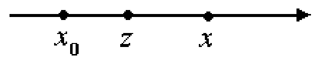
$r_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - T_n^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0,1,\ldots n$.

Теперь для вычисления предела применим n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{0}{n!} = 0. \quad ■$$

Для приложений формулы Тейлора нужны более конкретные формы остаточного члена. Чтобы их получить, приходится накладывать на функцию более сильные ограничения.

Пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют производные $f'(x), f''(x),\ldots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$. Зафиксируем произвольную точку $x \in U(x_0)$, и возьмем z между x_0 и x. Составим вспомогательную функцию:



$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - f'(z)\cdot(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}\cdot(x-z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\cdot(x-z)^n.$$

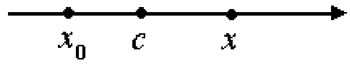
Вычислим $\varphi'(z)$:

$$\varphi'(z) = -f'(z) - f''(z)\cdot(x-z) + f'(z) - \frac{f'''(z)}{2!}\cdot(x-z)^2 + \frac{f''(z)}{2!}\cdot 2(x-z) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}\cdot(x-z)^n + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\cdot n(x-z)^{n-1} = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}\cdot(x-z)^n$$

Теперь выберем другую (произвольную) функцию $g(z)$, так чтобы она удовлетворяла условиям теоремы Коши в $U(x_0)$, и запишем теорему Коши для функций φ и g:

$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{g'(c)}$, где точка c лежит между x_0 и x.



Найдем значения $\varphi(x)$ и $\varphi(x_0)$: $\varphi(x)=0$; $\varphi(x_0)=f(x)-T_n(x)=r_n(x)$.

Подставляя их в формулу Коши, находим: $\frac{-r_n(x)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{g'(c)}$.

Отсюда $r_n(x)=\left(g(x)-g(x_0)\right)\cdot\frac{-\varphi'(c)}{g'(c)}$, или, учитывая формулу для $\varphi'(z)$:

$$\boxed{r_n(x)=\frac{g(x)-g(x_0)}{g'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n}.$$

Точку *c* можно записывать в виде $c=x_0+(x-x_0)\cdot\theta$, где $0<\theta<1$.

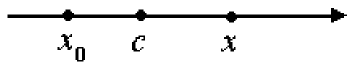
Используя здесь различные функции $g(z)$, получаем разные виды остаточного члена:

1). ***Остаточный член в форме Лагранжа***.

Возьмем $g(z)=(x-z)^{n+1}$. Подставляя в формулу остаточного члена значения $g(x)=0$ и $g(x_0)=\left(x-x_0\right)^{n+1}$, $g'(c)=-(n+1)\cdot(x-c)^n$, находим: $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+\frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

(c лежит между x_0 и x) – *формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.



*2). **Остаточный член в форме Коши**.*

Возьмем $g(z)=x-z$. Тогда $g(x)=0$, $g(x_0)=x-x_0$, $g'(c)=-1$. Подставив эти значения в формулу остаточного члена, получим: $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n\cdot(x-x_0)$. Запишем точку *c* в виде $c=x_0+(x-x_0)\cdot\theta$, где $0<\theta<1$. Тогда $x-c=(x-x_0)\cdot(1-\theta)$, откуда

$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\cdot\left(1-\theta\right)^n$.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\cdot\left(1-\theta\right)^n$$ (c лежит между x_0 и x, $0<\theta<1$) –

формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

*3). **Остаточный член в форме Шлемильха - Роша.***

Возьмем $g(z)=\left(x-z\right)^p$. Тогда $g(x)=0$, $g(x_0)=\left(x-x_0\right)^p$, $g'(c)=-p\cdot\left(x-c\right)^{p-1}$. Подставив эти значения в формулу остаточного члена, получим:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\frac{(x-x_0)^p}{p\cdot\left(x-c\right)^{p-1-n}}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{p\cdot n!}\cdot(x-x_0)^p\cdot\left(x-c\right)^{n-p+1}.$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{p\cdot n!}\cdot(x-x_0)^p\cdot\left(x-c\right)^{n-p+1}$$ (где c лежит между x_0 и x) –

формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха - Роша.

Многочлен Тейлора – это многочлен наилучшего приближения для функции в окрестности точки x_0, т.е. из всех многочленов фиксированной степени в окрестности точки x_0 лучше всего функцию приближает именно многочлен Тейлора.

7.5. *Разложение по формуле Тейлора (Маклорена) некоторых элементарных функций*

Формула Маклорена – это формула Тейлора в случае, когда $x_0 = 0$.
Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано выглядит так:

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + o\left(x^n\right)}.$$

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $f(x) = e^x$.

Тогда $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$,

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$.

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)}, \text{ при } x \to 0.$$

Остаточный член в форме Лагранжа: $r_n(x) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$.

2) $f(x) = \text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Подставив $(-x)$ вместо x в разложение функции e^x, получим:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!} + o\left(x^n\right).$$

Беря полусумму этого разложения и разложения функции e^x, находим:

$$\boxed{\text{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)}, \text{ при } x \to 0.$$

3) $f(x) = \text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Беря полуразность разложения функций e^x и e^{-x}, находим:

$$\boxed{\text{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)}, \text{ при } x \to 0.$$

4) $f(x) = \sin x$.

Как было показано ранее, $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi \cdot n}{2}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$,

поэтому $f^{(n)}(0) = \sin\left(\dfrac{\pi \cdot n}{2}\right)$.

Если $n = 2k$, то $f^{(2k)}(0) = \sin(\pi \cdot k) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$;

если $n = 2k+1$, то $f^{(2k+1)}(0) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right) = (-1)^k$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Поэтому

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ..+ (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2k+2}\right)}.$$

Остаточный член в форме Лагранжа: $r_n(x) = \dfrac{\sin\left(c + \dfrac{\pi \cdot (n+1)}{2}\right)}{(n+1)!} x^n$.

5) $f(x) = \cos x$.

Как было доказано ранее, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi \cdot n}{2}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$,

поэтому $f^{(n)}(0) = \cos\left(\dfrac{\pi \cdot n}{2}\right)$.

Если $n = 2k$, то $f^{(2k)}(0) = \cos(\pi \cdot k) = (-1)^k$, $k = 0,1,2,\ldots$;

если $n = 2k+1$, то $f^{(2k+1)}(0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$.

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ..+ (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2k+1}\right)}.$$

6) $f(x) = \ln(1+x)$.

Тогда $\quad f(0) = 0$;

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\quad f'(0) = 1$;

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $\quad f''(0) = -1$;

$f'''(x) = \dfrac{2!}{(1+x)^3}$, $\quad f'''(0) = 2$;

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{3!}{(1+x)^4}$, $\quad f^{(4)}(0) = -3!$;

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $\quad f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$

Подставляя эти значения в формулу Маклорена, получаем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{2!}{3!} \cdot x^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} \cdot x^n + o\left(x^n\right),$$

или

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)}.$$

7) $f(x) = (1+x)^\alpha$

Тогда $\quad f(0) = 1$;

$f'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$, $\quad f'(0) = \alpha$;

$f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (1+x)^{\alpha-2}$, $\quad f''(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1)$;

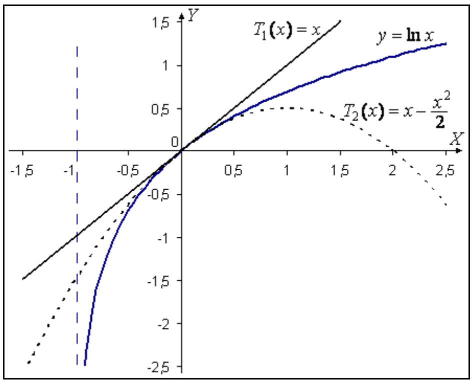
$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1+x)^{\alpha - n}$,

$f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)$.

Подставляя эти значения в формулу Маклорена, получаем:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)\ldots(\alpha + 1 - n)}{n!} \cdot x^n + o\left(x^n\right)}.$$

Пример 1. Разложить функцию $y = \ln(1+x)$ по формуле Маклорена. Изобразить на одном чертеже график функции и графики первых двух многочленов Тейлора.



Решение. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$.

Нарисуем график $y = \ln(1+x)$ и графики

многочленов $T_1(x) = x$ и $T_2(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$.

Многочлен Тейлора приближает функцию в окрестности точки x_0=0. Чем выше степень многочлена Тейлора, тем лучше приближение.

Пример 2. Разложить функцию $y = \sqrt{4+x}$ по степеням *x*.

Решение. Запишем функцию в виде $y = (4+x)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot(1+\frac{x}{4})^{\frac{1}{2}}$. Поскольку

$$(1+\frac{x}{4})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^n + o\left(x^n\right) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2^3} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^2}{2^6} + \frac{3!!}{3!}\cdot\frac{x^3}{2^9} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{n!}\cdot\frac{x^n}{2^{3n}} + o\left(x^n\right),$$

то $(4+x)^{\frac{1}{2}} = 2 + \dfrac{x}{2^2} - \dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{x^2}{2^5} + \dfrac{3!!}{3!}\cdot\dfrac{x^3}{2^8} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)!!}{n!}\cdot\dfrac{x^n}{2^{3n-1}} + o\left(x^n\right)$.

7.6. Приложения формулы Тейлора

Приближенные вычисления

Пример 1. Вычислить e с точностью до 0,001.

Решение. Поскольку $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + r_n(x)$, то при $x = 1$ получаем:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + r_n(1).$$

Используем формулу остаточного члена в форме Лагранжа $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$.

Тогда $r_n(1) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}$, где $0 < c < 1$. Отсюда $r_n(1) < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Для вычисления e с точностью до 0,001 нужно подобрать число *n* так, чтобы $r_n(1) < 0{,}001$, то есть $\dfrac{3}{(n+1)!} < \dfrac{1}{1000}$, или $(n+1)! > 3000$.

Так как $6! = 720$, $7! = 5040$, то можно взять $n = 6$. Итак, для вычисления e с заданной точностью 0,001 достаточно взять в разложении слагаемые с нулевого до шестого:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2\frac{517}{720} = 2{,}7180\ldots.$$

Итак, $e = 2{,}718 \pm 0{,}001$ (это согласуется с известным значением $e = 2{,}718281828...$).

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Применим готовое разложение функции $\sin x$ по формуле Маклорена:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x + \dfrac{x^3}{3!} - o\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{6} - o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)\right)^2 - x^2}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \dfrac{x^4}{3} + o\left(x^4\right) - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

Пример 4. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) - x\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \ln\left(1 + \left(-x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + \left(-x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) - \dfrac{\left(-x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^2}{2} + \dfrac{\left(-x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^3}{3}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

§8. Исследование функций с помощью производной

8.1. Условия постоянства функции на промежутке

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X, и в каждой внутренней точке этого промежутка существует конечная производная. Тогда функция $f(x)$ постоянна на X тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в любой внутренней точке промежутка X

(то есть $\forall x \in X\ f(x)=C \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{X}\ f'(x)=0$, где $\overset{\circ}{X}$ - множество внутренних точек X).

Доказательство.

Необходимость ($\Rightarrow$). По условию $f(x) = C$, а по уже доказанному производная от константы равна нулю.

Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $a \in X$ – фиксированная точка из промежутка X. Возьмём произвольную точку x из X. Тогда на отрезке $[a,x]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому между точками a и x найдется такая точка c, что $f(x)-f(a)=f'(c)\cdot(x-a)$. Так как по условию $f'(c) = 0$, то $f(x)=f(a)\, \forall x \in X$. Таким образом, функция f постоянна на промежутке X, и ее значение равно $f(a)$. Ч.т.д. ■

Пример 1. Функция $y = \arcsin x + \arccos x$ определена на промежутке [-1; 1], непрерывна и дифференцируема как сумма двух дифференцируемых функций. Производная функции: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Значит, функция y постоянна, и равна, например, $y(0)$. Так как $y(0) = 0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$, то получаем известное равенство: $\boxed{\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}}$.

Пример 2. Пусть $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2} - \operatorname{arctg} x$.

Область определения функции: $D_y=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Тогда $y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{2(1-x^2)+2x\cdot 2x}{(1-x^2)^2}-\dfrac{1}{1+x^2}$. Преобразовав, получаем, что $y'=0$.

Значит, функция постоянна на каждом из трех промежутков области определения:

$$y=\begin{cases} C_1 & при \quad x<-1 \\ C_2 & при \quad -1<x<1 \\ C_3 & при \quad x>1 \end{cases}.$$

Вычислив значения y в произвольной точке каждого из этих промежутков (например, $y(-\sqrt{3})=\pi/2$, $y(0)=0$, и $y(\sqrt{3})=-\pi/2$), находим:

$$y=\begin{cases} \pi/2 & при \quad x<-1 \\ 0 & при \quad -1<x<1 \\ -\pi/2 & при \quad x>1 \end{cases}.$$

8.2. Условия монотонности функции на промежутке

Теорема 1. (*Критерий нестрогой монотонности*.)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X, дифференцируема в любой точке внутренности $\overset{\circ}{X}$ этого промежутка. Тогда $f(x)$ – неубывающая на X $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \overset{\circ}{X}\quad f'(x)\geq 0$.

Доказательство.

Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть x – произвольная внутренняя точка из X. Тогда, по определению производной, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Так как $f(x)$ – неубывающая, то приращение $f(x+\Delta x)-f(x)$ будет $\left\{\begin{matrix} \le 0 & при & x<0, \\ \ge 0 & при & x>0 \end{matrix}\right\}$.

Поэтому $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ge 0 \ \ \forall x\ne 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем $f'(x)\ge 0$. Ч.т.д.

Достаточность ($\Leftarrow$). Возьмём любые две точки $x_1, x_2\in X$, такие что $x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому существует точка $c\in(x_1, x_2)$, такая что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Так как $f'(c) \ge 0$, и $(x_2 - x_1) \ge 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$. Следовательно, $f(x_1) \le f(x_2)$ для любых $x_1, x_2\in X$, таких что $x_1 < x_2$. Значит, по определению, функция неубывающая. Ч.т.д. ■

Теорема 2. (***Критерий строгой монотонности.***)
Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке X, дифференцируема на $\mathring{X}$.
Тогда $f(x)$ строго возрастет $\Leftrightarrow$ 1) $\forall x\in \mathring{X} \ \ f'(x)\ge 0$,
2) множество решений уравнения $f'(x)=0$ не содержит интервалов.

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).
1) Если f строго возрастает, то она, тем более, является неубывающей. Значит, по предыдущей теореме 1, $\forall x\in \mathring{X} \ \ f'(x)\ge 0$.
2) Покажем теперь, от противного, что множество решений уравнения $f'(x)=0$ не содержит интервалов. Если это множество содержит интервал (a,b), где $a<b$, то $\forall x\in(a,b) \ \ f'(x)=0$. Тогда, из условия постоянства функции на промежутке, f постоянна на $[a, b]$. А это противоречит ее строгому возрастанию.

Достаточность ($\Leftarrow$). Так как $\forall x\in \mathring{X} \ \ f'(x)\ge 0$, то, по предыдущей теореме 1, $f(x)$ – неубывающая на X. Значит $\forall x_1, x_2\in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1)\le f(x_2)$. Покажем, что здесь возможно только строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Действительно, если $f(x_1) = f(x_2)$, то, в силу неубывания f, будет $\forall\ x_1 < x < x_2$ выполнено $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)=f(x_1)$. Значит, $f(x) \equiv f(x_1)$ на интервале (x_1, x_2), то есть $f'(x)=0$. Это противоречит условию теоремы. Следовательно, функция f строго возрастает. ■

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию $y = x^3$.
Решение. Производная $y'=3x^2\ge 0$. Множество решений уравнения $y'=0$ состоит из одной точки $x = 0$. Значит, функция $y= x^3$ – строго возрастающая.
Пример 2. Исследовать на монотонность функцию $y = x + \sin x$.
Решение. Производная $y'=1+\cos x\ge 0$. Она обращается в 0 лишь когда $\cos x = -1$, то есть в точках $x = \pi + 2\pi k$, $k\in \boldsymbol{N}$. Эти точки интервала не заполняют, значит функция $y = x + \sin x$ – строго возрастающая.

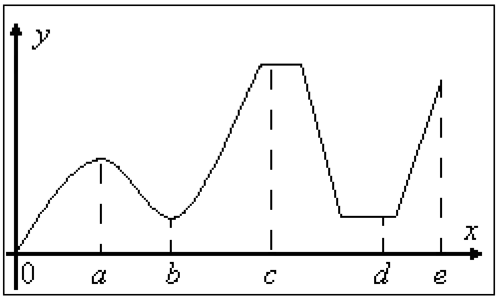
8.3. Экстремум функции

Определение. Пусть $f: X\to \mathbf{R}$. Точка $x_0\in X$ называется *точкой (нестрогого) локального максимума* функции f, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, такая что $\forall x\in U(x_0)$ $f(x)\le f(x_0)$. Соответственно, точка $x_0\in X$ называется *точкой (нестрогого) локального минимума* функции f, если $\exists U(x_0): \ \forall x\in U(x_0) \ \ f(x)\ge f(x_0)$.

Аналогично, точка $x_0 \in X$ называется *точкой строгого локального максимума* функции *f*, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, такая что $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$ $f(x) < f(x_0)$.
Соответственно, точка $x_0 \in X$ называется *точкой строгого локального минимума* функции *f*, если $\exists U(x_0): \forall x \in U(x_0)$ $f(x) > f(x_0)$.

Значение $f(x_0)$ функции f в точке локального максимума (или минимума) называется *локальным максимумом (или минимумом)*.

Точки локального максимума или минимума называются точками *экстремума.* Любой максимум или минимум называется *экстремумом.*



Пример. На рисунке:
0 и b – точки строгого локального минимума,
a и e – точки строгого локального максимума,
c – точка нестрогого локального максимума,
d – точка нестрогого локального минимума,
0 – точка наименьшего значения,
c – точка наибольшего значения.

Значения функции в точках максимума (минимума) не обязательно являются наибольшими (наименьшими) значениями функции. Наибольшие и наименьшие значения могут достигаться как внутри, так и на концах отрезка. Например, точки *a*, *b* и *d* на рисунке – точки локального экстремума, но не являются точками наибольшего или наименьшего значения.

Теорема (*необходимое условие экстремума*).
Пусть функция *f* определена и непрерывна в окрестности точки x_0. Тогда, если x_0 – точка максимума функции *f*, то $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Замечание. Здесь имеется в виду, что не существует конечной производной, а бесконечная производная может существовать.

Доказательство теоремы. Если $f'(x_0)$ не существует, то теорема доказана.
Если же $f'(x_0)$ существует, в окрестности точки x_0 функция удовлетворяет условиям теоремы Ферма. Согласно этой теореме $f'(x_0)=0$. Ч.т.д. ■

Определение. Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума (т.е. производная либо равна нулю, либо не существует), называются *критическими точками функции.*

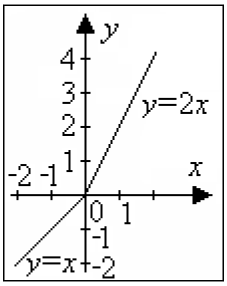
Определение. Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными точками функции.*

Замечание. Все стационарными точки функции являются, конечно, и критическими.

Пример 1. Для функции $y = x^2$ производная $y' = 2x$ обращается в ноль в точке $x = 0$. Эта точка является критической, стационарной, а также точкой минимума.

Пример 2. Для функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ производная не существует. Эта точка является критической, но не стационарной, а также точкой минимума.

Пример 3. Для функции $y = x^3$ производная $y' = 3x^2$ обращается в ноль в точке $x = 0$, но эта точка не является точкой экстремума.



Пример 4. Для функции $y' = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ (см. рис.) односторонние производные равны: $y'_-(0) = 1$, $y'_+(0) = 2$. Поэтому производная $y'(0)$ не существует.

Из двух последних примеров видно, что необходимое условие экстремума не является достаточным.

Теорема. (***Первое достаточное условие экстремума.***)

Пусть существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, такая что:

1. функция f определена и непрерывна в $U(x_0)$;
2. дифференцируема в $U(x_0)$, кроме, быть может, самой точки x_0.

Тогда:

1. если производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «–» (то есть $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) \ge 0$, и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) \le 0$), то x_0 - точка (нестрогого локального) максимума;
2. если производная в точке x_0 меняет знак с «–» на «+» (то есть $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) \le 0$, и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) \ge 0$), то x_0 – точка (нестрогого локального) минимума.

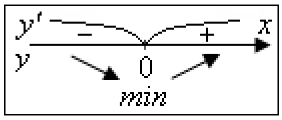
Доказательство проведем лишь для пункта 1), так как пункт 2) доказывается аналогично.
По критерию нестрогой монотонности функции:
так как $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) \ge 0$, то $f(x)$ – неубывающая на $(x_0 - \delta, x_0]$. Поэтому $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0]$ $f(x) \le f(x_0)$;
соответственно так как $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) \le 0$, то $f(x)$ – невозрастающая на $[x_0, x_0 + \delta)$. Поэтому $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \ge f(x)$.
Следовательно, $\forall x \in U(x_0)$ $f(x) \le f(x_0)$. По определению это значит, что x_0 – точка (нестрогого локального) максимума. Ч.т.д. ■

Итак, для того, чтобы найти точки экстремума, нужно:

I. найти точки, удовлетворяющие необходимому условию экстремума;
II. проверить для этих точек достаточное условие экстремума.

Пример 1. Исследовать функцию $y = |x|$ на экстремум.

Решение. Запишем производную этой функции: $y' = \begin{cases} -1, & при\, x < 0 \\ 1, & при\, x > 0 \\ не\ существует, & при\, x = 0 \end{cases}$. Поэтому $x = 0$ - единственная критическая точка функции.

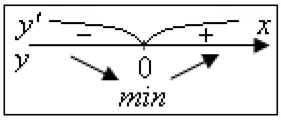


Изобразим знаки производной (см. рис.). В точке $x = 0$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x = 0$ - точка минимума.

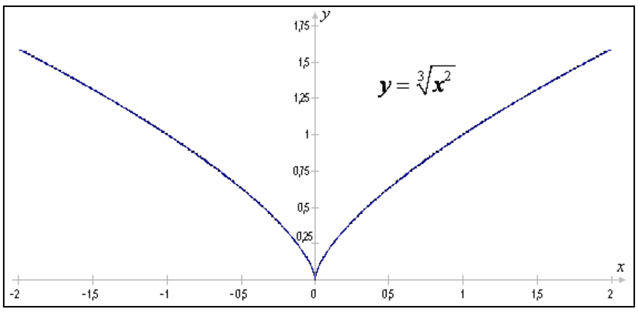
Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Вычислим производную: $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Найдем критические точки:

а) в ноль производная не обращается;
б) конечной производной не существует при $x = 0$. $y'(0) = \infty$, так как в этой точке знаменатель равен нулю.

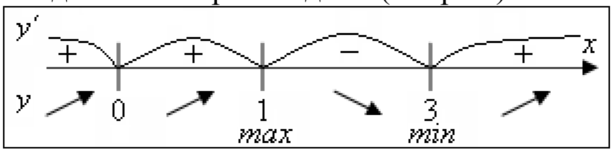


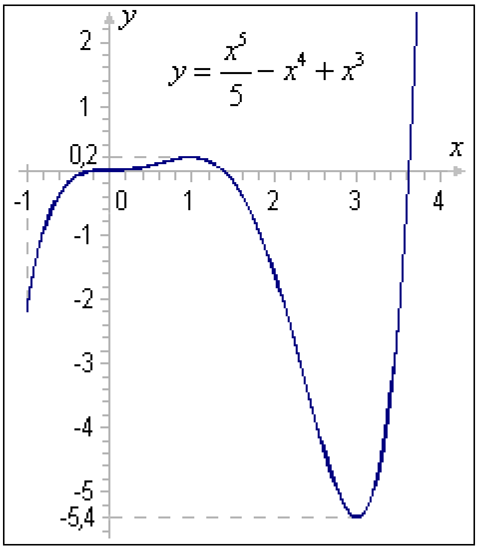
Итак, $x = 0$ - единственная критическая точка функции.
Изобразим знаки производной (см. рис.). В точке $x = 0$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x = 0$ - точка минимума. Бесконечная производная в точке означает, что в этой точке касательная к графику вертикальна. Так что при $x = 0$ касательная совпадает с осью OY.



Пример 3. Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$.

Решение. Вычислим производную: $y' = x^4 - 4x^3 + 3x^2$.
Приравнивая ее к нулю, получаем три стационарные точки: $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$.
Найдем знаки производной (см. рис.):





Отсюда видно, что $x = 1$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума.
Найдем значения функции в этих точках:
$y(1) = 0{,}2$, $y(3) = -5{,}4$.
Теперь можно схематически построить график функции (см. рис.).

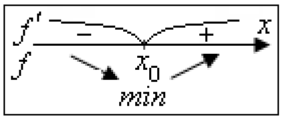
Теорема. (***Второе достаточное условие экстремума.***)
Пусть функция f определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, причем $f'(x_0) = 0$ (т.е. x_0 – стационарная точка).
Тогда

1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;
2. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Доказательство.
1) Пусть $f''(x_0) > 0$. Так как по условию $f'(x_0) = 0$, то

$$c = f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

По определению предела для $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что $\forall\ \Delta x: 0 < |\Delta x| < \delta$ выполнено неравенство $\left| \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} - c \right| < \varepsilon = \frac{c}{2}$. Значит $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > \frac{c}{2} > 0$ при $0 < |\Delta x| < \delta$. Поэтому: если $\Delta x < 0$ (слева от x_0), то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, а если $\Delta x > 0$ (справа от x_0), то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ (см. рис.).



Значит, по первому достаточному условию, x_0 – точка минимума функции f, так как в этой точке производная меняет знак с “–” на “+”.
2) Для случая $f''(x_0) < 0$ доказательство аналогично. ■

Теорема. (***Третье достаточное условие экстремума.***)
Пусть

1. функция f определена и $2n$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0;
2. $f'(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$;
3. $f^{(2n)}(x)$ непрерывна в точке x_0.

Тогда

1. если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка (строгого) минимума;
2. если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка (строгого) максимума.

Доказательство. 1) Пусть $f^{(2n)}(x_0) > 0$. По условию $f^{(2n)}(x)$ непрерывна в точке x_0, поэтому существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0, в которой также $f^{(2n)}(x) > 0$.
Выберем ε настолько малым, что $U_\varepsilon(x_0) \subset U(x_0) \cap V(x_0)$. В ε-окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ разложим функцию по формуле Тейлора порядка $2n$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x - x_0)^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n},$$

где c - промежуточная точка между x и x_0.
Поскольку в силу второго условия теоремы $f'(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, то отсюда получаем:

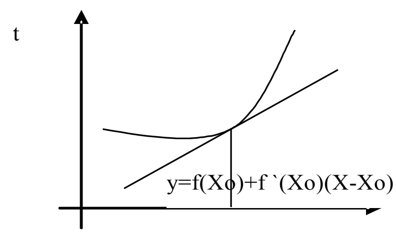
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!} \cdot (x - x_0)^{2n} \quad \text{при } x \in U_\varepsilon(x_0).$$

Поскольку $f^{(2n)}(c) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$ при $x \in U_\varepsilon(x_0)$, $x \neq x_0$. Следовательно, по определению, x_0 – точка (строгого) минимума.
2) Случай $f^{(2n)}(x_0) < 0$ доказывается аналогично. ■

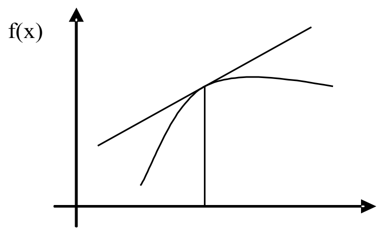
8.4. Выпуклость функции

Пусть функция f определена и на промежутке X, а также дифференцируема в любой его внутренней точке.

Определение. Функция, непрерывная на промежутке, и дифференцируемая в любой его внутренней точке, называется выпуклой вниз на этом промежутке, если в любой его внутренней точке касательная к графику лежит ниже самого графика на этом промежутке.
(То есть $\forall\, x_0 \in \overset{\circ}{X},\ \forall x \in X \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \le f(x)$.)



Определение. Функция, непрерывная на промежутке, и дифференцируемая в любой его внутренней точке, называется выпуклой вверх на этом промежутке, если в любой его внутренней точке касательная к графику лежит выше самого графика на этом промежутке.
(То есть $\forall\, x_0 \in \overset{\circ}{X},\ \forall x \in X \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ge f(x)$.)



Теорема. (*Первый критерий выпуклости функции на промежутке.*)
Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке X, а также дифференцируема в любой его внутренней точке. Тогда:
1) f выпукла вниз на $X \Leftrightarrow f'$ – неубывающая функция на $\overset{\circ}{X}$.
2) f выпукла вверх на $X \Leftrightarrow f'$ – невозрастающая функция на $\overset{\circ}{X}$.
Доказательство проведем только для первого пункта, так как второй пункт доказывается аналогично.
Необходимость ($\Rightarrow$). Надо доказать, что если f выпукла вниз, то f' – неубывающая (то есть $\forall\, x_1 < x_2 \quad f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$).
Возьмём точки $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{X}$, так что $x_1 < x_2$. Тогда по определению выпуклости выполнено:
$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ и $f(x_1) \ge f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$.
Складывая эти неравенства, получаем:
$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2) + (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1)$. После сокращения и деления на $(x_2 - x_1) > 0$, находим, что $f'(x_1) - f'(x_2) \leqslant 0$, или $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Ч.т.д.

Достаточность ($\Leftarrow$). Надо доказать, что если производная f' неубывающая, то f выпукла вниз, то есть $\forall x_0 \in \mathring{X}, \quad \forall x \in X \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Пусть, для определённости, $x_0 < x$. На отрезке $[x_0, x]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, из которой вытекает существование такого числа c, $x_0 < c < x$, что $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$.

Поскольку производная f' – неубывающая, то $f'(c) \geq f'(x_0)$.

Отсюда, так как $x - x_0 > 0$, получаем: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$, то есть $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ч.т.д.

Для $x_0 > x$ доказательство аналогично. ■

Теорема. (*Второй критерий выпуклости функции на промежутке.*)
Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке X, а также дважды дифференцируема в любой внутренней точке этого промежутка.

Тогда 1) f выпукла вниз на X $\Leftrightarrow \forall x \in \mathring{X} \quad f''(x) \geq 0$;

2) f выпукла вверх на X $\Leftrightarrow \forall x \in \mathring{X} \quad f''(x) \leq 0$.

Доказательство. По первому критерию выпуклости f – выпукла вниз на промежутке тогда и только тогда, когда $f'(x)$ – неубывающая. В то же время, по критерию нестрогой монотонности, $f'(x)$ – неубывающая $\Leftrightarrow$ $f''(x) = (f')'(x) \geq 0$. Ч.т.д. ■

8.5. Точки перегиба

Определение. Точка x_0 – называется *точкой перегиба функции* если функция определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, в левой части окрестности выпукла в одну сторону, а в правой - в другую.

Теорема (*Необходимое условие точки перегиба*).
Если x_0 – точка перегиба функции, то $f''(x_0)$ либо равно нулю, либо не существует.

Доказательство. Пусть в левой части окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функция f выпукла вниз, в правой – выпукла вверх. Тогда по первому критерию выпуклости производная f' является неубывающей при $x_0 - \delta < x < x_0$ и невозрастающей при $x_0 < x < x_0 + \delta$. Отсюда, если $f''(x_0)$ существует (а значит f' непрерывна в точке x_0), то f' в точке x_0 принимает наибольшее значение на промежутке $x_0 < x < x_0 + \delta$. Тогда, по теореме Ферма, $(f')'(x_0) = f''(x_0) = 0$. Ч.т.д. ■

Определение. *Критические точки второго рода* – это точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует конечной второй производной.
Определение. *Стационарные точки второго рода* – это точки, в которых вторая производная равна нулю.

Пример 1. $y = x^3$. Здесь $y'' = 6x$, $y''(0) = 0$. Поэтому $x = 0$ – стационарная точка второго рода. Она является и точкой перегиба.
Пример 2. $y = x^4$. Здесь $y'' = 12x^2$, $y''(0) = 0$. Поэтому $x = 0$ – стационарная точка второго рода. Но в этом примере она не является точкой перегиба.
Пример 3. $y = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$, $y''(0) = \infty$. Поэтому $x = 0$ – критическая точка второго рода. Здесь она является точкой перегиба.
Пример 4. $y = \sqrt[3]{x^2}$. Тогда $y'' = -\dfrac{4}{9\sqrt[3]{x^4}}$, $y''(0) = \infty$. Поэтому $x = 0$ – критическая точка

второго рода. В данном случае она не является точкой перегиба.

Теорема. (***Первое достаточное условие перегиба.***)
Пусть в некоторой проколотой окрестности точки x_0 существует вторая производная. Если в левой части этой окрестности вторая производная имеет один знак, а в правой – другой, то x_0 – точка перегиба.
Доказательство. Пусть, для определённости, в левой части окрестности $f''\geqslant 0$, а в правой $f''\leqslant 0$. Тогда в левой части окрестности функция выпукла вниз, а в правой - выпукла вверх. Значит в точке x_0 меняется направление выпуклости, то есть, согласно определению, x_0 – точка перегиба. Ч.т.д. ■

Теорема. (***Второе достаточное условие перегиба.***)
Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, $f''(x_0)=0$, и $\exists f'''(x_0)\neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба функции f.
Доказательство аналогично доказательству теоремы о втором достаточном условии экстремума. ■

Теорема. (***Третье достаточное условие точки перегиба.***)
Пусть в некоторой окрестности точки x_0 – существует производная $f^{(2n+1)}$, непрерывная в точке x_0, причем $f''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, а $f^{2n}(x_0)\neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба.
Доказательство аналогично доказательству теоремы о третьем достаточном условии экстремума. ■

8.6. Асимптоты функции

Асимптоты бывают двух типов – наклонные (в частности, горизонтальные) и вертикальные.
Определение. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* к графику $y = f(x)$ при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$.

При $k = 0$ наклонная асимптота становится горизонтальной, определение упрощается:
Определение. Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* к графику $y = f(x)$ при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

Наклонная и горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to\infty$ определяются аналогично.

Наклонные асимптоты характеризуют поведение графика при $x\to\pm\infty$. Следующая теорема говорит о том, как их искать при $x\to\infty$. Поиск асимптот при $x\to\pm\infty$ аналогичен.

Теорема. Прямая $y = kx+b$ - наклонная асимптота к графику $y = f(x)$ при $x\to\infty$ $\Leftrightarrow$
1) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\in\mathbf{R}$, и 2) $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)\in\mathbf{R}$.
Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$). 1) Пусть $y = kx + b$ - асимптота к графику $y = f(x)$ при $x\to\infty$. Тогда, по определению асимптоты, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Отсюда получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-kx-b}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0.\quad \text{Поэтому}\quad k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

2) Равенство $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ вытекает из определения асимптоты.

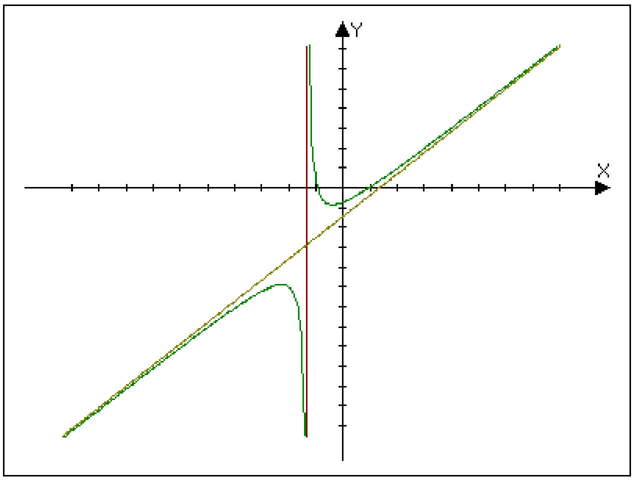
Достаточность ($\Leftarrow$). Если k – конечное действительное число, и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$, то тогда $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Значит, по определению, $y = kx + b$ – наклонная асимптота к графику $y=f(x)$. ■

Замечание. Так как коэффициенты k и b вычисляются однозначно, то при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ может быть не более чем по одной наклонной асимптоте.

Вертикальные асимптоты

Определение. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой к графику $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке a бесконечен, то есть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ (в частности $\pm\infty$), или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ (в частности $\pm\infty$).

Замечание. Из определения видно, что вертикальные асимптоты обязательно проходят через точки разрыва второго рода.



Пример 1. Найдите асимптоты к графику функции $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$ и схематически постройте его.

Решение.

1) Вертикальные асимптоты. Везде, кроме точки $x=-1$, функция непрерывна. Односторонние пределы в точке $x=-1$:

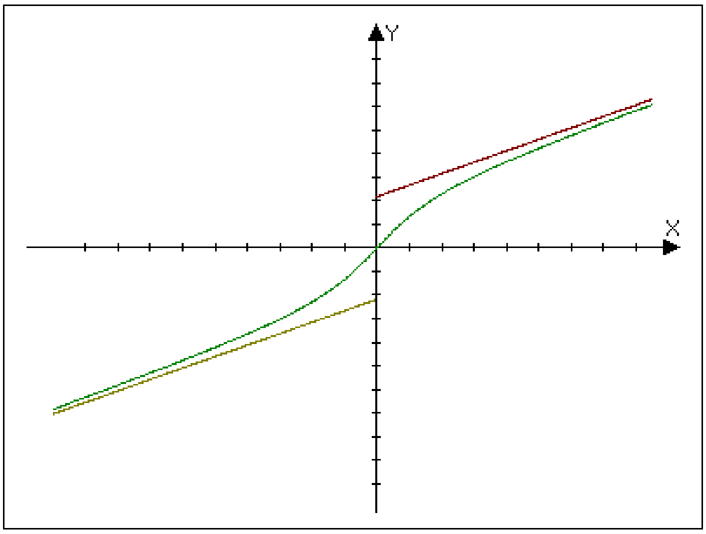
$$\lim_{x\to-1-0}\frac{2x^2-1}{x+1}=-\infty;\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{2x^2-1}{x+1}=+\infty.$$

Поэтому $x=-1$ – вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты: $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x(x+1)}=2,\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x+1}-2x\right)=-2.$$

Итак, наклонная асимптота при $x\to\infty$: $y=2x-2$.



Пример 2. Найдите асимптоты к графику функции $y=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg}x$ и схематически постройте его.

Решение.

1) Вертикальных асимптот нет, так как функция определена и непрерывна на всей прямой.

2) Найдем наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x/2+\operatorname{arctg}x}{x}=\dfrac{1}{2}$;

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x\right)=\pm\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$,

$y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}$ – наклонная асимптота при $x\to\ \infty$.

8.7. Полное исследование функции и построение её графика

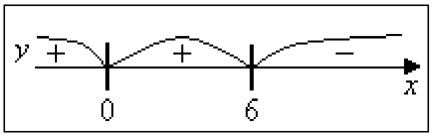
Схема исследования функции и построения её графика

1. Поиск области определения функции (ООФ).
2. Точки пересечения с осями и знаки функции.

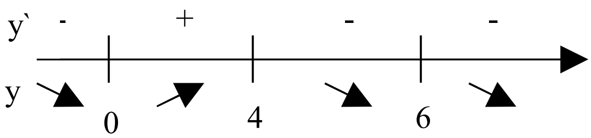
3. Чётность, нечётность, периодичность.
4. Асимптоты (вертикальные и наклонные).
5. Построение эскиза графика функции по проведенному исследованию.
6. Промежутки монотонности и точки экстремума с помощью первой производной.
7. Направления выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной.
8. Исследование поведения функции на границе области определения.
9. Дополнительные точки (по мере необходимости).
10. Построение графика функции по проведенному исследованию.

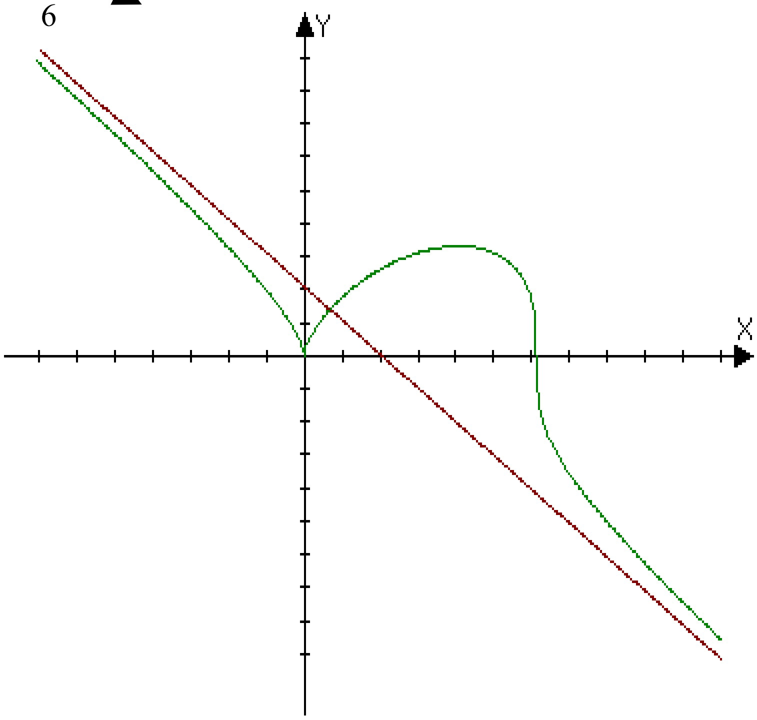
Пример. Проведите полное исследование функции $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ и постройте её график.

1. ООФ: $x \in \mathbf{R}$.
2. Точки пересечения с осями:
   с осью OX – точка (0,0), с осью $OУ$ – точка (6,0).
   Знаки функции см. на рис.



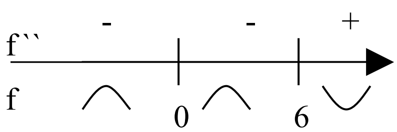
3. Функция общего вида (то есть не является ни чётной, ни нечётной, ни периодичной).
4. Вертикальных асимптот нет, так как функция непрерывна на всей прямой.
   Наклонные асимптоты: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{6}{x} - 1} = -1$;
   $b = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-x(\sqrt[3]{1-6/x} - 1)) = \lim\limits_{x\to\infty} (-x(1/3\cdot(-6/x))) = 2.$
   Поэтому наклонная асимптота: $y = -x + 2$.
5. Строим эскиз графика функции по проведенному исследованию.
6. $y' = \dfrac{12x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2(6-x))^2}} = \dfrac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$. Критические точки: $x = 0$, $x = 4$, $x = 6$.





$x = 0$ – точка минимума,
$x = 4$ – точка максимума.

7. $y'' = -\dfrac{8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}}$.



$y(0) = 0$, $y(4) \approx 3{,}2$, $y(6) = 0$.

Доказательство неравенств с помощью производной

Необходимо ввести функцию и с помощью производной исследовать её на монотонность.

Пример 1. Докажите неравенство $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ при $x\ge 0$.

Решение. Зададим функции $y_1=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$ и $y_2=x-\sin x$. Тогда $y_1(0)=y_2(0)=0$;

$y_1'=1-\frac{x^2}{2}-\cos x\le 0$, то есть y_1 убывает; $y_2'=1-\cos x\ge 0,$ то есть y_2 возрастает.

Отсюда $y_1=x-\frac{x^3}{6}-\sin x\le 0$, и $y_2=x-\sin x\ge 0$ при всех $x\ge 0$. Следовательно, искомое неравенство верно.

Пример 2. Докажите неравенство $\sin x+\operatorname{tg}x>2x$, $x\in(0,\pi/2)$.

Решение. Зададим функцию $f(x)=\sin x+\operatorname{tg}x-2x$. Тогда $f(0)=0$,

$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2=\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x-\cos x-1)}{\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)(\sin^2 x+\cos x)}{\cos^2 x}>0$ при $x\in(0,\pi/2)$. Поэтому на отрезке $[0,\pi/2]$ функция f строго возрастает. Значит при $x\in(0,\pi/2)$ $f(x)>f(0)=0$. ■

Наибольшее и наименьшее значения функции

1. $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) (то есть по теореме Вейерштрасса $f(x)$ – на этом отрезке достигает своего sup и inf)
2. вычисляем производную
3. находим критические точки (где производная равна нулю или не существует конечная)
4. из найденных критических точек, выбираем те, которые лежат внутри отрезка
5. считаем значения функции на концах отрезка и в отобранных точках
6. выбираем наибольшее и наименьшее значение

Пример 1. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in[-2,2]$.

Решение. $y'=5x^4-20x^3+15x^2$.

$5x^4-20x^3+15x^2=0.$

$5x^2(x^2-4x+3)=0.$

Корни: $x=0$, $x=1$, $x=3$. Значения функции: $y(0)=1$, $y(1)=2$, $y(2)=-7$, $y(-2)=-151$.

Ответ: $y_{наиб}=y(1)=2$, $y_{наим}=y(2)=-7$.

На практике часто функция задана на промежутке, где имеется одна критическая точка. Если это - точка максимума, то в этой точке функция принимает наибольшее значение, а если точка минимума, то в этой точке функция принимает наибольшее значение.

Пример 2. Дана электрическая цепь из двух сопротивлений R_1 и R_2 , соединённых параллельно. При каком значении отношения $\mathrm{R_1/R_2}$ сопротивление цепи максимально, если при последовательном соединении R_1 и R_2 общее сопротивление равно R?

Решение. $R_{парал}=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$. (1)

По условию $R=R_1+R_2$. Отсюда $R_2=R-R_1$. Подставим это выражение в (1) :

$R_{парал}=f(R_1)=\frac{R_1\cdot(R-R_1)}{R}$, $R_1\in(0,R)$.

Дифференцируя, получим: $f'(R_1)=\frac{R-2\mathrm{R}_1}{R}$. Если $f'(R_1)=0,$ то $R_1=\frac{R}{2}$.

При проверке окаывается, что, действительно, в точке $R_1=\frac{R}{2}$ достигается максимум функции $R_{парал} = f(R_1)$. При этом $R_2 = R - R_1 = \frac{R}{2}$.

Ответ: $R_1 = R_2 = \frac{R}{2}$.

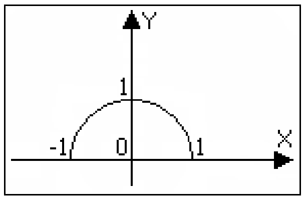
§9. Кривые на плоскости и в пространстве

9.1. Понятие кривой

Пусть x, y и z –действительные числа, элементы **R.** Тогда:
(x,y) – элемент (двумерной) плоскости $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$, т.е. $(x,y)\in \mathbf{R}^2$;
(x,y,z) – элемент (трехмерного) пространства $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^3$, т.е. $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$.
Будем рассматривать отображения из отрезка в $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$.

Определение. *Плоская кривая* – это отображение из отрезка $[a, b]$ в $\mathbf{R}^2$,
пространственная кривая – это отображение из отрезка $[a, b]$ в $\mathbf{R}^3$.
Образ этого отображения тоже называют кривой, а также линией.
Определение. Пусть $\gamma: [a,b]\to\mathbf{R}^3$ – некоторая кривая. Тогда $\forall t\in[a,b]$ $\gamma(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$. Функции $\{x=x(t)\ ,\ y=y(t),\ z=z(t)\}$, $t\in[a,b]$, называются *координатными функциями* или *параметрическими уравнениями*. Вектор $\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ называется также радиус-вектором кривой.

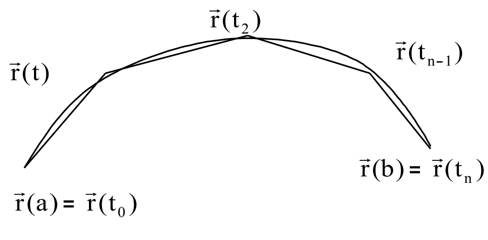
Для задания кривой надо указать отрезок изменения параметра и ее координатные функции (или радиус-вектор).
Одна и та же линия может быть задана различными способами.
Например, полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат задается уравнениями: $\left\{\begin{matrix} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{matrix}\right\}$, где $\varphi\in[0,\pi]$,
а также $y=\sqrt{1-x^2}$, где $x\in[-1,1]$.



Определения.
1) Кривая называется *замкнутой*, если её начало и конец совпадают, то есть $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$.
2) *Кривая непрерывна* на $[a, b]$ если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны на этом отрезке.
3) *Кривая дифференцируема* на $[a, b]$ – если $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы внутри $[a, b]$.
4) Кривая непрерывно-дифференцируема – если $\exists\ x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$ и они непрерывны.
5) $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)=\vec{r}\,'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$ – *касательный вектор* к кривой.
6) Точка $M=\vec{r}(t_0)$ кривой называется *особой*, если $\vec{r}\,'(t_0)=\vec{0}$.
7) Кривая называется *гладкой*, если она непрерывно-дифференцируема и не имеет особых точек.
8) *Кусочно-гладкая кривая* - это кривая, которую можно разбить на конечное число гладких кривых.

9.2. Понятие длины кривой и достаточное условие спрямляемости кривой

Пусть задана кривая $\gamma: [a,b]\to\mathbf{R}^3$. Разобьём отрезок $[a, b]$ на конечное число частей, задав разбиение $T: a=t_0<t_1<t_2...<t_n=b$.
Соединив точки разбиения кривой отрезками, получим ломаную, вписанную в кривую.
$L(T)$ – длина вписанной в кривую γ ломаной, соответствующей разбиению T,



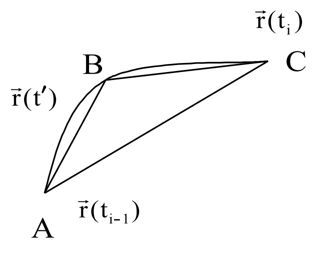
$$L(T)=\sum_{i=1}^{n}\left|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})\right|.$$

Пусть $\tau([a,b])$ – множество всех разбиений отрезка [a, b]. Разбиение отрезка [a, b] задает соответствующее разбиение на кривой.

Определение. *Длина кривой* – это точная верхняя грань длин вписанных ломаных (то есть длина кривой γ – это $L(\gamma)=\sup\limits_{T\in\tau([a,b])} L(T)$).

Если длина кривой конечна, то кривая называется *спрямляемой*.

Основное свойство длин вписанных ломаных



При измельчении разбиения длина ломаной не уменьшается, то есть чем мельче разбиение, тем ближе длина ломаной к длине кривой.

Доказательство. Если к разбиению T добавить одну точку $t'\in(t_{i-1}, t_i)$, то получим новое разбиение $T'=T\cup\{t'\}$. Тогда

$$L(T)-L(T')=|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})|-\left(|\vec{r}(t')-\vec{r}(t_{i-1})|+|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t')|\right).$$

Отсюда, так как по неравенству треугольника $AC\leqslant AB+BC$, то $L(T)\leqslant L(T')$.

Сумма двух кривых

Суммой двух кривых $\gamma_1(t)$, $t\in[a,b]$, и $\gamma_2(t)$, $t\in[b,c]$, называется кривая

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t)=\left\{\begin{matrix}\gamma_1(t) \text{ при } t\in[a,b]\\ \gamma_2(t) \text{ при } t\in[b,c]\end{matrix}\right\}.$$

Основное свойство длины кривой – аддитивность:

длина суммы двух кривых равна сумме длин этих кривых (то есть $L(\gamma_1+\gamma_2)=L(\gamma_1)+L(\gamma_2)$).

9.3. Натуральный параметр

В качестве параметра на кривой часто берут переменную длину дуги кривой. Такой параметр называется *натуральным*. Обычно он обозначается через s.

Теорема *(достаточное условие спрямляемости кривой).*

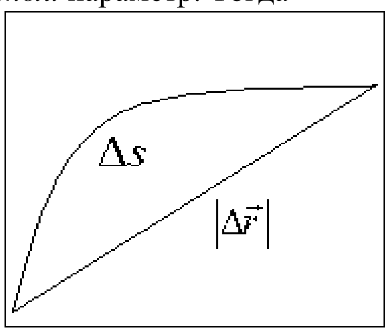
Если кривая γ непрерывно дифференцируема на [a, b], то:

1) γ – спрямляема на [a, b], то есть имеет конечную длину;
2) $\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$.

Без доказательства.

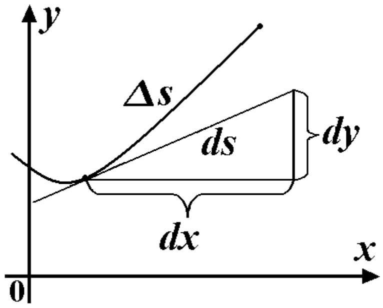
Эквивалентность бесконечно малых отрезков дуги, хорды и касательной

Пусть на непрерывно дифференцируемой кривой задан *натуральный* параметр. Тогда $\dfrac{ds}{dt}=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$, и $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$ (то есть $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}=1$, где Δs - длина участка кривой, $|\Delta\vec{r}|$ - длина хорды, стягивающей этот участок кривой.



Геометрический смысл: при малых длинах, длина отрезка кривой эквивалентна длине отрезка хорды, стягивающий этот участок: $\Delta s\sim|\Delta\vec{r}|$, или $\Delta s=|\Delta\vec{r}|+o(|\Delta\vec{r}|)$ при $|\Delta\vec{r}|\to 0$.

Рассмотрим случай плоской кривой.



Пусть плоская кривая γ задана уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t \in [a, b]$. Тогда $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$. Поэтому $ds^2 = \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right) dt^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Отсюда и из геометрического смысла dy следует, что ds - длина отрезка касательной. Согласно определению дифференциала, ds - главная линейная часть Δs, поэтому $\Delta s \sim ds$.

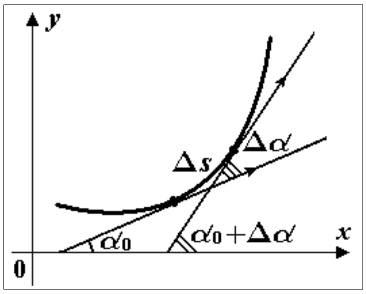
***Геометрический смысл*:** при малых длинах, длина отрезка кривой эквивалентна длине отрезка касательной, то есть длина отрезка кривой равна длине отрезка касательной с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

9.4. Кривизна кривой и радиус кривизны

Пусть γ - спрямляемая кривая. Введем на ней натуральным параметр s: $\gamma(s) = \vec{r}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, где $L = L(\gamma)$ длина кривой. Предположим, что при наделении натуральным параметром кривая γ дважды дифференцируема, и не имеет особых точек.

Обозначим через $\vec{\tau}$ касательный вектор к кривой: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$. Так как его длина $|\vec{\tau}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$, то $\vec{\tau}$ - единичный касательный вектор. Обозначим его угол наклона в точке s через $\alpha(s)$.

Чем быстрее меняется угол $\alpha(s)$, тем сильнее искривлена линия.



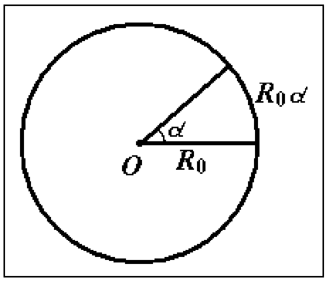
Определение. *Кривизна кривой* в точке - это абсолютная величина угловой скорости вращения единичного касательного вектора (то есть модуль производной α по s) :

$$k(s_0) = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}(s_0)\right|.$$

Определение. *Радиус кривизны кривой* в точке s_0 – это $R(s_0) = \dfrac{1}{k(s_0)}$.

Следующий пример показывает целесообразность такой терминологии.

Пример. Найдём кривизну и радиус кривизны окружности радиуса R_0.



Решение. Длина окружности $L=2\pi R_0$. Углу α соответствует дуга окружности длины $s = R_0\alpha$, отсюда $\alpha(s) = s/R_0$. Поэтому кривизна равна: $k(s_0) = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}(s_0)\right| = \dfrac{1}{R_0}$ - в каждой точке постоянна.

Радиус кривизны равен: $R(s_0) = \dfrac{1}{k(s_0)} = R_0$. Таким образом, радиус кривизны окружности совпадает с её радиусом. Чем больше радиус окружности, тем меньше кривизна, тем менее искривлена окружность. ■

9.5. Вычисление кривизны плоской кривой

1) ***Пусть кривая задана параметрически***: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$.

Тогда $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(x'(t), y'(t)\right)$, $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Поэтому

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt}=\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}},\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\right).$$

Если α - угол наклона вектора $\vec{\tau}$, то $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'(t)}{x'(t)}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Отсюда $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2}}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$.

Поэтому кривизна будет равна:

$k(s)=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\left|\frac{d\alpha}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}\right|=\frac{|y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)|}{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\Big/\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$, то есть

$$\boxed{k=\frac{|y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)|}{\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right)^{3/2}}}. \qquad (1)$$

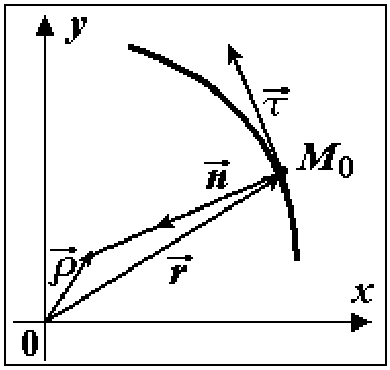
2) ***Пусть кривая задана явно***: $y=y(x)$, $x\in[a,b]$.
Это — частный случай параметрического задания, с параметром *x*.
Поэтому, согласно формуле (1), учитывая, что $x'=1, x''=0$, получаем:

$$\boxed{k=\frac{|y''(x)|}{\left(1+(y'(x))^2\right)^{3/2}}}.$$

9.6. Центр и круг кривизны. Эволюта и эвольвента

Пусть $\vec{\tau}$ - единичный касательный вектор к кривой γ, $\alpha(s)$ - угол его наклона в точке *s*. Тогда $\vec{\tau}=(\cos\alpha(s),\sin\alpha(s))$. Поэтому $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=(-\sin\alpha(s),\cos\alpha(s))\cdot\frac{d\alpha}{ds}=k(s)\cdot\vec{n}$, где $\vec{n}=\frac{1}{k(s)}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\pm(-\sin\alpha(s),\cos\alpha(s))$.

Как легко проверить, $\vec{n}\perp\vec{\tau}$, и $|\vec{n}|=1$. Поэтому вектор $\vec{n}$ называется *вектором главной нормали* в точке $M=\gamma(s)$.



Определение. *Центр кривизны кривой* в её точке М – это точка, расположенная на луче главной нормали, и отстоящая от точки М на расстояние радиуса кривизны.
Определение. *Круг кривизны кривой* в её точке *М* – это круг с центром в центре кривизны, и радиусом, равным радиусу кривизны.

Вывод. В малой окрестности точки *М* окружность, лучше всего приближающая кривую, является границей круга кривизны.

9.7. Формулы для координат центра кривизны

Пусть $\vec{\rho}=(\xi,\eta)$ - центр кривизны. Тогда:

1) ***если кривая задана параметрически***, то $\begin{cases}\xi= & x-y'\dfrac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}\\ \eta= & y+x'\dfrac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}\end{cases}$,

2) ***если кривая задана явно***, то $\left\{\begin{array}{ll}\xi = & x - y'\dfrac{1+(y')^2}{y''} \\ \eta = & y + \dfrac{1+(y')^2}{y''}\end{array}\right\}.$

9.8. Эволюта и эвольвента кривой

Определение. *Эволюта кривой* — это линия, состоящая из всех центров кривизны этой кривой. При этом данная кривая для своей эволюты называется *эвольвентой*.

Свойства эволюты и эвольвенты

1) Касательная к эволюте является нормалью к эвольвенте.
2) Приращение длины дуги эволюты равно приращению радиуса кривизны эвольвенты.

Пример 1. Найти кривизну и эволюту параболы $y=x^2$.
Решение.

а). Найдем кривизну по формуле $k = \dfrac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$, подставив сюда $y'=2x$, $y''=2$:

$k=\dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$. Отсюда получаем радиус кривизны: $R=\dfrac{1}{2}(1+4x^2)^{3/2}$.

б). Координаты центра кривизны вычисляются по формулам:

$$\left\{\begin{array}{lllll}\xi & = x-y'\dfrac{1+(y')^2}{y''} & = x-2x\dfrac{1+4x^2}{2} & = & -4x^3 \\ \eta & = y+\dfrac{1+(y')^2}{y''} & = x^2+\dfrac{1+4x^2}{2} & = & 1/2+3x^2\end{array}\right\}.$$

Это — параметрические уравнения эволюты. Исключая из системы параметр x, получим явное уравнение: $x=\sqrt[3]{-\dfrac{\xi}{4}}$, поэтому

$$\boxed{\eta=\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{\xi^2}.}$$

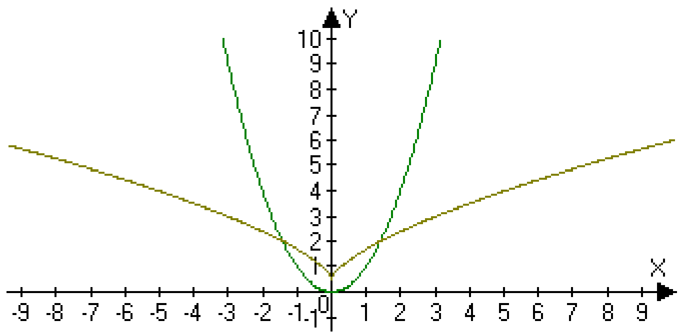


График эволюты изображен на одном чертеже с параболой.
В точке $M_0(0,0)$ кривизна равна 2, радиус кривизны равен 1/2, центр кривизны (0, 1/2). Геометрически это означает, что в малой окрестности точки M_0 парабола лучше всего (из всех окружностей) приближается окружностью $(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{1}{4}$. ■

Пример 2. Найти кривизну и эволюту эллипса $\left\{\begin{array}{l}x=a\cos t, \\ y=b\sin t.\end{array}\right\}$

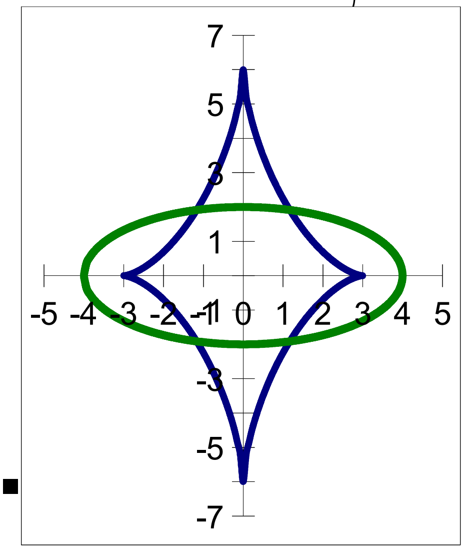
Решение. Воспользуемся формулой (1): $k = \dfrac{|y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)|}{\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right)^{3/2}}$.

Так как $\left\{\begin{array}{l}x'=-a\sin t \\ y'=b\cos t\end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{l}x''=-a\cos t \\ y''=-b\sin t\end{array}\right\}$, и

$y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t) = -a\sin t(-b\sin t) + a\cos t\, b\cos t = ab$, то $k = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$.

Координаты центра кривизны вычисляются по формулам:

$$\left\{\begin{array}{lllll}\xi & = x-y'\dfrac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'} & = a\cos t-b\cos t\,\dfrac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab} & = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \\ \eta & = y+x'\dfrac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'} & = b\sin t-a\sin t\,\dfrac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab} & = \dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\end{array}\right\}.$$



Это — параметрические уравнения эволюты. Для исключения из системы параметра t, преобразуем её:

$\left\{\begin{array}{ll}(a\xi)^{2/3} & = (a^2-b^2)^{2/3}\cos^2 t \\ (b\eta)^{2/3} & = (b^2-a^2)^{2/3}\sin^2 t\end{array}\right\}$, откуда, складывая уравнения, получаем неявное уравнение эволюты:

$(a\xi)^{2/3}+(b\eta)^{2/3}=(b^2-a^2)^{2/3}$ — это асторида.

Вершины астроиды:

при $\xi=0$ $\quad \eta=\pm\dfrac{a^2-b^2}{b}$;

при $\eta=0$ $\quad \xi=\pm\dfrac{a^2-b^2}{a}$.

Если $a=4$, $b=2$, то вершины астроиды: $(0,\pm 6)$, $(\pm 3,0)$. ■

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа. Т.1*. М. Дрофа. 2006 г.
2. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1*. М. Физматлит. 2007 г.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. *Математический анализ в вопросах и задачах*. М. Физматлит. 2002 г.