МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение
высшего образования**
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.В. Круглов
Ю.А. Кузнецов
Е.А. Таланова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАК ИНСТРУМЕНТ ЭКОНОМИСТА

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института
экономики и предпринимательства для студентов
ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
38.03.01 «Экономика» (бакалавриат)

Нижний Новгород
2020

УДК 517
ББК В16
К 84

К 84 Круглов Е.В., Кузнецов Ю.А., Таланова Е.А. Математический анализ как инструмент экономиста: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 56 с.

Рецензент: к.ф.-м.н. Капитанов Д. В.

Учебное пособие представляет собой руководство по курсу «Математический анализ» для студентов института экономики и предпринимательства ННГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.01 «Экономика»

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
института экономики и предпринимательства ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В.

УДК 517
ББК В16

Содержание

Введение

В предлагаемом учебно-методическом пособии анализируются различные разделы математического анализа с точки зрения исследования экономики. Таким образом, пособие частично ликвидирует недостаток литературы, предметно ориентирующей обучающихся направления полготовки «Экономика» при изучении математического анализа. В пособии рассмотрены: применение производной при изложении понятия эластичности; использование определённого интеграла при формулировании модели управления запасами Вильсона; изложены начала теории потребительского выбора и теории производственных функций, основанных на дифференциальном исчислении функций нескольких переменных; рассматривается акселератор как сумма числового ряда; рассматриваются некоторые модели экономической динамики, использующие аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений. Данное пособие соответствует учебной программе дисциплины «Математический анализ», составленной в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению подготовки «Экономика». Пособие направлено на формирование компетенций ОПК-3 «Обладание способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы» и ПК-4 «Обладание способностью на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты».

1. Основные понятия математического анализ функции одной переменной

Математический анализ, иначе – исчисление бесконечно малых, иначе – дифференциальное и интегральное исчисление – раздел математики, изучающий функции и их свойства методами теории пределов. Достаточно хорошо известно, что функция – это некий закон, который ставит в соответствие элементам одного множества не более одного элемента другого множества. Понятие функции включает в себя весьма широкий спектр различных отображений, относящихся к различным областям естествознания и социальных наук. Так, функциями (времени, температуры и т.п.) являются результаты любых наблюдений, в том числе статистические данные. Таким образом, именно в экономике функции представлены весьма широко, следовательно, математический анализ лежит в основе любого экономического анализа.

Следуя А.Д. Мышкису [1], напомним понятие предела функции. А именно, пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к некоторому действительному числу a, называется число L, такое, что при бесконечном приближении аргумента к точке a на оси Ox значение функции бесконечно приближается к числу L на оси Oy (см. рис. 1.1).

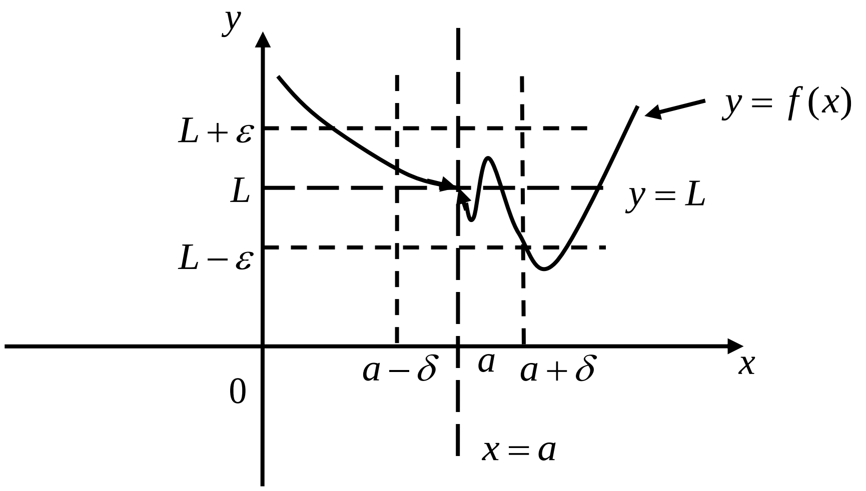


Рис. 1.1. Графическая иллюстрация понятия предела

Понятие предела является центральным в математическом анализе. Через него определяется подавляющее большинство объектов – производная, интеграл, сходимость ряда и т.п. Напомним необходимые для дальнейшего хорошо известные понятия производной и дифференциала функции одного переменного.

1.1. Производная. Пусть некоторая функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале (a,b) и $x_0 \in (a,b)$. Рассмотрим произвольную точку $x \in (a,b)$. Обозначим разность $x - x_0 = \Delta x$. Δx будем называть приращением независимой переменной x, а разность $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f$ – приращением функции $y=f(x)$, соответствующим приращению независимой переменной Δx (см. рис. 1.2). Приращение Δx является переменной величиной (отметим, что, в силу произвольности выбора x, разность $x-x_0=\Delta x$ может быть и отрицательной).

Определение 1.1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется ***производной*** функции $y=f(x)$.

Обозначения: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=\dfrac{df}{dx}$.

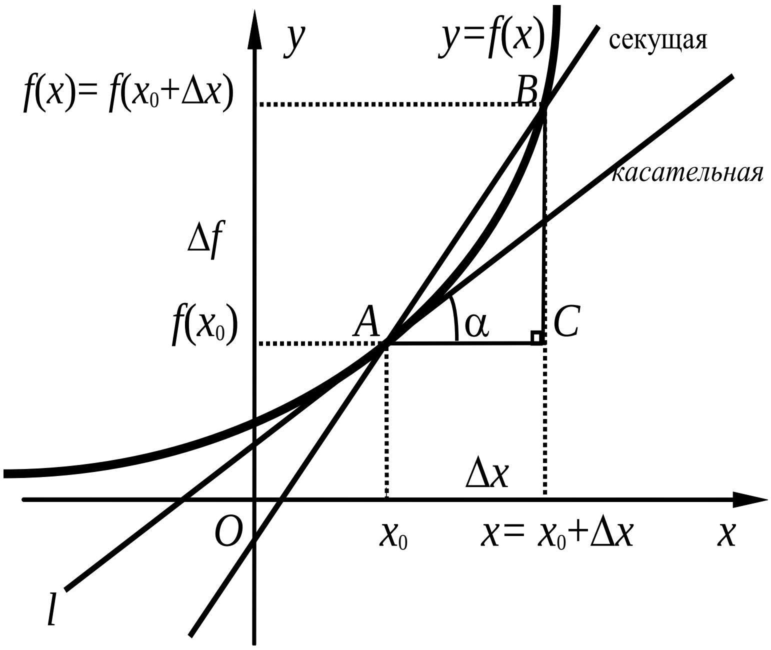


Рис. 1.2. Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной. На рисунке 1.2 изображен график функции $y=f(x)$. На оси Ox зафиксируем точку x_0; значением функции в этой точке будет $f(x_0)$. Пусть Δx - приращение независимой переменной в точке x_0; $x_0+\Delta x=x$; $f(x_0+\Delta x)$ - значение функции в точке $x_0+\Delta x=x$. Обозначим на рис.1.2 точки $A(x_0, f(x_0))$, $B(x, f(x_0+\Delta x))$, $C(x, f(x_0))$. Проведём секущую - прямую AB, пересекающую график функции в двух точках A и B, и рассмотрим треугольник ABC. В силу известных формул, определяющих соотношения в прямоугольном треугольнике, $\dfrac{BC}{AC}=\operatorname{tg}\hat{A}$. Но по построению $AC=\Delta x$, $BC=\Delta f$; поэтому $\operatorname{tg}\hat{A}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. В правой части последней формулы стоит то же выражение, что и под знаком предела в определении производной. Пусть $\Delta x\to 0$. Тогда на графике $B\to A$; секущая AB в пределе превращается в касательную l, а тангенс угла A между секущей и положительным направлением горизонтальной оси – в тангенс угла α между касательной и положительным направлением горизонтальной оси:

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Диаграмма 1.1.

Таким образом, **производная функции в точке равна** x_0 **равна тангенсу угла наклона касательной (к положительному направлению оси *Ox*), проведённой к графику функции в точке** $A(x_0, f(x_0))$.

В механике доказывается, что при неравномерном прямолинейном движении производная от перемещения, зависящего от времени, есть мгновенная скорость. Отсюда можно сделать вывод, что производная есть скорость изменения функции, и в этом её огромное значение. Любой процесс, происходящий в любой сфере бытия, в том числе и в экономике, можно интерпретировать как функцию времени, тогда производная от этой функции есть скорость этого процесса. Однако есть и другие интерпретации и применения понятия производной в экономике, и одно из наиболее важных – понятие эластичности.

1.2. Эластичность функции [2], [3]**.** Скорость изменения функции, то есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента, зависит от выбора единиц измерения. Этим данный показатель и неудобен в экономике. Например, если рассмотреть функцию изменения спроса на что-либо, например, муки, нетрудно увидеть, что значение производной от этой функции при каждой цене p зависит от того, измеряется ли спрос на муку в килограммах или, например, в тоннах. Значение производной при одном и том же значении цены будет измеряться, соответственно, в кг/руб. или в т/руб., следовательно, будет различаться в зависимости от единиц измерения величины спроса. Поэтому для измерения чувствительности изменения функции к изменению независимого переменного в экономике изучают связь относительных изменений.

Определение 1.2. Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных изменений переменных x и y:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{\frac{y}{x}} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{Mf}{Af},$$

где Mf - маржинальное (предельное) значение функции f в точке x, Af - среднее значение функции f в точке x. Эту эластичность также называют предельной или точечной.

Существует другая форма записи эластичности, а именно, эластичность есть отношение дифференциалов переменных y и x:

$$E_x(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{y}dy}{\frac{1}{x}dx}=\frac{d\ln y}{d\ln x}.$$

Геометрический смысл эластичности (правило Маршалла).

1. Случай убывающей функции. Пусть функция $y=f(x)$ $(x>0,\ y>0)$ такова, что $f'(x)<0,\ f''(x)>0$ (см. рис. 1.4). В некоторой произвольной точке $C(x,y)$ проведём касательную к графику функции. В силу геометрического смысла производная функции в точке C $f'(x)=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. Рассмотрим треугольник ACX; в этом треугольнике $\operatorname{tg}\alpha=\frac{CX}{AX}$, то есть $AX=\frac{CX}{\operatorname{tg}\alpha}$. Т.к. $CX=f(x),\ \operatorname{tg}\alpha=-f'(x)$, то $AX=-\frac{f(x)}{f'(x)}$.

Рассмотрим треугольники ACX и CBY, они образованы параллельными прямыми, и, следовательно, подобны, что означает пропорциональность сторон этих треугольников: $\frac{CB}{CA}=\frac{CY}{AX}$. $CY=OX\ \Rightarrow\ \frac{CB}{CA}=\frac{OX}{AX}=\frac{x}{-\frac{f(x)}{f'(x)}}=-\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}=-E_x(y)$.

Итак, $E_x(y)=-\frac{CB}{CA}$.

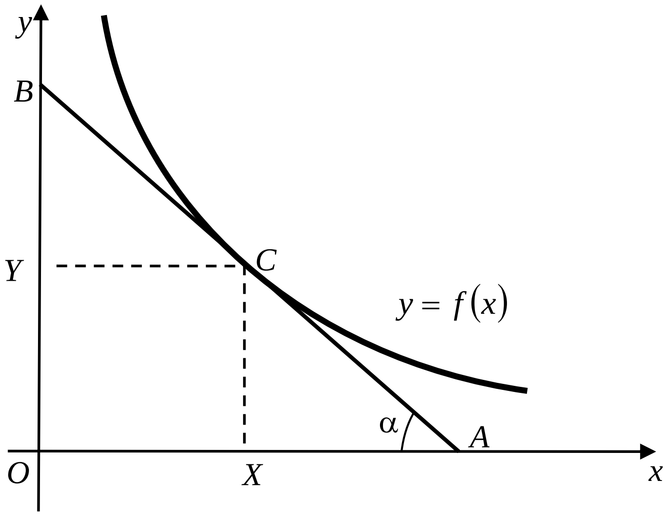


Рис. 1.4. Геометрический смысл эластичности (случай убывающей функции)

Эластичность убывающей функции равна отношению длин отрезков касательной от точки касания до точек пересечения с вертикальной и горизонтальной осями соответственно, взятому со знаком минус. Отметим, что в рассматриваемом случае точки X и Y по разные стороны от точки касания.

2. Случай возрастающей функции. Пусть функция $y=f(x)$ $(x>0,\ y>0)$ возрастает (см. рис. 1.5). Нетрудно убедиться, что рассуждения, проведённые для убывающей функции, повторяются с точностью до знака. В отличие от

предыдущего случая угол между касательной и положительным направлением оси Ox острый, тангенс острого угла – величина положительная, поэтому $E_x(y)=\dfrac{CB}{CA}$. Таким образом, **эластичность убывающей функции равна отношению длин отрезков касательной от точки касания до точек пересечения с вертикальной и горизонтальной осями соответственно.** При этом в случае, когда возрастающая функция вогнута (или, в иной терминологии, выпукла вверх, $f''(x)<0$), $E_x(y)=\dfrac{CB}{CA}<1$; в случае, когда возрастающая функция выпукла (выпукла вниз, $f''(x)>0$), $E_x(y)=\dfrac{CB}{CA}>1$.

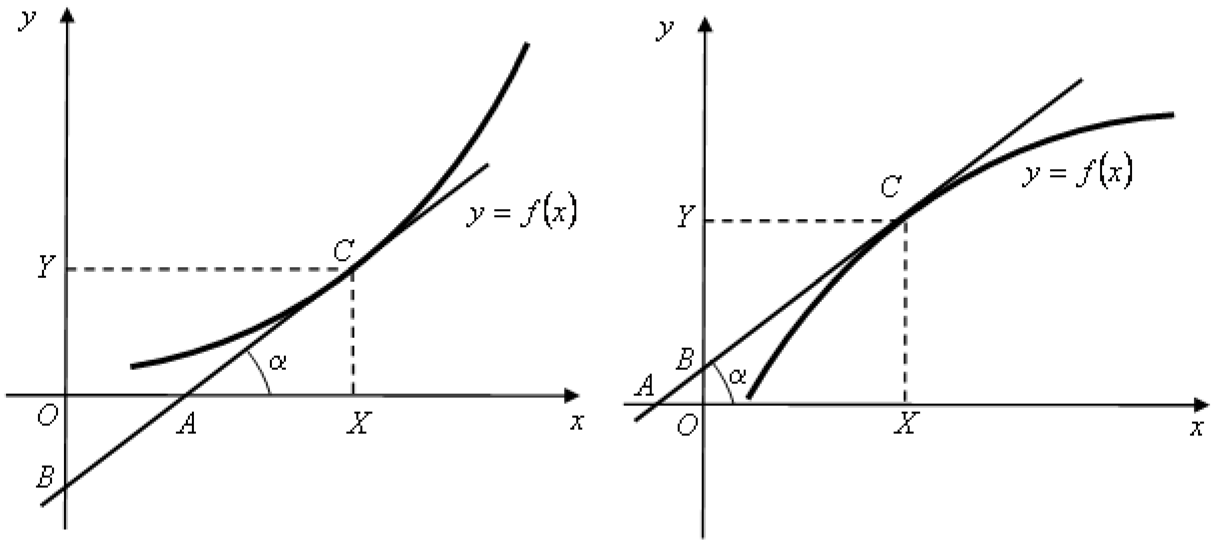


Рис. 1.5. Геометрический смысл эластичности (случай возрастающей функции)

1.3. Дифференциал. Из общей теории пределов следует, что если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$, то найдётся некоторая функция $y=\varphi(\Delta x)$, такая, что $\varphi(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\to} 0$ и $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\varphi(\Delta x)$. Умножая обе части последнего уравнения на Δx, получим: $\Delta f(\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\varphi(\Delta x)\cdot\Delta x$. Сумма, стоящая в правой части, состоит из двух слагаемых. Первое из них $f'(x_0)\cdot\Delta x$ называют главной линейной частью приращения функции $y=f(x)$. Присутствие в названии слов “главная” и “линейная” обусловлено в первую очередь потому, что в произведении $f'(x_0)\cdot\Delta x$ Δx входит в первой степени (линейность по Δx). Кроме того, второе слагаемое $\varphi(\Delta x)\cdot\Delta x$ представляет собой произведение двух функций, зависящих от Δx и стремящихся к нулю при $\Delta x\to 0$. Такое “двойное” стремление приводит к тому, что произведение $\varphi(\Delta x)\cdot\Delta x$ при малых Δx вносит меньший вклад в сумму, стоящую в правой части (2), чем первое слагаемое.

Определение 1.3. Главная линейная часть приращения функции $f'(x_0)\cdot\Delta x$ называется *дифференциалом функции* $y=f(x)$ и обозначается df. При этом входящее в дифференциал приращение независимой переменной Δx называется дифференциалом независимой переменной и обозначается $\Delta x = dx$.

Таким образом, $df(x_0)=f'(x_0)\cdot dx$.

Геометрический смысл дифференциала. Изучим ΔM_0QP на рис. 1.3. ΔM_0QP прямоугольный с прямым углом P; вершины имеют координаты $M_0(x_0, y_0)$, $Q(x,\ f(x_0+\Delta y^*))$, $P(x,\ y_0)$, где Δy^* - приращение ординаты касательной при данном приращении независимой переменной Δx; гипотенуза образована отрезком касательной. Из ΔM_0QP следует, что $\dfrac{QP}{M_0P}=\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Но по построению $M_0P=\Delta x = dx$, следовательно,

$$PQ = M_0P\operatorname{tg}\alpha = \Delta x\cdot f'(x_0) = f'(x_0)dx = df(x_0).$$

Таким образом, **дифференциал функции равен приращению ординаты касательной при данном приращении независимой переменной.**

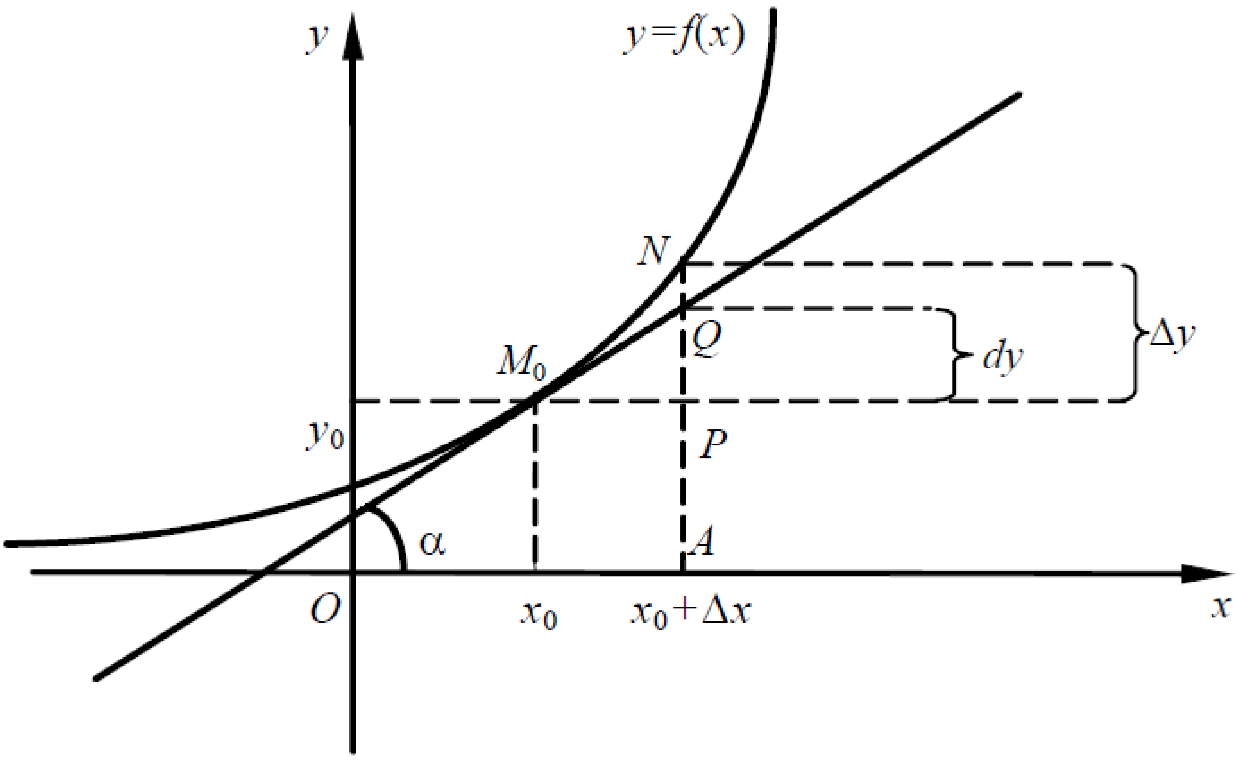


Рис. 1.3. Геометрический смысл дифференциала.

Классические теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной хорошо известны (см., например, [4]. Перечислим наиболее популярные из них.

1. Правило Лопиталя. Удобная теорема, применяемая для вычисления пределов при раскрытии неопределённостей типа $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2. Формула Тейлора, позволяющая при выполнении определённых условий (например, дифференцируемости функции до нужного порядка в точке разложения) с любой степенью точности представить функцию в окрестности точки в виде полинома, а полином, как известно, самая простая функция.

3. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши (теоремы о средних значениях дифференциального исчисления), позволяющие представить разность значений ограниченной функции, дифференцируемой на промежутке, через значение производной от этой функции в некоторой средней точке промежутка.

4. Необходимые и достаточные условия наличия точек экстремума и перегиба и теоремы, определяющие монотонность и направление выпуклости графика функции на различных промежутках. Это набор фактов (дополненный правилами поиска асимптот, следующими из теории пределов) позволяет качественно представить поведение практически любой дважды дифференцируемой функции и, соответственно, построить её график.

Ввиду того, что перечисленные факты в явном виде не используются в данном пособии, мы опускаем подробности, отсылая заинтересовавшегося читателя к учебной литературе.

Функции, заданные аналитически, широко применимы в экономической теории. В данном пособии в п.4 посвящен производственным функциям.

1.4. Интегрирование и интеграл. Операцией, обратной дифференцированию, является интегрирование. В интегральном исчислении функции одного переменного имеется два различных понятия, связанные с этой операцией. Первое понятие – неопределённый интеграл, который есть совокупность всех первообразных данной функции, т.е. совокупность всех функций, производные от которых равны данной функции:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$, C – произвольная постоянная. Второе понятие – определённый интеграл, или интеграл Римана (включая его расширение на интеграл по бесконечному промежутку, так называемый несобственный интеграл первого рода). Мир устроен так, что далеко не все элементарные функции имеют первообразные в классе элементарных функций. Достаточно привести примеры функций $y = e^{-x^2}$ или $y = \frac{\sin x}{x}$. Между тем, например, функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ как функция верхнего предела интегрирования (функция Лапласа) весьма популярна в теории вероятности в связи с широко известным нормальным распределением вероятностей непрерывной случайной величины. Именно значения функции Лапласа ищут в таблице, если хотят найти вероятность попадания значений нормально распределённой случайной величины в некоторый интервал значений. Это одно из свидетельств того, что операция интегрирования находится на качественно ином уровне сложности по сравнению с операцией дифференцирования; не существует простого и понятного свода инструкций (как в случае с вычислением производных), согласно которым, следуя четким указаниям, для любой функции можно было бы быстро и безошибочно найти первообразную. Неопределённый интеграл приходится вычислять при решении дифференциальных уравнений первого порядка, с помощью которых задаются модели динамики в любой науке, в том числе и в экономике. Этот же объект встречается нам и при вычислении определённого интеграла, или интеграла Римана, который определяется как предел так называемой интегральной суммы при условии, что некая величина, называемая мелкостью разбиения, стремится к нулю (подробнее см., например, [5] или любой другой учебник по интегральному исчислению функции одного переменного), а практически вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - одна из первообразных функции $y = f(x)$.

В учебниках математического анализа приводится много интерпретаций определённого интеграла; наиболее распространённая – площадь криволинейной трапеции. Предъявим его интерпретацию на примере *модели с экономическим содержанием*, а именно, *расчета стоимости хранения некоторой продукции на складе* [6].

1.5. Модель Вильсона управления запасами. Пусть $y(t)$ – функция, показывающая зависимость запаса продукции, хранящейся на складе, от времени t. Пусть s – плата за хранение на складе единицы продукции в единицу времени. Если функция $y(t)$ является постоянной, то плата за хранение объёма продукции, равного y, за время Δt, равняется $s \cdot y \cdot \Delta t$.

Положим, что функция $y(t)$ не является постоянной. Такая функция, скорее всего, будет кусочно-линейной или даже кусочно-постоянной (так как товары на склад чаще всего поставляются и вывозятся крупными партиями, например, автотранспортом, то есть единовременно большими объёмами). В таком случае расчеты по определению стоимости могут быть произведены элементарными методами [6]. Предположим, однако, что существует некий склад, на который продукция поступает и с которого её забирают по некоему конвейеру, то есть можно предположить, что процесс изменения объема продукции на складе – некоторая непрерывная или кусочно-непрерывная, но необязательно линейная, функция (рис. 1.6). Пусть время меняется на промежутке $[a, b]$. Рассмотрим, чему равна стоимость хранения продукции на складе в течение указанного времени.

Сделаем разбиение промежутка $[a, b]$ на n интервалов произвольной длины. Внутри каждого из интервалов возьмем точку $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$ соответственно. Рассмотрим i-ый промежуток полученного разбиения. Если время $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ достаточно мало, то можно считать, что функция $y = f(t)$ на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$ постоянна. Тогда стоимость хранения товара в течение этого временного промежутка примерно равна $s \cdot y(\xi_i) \cdot \Delta t_i$, а в течение всего временного интервала $[a, b]$ $s \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta t_i$. Выберем среди всех промежутков $[t_{i-1}, t_i]$ интервал наибольшей длины и разделим его на две произвольные части. Получим разбиение отрезка $[a, b]$ на $(n+1)$ промежутков. Интуитивно ясно, что, повторяя рассуждения, в пределе получим некоторую величину, являющейся искомой ценой.

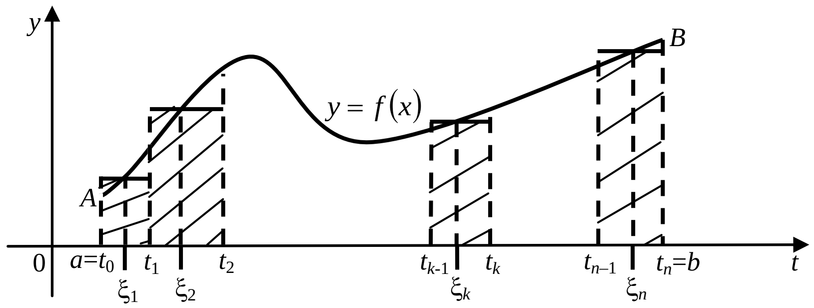


Рис. 1.6. Вычисление стоимости хранения продукции на складе.

Оформим наши рассуждения математически грамотно. Обозначим $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} (\Delta t_i)$ и будем называть эту величину мелкостью разбиения. Тогда $s \cdot \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta t_i$, где $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta t_i$ – интегральная сумма, есть стоимость хранения товара в течение временного промежуток $[a, b]$. Но по определению интеграла Римана $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta t_i = \int_a^b f(t) dt$. Поэтому в общем случае стоимость хранения товара на складе в сформулированных условиях равна $s \cdot \int_a^b f(t) dt$.

Замечание. Если мы хотим получить средние издержки хранения продукции за время, прошедшее с момента $t = a$ до времени $t = b$, мы должны рассмотреть величину $\frac{1}{b-a} s \cdot \int_a^b f(t) dt$.

2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

2.1. Функции двух переменных. Следуя [7], напомним основные понятия данного раздела математического анализа. В первую очередь остановимся на случае функции двух переменных.

Пусть дано некоторое множество D упорядоченных пар чисел (x,y). Геометрически его можно изобразить как множество точек $P(x,y)$ декартовой плоскости Oxy: отождествляем понятия «упорядоченная пара чисел (x,y)» и «точка $P(x,y)$ плоскости».

Определение 2.1. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых переменных x и y из некоторой области $D=\{(x,y)\}$ их изменения по некоторому правилу (закону) приводится в соответствие определённое значение z величины z, то говорят, что z есть *функция двух переменных* x и y; она обозначается символами $z=f(x,y), z=F(x,y),\ z=z(x,y)$ и т.д.

Величины x и y называются также *аргументами функции*, множество D – *областью* (*множеством*) *определения* или *областью задания* функции, а совокупность $Z=\{z\}=\{f(x,y)\}$ всех значений функции называется её *областью* (*множеством*) *изменения* или *областью значений.*

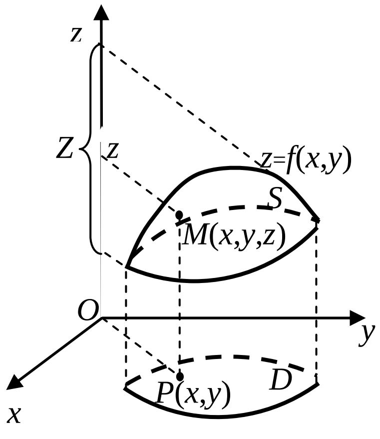
Очень удобными и плодотворными являются трактовка функции двух переменных как функции точек $P(x,y)$ плоскости и обозначение в форме $z=f(P)$: при этом используется терминология такая же, как и для функций одного переменного. Если функция задана аналитически, некоторой формулой $z=f(x,y)$, без оговорок об области задания, то за эту область принимают множество всех пар (x,y) (всех точек $P(x,y)$), для которых эта формула имеет смысл. Эту область задания называют областью существования или естественной областью определения.

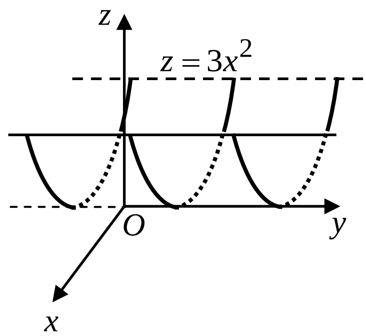
Примеры. 1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Область существования: $1-x^2-y^2\ge 0$, т.е. $x^2+y^2\le 1$ – это круг с центром в точке $O(0,0)$ радиуса 1 (включая границу – окружность $x^2+y^2=1$).

2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+5\sqrt[3]{y}$. Область существования – полуплоскость $x>0$.

3) $z=3\sqrt{x}-\dfrac{1}{y}$. Область определения $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ne 0\}$ – полуплоскость $x\ge 0$ без оси Ox.

Область *задания* функции, описывающей какой-либо процесс, может отличаться от естественной области определения. Например, формула площади прямоугольника $S=xy$ употребима лишь для $x>0$ и $y>0$, хотя сама функция определена на всей плоскости. Аналогично обстоит дело с функцией полезности, производственной функцией и т.д.





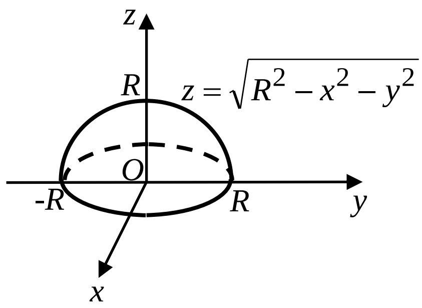


Рис.2.1.Произвольная поверхность Рис.2.2. $z = 3x^2$ Рис.2.3. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Геометрическое изображение функции двух переменных. Рассмотрим в пространстве декартову систему координат $Oxyz$, и пусть функция $z = f(x, y) \equiv f(P)$ определена на некотором куске D плоскости Oxy. Из точки $P(x, y) \in D$ восстановим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нём отложим отрезок, равный $z = f(x, y)$ (вверх – при $z > 0$, вниз – при $z < 0$). В пространстве получим точку $M(x, y, z)$. Когда точка $P(x, y)$ пробегает множество D, соответствующая точка M опишет в пространстве некоторое геометрическое место точек S, которое называется *поверхностью* (рис. 2.1). Эта поверхность S и служит геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$, её *графиком*. Говорят, что поверхность S *задана* уравнением $z = f(x, y)$. Так как функция однозначная, то каждая вертикаль пересекает поверхность S не более чем в одной точке. Говорят ещё, что функция двух переменных *отображает*, переводит плоскую область D в «искривлённую» поверхность S. Область изменения $Z = \{z\} = \{f(x, y)\}$ изобразится на оси Oz.

<u>Примеры</u>. 5) $z = 3x^2$ – параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy; направляющая – парабола $z = 3x^2$ в плоскости Oxz (рис. 2.2).

6) $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения.

7) $z = xy$ – гиперболический параболоид (седло).

8) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – верхняя часть конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

9) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – верхняя часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис. 2.3).

2.2. Понятие функции трёх и более переменных совершенно аналогично. Так, если значениями переменной u *управляют* тройки (x, y, z), то говорят о функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$ – её удобно трактовать как функцию $u = f(P)$ от точек $P(x, y, z)$ пространства $Oxyz$. Здесь область определения обычно – некоторое *тело*.

Также говорят о функциях n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Конечно, дать непосредственное геометрическое изображение функции трёх и вообще n переменных при $n \geq 3$ уже невозможно. Однако геометрический язык (терминология) сохраняется и в этих случаях.

2.3. Частные производные. Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Зафиксируем переменное y, тогда получим функцию одного переменного x. Её производная называется частной производной по x в данной точке (x, y) и обозначается символами $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x, y), z'_x(x, y)$. Аналогично, при условии фиксированного переменного x, определится частная производная по y. Она обозначается символами $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $z'_y(x, y)$, …. Таким образом, если $\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ есть *частные приращения* функции $f(x, y)$ в точке (x, y) соответственно по x и по y, то частные производные определятся как пределы $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}$. Отметим, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, как и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, есть *всегда единый, цельный, нераздельный символ – всегда не дробь*.

Поскольку определение частных производных такое же, как и для функций одного переменного, *то все правила дифференцирования сохраняются*.

Примеры. 1) $z = 3x^2 - xy$; $z'_x = 6x - y$, $z'_y = -x$.

2) $z = x^y$. Если $y = \text{const}$, то это есть степенная функция, и $z'_x = yx^{y-1}$, а в случае $x = \text{const}$ это показательная функция от y, и $z'_y = x^y \ln x$.

3) $z = \ln(x^2 - y^2)$; $z'_x = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}$, $z'_y = -\dfrac{2y}{x^2 - y^2}$.

2.4. Полное приращение функции. Дифференциал. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $P(x, y)$. Дадим числам x и y некоторые *приращения* Δx и Δy так, чтобы точка $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ принадлежала взятой окрестности точки $P(x, y)$. При переходе от точки P к точке P_1 функция изменится на величину $\Delta z = f(P_1) - f(P) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Величина Δz называется *полным приращением* функции в точке (x, y), соответствующим приращениям Δx и Δy аргументов. *Это есть функция приращений Δx и Δy при фиксированных x и y.*

Для непрерывной функции её приращение $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Нельзя ли Δz при малых Δx и Δy заменить *приближённо* бесконечно малой более простого вида? Иногда это возможно.

Определение 2.2. Функция $z=f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P(x,y)$, если её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$, где A и B не зависят от Δx *и* Δy, а $\alpha(\Delta x,\Delta y),\ \beta(\Delta x,\Delta y)\to 0$ при $\Delta x,\ \Delta y\to 0$.

При этом выражение $dz = A\Delta x + B\Delta y$ называется дифференциалом или полным дифференциалом функции в точке $P(x,y)$.

Теорема (необходимые условия дифференцируемости). *Если функция* $z=f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $P(x,y)$, *то она* 1) *непрерывна и* 2) *имеет в этой точке частные производные, причём в* (1.6) $A=\dfrac{\partial z}{\partial x},\ B=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Определение 2.3. *Дифференциалами независимых переменных* называют их приращения: $dx=\Delta x,\ dy=\Delta y$, и тогда дифференциал функции принимает вид $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Это есть формула для вычисления полного дифференциала функции; иногда его прямо так и определяют (если только функция дифференцируема).

Полагая $dy=0$ или $dx=0$, получим *частные дифференциалы* $d_x z=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx$ и $d_y z=\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

<u>Пример</u>. $z=3xe^{2y}$; $dz=3e^{2y}dx+6xe^{2y}dy$.

Все предыдущие понятия и факты имеют место для функций любого числа n переменных. Часто приходится иметь дело, например, с функциями трёх переменных.

Рассмотрим функцию $w=f(x,y,z)$. Её область определения есть некоторое множество $E=\{(x,y,z)\}$ точек трёхмерного пространства $Oxyz$, и её удобно трактовать как функцию $w=f(P)$ точек $P(x,y,z)\in E$. Для такой функции определяются три частные производные $\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}$, например,

$$\frac{\partial w(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}=\frac{dw(x,y_0,z_0)}{dx}\Big|_{x=x_0}\equiv\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}.$$

Функция трёх переменных *является* дифференцируемой в точке $P(x,y,z)$, когда её приращение Δw в этой точке представимо в виде

$$\Delta w\equiv f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)=\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z+\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – бесконечно малые функции от $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$, именно: $\alpha,\ \beta,\ \gamma\to 0$ при $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z\to 0$. Частные производные берутся в точке $P(x,y,z)$. (Так будет, в частности, когда они непрерывны.) При этом выражение $dw \equiv df(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$ называется дифференциалом, или полным дифференциалом, функции. Под дифференциалами независимых переменных понимают, как и ранее, их приращения: $dx \equiv \Delta x, dy \equiv \Delta y, dz \equiv \Delta z$.

2.5. Производная по направлению. Пусть дана функция, например, трёх переменных $u = u(P) = u(x,y,z)$. Частные производные u'_x, u'_y, u'_z определяют «скорость изменения» функции по направлениям осей Ox, Oy, Oz. Как определить аналогичную величину по любому заданному направлению $\vec{l}$?

Рассмотрим точку $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Проведём из неё полупрямую (луч), зададим её вектором $\vec{l}$. На ней возьмём точку $P(x,y,z)$ (рис. 2.4) и составим отношение $\frac{u(P)-u(P_0)}{P_0P}$ – это средняя скорость изменения функции на участке P_0P.

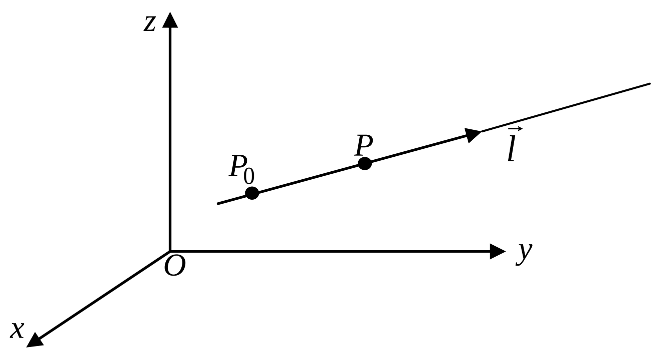


Рис. 2.4

Перейдём к пределу, когда $P \to P_0$ *вдоль луча.* Этот предел, если он существует, называется производной от функции u в точке P_0 по данному направлению и обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{P\to P_0}\frac{u(P)-u(P_0)}{P_0P} = \lim_{P\to P_0}\frac{u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)}{P_0P}. \qquad (2.1)$$

Это и есть *скорость изменения функции в точке* P_0 *по направлению* $\vec{l}$. По самому определению этот предел не зависит от выбора системы координат.

Найдём формулу для вычисления $\frac{\partial u}{\partial l}$. Предполагаем, что функция $u(x,y,z)$ дифференцируема в точке P_0. Обозначим α, β, γ углы, образуемые вектором $\vec{l}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно; пусть $\vec{l}$ – единичный вектор, тогда координаты его суть направляющие косинусы, т.е. $\vec{l} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$.

Обозначим расстояние $P_0P = t$. Вектор $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{l}$; с другой стороны, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$. Из равенства координат находим:

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\cos\beta,\ z = z_0 + t\cos\gamma.$$

Если t менять в пределах $0 \le t < \infty$, то это будут параметрические уравнения полупрямой P_0P. В точках этой полупрямой имеем

$$u(P) = u(x, y, z) = u(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) \equiv F(t),$$

и предел (2.1) запишется так:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(0)$$

– это есть производная функции $F(t)$ по переменному t в точке $t = 0$. Раскрывая её по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2.2)$$

Здесь производные берутся в исходной точке P_0 (полагали $t = 0$).

<u>Вывод</u>. Если функция $u(P)$ дифференцируема в точке P_0, то она имеет в этой точке производные по всем направлениям, и эти производные вычисляются по формуле (2.2).

Пусть, в частности, $\vec{l}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, так что $\alpha = 0,\ \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, $P(x, y_0, z_0)$ (изменяется только первая координата) и $P_0P = x - x_0 = \Delta x > 0$. Тогда как из соотношений (2.1)-(2.2) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial u}{\partial x};\ \text{так же}\ \frac{\partial u}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial u}{\partial y}\ \text{и}\ \frac{\partial u}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Таким образом, частные производные суть частные случаи производной по направлению.

Заметим, что производная по направлению $\vec{l}_1 = -\vec{l}$, обратному $\vec{l}$, отличается знаком: углы вектора $\vec{l}_1$ с осями координат есть $\alpha_1 = \pi + \alpha$, $\beta_1 = \pi + \beta$, $\gamma_1 = \pi + \gamma$, и тогда по формуле (2.2) найдём $\dfrac{\partial u}{\partial l_1} = -\dfrac{\partial u}{\partial l}$.

2.6. Градиент. Пусть дана функция $u = u(P) = u(x, y, z)$, дифференцируемая в точке $P(x, y, z)$. Поставим функции u в соответствие вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (2.3)$$

Он называется *градиентом функции* u в данной точке P.

Часто градиент записывают в виде $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u$, где символический вектор $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ называют: оператор пространственного дифференцирования, оператор Гамильтона, гамильтониан или просто вектор набла.

В точке P зададим направление

$$\vec{l} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}\,.$$

Используя градиент, формулу для вычисления производной по направлению $\vec{l}$ можно записать в виде скалярного произведения:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}\,). \qquad (2.4)$$

Пусть φ – угол между $\vec{l}$ и $\operatorname{grad} u$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}\,) = |\operatorname{grad} u| \cdot |\vec{l}\,| \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi = \text{пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} u\,. \qquad (3.2.5)$$

Итак, *производная* $\frac{\partial u}{\partial l}$ *функции* u *по направлению* $\vec{l}$ *равна проекции градиента на это направление* (рис. 2.5).

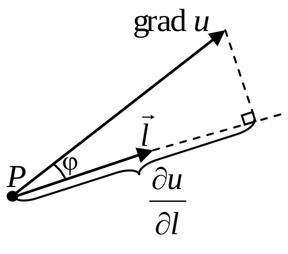


Рис. 2.5
Градиент и производная по направлению

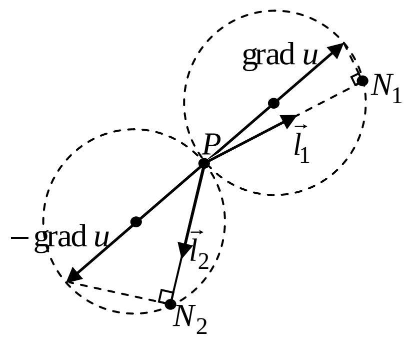


Рис. 2.6
Геометрический метод поиска производной по направлению.

Зная градиент, мы можем геометрическим путём найти производную по любому направлению. Например, на векторах $\operatorname{grad} u$ и $-\operatorname{grad} u$, как на диаметрах, построим окружности, касающиеся в точке P. Тогда (см. рис. 2.6) $\frac{\partial u}{\partial l_1} = PN_1 > 0$, $\frac{\partial u}{\partial l_2} = -PN_2 < 0$.

В силу (2.5) наибольшее значение $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ имеет, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. $\varphi = 0$.

Таким образом, *производная по направлению принимает наибольшее значение в направлении градиента, и оно равно модулю градиента:*

$$\max\frac{\partial u(P)}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial\, \mathrm{grad}\, u} = |\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,. \qquad (2.6)$$

Опираясь на (2.5) и (2.6), можно сформулировать *инвариантное определение градиента*, то есть определение, не зависящее от выбора системы координат. Именно:

Градиент скалярной величины u есть вектор, который направлен в сторону *быстрейшего возрастания* этой величины, причём его длина равна *значению производной* (т.е. *скорости возрастания*) величины u в указанном направлении.

<u>Пример</u>. $u = -3x^2y + yz$, $P(0,-1,4)$ и $P_1(1,1,2)$. Найти $\dfrac{\partial u(P)}{\partial PP_1}$.

Имеем:

$$\mathrm{grad}\, u = -6xy\vec{i} + (-3x^2 + z)\vec{j} + y\vec{k}\,,\ \mathrm{grad}\, u\,\Big|_P = 4\vec{j} - \vec{k}\,.$$

Этот вектор перпендикулярен оси Ox. $\overrightarrow{PP_1} = \{1,2,-2\}$, $\left|\overrightarrow{PP_1}\right| = 3$, $\vec{l} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$. Тогда $\dfrac{\partial u(P)}{\partial l} = (\mathrm{grad}\, u, \vec{l}) = 4\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} < |\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{17}$.

Заметим, что в силу последнего замечания направление градиента определяет наибольший рост функции, а противоположное ему направление – её наибольший спад. Поэтому данное понятие играет главную роль в решении оптимизационных задач, среди которых важнейшие задачи экономики, такие, как максимизация прибыли и минимизация расходов.

2.7. Поверхности уровня. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Множество точек пространства, в которых функция $u = u(P) = u(x, y, z)$ принимает постоянное значение C, образует так называемую *поверхность уровня* функции u (причём «*уровня C*»), именно, *уравнение этой поверхности* есть

$$u(x, y, z) = C\,,\ C = \mathrm{const}. \qquad (2.7)$$

Придавая C разные числовые значения, получаем однопараметрическое семейство поверхностей уровня с параметром C. Чтобы найти поверхность уровня, проходящую через данную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$, надо подставить координаты этой точки в уравнение (2.7) и найти C: $u(x_0, y_0, z_0) = C$; получим поверхность $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$.

На поверхности (2.7) возьмём фиксированную точку P, проведём через неё на поверхности какую-либо кривую Γ и на ней возьмём ещё точку P_1. Имеем

$$\frac{u(P_1)-u(P)}{PP_1}=\frac{C-C}{PP_1}=0.$$

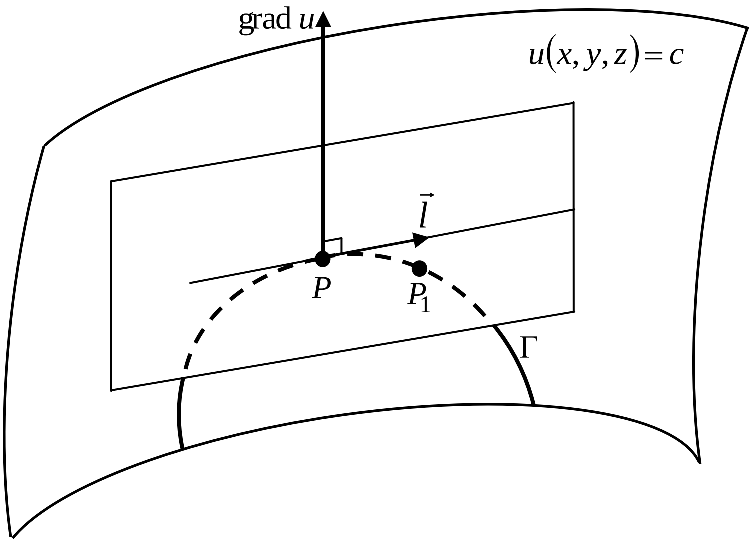


Рис. 2.7. Перпендикулярность градиента и касательной плоскости

Пусть $\vec{l}$ – единичный вектор касательной к кривой Γ в точке P (рис. 2.7). Переходя к пределу при $P_1 \to P$, получим $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$, значит, $(\mathrm{grad}\,u,\vec{l}\,)=0 \Rightarrow \mathrm{grad}\,u \perp \vec{l}$. При этом предполагаем, что $\mathrm{grad}\,u \neq 0$.

Вывод. Какую бы кривую через точку P на поверхности уровня ни провести, касательная к этой кривой окажется перпендикулярной градиенту.

Отсюда следует, что все эти касательные лежат в одной плоскости, – она называется *касательной плоскостью к поверхности уровня*.

Сам градиент направлен по *нормали* к этой плоскости, говорят: градиент направлен по нормали к поверхности, и, значит, *направление нормали к поверхности уровня есть направление наибольшего изменения функции*: возрастания – в сторону увеличения *C*, убывания – в сторону уменьшения *C*.

2.8. Производная по направлению и градиент функции двух переменных. Линии уровня. Рассмотрим функцию двух переменных $u=u(P)=u(x,y)$. Для неё остаются в силе определения, свойства и формулы для функции трех переменных; надо лишь положить $\dfrac{\partial u}{\partial z}\equiv 0$ и $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$. То есть теперь точки $P(x,y)$, направление $\vec{l}$, кривая *C* и градиент лежат в плоскости *Oxy* и $\mathrm{grad}\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$. Из точки $P(x,y)$ проводим единичный вектор $\vec{l}$. Пусть он образует с осями координат углы α и β; поскольку $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (рис. 2.8), имеем $\vec{l} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$. Из (2.2) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha = (\operatorname{grad} u, \vec{l}\,). \tag{2.8}$$

Геометрическое место точек (x, y), в которых $u(x, y) = C$, образует так называемую *линию уровня* (уровня C) функции $u = u(x, y)$; $\operatorname{grad} u$ направлен по нормали к линии уровня в сторону возрастания u, т.е. в сторону увеличения C. Часто, особенно в географии (поверхность – гора, высота над уровнем моря и т.п.), под линиями уровня понимают кривые, лежащие на поверхности $u = u(x, y)$ на заданной высоте C. Направление градиента на плоскости Oxy даёт направление наибольшего подъёма поверхности, а противоположное – наибыстрейшего спуска. На рисунке 2.9 стрелки указывают направление градиента. В точке $P_0(x_0, y_0)$, в которой $\frac{\partial u}{\partial x_0} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y_0} = 0,$ т.е. $\operatorname{grad} u(P_0) = 0,$ направление градиента не определено; на поверхности соответствующая точка A – седловина, точка перевала.

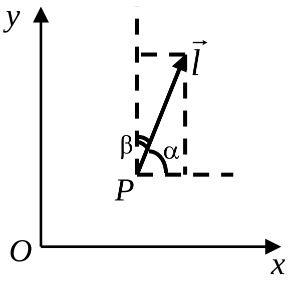


Рис. 2.8
Направление
на плоскости

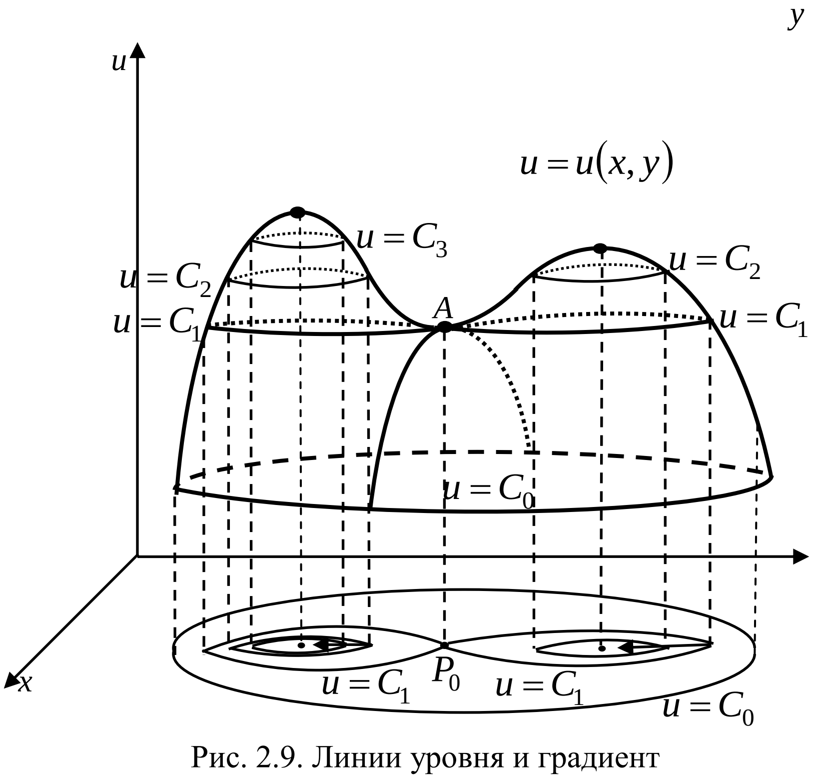


Рис. 2.9. Линии уровня и градиент

По той же схеме, что и для функции одного переменного $y = f(x)$, можем установить *геометрический смысл производной по направлению* для функции $u = u(x, y)$ двух переменных. На плоскости Oxy берём точку $P(x, y)$, из неё проводим направление $\vec{l}$. Поверхность $u = u(x, y)$ рассечём плоскостью, проходящей через направление $\vec{l}$ перпендикулярно плоскости Oxy. В сечении получим некоторую кривую. Угол наклона касательной к ней с направлением $\vec{l}$ в соответствующей точке $Q(x,y,u)$ поверхности обозначим через φ. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{tg}\varphi$. Это равенство выражает собою геометрический смысл производной по направлению, в том числе и частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ – когда направление $\vec{l}$ совпадает с направлением соответствующей оси.

Известно, что линии уровня функции полезности, зависящей от двух благ, в экономической теории называются кривыми безразличия; линии уровня двухфакторной производственной функции – изокванты. Задачи оптимизации, рассматриваемые в экономике, широко используют понятия градиента и антиградиента. В следующих пунктах, основываясь на изложенной теории, мы кратко рассмотрим теорию потребительского выбора и свойства функции полезности, а также изучим некоторые свойства производственных функций.

2.9. Экстремумы функций двух переменных. Говорят, что функция $z = f(P) = f(x,y)$, непрерывная в точке $P_0(x_0,y_0)$, имеет в этой точке максимум, равный $f(P_0)$, если существует окрестность точки P_0 такая, что для всех точек P этой окрестности выполняется неравенство $f(P) \le f(P_0)$, и имеет минимум, равный $f(P_0)$, если $f(P) \ge f(P_0)$. Если при $P \ne P_0$ имеют место строгие неравенства, то в точке P_0 имеется строгий (собственный) максимум или минимум. Максимум и минимум объединяет общий термин – экстремум (см. рис. 2.10, 2.11.) Понятие экстремума носит локальный характер, ибо берутся лишь точки P, достаточно близкие к точке P_0.

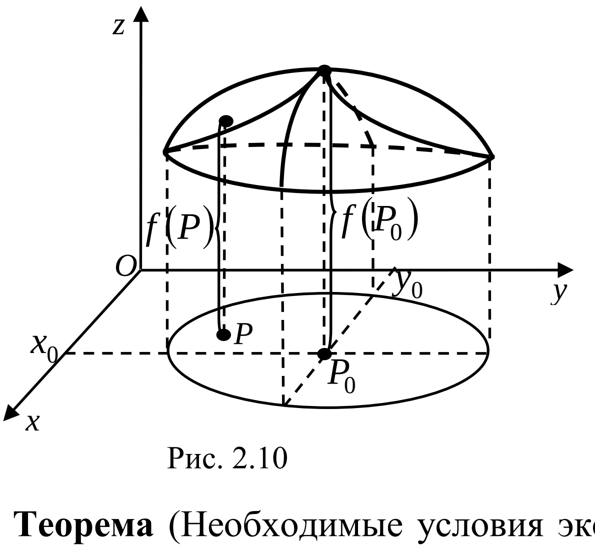


Рис. 2.10

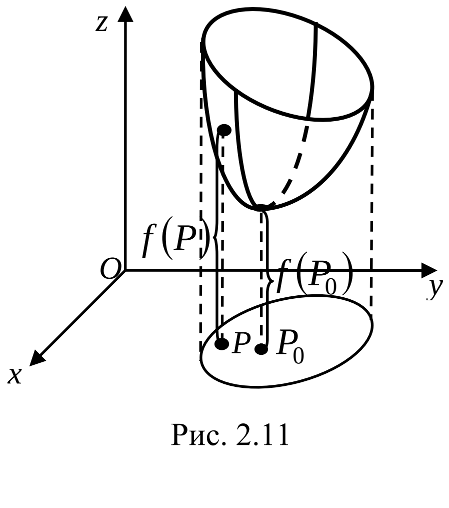


Рис. 2.11

Теорема (Необходимые условия экстремума). *Пусть* $P_0(x_0,y_0)$ *– точка экстремума функции* $z = f(x,y)$. *Тогда в этой точке каждая из частных производных* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *в отдельности либо обращается в нуль, либо не существует.*

Геометрический смысл теоремы отражен на рис. 2.10-2.11.

Точки $P_0(x_0, y_0)$, в которых каждая из производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ равна нулю или не существует, называются критическими или точками, подозрительными на экстремум. Экстремум может быть только в таких точка. В частности, точки, в которых обе производные равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, называются также стационарными. В этом случае, согласно геометрическому смыслу частных производных, касательные к кривым, полученным в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$, горизонтальны (параллельны плоскости Oxy, именно, осям Ox и Oy). Кроме того, замечаем, что дифференциал функции $f(x, y)$ в стационарной точке $P_0(x_0, y_0)$ тождественно (при любых dx, dy) равен нулю: $dz\big|_{P_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} \cdot dy \equiv 0$.

Примечание. В отличие от функции одного переменного, здесь термин «критическая точка» употребляем в общепринятом смысле.

Согласно теореме о необходимом условии экстремума, как и в соответствующей ситуации для функции одного переменного, экстремум *может быть* только в критических точках. Однако не в каждой критической точке экстремум существует. Например, для функции $z = xy$ точка $O(0,0)$ критическая (именно, стационарная) и $z(0,0) = 0$, но она не является точкой экстремума, так как в любой окрестности (какой бы малой она ни была) всегда есть точки, в которых $z > 0$ и в которых $z < 0$.

Теорема (Достаточные условия экстремума). *Пусть функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности стационарной точки $P_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим их (обозначения Монжа): $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Пусть, соответственно, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 – значения частных производных в точке P_0. Тогда:*

1) Если определитель $\begin{vmatrix} r_0 & s_0 \\ s_0 & t_0 \end{vmatrix} = r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, то в точке P_0 имеется экстремум, именно: максимум, если $r_0 < 0$, и минимум, если $r_0 > 0$;

2) если $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, то экстремума нет;

3) случай $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ является сомнительным.

2.10. Относительный (условный) экстремум. Ранее мы рассматривали экстремумы функции $z = f(x, y)$ считая, что x и y никакими условиями не связаны, т.е. являются независимыми переменными; сравнивали экстремальные значения $f(P_0)$ со *всеми* значениями $f(P)$ в точках P из некоторой *полной* окрестности точки P_0. В таких случаях экстремум называется *абсолютным* или *безусловным*.

Пусть теперь требуется найти экстремумы функции при условии, что переменные x и y связаны некоторым равенством $\varphi(x,y)=0$ – оно называется *уравнением связи*. Такие экстремумы *называются относительными* или *условными*. Геометрически это означает, что сравниваются между собой значения функции $f(x,y)$ лишь в точках линии $\varphi(x,y)=0$. На рис. 2.12 точка P_1 - точка абсолютного, а точка P_0 - условного максимума.

Итак, говорят, что функция $f(P)$ от n переменных имеет в точке P_0 условный максимум (минимум) при условии $\varphi(P)=0$, если для всех точек P, удовлетворяющих, вместе с P_0, уравнению связи $\varphi(P)=0$ и *достаточно близких* к P_0, будет выполняться неравенство $f(P)\le f(P_0)$ (неравенство $f(P)\ge f(P_0)$). Как и ранее, при выполнении строгого неравенства, при $P\ne P_0$, получаем строгий условный максимум (минимум). (Если $n\ge 3$, то уравнений связи может быть несколько).

Например, безусловный максимум функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ достигается в точке $O(0,0)$ и его значение $z\big|_{(0,0)}=R$; ему соответствует точка Q (см. рис. 2.12). Если же дано условие $y=a,\ |a|<R$, то $z=\sqrt{R^2-x^2-a^2}$ и относительный экстремум будет при $x=0$, т.е. в точке $P_0(0,a)$, и равен $z\big|_{P_0}=\sqrt{R^2-a^2}<R$; на поверхности ему соответствует точка Q_0.

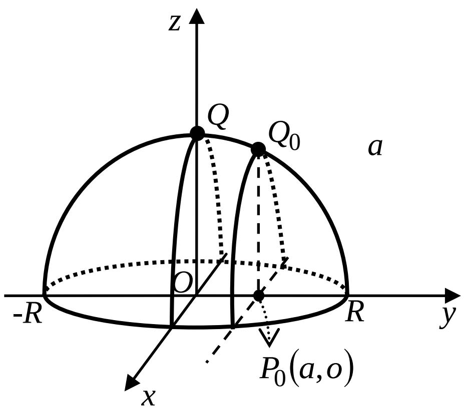


Рис. 2.12

Как найти точки условного экстремума функции $z=f(x,y)$? Есть два способа.

Допустим, что уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ можно разрешить в виде $y=y(x)$. Тогда в точках $P(x,y)$, удовлетворяющих уравнению связи, функция z принимает значения $z=f(x,y(x))\equiv F(x)$. В таком случае задача отыскания условного экстремума сводится к отысканию абсолютного экстремума сложной функции $F(x)$ одного переменного x. Однако, на практике этот метод не всегда удобен, ибо он требует фактического решения уравнения $\varphi(x,y)=0$ относительно какой-либо из переменных x или y, а это не всегда возможно, к тому же решение может быть многозначным. Лагранж предложил другой метод – он даёт необходимые условия относительного экстремума.

Метод неопределённых множителей Лагранжа. Пусть дана функция

$$z=f(x,y) \tag{2.9}$$

и дано уравнение связи

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{2.10}$$

и пусть функция $f(x, y)$ имеет условный экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$,

$$\varphi(x_0, y_0) = 0. \tag{2.11}$$

Найдём уравнения, которым удовлетворяют координаты точки P_0.

Будем предполагать, что *функции* $f(x, y)$ *и* $\varphi(x, y)$ *в окрестности точки* P_0 *имеют непрерывные частные производные и точка* P_0 *не является особой для кривой* (2.10), т.е. $\operatorname{grad}\varphi(P_0) \neq 0$, например, пусть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{P_0} \neq 0. \tag{2.12}$$

Тогда в некоторой окрестности точки P_0 уравнение (1.69) определяет однозначную дифференцируемую функцию $y = y(x)$. Будем считать, что её подставили в (2.9) и (2.10). При этом уравнение (2.10) становится тождеством (по x), а z – сложной функций от x, которая по условию имеет абсолютный экстремум в точке x_0. Тогда дифференциал этой функции в точке P_0 тождественно равен нулю $\forall dx$ и значит, в силу инвариантности формы дифференциала, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y_0} \cdot dy \equiv 0. \tag{2.13}$$

И также из тождества (2.10) находим в частности

$$d\varphi(x, y(x)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} \cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} \cdot dy \equiv 0. \tag{2.14}$$

Умножим равенство (2.14) на некоторое число λ и сложим с (2.13):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)dy \equiv 0.$$

Выберем λ так, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = 0; \tag{2.15}$$

такое число λ существует в силу условия (2.12). Но тогда, поскольку dx произвольное (т.к. x – независимое переменное) при таком λ получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = 0. \tag{2.16}$$

Эти же равенства получим, предполагая $\varphi'_x(P_0) \neq 0$.

Равенства (2.11), (2.15) и (2.16) означают, что точка (x_0, y_0, λ) является обязательно стационарной точкой функции трёх переменных

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \; – \tag{2.17}$$

она называется *функцией Лагранжа*.

Итак, получили

Правило 1. Чтобы найти точки $P_0(x_0, y_0)$, в которых только и возможен условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, надо

1) Составить функцию Лагранжа (2.17).

2) Найти её стационарные точки (x_0, y_0, λ), т.е. решить систему

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x, y) = 0.$$

3) Полученные точки (x_0, y_0) будут точками подозрительными на относительный экстремум.

Множитель λ отбрасывается – он играет вспомогательную роль.

Относительный экстремум возможен ещё и в точках, в которых заявленные выше условия не выполняются, например, в особых точках кривой (2.10), в её *угловых* точках.

Замечание. Достаточные условия сложны, их не рассматриваем – на практике о существовании условного экстремума в найденных стационарных точках часто догадываются из условий задачи геометрического, физического и т.п. характера.

В разделах 3 и 4 будут рассмотрены приложения материала, изложенного в разделе 2.

3. Элементарная теория потребительского выбора и функция полезности[1].

Покажем, как дифференциальное исчисление функции одного и нескольких переменных позволяют решать задачи максимизации полезности потребителя.

Назовем отношение R из множества A в A бинарным отношением. Бинарное отношение R рефлексивно, если $\forall a \in A$: aRa. Бинарное отношение R симметрично, если $\forall a,b \in A$ $(aRb \Leftrightarrow bRa)$. Бинарное отношение транзитивно, если $\forall a,b,c \in A$ $(aRb, bRc \Rightarrow aRc)$. Если отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то оно называется отношением эквивалентности. Отношение называется полным, если $\forall a,b \in A,\ a \neq b$: aRb или bRa.

Рассмотрим отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на множестве X, состоящем из потребительских наборов $\xi=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, является бинарным отношением на X в следующем смысле: $\xi \succcurlyeq \psi$ означает, что набор ξ не хуже, чем набор ψ.

Отношение безразличия ~ означает: $(\xi \sim \psi) \Leftrightarrow (\xi \succcurlyeq \psi)$ и $(\psi \succcurlyeq \xi)$ и читается: «Товар ξ индифферентен товару ψ», то есть потребителю все равно, какой из них выбрать. Отношение строгого предпочтения $\succ$ означает, что в случае, если $\xi \succ \psi$, товар ξ более (строго) предпочтителен, чем товар ψ.

Функция $u: X \to \mathbf{R}$ называется функцией полезности, представляющей отношение предпочтения $\succcurlyeq$, если $\xi \succcurlyeq \psi \Leftrightarrow u(\xi) \geq u(\psi)$.

Можно показать, что существует непрерывная функция, представляющая отношение $\succcurlyeq$. Будем называть её функцией полезности.

Рассмотрим математическую модель поведения потребителя, заключающуюся в выборе потребителем набора благ при наличии бюджета I. Цены благ считаются заданными; временные предпочтения потребителя не учитываются. Без ограничения общности для наглядности будем считать, что потребительские наборы состоят из двух благ $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^{++}$, где x_1 – количество единиц первого блага, x_2 – количество единиц второго блага, $\mathbf{R}^{++}$ – первый квадрант координатной плоскости. Таким образом, на множестве $\mathbf{R}^{++}$ задано отношение предпочтения, и существует функция полезности $u = u(x_1, x_2)$.

Функция полезности $u = u(x_1, x_2)$ обладает следующими свойствами:

1. Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведёт к росту потребительской оценки. Иначе говоря, функция полезности возрастает по каждому из своих переменных, то есть $u'_{x_1} > 0$, $u'_{x_2} > 0$. Величины u'_{x_1}, u'_{x_2} называются предельными полезностями, соответственно, первого и второго продуктов.

2. Закон убывания предельной полезности: предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объём его потребления растет. То есть вторые одноименные частные производные $u''_{x_1 x_1} < 0$, $u''_{x_2 x_2} < 0$.

[1] Изложение ведётся, главным образом, по источникам [2], [3].

3. Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта (количество фиксированного продукта в этом случае оказывается относительно дефицитным). Это означает, что смешанная производная от функции полезности $u''_{x_1x_2} > 0$ [2].

Линия, соединяющая наборы (x_1, x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется линией безразличия, и представляет собой не что иное, как *линии уровня функции полезности*. Множество линий безразличия называется картой линий безразличия.

Рассмотрим пример функции, удовлетворяющей перечисленным условиям. Пусть $u = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$. Очевидно, что эта функция возрастает по каждому из переменных. $u'_{x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$, $u'_{x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$; $u''_{x_1x_1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{x_2}{x_1^{\,3}}\right)^{\frac{1}{2}} < 0$, $u''_{x_2x_2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{x_2^{\,3}}\right)^{\frac{1}{2}} < 0$, $u''_{x_1x_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_1x_2}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$; условия 1-3 выполняются, данная функция может быть функцией полезности. Рассмотрим её линии безразличия, то есть линии уровня $x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = c$, $c = \mathrm{const}$. Это будут линии $x_2 = \frac{c^2}{x_1}$, где $x_1 > 0$. То есть это классическая обратная пропорциональность из школьного курса, графиком которого является гипербола, функция убывающая и для $x_1 > 0$ выпукла вниз (см. рис. 3.1). Покажем в общем виде, что это так. В самом деле, так как на линии безразличия $u = c$, где c – постоянная, то $du = u'_{x_1}dx_1 + u'_{x_2}dx_2 = 0$. Преобразуя последнее равенство, получим $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} < 0$, что доказывает, что линия уровня функции полезности – кривая безразличия – убывает. Чтобы показать второе свойство, найдем вторую производную функции x_2 по переменной x_1. Имеем: $\frac{d^2x_2}{dx_1^{\,2}} = -\left(\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}}\right)'_{x_1} = -\frac{u''_{x_1x_1}u'_{x_2} - u'_{x_1}u''_{x_2x_1}}{\left(u'_{x_2}\right)^2}$. Так как $u''_{x_1x_1} < 0$, а $u''_{x_2x_1} > 0$ (а первые производные от функции полезности положительны), имеем: $\frac{d^2x_2}{dx_1^{\,2}} > 0$, и кривая графика кривой безразличия выпукла вниз.

[2] Отметим, что свойство 2 и, в особенности, свойство 3 не всегда присутствуют у функции полезности.

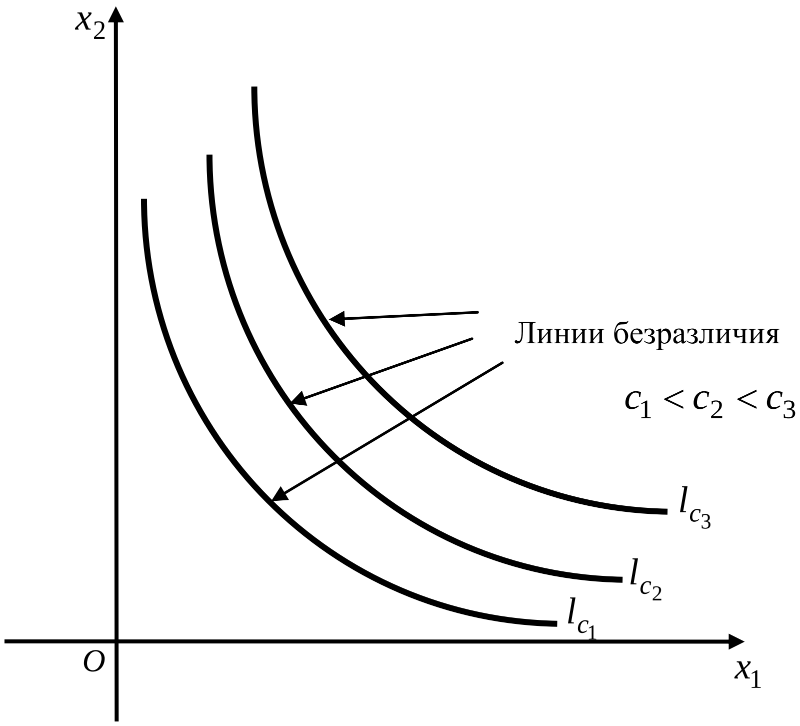


Рис. 3.1. Кривые безразличия

Рассмотрим задачу потребительского выбора. Как хорошо известно, задача потребительского выбора (или задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1, x_2), который максимизирует его функцию полезности $u(x_1, x_2)$ при заданном бюджетном ограничении (это частный случай задачи линейного программирования, который будет изучаться ниже):

$$u(x_1, x_2) \to \max, \tag{3.1}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \tag{3.2}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \tag{3.3}$$

Все обозначения здесь введены выше, кроме величин p_1 и p_2, которые суть рыночные цены одной единицы первого и второго продукта (блага) соответственно.

На рисунке 3.2 показана бюджетная прямая AB

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \tag{3.4}$$

Треугольник AOB показывает множество потребительских наборов, доступных индивидууму; это множество, удовлетворяющее условию (3.2). Найдём максимум функции (3.1) при условиях (3.2) и (3.3).

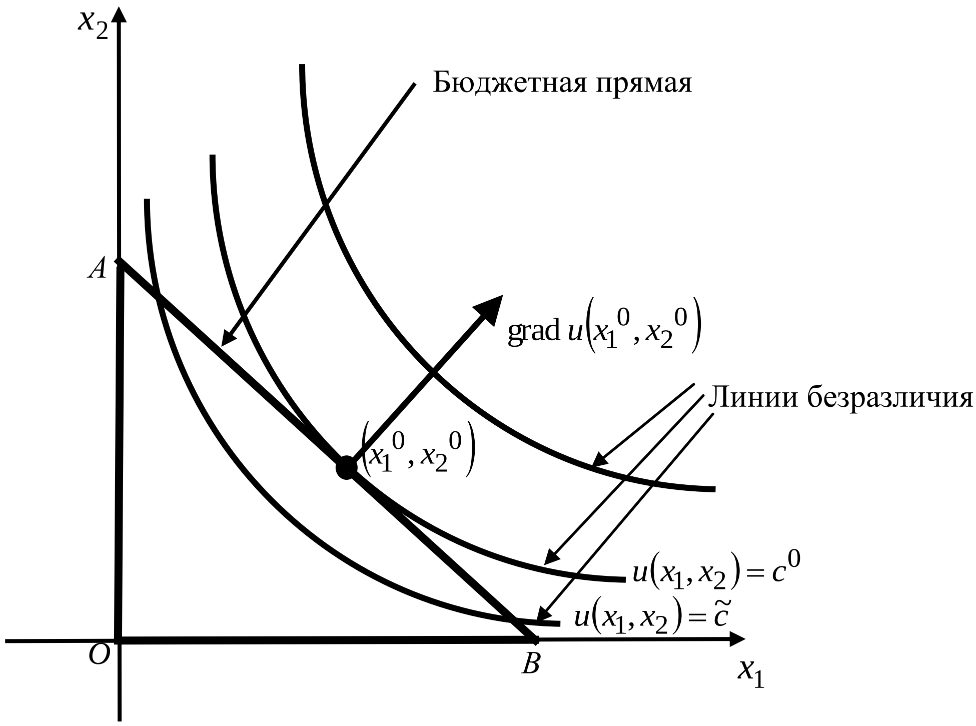


Рис. 3.2. Решение простейшей задачи потребительского выбора

Очевидно, что набор $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство (3.4), и решение $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ должно лежать на бюджетной прямой *AB*. (В точках *A, B* весь доход тратится на один из продуктов.) Таким образом, задача линейного программирования (3.1)-(3.3) свелась к задаче на условный экстремум (3.1), (3.4) (без учета условий (3.3)).

Не углубляясь в вопросы оптимизации, будем рассуждать несколько иначе. Из предыдущего раздела известно, что 1) наискорейший рост функции осуществляется в направлении градиента; 2) градиент перпендикулярен линии уровня. Таким образом, двигаясь внутри треугольника *AOB* в направлении градиента, мы будем двигаться перпендикулярно линиям уровня до границы – бюджетной прямой *AB*. Рассмотрим точку касания бюджетной прямой и линии уровня функции полезности. Поскольку линии уровня не пересекаются, то очевидно, что существует единственная линия уровня, касающаяся бюджетной прямой, и точка касания единственна. Это будет точка касания с линией безразличия $u(x_1, x_2) = c^0$, где $c^0 > \tilde{c}$, где $\tilde{c}$ - значения функции полезности на других линиях безразличия, имеющих общие точки с треугольником *AOB*. Координаты точки касания и будут решением задачи оптимизации $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

4. Некоторые сведения о производственных функциях.

Пусть выпуск $Y(t)$ – реальный валовой внутренний продукт (ВВП) в момент времени t, $K(t)$ – физический капитал и $L(t)$ – рабочая сила, использующиеся в производстве в момент времени t. Зависимость между привлекаемыми ресурсами (факторами) производства K и L и его результатом (выпуском) Y характеризуется зависимостью

$$Y = F(K, L), \tag{4.1}$$

называемой производственной функцией. Эта величина, в зависимости от конкретной ситуации, либо описывает выпуск за определенный промежуток времени, завершающийся в момент времени t, либо "в единицу времени" в окрестности момента t. Кроме того, соотношение (4.1) задает на самом деле максимально возможный выпуск для заданных факторов K и L, так что более аккуратно следовало бы говорить о том, что выпуск Y реально возможен при заданных факторах K и L в промежутке $[0, F(K, L)]$. (В более сложных моделях рассматриваются производственные функции, зависящие от большего числа факторов).

Относительно функции $F(K,L)$: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ \equiv [0, \infty)$ обычно предполагается, что она непрерывна и имеет непрерывные частные производные по крайней мере до второго порядка включительно.

В рамках неоклассической теории предполагается, что функция $F(K,L)$ удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

I. $F(0, L) = 0$, $F(K, 0) = 0$, $L, K \geq 0$ – производство невозможно при отсутствии хотя бы одного из факторов.

II. $MPP_L = \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0,\ \forall K, L > 0$, $MPP_K = \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0,\ \forall K, L > 0$.

Указанные обозначения широко используются в экономической теории (см., например, [8], [9], [10] и др.) и являются аббревиатурами соответствующих английских терминов (*Marginal Physical Product of Labor, Marginal Physical Product of Capital*). Условия II отражают простой факт – увеличение количества факторов производства приводит к росту выпуска.

III. $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0,\ \dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0,\ \forall K, L > 0$ – "экстенсивный рост производства приводит к снижению эффективности".

IV. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\gamma F(K, L),\ \forall \lambda, K, L > 0$.

Здесь параметр γ – "степень однородности" функции F – характеризует "эффект от расширения масштаба": если $\gamma > 1$, то одновременное увеличение ресурсов в λ раз ($\lambda > 1$) приводит к росту выпуска продукции более чем в λ раз:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L) > \lambda F(K, L),\ (\lambda > 1).$$

В этом случае (λ > 1) обычно говорят, что производственная функция F характеризуется *возрастающей отдачей* (*return*) от расширения масштаба: $F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K, L)$. В случае же 0 < γ < 1 говорят об *убывающей отдаче* от масштаба:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L) < \lambda F(K, L),\ (\lambda < 1).$$

Наконец, в случае γ = 1 говорят об *отсутствии эффекта масштаба* (*constant return to scale*):

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L),\ \lambda \in \mathbf{R}_{+}.$$

В силу условия IV производственная функция F является положительно однородной функцией в области $L, K > 0$ и имеет место соотношение (теорема Эйлера)

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} K + \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} L = \gamma F(K, L).$$

Условия I – IV показывают, что поверхность $z = F(K, L)$ в области $(K, L) \in \mathbf{R}_{+} \times \mathbf{R}_{+}$ является вогнутой. Из этих условий вытекает также ряд полезных соотношений, связывающих функции $F(K, L)$ и $f(k) \equiv F(k, 1)$ – выпуск, определяемый специальным набором факторов – одним работающим, располагающим величиной k физического капитала. Величину $k = K/L$ принято называть фондовооруженностью (капиталовооруженностью) работника. Легко видеть, что $f(0) = 0$. Непосредственно (с учетом равенства $F(K, L) = L^{\gamma} F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$, вытекающего из условия IV) проверяется, что справедливы следующие формулы:

$$MPP_L \equiv \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = L^{\gamma - 1}\{\gamma f(k) - k f'(k)\}, \tag{4.2}$$

$$MPP_K \equiv \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = L^{\gamma - 1} f'(k),\ k = \frac{K}{L}. \tag{4.3}$$

Заметим, что из формулы (4.2) и условия II следует, что имеет место неравенство $\gamma f(k) - k f'(k) > 0$, $k > 0$, откуда, в свою очередь, следует неравенство

$$E(f, k) \equiv \frac{k}{f(k)} \cdot \frac{df(k)}{dk} < \gamma. \tag{4.4}$$

Здесь $E(f, k)$ – *эластичность* функции $f(k)$ в точке k (см. п.1.3). Эластичность функции $f(k)$, определенная формулой (4.4), характеризует относительное изменение функции $f(k)$ при относительном изменении ее аргумента k на 1%. Пользуясь общим определением эластичности (4.4), можно доказать, что:

1) $E(f \cdot g) = E(f) + E(g)$;

2) $E(f+g) = \alpha_+ \cdot E(f) + \beta_+ \cdot E(g),\ \alpha_+ = \left(\dfrac{f}{f+g}\right), \beta_+ = \left(\dfrac{g}{f+g}\right)$;

3) $E(f/g) = E(f) - E(g)$,

4) $E(f-g) = \alpha_- \cdot E(f) - \beta_- \cdot E(g),\ \alpha_- = \left(\dfrac{f}{f-g}\right), \beta_- = \left(\dfrac{g}{f-g}\right)$.

Читателю предлагается сделать это самостоятельно и сравнить с правилами дифференцирования.

Аналогично формулам (4.2), (4.3) непосредственным дифференцированием функции $F(K, L)$ легко получить соотношения

$$F''_{LK} = L^{\gamma-2}\{(\gamma-1) f'(k) - k\, f''(k)\},$$

$$F''_{LL} = L^{\gamma-2}\{(\gamma-1)\gamma\, f(k) - 2(\gamma-1)k\, f'(k) + k^2 f''(k)\},$$

$$F''_{KK} = L^{\gamma-2} f''(k), k = \frac{K}{L},\ F(K,L) = L^{\gamma} F\left(\frac{K}{L},1\right).$$

В случае отсутствия эффекта масштаба ($\gamma = 1$) данные формулы заметно упрощаются и принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} = \frac{1}{L}k^2 f''(k), \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} = \frac{1}{L} f''(k), \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K \partial L} = -\frac{1}{L}kf''(k). \quad (4.5)$$

Из условий I – IV и соотношений (4.5), (4.3) получаем

$$f'(k) > 0, f''(k) < 0, k > 0. \quad (4.6)$$

Рассмотрим производственную функцию $F(K, L)$ в случае отсутствия эффекта масштаба ($\gamma = 1$). Рассмотрим изокванты функции $F(K, L)$ вида

$$F(K, L) = Y_C,\ Y_C > 0,\ Y_C = const. \quad (4.7)$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении условий I – IV уравнение (4.7) определяет в области $L > 0$ неявную (однозначную и гладкую) функцию $K = K(L)$, причем имеет место соотношение:

$$TRS \equiv \frac{dK(L)}{dL} = -\frac{F'_L(K(L),L)}{F'_K(K(L),L)} < 0.$$

Величина *TRS* (*Technical Rate of Substitution*) показывает, какое количество физического капитала (фондов) может быть высвобождено при увеличении затрат труда на единицу. Вместо *TRS* часто используется положительная величина

$$MRTS = \frac{F_L'(K(L),L)}{F_K'(K(L),L)} > 0,\ L > 0, \qquad (4.8)$$

называемая предельной нормой замещения фондов (капитала) трудовыми ресурсами (*Marginal Rate of Technical Substitution*).

Взаимозаменяемость ресурсов характеризуется также величиной эластичности замещения ресурсов σ (введенной независимо в 1932 г. Дж. Хиксом и в 1933 г. Дж. Робинсон) показывающей, на сколько процентов изменяется капиталовооруженность k при изменении предельной нормы замещения фондов на 1%:

$$\sigma = \frac{MRTS}{k} \cdot \frac{dk}{d(MRTS)} = \frac{d(\ln k)}{d(\ln MRTS)}. \qquad (4.9)$$

Подразумевается, что в формуле (4.9) переменные K и L ($k = K/L$) связаны соотношением $F(K, L) = Y$ ($K = K(L)$). Прямое вычисление эластичности замещения ресурсов приводит к выражению

$$\sigma = \frac{(F_L'L + F_K'K)}{KL\Im} \cdot F_L'F_K', \quad L > 0, K > 0, \qquad (4.10)$$

где $\Im = -(F_K')^2 F_{LL}'' + 2F_K'F_L'F_{KL}'' - (F_L')^2 F_{KK}''$ – определитель матрицы окаймленного Гессиана

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & F_L' & F_K' \\ F_L' & F_{LL}'' & F_{KL}'' \\ F_K' & F_{LK}'' & F_{KK}'' \end{pmatrix}, \qquad \Im = \det \mathrm{B}.$$

Условие квазивогнутости поверхности $Y = F(K, L)$ влечет за собой неравенство $\Im > 0$, в силу чего $\sigma > 0$. Выражение (4.10) для σ полностью симметрично относительно переменных L и K, откуда следует равенство эластичностей замещения ресурсов (капитала – трудовыми ресурсами и трудовых ресурсов – капиталом).

Заметим, что в случае отсутствия эффекта масштаба формула (4.10), в силу теоремы Эйлера для однородных функций, может быть приведена к виду

$$\sigma = \frac{F_L' \cdot F_K'}{F \cdot F_{KL}''}. \qquad (4.11)$$

Именно в таком виде эластичность замещения ресурсов в случае отсутствия эффекта масштаба и была введена в рассмотрение Дж. Хиксом в 1932 году.

Формулы (4.2), (4.3) и (4.5) позволяют получить из (4.11) в случае отсутствия эффекта масштаба следующее соотношение:

$$\sigma = \frac{[f(k) - kf'(k)]f'(k)}{-kf(k)f''(k)}, k > 0. \qquad (4.12)$$

Приведем в качестве примера производственных функций две очень популярные функции – функцию Кобба – Дугласа [11], [12] и производственную функцию с постоянной эластичностью замещения – CES-функцию (*Constant Elasticity of Substitution*), введенную в рассмотрение в 1961г. Эрроу, Ченери, Минхасом и Солоу [13] и называемую иногда ACMS-функцией.

“Каноническая” форма производственной функции Кобба – Дугласа имеет вид

$$Y = F_{\mathrm{CD}}(K,Y) \equiv AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad A > 0,\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}_{+}. \tag{4.13}$$

Из условий I – IV вытекает, что $\alpha,\beta \in (0,1)$. Условие отсутствия эффекта масштаба приводит к равенству $\alpha + \beta = 1$. Из явного вида (4.13) функции Кобба – Дугласа следует, что предельная норма замещения капитала трудовыми ресурсами выражается равенством $MRTS_{CD} = \dfrac{\beta}{\alpha}k, k = \dfrac{K}{L}$. Пользуясь определением (4.9) эластичности замещения ресурсов отсюда нетрудно установить, что $\sigma_{\mathrm{CD}} = 1$. Изокванты функции Кобба – Дугласа $F_{\mathrm{CD}}(K, L)$ заполняют первый квадрант плоскости (K, L), являются выпуклыми кривыми, причем при $K\to \infty$ и при $L\to \infty$ они асимптотически приближаются к соответствующим осям координат (OK и OL).

Функция $f_{CD}(k) = F_{\mathrm{CD}}(K, 1) = Ak^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$ обладает следующими свойствами:

$$f_{CD}^{/}(k) = A\alpha k^{\alpha-1} \to 0,\ k\to \infty;\ f_{CD}^{/}(k) \to \infty,\ k\to +0, \tag{4.14}$$
$$\frac{f_{CD}(k)}{k} = Ak^{\alpha\text{ -}1} \to 0,\ k\to \infty; \quad \frac{f_{CD}(k)}{k} \to \infty,\ k\to +0.$$

Функции с постоянной эластичностью замены $\sigma = const$ (и, вообще говоря, $\sigma \neq 1$) в случае двух факторов были введены в рассмотрение в конце 50-х – начале 60-х годов (см. выше). Явный вид таких функций может быть построен на основе соотношений (4.9), (4.2), (4.3), (4.8). В самом деле, из (4.8) и (4.2), (4.3) имеем

$$MRTS = \frac{\gamma\ f(k) - kf^{/}(k)}{f^{/}(k)},\ k > 0\ . \tag{4.15}$$

Полагая теперь $\sigma = const$ и интегрируя соотношение (4.9), получаем, что $MRTS_{CES} = Ck^{\frac{1}{\sigma}}$, $C \geq 0$, $\sigma \neq 0$, что в сочетании с (4.15) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\gamma f(k) - kf^{/}(k)}{f^{/}(k)} = Ck^{\frac{1}{\sigma}},\ k > 0.$$

Интегрирование данного уравнения (при σ ≠ 0 и σ ≠ 1) позволяет получить явное выражение для $f(k)$, а равенство $F(K,L)=L^{\gamma} f\left(\frac{K}{L}\right)$ дает возможность "восстановить" и CES-функцию $F_{CES}(K, L)$:

$$F_{CES}(K,L)=A\left\{(1-a)L^{\psi}+aK^{\psi}\right\}^{\frac{\gamma}{\psi}},\ \psi=\frac{\sigma-1}{\sigma},\ \sigma>0,\ \sigma\neq 1\ a\in(0,1). \tag{4.16}$$

Заметим, что в силу определения параметра ψ и условий σ > 0, σ ≠ 1 справедливо включение $\psi\in(-\infty, 0)\cup(0, 1)$. Ограничимся в дальнейшем случаем производственных функций, удовлетворяющих условию отсутствия эффекта масштаба (γ = 1).

Запишем (4.16) для случая γ = 1 в "симметричном" виде:

$$\left(\frac{Y}{A}\right)^{\psi}=aK^{\psi}+(1-a)L^{\psi},\ K, L>0. \tag{4.17}$$

Рассматривая изокванты вида $F_{CES}(K, L) = Y_C$ из (4.17) получаем следующие соотношения: если $\psi\in(-\infty, 0)$, то при $L\to\infty$, $K\to K_{\infty}=a^{-\frac{1}{\psi}}\frac{Y_C}{A}>0$, а при $K\to\infty$, соответственно, $L\to L_{\infty}=(1-a)^{-\frac{1}{\psi}}\frac{Y_C}{A}>0$; если же ψ > 0, то при $L\to 0$ $K\to K_* = K_{\infty}$, а при $K\to 0$ $L\to L_* = L_{\infty}$. При ψ > 0 (σ > 1) изокванта $F_{CES}(K, L) = Y_C$ лежит в ограниченной области первого квадранта. Из уравнения (4.17) легко получить также выражения для предельной нормы замещения ресурсов

$$MRTS_{CES}=\left(\frac{1-a}{a}\right)\cdot k^{1-\psi}$$

и с помощью (4.9) – для эластичности замещения ресурсов $\sigma_{CES}=\frac{1}{1-\psi}=\sigma$.

В представлении (4.16) удобно перейти к удельным (*per capita*) величинам $k=\frac{K}{L}$ и $y=\frac{Y}{L}$. Из (4.16) получаем:

$$y=\frac{F_{CES}(K,L)}{L}=F_{CES}(k,1)=f_{CES}(k)=A\left\{ak^{\psi}+(1-a)\right\}^{\frac{1}{\psi}}. \tag{4.18}$$

Рассмотрим теперь предельное поведение производной $f'_{CES}(k)$ при $k\to 0$ и при $k\to\infty$. Имеем:

$$y'=f'_{CES}(k)=Aak^{\psi-1}\cdot\left\{ak^{\psi}+(1-a)\right\}^{\frac{1-\psi}{\psi}}. \tag{4.19}$$

Ясно, что поведение производной при $k\to 0$ и при $k\to\infty$ определяется значением параметра ψ. Рассмотрим сначала случай $\psi\in(0,1)$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} f_{CES}^{/}(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{f_{CES}(k)}{k} = Aa^{\frac{1}{\psi}} > 0\,,$$

$$\lim_{k\to+0} f_{CES}^{/}(k) = \lim_{k\to+0} \frac{f_{CES}(k)}{k} = \infty\,. \qquad (4.20)$$

Следовательно, при $\psi \in (0,\ 1)$ предельный и средний продукты имеют при $k\to\infty$ отличное от 0 значение, что серьезно отличает поведение $f_{CES}(k)$ от поведения $f_{CD}(k)$ при $k\to\infty$. Пусть теперь $\psi \in (-\infty,\ 0)$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} f_{CES}^{/}(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{f_{CES}(k)}{k} = 0\,,$$

$$\lim_{k\to+0} f_{CES}^{/}(k) = \lim_{k\to0} \frac{f_{CES}(k)}{k} = Aa^{\frac{1}{\psi}} > 0\,. \qquad (4.21)$$

И в этом случае поведение $f_{CES}(k)$ и $f_{CD}(k)$ различается при $k \to +0$.

Аналогично рассмотренной выше теории двухфакторных производственных функций можно рассмотреть теорию многофакторных производственных функций (см. [14, гл.8], [15], [16], [17], [18] и др.)

5. Избранные сведения о рядах

Заключительный раздел пособия посвящен рядам – бесконечным суммам чисел или функций. Представление функций в виде функционального ряда чрезвычайно эффективно для решения многих математических задач, в том числе и экономического содержания.

5.1. Числовые ряды. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots. \tag{5.1}$$

Соединим их знаком +; полученное символическое выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots. \tag{5.2}$$

называется *числовым рядом*. Числа (5.1) называются *членами ряда*: u_1 – первый член, u_2 – второй,…, u_n – n – ый или общий член ряда ($n = 1,2,\ldots$). Что понимать под символом (5.2), т.е. под «бесконечной суммой» чисел? Составим сумму n первых членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{5.3}$$

– она называется частичной или частной суммой ряда порядка n. Получили числовую последовательность $\{S_n\}$ ($n = 1,2,\ldots$).

Если существует (конечный) предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \equiv S$, то ряд называется *сходящимся*, а сам предел, т.е. число S, называется *суммой ряда*, и пишут

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \tag{5.4}$$

Если же конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся, он суммы (конечной) не имеет. Однако, если $S_n \to +\infty$ (или $S_n \to -\infty$), то говорят, что ряд расходится к сумме $S = +\infty$ (или $S = -\infty$).

Рассмотрим важный класс числовых рядов – **геометрические ряды**. Геометрическим рядом называется ряд называется ряд

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} aq^n . \tag{5.5}$$

Очевидно, что члены ряда (5.5) образуют геометрическую прогрессию с первым членом a и знаменателем q. Частичная сумма порядка n ряда (5.5) при $q \neq 1$ есть

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^{n-1} \cdot q}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n . \tag{5.6}$$

1) Пусть $|q|<1$ (в этом случае соответствующая геометрическая прогрессия называется убывающей). Тогда $q^n \to 0$ при $n\to\infty$, поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, значит, ряд сходится и имеет сумму $S=\dfrac{a}{1-q}$.

2) Пусть $|q|>1$, то $q^n \to \infty$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$: конечного предела нет – ряд расходится.

3) При $q=1$ формулой (5.6) суммы пользоваться нельзя. В этом случае имеем ряд $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\,\text{раз}}+\ldots$ с частной суммой $S_n = na \to \infty$ при $n\to\infty$ (если $a\neq 0$), ряд расходится.

4) При $q=-1$ ряд (5.5) имеет вид $a-a+a-\ldots+(-1)^{n-1}a+\ldots$. У него $S_n=\begin{cases} a, \textit{если } n \textit{ нечётное}, \\ 0, \textit{если } n \textit{ чётное}, \end{cases}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (если $a\neq 0$).

Таким образом, геометрический ряд (5.5): 1) в случае $|q|<1$ сходится и имеет сумму $\dfrac{a}{1-q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \equiv a+aq+\ldots+aq^n+\ldots=\frac{a}{1-q},\ |q|<1; \tag{5.7}$$

2) в случае при $|q|\geq 1$ расходится (если $a\neq 0$).

5.2. Мультипликатор. В математической экономике геометрический ряд используется при введении понятия мультипликатора (инвестиционного, банковского и т.п.). Рассмотрим, как реализуется идея инвестиционного мультипликатора в кейнсианской экономике.

Предположим, что мы имеем начальное увеличение в инвестициях ΔI_0. Это вызовет изменение в начальном доходе $\Delta Y_0=\Delta I_0$, который порождает дополнительное потребление: сначала $c\cdot\Delta I_0$, далее $c^2\cdot\Delta I_0$ и т.д. (c – склонность к потреблению). Таким образом, полное увеличение дохода для бесконечного времени составит $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c^i\cdot\Delta I_0$. Этот геометрический ряд, который сходится к конечной сумме – некоему полному приросту дохода ΔY. Таким образом, $\Delta Y=\sum\limits_{i=0}^{\infty} c^i\cdot\Delta I_0=\dfrac{\Delta I}{1-c}=\dfrac{\Delta I}{s}$, где s – склонность к накоплению, а $\dfrac{1}{1-c}=\dfrac{1}{s}=\alpha$ есть инвестиционный мультипликатор. Идеи, связанные с мультипликатором, в тридцатых годах и ранее высказывались многими авторами, соответствующие ссылки имеются в [19].

5.3. Степенные ряды. Важным и простейшим примером *функциональных рядов* являются *степенные ряды*, именно, ряды вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad (5.8)$$

– это ряд по степеням $(x-a)$ или по системе степеней $\{(x-a)^n\}_{n=0}^{n=\infty}$; точка $x=a$ называется центром ряда, в ней ряд всегда сходится. В частности, при $a=0$ имеем ряд по степеням x:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \qquad (5.9)$$

Числа $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда. Ряд (5.8) сводится к ряду (5.9) заменой $x-a$ на x, поэтому будем заниматься, для простоты, рядом (5.9).

Т е о р е м а (об области сходимости степенного ряда). *Для всякого степенного ряда (*5.9*) существует число R,* $0 \le R \le \infty$*, такое, что в интервале* $|x| < R$ *(при* $R > 0$*) ряд сходится абсолютно (т.е. сходится не только сам ряд (5.9), но и ряд, составленный из модулей его членов), а вне его, когда* $|x| > R$ *(при* $R < \infty$*), расходится.* (В концах $x = \pm R$ может быть всё, что угодно.)

Пусть в ряде (5.9) все $c_n \ne 0$, начиная хотя бы с некоторого номера $n = n_0$ (ряд без пропусков, при $n \ge n_0$). *Допустим*, что существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = A$, $0 \le A \le \infty$. Тогда $R = \dfrac{1}{A}$. Аналогично, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = B$, то $R = \dfrac{1}{B}$.

Доказательство формул для радиуса сходимости основаны на признаках Даламбера и Коши сходимости числового ряда.

Степенные ряды хороши тем, что в виде таких рядов (так называемых *рядов Тейлора*) могут быть представлены различные часто используемые элементарные функции.

5.4. Ряды Тейлора. Пусть $f(x)$ *некоторая* заданная функция, *имеющая в точке* $x=a$ *производные любого порядка*. Тогда ей можно поставить в соответствие и степенной ряд (соответствие отмечается знаком ~):

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

Коэффициенты $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ называют *коэффициентами Тейлора* функции $f(x)$ в точке $x=a$, а ряд – *рядом Тейлора* функции $f(x)$ по степеням $(x-a)$, или в окрестности точки a (или в точке a).

Любой степенной ряд с радиусом сходимости $R>0$ является рядом Тейлора для своей суммы. В этом смысле степенные ряды и ряды Тейлора можно не различать (если $R>0$).

Говорят, что функция $f(x)$ *представима* рядом Тейлора или *разлагается* в ряд Тейлора в области *D*, содержащей точку *a*, если знак соответствия можно заменить знаком равенства:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,\ x\in D.$$

Условия разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора: 1) функция $f(x)$ *должна быть бесконечно дифференцируемой* (*иметь производные любого порядка*); 2) радиус сходимости полученного ряда должен быть больше нуля, причем полученный ряд должен сходиться к функции $f(x)$. Такое исследование необходимо проводить при каждом разложении функции в ряд Тейлора. Однако для многих хорошо известных функций сформулированные условия проверены.

Разложение в ряд Тейлора с центром $a=0$ некоторых известных функций. Пусть $a=0$, т.е. ряд Тейлора имеет вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,\ -R<x<R.$$

Такой ряд называют также рядом Маклорена.

1) $f(x)=e^x$. Функция e^x разлагается в ряд Тейлора на всей оси. Поскольку $f^{(n)}(x)=e^x$ и $f^{(n)}(0)=e^0=1$, $(n=0,1,2,\ldots)$, то

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ -\infty<x<\infty.$$

2) $f(x)=\sin x$ также разлагается в ряд Тейлора на всей оси. Имеем: $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x,\ldots$; далее производные повторяются. Вычисляем при $x=a=0$: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0,\ldots$ – закономерность: все чётные производные равны нулю, а нечётные, чередуясь, $+1$ или -1. Итак,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<\infty.$$

3) Разложение для $\cos x$ можно получить аналогично или дифференцируя почленно ряд для функции $f(x)=\sin x$.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ -\infty<x<\infty.$$

Подробнее о рядах см., например, [20] или любой другой учебник по теории рядов.

6. Дифференциальные уравнения и моделирование экономической динамики

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое связывает независимые переменные, функцию и производные от этих функций. В зависимости от количества переменных различают обыкновенные дифференциальные уравнения (содержат функцию одного переменного и, соответственно, *обыкновенные* производные) и уравнения в частных производных (содержат функцию нескольких переменных и *частные* производные от неё). В нашу задачу входит лишь рассмотрение лишь *обыкновенных дифференциальных уравнений*.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения, связывающие независимое переменное, неизвестную функцию этой независимой переменной и её производную. Первоначально рассматривались только простейшие дифференциальные уравнения типа $\frac{dy}{dx}=f(x)$, $\frac{dy}{dx}=f(y)$ либо $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, таким образом получалось, что задачей решения дифференциального уравнения является поиск неизвестной функции по известной производной.

Дифференциальные уравнения появились, по-видимому, в XVII веке; одним из первых математиков, решавших дифференциальные уравнения был учитель И. Ньютона Исаак Барроу. Легенда гласит, что Ньютон был настолько впечатлён эффективностью этого математического аппарата, что даже зашифровал основной вывод в анаграмме. Вывод в переводе звучит следующим образом: «Полезно решать дифференциальные уравнения». Если принять, что независимое переменное есть время *t*, то функция $y(t)$ задает некий процесс, а производная $y'(t)$ есть скорость протекания данного процесса. Таким образом, решая дифференциальное уравнение, мы по известной скорости находим функцию, полностью характеризующую процесс. Если процесс более чем одномерный, то аналогичная задача может решаться для каждой переменной, иначе говоря, по скорости изменения каждой переменной мы находим уравнение ей изменения либо закон изменения обеих переменных, выраженный в неявной форме. Иначе говоря, мы имеем систему нескольких дифференциальных уравнений, которая для размерности 2 выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\dot{x}=P(x,y,t),\\ \dot{y}=Q(x,y,t),\end{cases}$$

где координаты x и y – функции времени, а $\dot{x},\ \dot{y}$ – обозначения производных по времени, используемые со времён Ньютона. Если обе части первого уравнения продифференцировать по времени: $\ddot{x}=P'_x\cdot\dot{x}+P'_y\cdot\dot{y}+P'_t$, функцию *y*, выраженную из первого уравнения, подставить во второе (в силу теоремы о неявной функции это локально почти всегда возможно), то в качестве второго уравнения мы будем иметь $\dot{y} = Q(x, \theta(x, \dot{x}, t), t)$, где $\theta(x, \dot{x}, t) = y$ получено из первого уравнения. Подставив последнее выражение для $\dot{y}$ в уравнение $\ddot{x} = P'_x \cdot \dot{x} + P'_y \cdot \dot{y} + P'_t$, получим уравнение

$$\ddot{x} - P'_x(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) \cdot \dot{x} + P'_y(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) \cdot Q(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) - P'_t(x, \theta(x, \dot{x}, t), t) = 0.$$

Это уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$. Оно называется уравнением второго порядка, так как в левую часть данного уравнения входит не только производная первого порядка $\dot{x}(t)$, но и производная второго порядка $\ddot{x}(t)$ (такие уравнения уже можно обозначить как уравнения высших порядков). Левая часть уравнения является функцией Ф аргументов $t,\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x}$: $\Phi(t,\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x}) = 0$. Таким образом, оказалось, что системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции и наоборот.

Среди часто встречающихся уравнений, методы решения которых полезно знать, имеют место, во-первых, уравнения первого порядка, выраженные относительно производной, относящиеся к так называемым уравнениям с разделяющимися переменными $\dfrac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ и сводящиеся к ним (однородные, линейные, уравнения Бернулли), а также уравнения в полных дифференциалах; во-вторых, линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ произвольные действительные числа.

Рассмотрим подробно некоторые типы обыкновенных дифференциальных уравнений.

6.1. Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной. Мир устроен так, что большинство таких уравнений решению не поддаются. Однако многие простые модели одномерной динамики с непрерывным временем сводятся к простым уравнениям первого порядка.

Основные понятия теории дифференциальных уравнений изучим на простом примере. Рассмотрим уравнение $xdy - ydx = 0$ (в этом случае говорят, что уравнение задано *в дифференциальной форме*) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$. Это уравнение относится к самому простому классу уравнений с разделяющимися переменными, главным принципом решения которых является разделить переменные по разным частям уравнения: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ $\ln|y|=\ln|x|+\ln\widetilde{C}$ $\Rightarrow$ $\ln|y|=\ln\left(|x|\cdot\widetilde{C}\right)$ $\Rightarrow$ $y=Cx$. Здесь $\widetilde{C}$ – положительная произвольная постоянная (в этом случае $\ln\widetilde{C}$ может быть любым действительным числом), С – произвольная постоянная – действительное число: $C=\widetilde{C}$, если x и y одного знака; $C=-\widetilde{C}$, если x и y разных знаков; при $C=0$ получаем решение $y=0$; при $\frac{1}{C}=0$ получаем решение $x=0$ (проверяется непосредственной подстановкой в исходное уравнение). Функция $y=Cx$, зависящая от произвольной постоянной, называется *общим решением* уравнения $xdy-ydx=0$ (впрочем, как и уравнений $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, и $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$). Графическим изображением будут прямые, проходящие в плоскости xOy через начало координат (рис. 6.1). Каждая прямая есть *частное решение* (*интегральная кривая*); точка (0,0), в которой числитель и знаменатель уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ одновременно обращается в нуль, для уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ называется *особой точкой*.

Помимо поиска общего решения дифференциального уравнения может быть поставлена так называемая *задача Коши* – задача *поиска частного решения, удовлетворяющего данному начальному условию*. Например, решением задачи Коши $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ с начальным условием $y(1)=2$ на рис. 6.1 выделено жирным.

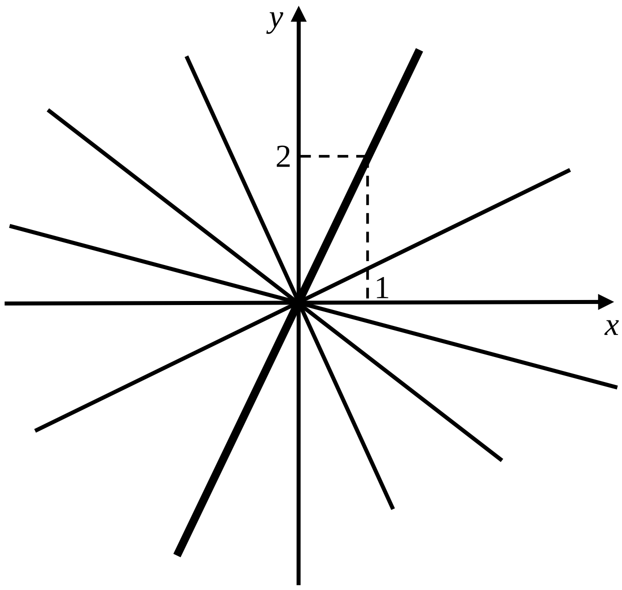


Рис. 6.1.Общее решение уравнения $xdy-ydx=0$.

В общем случае уравнение с разделяющимися переменными может быть записано, например, так: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$. Путем очевидных манипуляций переменные «растаскиваются» по разным частям уравнения, от обеих частей берутся интегралы, и получаем общее решение. Если поставлена задача поиска частного решения, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, то координаты точки подставляются в общее решение, находится значение произвольной постоянной, и это значение уже записывают вместо «буквы *C*» в общее решение. Отметим, что в случае, когда правая часть уравнения в окрестности некоторой точки задана, непрерывна и дифференцируема, то через каждую точку множества, на котором заданы интегральные кривые, проходит в точности одна интегральная кривая. Областью определения уравнения $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ считают объединение областей определения уравнений $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x) \cdot h(y)}$. Точки, в которых одновременно $g(x) \cdot h(y) = 0$ и $\frac{1}{g(x) \cdot h(y)} = 0$, называются особыми точками уравнения $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ (и уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x) \cdot h(y)}$, и уравнения $\frac{dy}{h(y)} - g(x) \cdot dx = 0$).

Типы уравнений, сводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными путем замен или поиска решения в специальном виде (однородные, линейные, Бернулли и различные сводящиеся к ним), хорошо известны и представлены в любом учебнике по дифференциальным уравнениям или высшей математике (см., например, [21, 22]).

6.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Для простоты будем рассматривать линейные уравнения второго порядка. Из общих соображений очевидно, что общее решение такого уравнения будет содержать две произвольных постоянных, поскольку предполагается по второй производной искать функцию, то есть требуется два раза интегрировать. В общем виде его можно записать

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (6.2.1)$$

В общем виде решать такое уравнение довольно проблематично; впрочем, структура общего решения такого уравнения хорошо известна. А именно, общее решение такого уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (6.2.2)$$

и какого-нибудь частного решения уравнения (6.2.1). Что касается уравнения (6.2.2), то его общее решение есть линейная комбинация двух линейно независимых частных решений уравнения (6.2.2). Процесс поиска этих частных решений хорошо известен для случая, когда коэффициенты в левой части уравнения (6.2.1) (и (6.2.2)) являются постоянными, а функция $f(x)$ имеет специальный вид, о котором речь пойдёт ниже.

Итак, пусть коэффициенты уравнения (6.2.2) суть постоянные величины и без ограничения общности коэффициент при y'' равен 1. Тогда (6.2.2) можно записать, например, так:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.2.3}$$

где $p = \dfrac{a_1}{a_2}$, $q = \dfrac{a_0}{a_2}$. Будем искать решение уравнения (6.2.3) в виде $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Имея в виду, что $\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}$, $\left(e^{\lambda x}\right)'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, после подстановки в (6.2.3) получим: $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \iff e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0$; сокращая на заведомо положительную величину $e^{\lambda x}$, получим квадратное уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, называемое *характеристическим* для уравнения (6.2.3).

Имеет место три возможности: дискриминант уравнения положителен, и оно имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2; дискриминант уравнения равен нулю, и оно имеет кратные действительные корни $\lambda_1 = \lambda_2$; дискриминант отрицателен, и оно имеет комплексносопряженные корни $\lambda_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$ $(i^2 = -1)$.

1) Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}$, имеем: $y = e^{\lambda_1 x}$ и $y = e^{\lambda_2 x}$ два линейно независимых частных решения уравнения (6.2.3), и общее решение запишется в виде: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 произвольные постоянные.

2) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R}$, то, кроме частного решения $y = e^{\lambda x}$, существует второе линейно независимое с ним: $y = xe^{\lambda x}$ (это можно показать непосредственной подстановкой функции $y = xe^{\lambda x}$ в уравнение (6.2.3)), и общее решение запишется в виде: $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 xe^{\lambda x}$, где C_1, C_2 произвольные постоянные.

3) Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbf{C}$, то для того, чтобы выделить действительные линейно независимые решения уравнения (6.2.3), рассмотреть функцию $y = e^{(\alpha + i\beta)x}$, перейдя от показательной формы комплексной величины к тригонометрической:

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

Так как уравнение (6.2.3) с действительными коэффициентами, то решениями его будут вещественная и мнимая части комплекснозначного решения, то есть функции $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые являются линейно независимыми (что, вообще говоря, нужно проверять дополнительно). Таким образом, общее решение в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения выглядит так:

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Для решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(t) \tag{6.2.4}$$

имеет место общий метод – метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа. Однако в случае, когда в правой части стоит показательная или тригонометрическая функция, умноженная на многочлен, то часто гораздо эффективнее так называемый метод неопределённых коэффициентов. И то, и другое хорошо описаны в весьма распространенной литературе, например, в книгах [21, 22].

6.3. Моделирование экономических процессов

6.3.1. Модель макроэкономической динамики Харрода-Домара. При изложении данного раздела будет следовать подходу учебника [2]. Данная модель использует дифференциальные уравнения первого порядка. Обозначим доход через $Y(t)$, потребление и инвестиции как $C(t)$ и $I(t)$ соответственно, рассматривается закрытая экономика без экспорта и импорта и пусть $Y(t)=C(t)+I(t)$, то есть государственные расходы в модели не выделяются. Предполагается, что скорость роста дохода пропорциональна инвестициям и выполняется равенство $\dfrac{dY(t)}{dt}=\dfrac{1}{B}I(t)$ или $I(t)=B\dfrac{dY(t)}{dt}$. Коэффициент $\dfrac{1}{\beta}$ называется приростной капиталоотдачей, обратная ему величина B называется приростной капиталоёмкостью. С экономической точки зрения из этого предположения вытекают следующие условия модели: **1)** Инвестиционный лаг равен нулю, то есть инвестиции мгновенно переходят в прирост капитала K. В непрерывном времени это можно записать в виде соотношения $\dfrac{dK}{dt}=I$, откуда, в частности, следует, что $\dfrac{dY(t)}{dt}=\dfrac{1}{B}\dfrac{dK(t)}{dt}$. Очевидно, что после интегрирования последнего выражения получим $Y(t)=\dfrac{1}{B}K(t)+\mathrm{Const}$, где Const – произвольная постоянная. Очевидно, что тогда **2)** производственная функция $Y(t)$ линейна и зависит в точности от двух факторов производства – труда L и капитала; тогда $Y(t)=aL(t)+bK(t)+c$, где $b=\dfrac{1}{B}$, и либо $a=0$ (тогда выпуск не зависит от затрат труда, например, поскольку труд не является дефицитным ресурсом), либо затраты труда $L(t) \equiv L = const$ постоянны (то есть модель не учитывает технического прогресса).

Заметим, что в данной модели динамика объёма потребления задается экзогенно, поэтому можно рассматривать разные возможности.

1. Потребления нет, $C(t) \equiv 0$.

Итак $Y(t) = C(t) + I(t) = 0 + B\dfrac{dY(t)}{dt}$, то есть получаем простейшее дифференциальное уравнение первого порядка $B\dfrac{dY}{dt} = Y$, которое является с одной стороны уравнением с разделяющимися переменными; с другой стороны, линейным однородным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Решаем его, учитывая, что выпуск $Y > 0$: $\dfrac{dY}{Y} = \dfrac{1}{B}dt$; $\int \dfrac{dY}{Y} = \int \dfrac{1}{B}dt$; $\ln Y = \dfrac{1}{B}t + \ln A$ (A – произвольная постоянная); $\ln Y = \ln e^{\frac{1}{B}t} + \ln A$; $\ln Y = \ln\left(e^{\frac{1}{B}t} \cdot A\right)$; $Y = Ae^{\frac{1}{B}t}$. Пусть $t = 0$, тогда $Y(0) = A$, то есть решение можно записать в виде $Y = Y(0) \cdot e^{\frac{1}{B}t}$. То есть рост выпуска продукции при нулевом потреблении будет экспоненциальным.

2. Потребление постоянно, $C(t) \equiv C$. Тогда $Y(t) = C(t) + I(t) = C + B\dfrac{dY(t)}{dt}$, получаем линейным неоднородным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами: $B\dfrac{dY(t)}{dt} - Y(t) = C$. Решением этого уравнения будет сумма общего решения соответствующего линейного однородного уравнения, которое уже найдено: $Y = Ae^{\frac{1}{B}t}$, и какого-нибудь его частного решения. Непосредственной подстановкой в уравнение $B\dfrac{dY(t)}{dt} - Y(t) = C$ можно получить, что таким решением $Y = C$ будет, и общим решением уравнения $B\dfrac{dY(t)}{dt} - Y(t) = C$ является решение $Y = Ae^{\frac{1}{B}t} + C$. Подставив в решение $t = 0$, получим $A = Y(0) - C$, то есть $Y = (Y(0) - C)e^{\frac{1}{B}t} + C$.

Можно дальше изменять гипотезы о характере потребления в модели, и получая другие решения, делать выводы о макроэкономических показателях.

6.3.2. Линейные модели циклов деловой активности. Использование динамических систем для моделирования циклов деловой активности началось в 30-х годах двадцатого столетия. Одним из толчков к созданию таких моделей послужила деятельность Кейнса, который в книге [23] дал первое полное описание модели экономики в терминах макроэкономических переменных, таких как доход, потребление, сбережения и инвестиции, подготовив тем самым почву для модели делового цикла Самуэльсона (1939). Модель Самуэльсона учитывает только выполнение условий инвечтиционного мультипликатора (см. раздел 5.2) в сочетании с принципом акселерации, определяющим инвестиции.

Пусть ΔI - прирост инвестиций, ΔY - полный прирост дохода. Тогда в силу принципа акселератора $\Delta Y = \frac{\Delta I}{1-c} = \frac{\Delta I}{s}$, где s – склонность к накоплению, c – склонность к потреблению, а $\frac{1}{1-c} = \frac{1}{s} = \alpha$ есть инвестиционный мультипликатор. Принцип акселерации, высказанный в начале двадцатого века (см. библиографию в [19]), формализует тот экономический феномен, когда в ответ на незначительное увеличение потребления (или спроса, или выпуска продукции) величина инвестиций в следующем периоде растет гораздо более значительно. По-видимому, впервые в формальном виде принцип акселерации записал Джон Морис Кларк в 1917 году, а именно, Кларк предположил, что $I_t = \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ (индекс у переменных – временной период), где β – коэффициент «акселерации», или акселератор. Самуэльсон [24] предположил, что величина инвестиций пропорциональна изменению потребления, т.е. $I = \beta \Delta C$, где β – коэффициент «акселерации», или акселератор. Время в модели Самуэльсона дискретно, доход (Y) делится на потребление (C), накопление, совпадающее с инвестициями (I) и правительственные расходы (g): $Y_t = g_t + I_t + C_t$. Здесь $C_t = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) Y_{t-1} = cY_{t-1}$, где $\frac{1}{\alpha}$ – склонность к сбережению, а α – мультипликатор; $I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) = c\beta Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$, правительственные расходы принимаются за постоянную величину, т.е. $g_t = \iota$ (индекс у переменных – временной период). Таким образом, национальный доход переписывается в виде: $Y_t = \iota + c(\beta+1) Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$. Развивая идею Самуэльсона, Хикс в 1950 году показал [25], что акселерацию не обязательно привязывать только к изменению потребления, например, её можно связать с общественными издержками и др. Рассмотрев условие $I_t = \beta \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2})$, Хикс получил уравнение, очень похожее на уравнение Самуэльсона (подробный анализ уравнения Хикса можно найти, например, в книге [26]).

Нетрудно видеть, что модель Самуэльсона-Хикса представлена уравнениями, не являющимися дифференциальными. Это так называемые линейные разностные уравнения, и их изучение выходит за рамки курса математического анализа для направления «Экономика». Аналог линейной модели Самуэльсона-Хикса для непрерывного времени представил Филлипс, анализ которой можно найти, например, в книгах [27] и [26]. Пусть функция потребления имеет вид: $C(t) = cY(t)$. В модели Филлипса предполагается, что сохраняется неизменным отношение между желательным запасом капитала $K^d(t)$ и чистым доходом Y:

$K^d(t)=\nu Y(t)$, $\nu>0$. Предполагается, что фирма изменяет запас капитала, как только он начинает отличаться от желаемого: $I(t)=\xi\left(K^d(t)-K(t)\right)=\xi(\nu Y(t)-K(t))$, $\xi>0$. Коэффициент ξ – коррекционный параметр, выражающий скорость реакции инвестирования в ответ на разницу между актуальными и желаемыми запасами капитала. Для дальнейшего нам понадобится производная от инвестиций: $\frac{dI(t)}{dt}=\dot{I}(t)=\xi\left(\nu\dot{Y}(t)-I(t)\right)$. Пусть $A(t)$ есть экзогенно определённый автономный спрос. Тогда полный спрос есть сумма $C(t)+I(t)+A(t)$, а общее предложение есть $Y(t)$, и избыточный спрос в каждый период времени будет задан выражением $C(t)+I(t)+A(t)-Y(t)$. Предположим, что общее предложение меняется линейно относительно избыточного спроса: $\frac{dY(t)}{dt}=\dot{Y}(t)=\zeta(C(t)+I(t)+A(t)-Y(t))$, $\zeta>0$, где ζ – коррекционный параметр. Дифференцируя последнее соотношение, с учетом вида функции потребления получим: $\ddot{Y}(t)=\zeta\left(-(1-c)\dot{Y}(t)+\dot{I}(t)+\dot{A}(t)\right)$, или, с учетом выражения для $\dot{I}(t)$,

$$\ddot{Y}(t)=\zeta\left(-(1-c)\dot{Y}(t)+\xi\left(\nu\dot{Y}(t)-\left(\frac{\dot{Y}(t)}{\zeta}+(1-c)Y(t)-A(t)\right)\right)+\dot{A}(t)\right),$$

или

$$\ddot{Y}(t)+(\zeta(1-c)+\xi-\zeta\xi\nu)\dot{Y}(t)+\zeta\xi(1-c)Y(t)=\zeta\xi A(t)+\zeta\dot{A}(t).$$

Полагая для простоты $\dot{A}(t)=0$, $A(t)\equiv A$, получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка: $\ddot{Y}(t)+(\zeta(1-c)+\xi-\zeta\xi\nu)\dot{Y}(t)+\zeta\xi(1-c)Y(t)=\zeta\xi A$. Как и в дискретном случае, решением этого уравнения будет непрерывная функция, представляющая собой в общем случае либо сумму двух экспоненциальных функций, означающую либо рост, либо спад; либо сумму двух периодических функций, умноженную на экспоненциальную функцию, означающую либо затухающие, либо «разрастающиеся» колебания. Периодические движения возможны только в случае, когда коэффициент при $\dot{Y}(t)$ равен нулю, что является структурно неустойчивым случаем и в реальности никогда не достигается.

Известны другие линейные модели циклов деловой активности: модель Калецкого [28], модель Вогта [29] и др., более подробную библиографию см. в [12], [19]. Более полную информацию об экономических циклах и их моделировании в историческом и современном аспектах можно найти в обзорных статьях [30]-[31].

Простые уравнения и системы, рассмотренные в предыдущих пунктах, к сожалению, недостаточны для описания всего многообразия динамики, присутствующей в реальных, в том числе экономических, процессах. Эти уравнения и системы:

- не подходят для моделирования циклических процессов;
- не подходят для моделирования «сложной» (например, хаотической) динамики.

Чтобы описать процессы, отличные от асимптотического стремления к равновесию при прямом или обратном времени, необходимо привлекать нелинейные уравнения и системы, для которых возможно только качественное или численное исследование. При этом для описания сложной динамики в дискретном времени достаточно рассматривать уже одномерные отображения, в то время как в непрерывном времени периодические движения возможны, начиная с измерения 2, а хаотическая динамика – начиная с измерения 3. С моделями, использующими перечисленный математический аппарат можно ознакомиться, например, в книге [26]. Изучение соответствующей математики, однако, не входит в учебный план направления бакалавриата «Экономика».

Литература

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М., Наука, 1973, 640 с.
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник / Под общ. ред. д.э.н., проф. А.В. Сидоровича; МГУ им. М.В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. – М.: Издательство «Дело и сервис», 2001. – 368 с.
3. Сюдсетер К., Стрём А., Верк П. Справочник по математике для экономистов / Пер. с норвежск. Под ред. Ю.И.Смирновой. – СПб.: Экономическая школа, 2000. – 229 с.
4. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ. Часть 2. Дифференциальное исчисление функции одного переменного. Фонд компьютерных изданий ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. №449.12.06 от 12.07.2012 г. – 81 с.
5. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ. Часть 3. Интегральное исчисление функции одного переменного. Фонд компьютерных изданий ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. №470.12.06 от 08.10.2012 г. – 73 с.
6. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование: Учебник / Под науч. Ред. проф. Б.А. Суслакова. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2008. – 424 с.
7. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ функции многих переменных: Учебное пособие. Под общей ред. М.А. Солдатова. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2014. – 227 с.
8. Valdes B. *Economic Growth: Theory, Empirics and Policy*. – Cheltenham, UK – Northampton, MA, USA: Edward Elgar, 1999. 197 p.
9. Romer D., Advanced Macroeconomics. 3rd Edition. – McGraw-Hill - Irwin. 2006. 678 p.
10. Blanchard O.J., Fisher S. Lectures on Macroeconomics. – Cambridge, Massachusetts – London, England: MIT Press, 1989. 648 p.
11. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // American Economic Review. 1928. Vol.18. Supplement. Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association. December 1927. P. 139–165.
12. Douglas P.H., The Cobb–Douglas production function once again: its history, its testing, and some empirical values // Journal of Political Economy. 1976. Vol. 84, № 6. P.903–915.
13. Arrow K.J., Chenery H.B., Minhas B.C., Solow R.M. Capital-labor substitution and economic efficiency // *Review of Economics and Statistics*. 1961. V. 45. № 2. P. 225–250.
14. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1972. – 606 с.; Айрис – Пресс, 2002. – 576 с.

15. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применения. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 236 с.
16. Клейнер Г.Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // *Экономика и математические методы*. 2001. Т.37. № 3. С.111–126.
17. Клейнер Г.Б., Пионтковский Д.И. Многофакторные производственные функции с постоянными эластичностями предельной замены // *Экономика и математические методы*. 2000. Т. 36. № 1. С. 90 – 114.
18. Кузнецов Ю.А. Оптимальное управление экономическими системами: Учебное пособие. - Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2008. - 449с.
19. Puu T. Short History of the Multiplier-Accelerator Model // Business Cycle Dynamics: Models and Tools. – Springer-Verlag, 2006, p. 79-112.
20. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Интегралы несобственные и зависящие от параметра. Ряды: Учебное пособие. Под общей ред. М.А. Солдатова. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2014. – 184 с.
21. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., ГИФМЛ, 1958.- 468 с.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчсиление. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1965.- 424 с.
23. Keynes J.M. The General Theory of Employment Interest, and Money. – London: Macmillan, 1936.
24. Samuelson P.A. Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration // The Review of Economics and Statistics. 1939. Vol. 21. No. 2, p. 75-78.
25. Hicks J.R. A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. – Oxford University Press, 1950.
26. Gabisch G., Lorenz H.-W. Business Cycle Theory: A Survey of Methods and Concepts. – Springer-Verlag, 1989.
27. Allen R.G.D. Mathematical Economics. – London: Macmillan, 1956.
28. Kalecki M. A Theory of the Business Cycle // Review of Economic Studies. 1937. Vol.38. No. 1, pp. 77-97.
29. Vogt W. Fluktuationen in einer wachsender Wirtschaft unter klassischen Bedingunger // Wachstum, Einkommensverteilung und wirtschaftliches Gleichgewicht. – Berlin: Duncker und Humblot, 1969, pp. 61-72.
30. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. 17(224). – с. 50-61.
31. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. 18(224). – с. 42-57.

Евгений Валентинович **Круглов**

Юрий Алексеевич **Кузнецов**

Елена Анатольевна **Таланова**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАК ИНСТРУМЕНТ ЭКОНОМИСТА

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603095, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.