МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.В. Жидков
Н.В. Леонтьев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по специальности 01.05.01
«Фундаментальные математика и механика», направлениям подготовки
01.04.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород
2019

УДК 539.3
ББК 22.251
Ж69

Ж69 Жидков А.В., Леонтьев Н.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 55 с.

Рецензент: к.т.н., доцент **Е.А. Никитина**

В учебно-методическом пособии приводятся основные теоретические сведения теории определяющих соотношений механики сплошных сред, необходимые для математического моделирования поведения изотропных гиперупругих материалов. В качестве примеров рассмотрены модели эластомеров Муни-Ривлина и нео-Гука, определены материальные характеристики, необходимые при учёте конечных деформаций и поворотов. Приведено описание метода последовательных нагружений для геометрически и физически нелинейных квазистатических задач деформирования твёрдых тел и соответствующая конечно-элементная формулировка.

Содержание работы направлено на совершенствование профессиональной подготовки студентов института информационных технологий, математики и механики, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования в механике деформируемого твёрдого тела.

УДК 539.3
ББК 22.251

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическое и компьютерное моделирование сегодня является одним из основных методов научного исследования объектов и процессов, изучаемых в различных областях естествознания, и выполняет роль одного из эффективных инструментов по проектированию, разработке и сопровождению технологий и изделий в деятельности инженера. Математическая модель является абстрактным отражением существующего и создаваемого объекта, технологии, процесса. Анализ модели позволяет получать новые знания о моделируемом объекте или процессе. Универсальность математических моделей и их инвариантность по отношению к моделируемым объектам и процессам различной природы играют решающую роль при создании принципиально новых и совершенствовании существующих устройств и технологий. Многочисленные природные и технические явления описываются математическими моделями, представляемыми в виде систем уравнений и неравенств (дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных и др.). Современные численные методы позволяют с достаточной точностью решать такие системы уравнений с учетом реальной геометрии и нестационарного поведения моделируемых процессов. Изучение и анализ математической модели рассматривается как проведение вычислительного эксперимента в первую очередь для тех явлений, для которых натурный эксперимент либо невозможен, либо не может быть проведён в необходимом объёме.

Однако быстрое развитие современной компьютерной техники и компьютерных технологий приводит к необходимости модернизации старых и разработки новых моделей и вычислительных алгоритмов. Поэтому математическое моделирование активно использует современные достижения математических и естественнонаучных дисциплин, информационных и компьютерных технологий. При этом создание или использование математической модели требует ясного осознания естественнонаучного фундамента рассматриваемого явления, уверенного владения необходимым математическим аппаратом, вычислительными и информационными технологиями.

Теоретической основой при построении большинства моделей различных объектов и процессов в современном машиностроении и приборостроении являются главным образом механика и другие разделы физики, накопившие за более чем двух с половиной тысячелетний период своего развития богатейший опыт по моделированию поведения природных объектов и процессов.

Механика не изучает природные объекты непосредственно. Вместо них в механике рассматриваются некоторые идеализированные структуры (модели) – математические понятия, полученные абстрагированием некоторых общих свойств многих реальных природных объектов. Такими моделями являются: материальная точка, абсолютно твёрдое тело, сплошная деформируемая среда.

В основе классической механики лежат три закона Ньютона. Первый закон устанавливает наличие свойства инертности у материальных тел и постулирует существование инерциальных систем отсчёта. Второй закон Ньютона вводит понятие силы как меры взаимодействия тел и на основе эмпирических фактов постулирует связь между величиной и направлением силы, ускорением тела и его инертностью (характеризуемой массой). Третий закон объясняет, что происходит с двумя взаимодействующими телами и уточняет свойства понятия силы – постулирует наличие для каждой силы, действующей на первое тело со стороны второго, равной по величине и противоположной по направлению силы, действующей на второе тело со стороны первого. В механике сплошных сред, кроме законов Ньютона, используются законы термодинамики и определяющие соотношения, отражающие свойства конкретной среды (закон Гука для линейно-упругого тела, закон Ньютона для вязкой жидкости и др.).

Таким образом, рациональная механика есть часть математики, которая разрабатывает и исследует модели для описания движения и равновесия природных объектов. Подобно любому разделу математики, механика выделяет и анализирует общие черты изучаемых ею явлений, отвлекаясь от большинства деталей. Ставя своей целью не только описывать, но и предсказывать природные процессы, она пытается из всего многообразия и сложности природы выбрать наиболее важные и простые характеристики и установить связь между ними. На протяжении более двух тысячелетий механика является источником новых математических понятий и структур, математических моделей и методов исследования самых разнообразных явлений естествознания.

Необходимость теоретического анализа явлений, происходящих в деформируемых телах и средах, предполагает создание математического описания (модели) исследуемого явления. Применение математического моделирования для изучения движения деформируемых сред заключается в переходе от реальных тел и сред к их идеализированному упрощенному представлению и соответствующему символьно-математическому описанию. Модель выбирается таким образом, чтобы она отражала основные стороны явления и одновременно допускала достаточно простое математическое описание. По мере изучения явления строятся новые модели, более детально описывающие явление. Факторы, которые считаются второстепенными на первоначальных этапах построения математической модели, отбрасываются. Однако на последующих этапах изучения эти факторы могут быть включены в рассмотрение и математическая модель усложняется. В зависимости от сложности модели один и тот же фактор может быть как основным, так и второстепенным. Принятые допущения (гипотезы, приближения) определяют рамки применимости модели. Только в рамках этих гипотез будут справедливы все понятия и все полученные результаты. Обоснованием разумности и эффективности модели является сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Уравнения состояния простых упругих материалов

Соотношения, связывающие тензор напряжений Коши с величинами, определяющими движение частиц среды (если ограничиться только механическими процессами), называются **уравнениями состояния** или **определяющими уравнениями**[1]. Эти соотношения представляются некоторыми функционалами. Основываясь на понятиях «**однородности**»[2], «**причинности**»[3], «**близкодействия**»[4] (локальности взаимодействий, соседства) тензор напряжений представляется функционалом над градиентами места различных порядков. Высший порядок включаемого в функционал градиента определяет «**порядок материала**». Материалы (тела) называются «**простыми**», если в функционалы включается только градиент первого порядка. В их число входят не только классические материалы – упругое тело, вязкая жидкость, но и более широкие классы [1].

Простой материал называется **упругим**, если напряжённое состояние в нём в момент времени t не зависит от предыстории деформирования, а определяется деформацией в этот момент. «Упругий материал немедленно забывает», как протекало деформирование[5] [1].

Основываясь ещё на принципе материальной индифферентности[6] (см. приложение А) **тензор напряжений Коши** представляется тензорной функцией тензора искажений $\mathbf{U}$ (левой меры искажений) [1]

$$\mathbf{T} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}) \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}, \tag{1}$$

где $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}$, $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$ – градиент и транспонированный градиент вектора места в момент

[1] Конечно же, в уравнениях состояния должны быть внесены параметры, учитывающие изменяемость свойств материала, обусловленную происходившими в нём тепловыми, химическими и другими процессами. Введение дополнительных параметров только внесло бы в рассматриваемые вопросы лишние детали. Именно поэтому ограничимся чисто механическими процессами.

[2] Упрощая задачу, принимается, что среда является однородной (homogeneity), материально однообразной (material uniformity). Это означает, что уравнения состояния одинаково формулируются для всех частиц тела [1].

[3] «Материал не знает будущего, но сохраняет память о прошлом» [1].

[4] Напряжённое состояние материальной частицы определяется действием на неё лишь расположенных в её окрестности частиц [1].

[5] Постулируется существование материалов, для которых функционал памяти (функционал над предысторией движения) равен нулю. Этот постулат исключает из рассмотрения вязкие и упруго-вязкие материалы, поведение которых нельзя описать, не учитывая его связи с протеканием во времени предшествующего деформирования. Не требуется и знания последовательности, в которой материал подвергался деформированию, – исключено изучение пластичности. Речь идет только о материалах, полностью лишенных «памяти», не возникает вопроса об их предыстории. Такими свойствами наделяется упругий материал [1].

[6] Свойство материала, описываемое функционалом, не может зависеть от векторного базиса – функционал над градиентом места в одном базисе полностью сохраняет форму своей зависимости от градиента места в другом базисе. Такова формулировка принципа материальной индифферентности [1]. Принцип материальной индифферентности дает средство распознавания пригодности априорного задания тензора напряжений через задающие движения среды величины [1]. *Principle of material objectivity* ввёл **Уолтер Нолл** (*Walter Noll*) (07.01.1925, Берлин, Германия – 06.06.2017, Питсбург, США) – ученик К.А.Трусделла

времени t, $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}$ – набла-оператор Гамильтона дифференцирования по пространственным координатам отсчётного (недеформированного, начального) состояния. Градиент места $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}$, как всякий неособенный тензор, можно представить его полярным разложением

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V}, \tag{2}$$

в котором $\mathbf{O}$ – ортогональный тензор, сопровождающий деформацию; $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – определённо-положительные симметричные тензоры соответственно левой и правой меры искажений [1]. При новом обозначении

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}) = \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{G}^{\frac{1}{2}}\right) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{G}), \tag{3}$$

где

$$\mathbf{G} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

– мера деформации Коши-Грина [1] (правый тензор Коши-Грина [2]), уравнение состояния записывается ещё в виде

$$\mathbf{T} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{G}) \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}, \tag{5}$$

а для **тензора Пиола** и **энергетического тензора** [1]

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}) \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r} = J\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{G}) \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}, \tag{6}$$

$$\mathbf{T}^{\vee} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{G}). \tag{7}$$

В соотношении (6)

$$J = \det\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r} = \sqrt{\det\mathbf{G}} = \frac{dV}{d\overset{\circ}{V}} = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = \sqrt{\frac{G}{\mathrm{g}}} \tag{8}$$

– якобиан отображения координат отсчётного состояния в координаты актуального состояния

Статика и динамика

Далее необходимо рассмотреть две ситуации. Во-первых, речь может идти о статических только процессах – нагруженное тело находилось и продолжает оставаться в покое, так что определяющие деформацию величины вообще не зависят от времени, но зависят только от материальных координат.

Во-вторых, можно ограничиться рассмотрением материалов с «мгновенно исчезающей памятью». Определяющие деформацию величины остаются зависящими от времени, но вклад функционала памяти пренебрежимо мал.

Хотя формально в этих случаях уравнения состояния имеют один и тот же вид, но речь идет о существенно различных материалах.

Результаты, основанные на рассмотрении уравнения состояния для статических процессов, сохраняются для всех *простых* материалов. В статических условиях «теории упругости», как части механики сплошной среды, изучающей поведение упругих материалов, приписывается бóльшая общность, чем указывается в наименовании этого предмета.

Совершенно иначе приходится трактовать содержание уравнения состояния с зависящими от времени величинами. Здесь речь идет о весьма идеализированной модели материала, немедленно и независимо от предшествующего состояния реагирующей на деформирование в данный момент t. Изучение функционала памяти показывает, что такая идеализация приемлема, как «нулевое приближение», при достаточно медленно протекающих процессах деформирования; в следующем приближении в рассмотрение должны быть включены скорости этих процессов [1].

Отсчётная и актуальная конфигурации

Меры деформации определяются сравнением актуальной конфигурации с отсчётной. Это дает повод к высказыванию, что упругий материал наделен совершенной памятью об одной единственной конфигурации – отсчётной. С таким воззрением нельзя согласиться, так как эту конфигурацию можно назначить произвольно, ей, вообще говоря, нет нужды приписывать особые физические свойства. Произвол её выбора позволяет во многих случаях упростить уравнение состояния и это дает основание предпочесть некоторую специально выбираемую отсчетную конфигурацию [1].

Ограничения на зависимость уравнения состояния от градиента деформации, вытекающие из принципа материальной индифферентности, обусловлены соображениями *инвариантности актуальной конфигурации* сравниваемых движений в различных базисах. Отсчетная конфигурация оставалась неизменной. Рассмотрение вопросов, связанных с её выбором, позволит дать некоторую *классификацию* простых упругих материалов (твердое тело, жидкость) и точно определить понятие изотропии («одной из великих идей Коши» (Трусделл) [1]). Актуальная конфигурация в этих рассмотрениях предполагается неизменной [1].

Группа равноправности материала

Рассматривая различные отсчётные конфигурации с однозначной зависимостью между ними, разыскиваются такие преобразования одной отсчётной конфигурации в другую, которые оставляют неизменной функциональную зависимость тензора напряжений от градиента места, иначе говоря, запись уравнения состояния. Такие преобразования образуют группу, которая получила название «группа равноправности материала» (группа симметрии, группа изотропии). Эта группа является подгруппой унимодулярной группы (группы преобразований, сохраняющих объём: определитель равен ± 1).

Наименьшая возможная группа равноправности состоит из двух элементов: $\{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$ – тождественного преобразования и инверсии. Вообще говоря, любая подгруппа унимодулярной группы может быть группой равноправности не-которого материала. Для материалов максимальной симметрии группа равноправности – полная унимодулярная группа.

Отсчётные конфигурации, определяемые с помощью преобразования группы равноправности материала по некоторой выбранной отсчётной конфигурации, экспериментально от неё *неотличимы* и с этой точки зрения тождественны.

В общем случае группа равноправности зависит от выбора отсчётной конфигурации. В тоже время, поскольку речь идёт об одном и том же материале, представляется физически оправданным предположение о наличии связи между группами равноправности различных конфигураций, в общем случае не входящих в одну группу равноправности. Эта связь устанавливается соотношением, называемым правилом Нолла [1], которое, по существу, утверждает, что между группами равноправности различных конфигураций существует взаимно-однозначное соответствие. Отсюда следует, что существование группы равноправности и её мощность есть факты, не зависящие от выбора отсчётной конфигурации [3].

Таким образом, при произвольном выборе другой отсчётной конфигурации группа равноправности в общем случае изменяется, т.е. равноправность (в точном смысле элементов группы) зависит от выбора отсчётной конфигурации [3].

Однако возможны ситуации, когда группы равноправности совпадают при любом выборе отсчетной конфигурации. В этом случае материал называется **эгалитарным**[7]. Никакая деформация не может уменьшить или расширить эту группу или изменить ее. Согласно правилу Нолла группа равноправности эгалитарного материала должна удовлетворять уравнению, которое, как известно из теории групп, не имеет других решений, кроме так называемых тривиальных; под последними понимается или унимодулярная группа или группа, содержащая только тождественное преобразование [3].

Одним из простых примеров эгалитарного материала являются тела с наименьшей группой равноправности. К таким относятся, например, *твердые*, так называемые **триклинные** материалы, группой равноправности которых является $\{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$.

Для материалов максимальной симметрии группа равноправности – полная унимодулярная группа для всех конфигураций. *Простые жидкости* являются эгалитарными материалами, группой равноправности которых является унимодулярная группа [1, 3].

Изотропные материалы

Ортогональный тензор $\mathbf{O}$ ($\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{-1}$) унимодулярен ($\det \mathbf{O} = \pm 1$). Значит во множество преобразований некоторой отсчётной конфигурации, не обнаруживаемых опытом, могут входить и ортогональные преобразования [1].

Материал является **изотропным**, если существует отсчётная конфигура-

[7] Фр. *egalitaire* – уравнительный от *égalité* – равенство.

ция, для которой группа равноправности содержит полную ортогональную группу. Такая отсчётная конфигурация называется **неискажённым** состоянием материала. Любое ортогональное преобразование оставляет неискажённое состояние неискажённым [1].

В данном случае никакой поворот отсчетной конфигурации не может быть обнаружен экспериментально по отклику (реакции) материала. Из определения равноправности следует, что любой поворот конфигурации переводит ее в равноправную; отсюда следует, в частности, что изотропный материал обладает бесконечным множеством неискаженных конфигураций. Однако это не означает, что любая другая конфигурация этого же материала («искаженная») содержит в качестве группы равноправности (или ее подгруппы) полную ортогональную группу, что непосредственно следует из правила Нолла [3].

Как показывается в теории групп, ортогональная группа O является максимальной подгруппой унимодулярной группы U, т.е. если G — группа равноправности и $O \subset G \subset U$, то либо $G = O$, либо $G = U$. Таким образом, *группа равноправности изотропного материала является либо полной ортогональной, либо унимодулярной* [3].

В неискажённой отсчётной конфигурации, как показано в [1], тензор напряжений может быть только шаровым, т.е.

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E}. \tag{9}$$

Это означает, что напряжённое состояние в неискажённой конфигурации либо поле равномерного сжатия ($p > 0$), либо растяжения ($p < 0$), либо отсутствует ($p = 0$). При $p = 0$ неискажённое состояние называется **натуральным**.

ГИПЕРУПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ

Потенциал напряжений

Определение упругого материала, как простого материала, поведение которого не зависит от предыстории деформирования («лишённого памяти»), дополняется требованием существования потенциала напряжений w – функции градиента места $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}$ или тех или иных мер деформации. Вариация этой величины равна элементарной работе внешних сил, отнесённой к единице объёма в отсчётной конфигурации

$$\delta w = \delta' a_{(e)}. \tag{10}$$

В соответствии с этим определением потенциал напряжений представляет «меру запасённой энергии». Она называется удельной потенциальной энергией деформации (УПЭД).

Потенциальная энергия деформации тела в объёме V определяется выражением

$$W = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} w d\overset{\circ}{V}. \tag{11}$$

Существование потенциала напряжений w естественно связывается с приписываемой упругой среде способностью аккумулировать работу внешних сил при нагружении и возвращать «запасённую энергию» при разгружении. Представление об удельной потенциальной энергии деформации можно связать с термодинамическими потенциалами – свободной энергией (в изотермическом процессе) или внутренней энергией (в адиабатическом процессе).

Различают упругость по Коши, когда постулат о существовании УПЭД не выдвигается, и упругость по Грину, когда этот постулат принят[8]. Упругий по Грину материал по предложению Трусделла называют «гиперупругим», но многие авторы не видят необходимости в этом разделении [1].

Элементарная работа

Элементарная работа [1] внешних объёмных $\mathbf{f}_V$ и поверхностных сил $\mathbf{f}_S$ на виртуальном перемещении $\delta\mathbf{r}$ частиц среды в объёме V из *состояния равновесия* в её актуальной конфигурации равна

$$\delta' A_{(e)} = \int\limits_V \mathbf{f}_V \cdot \delta\mathbf{r} dV + \int\limits_S \mathbf{f}_S \cdot \delta\mathbf{r} dS. \tag{12}$$

$\delta' A_{(e)}$ означает, что речь идёт о малой величине порядка $\delta\mathbf{r}$, но отнюдь не о ва-

[8] Понятие о потенциале ввёл в математическую физику Дж.Грин (G.Green) в публикациях 1839-1841 гг.

риации функции; $\delta' A_{(e)}$ – элементарная работа, а не «вариация работы» – такой величины, вообще говоря, нет.

Преобразование (12) при переходе к интегрированию по объёму $\mathring{V}$ отсчётной конфигурации и использовании тензора напряжений Пиола приводит к соотношению

$$\delta' A_{(e)} = \int\limits_{\mathring{V}} \delta' a_{(e)} d\mathring{V} = \int\limits_{\mathring{V}} \mathbf{P} \cdot\cdot\, \delta \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{r}^{\mathrm{T}} d\mathring{V}, \qquad \delta' a_{(e)} = \mathbf{P} \cdot\cdot\, \delta \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{r}^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

Здесь $\delta' a_{(e)}$ – элементарная работа внешних сил, отнесённых к единице объёма отсчётной конфигурации (удельная элементарная работа). Её можно представить и через энергетический тензор напряжений $\mathbf{T}^{\vee}$

$$\delta' a_{(e)} = \frac{1}{2} J \mathbf{T}^{\vee} \cdot\cdot\, \delta \mathbf{G} = J \mathbf{T}^{\vee} \cdot\cdot\, \delta \mathbf{C}. \tag{14}$$

где

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) \tag{15}$$

– тензор деформации Коши-Грина. Эта формула объясняет наименование $\mathbf{T}^{\vee}$ энергетическим тензором напряжений. (В линейной теории элементарная работа определяется свёрткой тензора напряжений с линейным тензором деформации).

Представление через тензор напряжений Коши приводится к виду

$$\delta' a_{(e)} = J \mathbf{T} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{r})^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

Операции $\boldsymbol{\nabla}$ и δ не переставимы

$$\boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{R} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{R} \cdot \delta \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{r}, \qquad (\boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{r})^{\mathrm{T}} = \left(\delta \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{R}^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

По определению меры деформации Фингера (тензора обратного тензору меры деформации Альманзи)

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}^{-1} = (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{R}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}} \mathbf{r} \tag{18}$$

и используя переставимость скалярного произведения тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$ (это справедливо только в изотропном упругом теле) можно получить

$$\delta' a_{(e)} = \frac{1}{2} J \mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{F}^{-1} \cdot \delta \mathbf{F}. \tag{19}$$

По определению меры деформации Генки (натуральный логарифм правого тензора искажений)

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{V} \tag{20}$$

получим соотношение

$$\delta' a_{(e)} = J \mathbf{T} \cdot\cdot\, \delta \mathbf{H} \tag{21}$$

– это наиболее простое определение удельной элементарной работы через тензор напряжений Коши, пригодное, однако, лишь в изотропном упругом теле.

Соотношения (16), (19), (21) могут быть представлены через тензор

$$\boldsymbol{\tau} = J\mathbf{T}, \tag{22}$$

который называется тензором напряжений Кирхгофа.

Удельная потенциальная энергия деформации

Возвращаясь к (10) и используя выражение УПЭД (13), имеем

$$\delta w = \mathbf{P} \cdot\cdot\, \delta \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}. \tag{23}$$

Поэтому, принимая, что w – скалярная функция тензорного аргумента $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}$, по определению производной приходим к фундаментальному соотношению для тензора Пиола

$$\mathbf{P} = \frac{\partial w}{\partial \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}} = w,_{\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}}. \tag{24}$$

Индифферентный скаляр $w\left(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}\right)$ аналогично (3) представим выражением

$$w\left(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}\right) = w(\mathbf{U}) = w\left(\mathbf{G}^{\frac{1}{2}}\right). \tag{25}$$

Это позволяет рассматривать УПЭД функцией $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{G}$, но только для изотропного материала. Во всех случаях для неё сохраняется обозначение w

$$w\left(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}\right) = w(\mathbf{U}) = w(\mathbf{G}). \tag{26}$$

Используя правила дифференцирования по тензорному аргументу [1]

$$\mathbf{P} = w,_{\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}} = 2w,_{\mathbf{G}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}. \tag{27}$$

и далее

$$\mathbf{T}^{\vee} = 2J^{-1}w,_{\mathbf{G}}\,, \tag{28}$$

$$\mathbf{T} = 2J^{-1}\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot w,_{\mathbf{G}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}. \tag{29}$$

Представления тензоров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{T}$ в изотропном материале при неискажённой отсчётной конфигурации через w приобретают согласно правилу дифференцирования [1] вид

$$\mathbf{P} = w,_{\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}} = 2\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r} \cdot w,_{\mathbf{F}}\,, \tag{30}$$

$$\mathbf{T} = 2J^{-1}\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P} = 2J^{-1}\mathbf{F} \cdot w,_{\mathbf{F}}. \tag{31}$$

Перечисленные здесь формулы, исключая (30) (31), применимы ко всем упругим, а в статике ко всем простым материалам. Конкретному заданию функциональной зависимости УПЭД от её аргументов соответствует некоторая группа материалов. Пригодность принятой зависимости должна проверяться сравнением результатов решённых на её основе простейших задач (растяжение, простой сдвиг и т.д.) с данными измерений. Предложены также критерии, основанные на априорных представлениях о поведении упругого тела при нагружении [1].

Отметим, что переход от исходного соотношения (23) к представлению (24) тензора Пиола и следствия из него (26)-(31) законны в предположении, что вариация градиента места $\delta\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$ – независимая величина [1].

Уравнения состояния гиперупругого изотропного материала

Разнообразие имеющихся в литературе форм уравнений состояния объясняется возможностью выбора различных мер деформации и использования отличающихся друг от друга определений тензора напряжений.

Потенциальная энергия деформации представляется функцией инвариантов (относительно полной ортогональной группы) выбранной меры деформации. Отсчетной конфигурацией является неискаженное состояние; напряженное состояние в ней представляется шаровым тензором (9), описывающим равномерное во всех направлениях сжатие или растяжение; в частности, оно может отсутствовать, если отсчетная конфигурация – натуральная. Преобразование подобия натуральной конфигурации приводит к новой отсчетной неискаженной конфигурации, но уже не являющейся натуральной.

Далее w задается, как функция инвариантов меры деформации Коши-Грина или, что то же самое, меры Фингера

$$w = w\big(I_1(\mathbf{G}), I_2(\mathbf{G}), I_3(\mathbf{G})\big), \qquad I_k(\mathbf{G}) = I_k(\mathbf{F}). \tag{32}$$

УПЭД определена с точностью до аддитивной постоянной и может быть принята равной нулю в отсчётной конфигурации

$$w = w\big(I_1(\mathbf{E}), I_2(\mathbf{E}), I_3(\mathbf{E})\big) = w(3,3,1) = 0. \tag{33}$$

Уравнение состояния изотропного упругого тела в форме Фингера (31)

$$\mathbf{T} = 2J^{-1}\mathbf{F}\cdot w_{,\mathbf{F}} = 2J^{-1}(\psi_0\mathbf{E} + \psi_1\mathbf{F} + \psi_2\mathbf{F}^2). \tag{34}$$

Здесь введены обозначения функций от инвариантов $I_k(\mathbf{F})$

$$\psi_0 = I_3\frac{\partial w}{\partial I_3}, \quad \psi_1 = \frac{\partial w}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial w}{\partial I_2}, \quad \psi_2 = -\frac{\partial w}{\partial I_2}. \tag{35}$$

В гиперупругом материале функции ψ_Γ $(\Gamma = 0,1,2)$ связаны дифференциальными соотношениями

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial I_2}(\psi_1 + I_1\psi_2) = -\frac{\partial \psi_2}{\partial I_1}, \quad I_3\frac{\partial}{\partial I_3}(\psi_1 + I_1\psi_2) = \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1}, \\ -I_3\frac{\partial \psi_2}{\partial I_3} = \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2},\end{gathered} \tag{36}$$

получаемыми исключением потенциала w из формул (35).

Материальная производная тензора напряжений Коши (Варьирование напряжённого состояния)

Многие современные методики расчёта, основанные на пошаговых процедурах, требуют вычисления линеаризованных приращений напряжений, которые вычисляются как материальные производные от напряжений по времени.

Материальная производная тензора напряжений Коши $d\mathbf{T}/dt \equiv \dot{\mathbf{T}}$ представляет собой мгновенное изменение напряжений, которое при отсутствии явной зависимости от времени для упругих материалов связано с изменениями деформаций. Для определения связи между приращением напряжения и приращением деформации используются материальные определяющие соотношения. Как известно [1], тензор напряжений Коши является индифферентным тензором, однако, производная по времени (приращение) индифферентного тензора неиндифферентна. Определяющие соотношения, описывающие присущие сплошной среде свойства, должны единообразно формулироваться во всех базисах – ни один из них нельзя считать преимущественным. Это заставляет придать понятию производной по времени от индифферентной величины определение, сохраняющее индифферентность. Это достигается и не единственным способом[9].

Для определения изменения напряжений предполагается, что на актуальную конфигурацию среды наложено поле виртуальных перемещений $\eta\boldsymbol{\upsilon}$, η – малый параметр. Тензор напряжений Коши, если ограничиться линейными по η слагаемыми, станет равным

$$\mathbf{T}^{\times} = \mathbf{T} + \eta\dot{\mathbf{T}}, \quad \dot{\mathbf{T}} = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}(\mathbf{T}^{\times} - \mathbf{T}). \tag{37}$$

По определению тензор $\dot{\mathbf{T}}$ представляет конвективную производную $\mathbf{T}$, не отличающуюся от его материальной производной, поскольку $\mathbf{T}$ явно не зависит от времени (η отождествляется с δt).

Основываясь на представлении (34) и формулах варьирования деформированного состояния имеем

$$\dot{\mathbf{T}} = -\mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + 2J^{-1}\left[\psi_1\dot{\mathbf{F}} + \psi_2\left(\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}\right) + \left(\dot{\psi}_0\mathbf{E} + \dot{\psi}_1\mathbf{F} + \dot{\psi}_2\mathbf{F}^2\right)\right] \tag{38}$$

и пользуясь соотношением

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} \tag{39}$$

получим

$$\begin{gathered}2J^{-1}\left[\psi_1\dot{\mathbf{F}} + \psi_2\left(\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}\right)\right] = 2J^{-1}[\psi_1(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}) + \\ +\psi_2\mathbf{F}\cdot(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}) + \psi_2(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F})\cdot\mathbf{F}] =\end{gathered} \tag{40}$$

[9] Одним из них является производная Яуманна-Нолла

$$\mathbf{T}^{\nabla J} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{W}, \tag{*}$$

где

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon})$$

– тензор вихря (спин над полем вектора $\boldsymbol{\upsilon}$). Из (*) изменение тензора напряжений Коши

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{\nabla J} + \mathbf{W}\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}\cdot\mathbf{W},$$

Другие определения объективной производной можно получить, включив в выражение производной Яуманна-Нолла или отбросив в нём индифферентные слагаемые [1].

В общем виде индифферентная производная имеет вид:

$$\mathbf{T}^{\nabla} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}\cdot\mathbf{T} + \alpha_1\,\mathrm{Sym}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon})\cdot\mathbf{T} + \alpha_2\mathbf{T}\cdot\mathrm{Sym}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}) + \alpha_3\mathbf{T}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}).$$

$$= 2J^{-1}[(\psi_1\mathbf{F} + \psi_2\mathbf{F}^2)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot(\psi_1\mathbf{F} + \psi_2\mathbf{F}^2) + \psi_2\mathbf{F}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{F}].$$

Это выражение по (34), если ввести в рассмотрение тензор деформации скорости

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}), \tag{41}$$

приводится к виду

$$\begin{gathered} 2J^{-1}\left[\psi_1\dot{\mathbf{F}} + \psi_2\left(\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}\right)\right] = \\ = \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T} - 4J^{-1}(\psi_0\mathbf{D} - \psi_2\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}). \end{gathered} \tag{42}$$

Вычисляя затем производные $\dot{\psi}_\Gamma$ $(\Gamma = 0{,}1{,}2)$, получим

$$\begin{gathered} \dot{\psi}_\Gamma = \frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_1}\dot{I}_1 + \frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2}\dot{I}_2 + \frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_3}\dot{I}_3 = \\ = 2\left[\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_1}\mathbf{F} + \frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2}(I_1\mathbf{F} - \mathbf{F}^2) + \frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_3}I_3\mathbf{E}\right]\cdot\cdot\,\mathbf{D}, \end{gathered} \tag{43}$$

или

$$\dot{\psi}_\Gamma = 2(\theta_{0\Gamma}\mathbf{E} + \theta_{1\Gamma}\mathbf{F} + \theta_{2\Gamma}\mathbf{F}^2)\cdot\cdot\,\mathbf{D} = 2\sum_{N=0}^{2}\theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^N\cdot\cdot\,\mathbf{D}, \tag{44}$$

где суммирование выполняется по значениям $N = 0{,}1{,}2$, $\mathbf{F}^0 = \mathbf{E}$, коэффициенты $\theta_{N\Gamma}$ определяются по формулам аналогичным (35)

$$\theta_{0\Gamma} = I_3\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_3}, \quad \theta_{1\Gamma} = \frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2}, \quad \theta_{2\Gamma} = -\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2} \tag{45}$$

и структура зависимости $\theta_{N\Gamma}$ от ψ_Γ та же, что ψ_Γ от w; по формулам (35) коэффициенты $\theta_{N\Gamma}$ выражаются через вторые производные w по инвариантам. При этом обнаруживается симметричность этих коэффициентов по индексам N, Γ

$$\theta_{N\Gamma} = \theta_{\Gamma N}, \quad N, \Gamma = 0{,}1{,}2. \tag{46}$$

После подстановки в (38) приходим к представлению $\dot{\mathbf{T}}$

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{T}} = -\mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T} + \\ + 4J^{-1}\left(-\psi_0\mathbf{D} + \psi_2\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F} + \sum_{\Gamma=0}^{2}\sum_{N=0}^{2}\theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^\Gamma\mathbf{F}^N\cdot\cdot\,\mathbf{D}\right) \end{gathered} \tag{47}$$

Используя определение объективной производной по Труcделлу

$$\mathbf{T}^{\nabla Tr} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} - \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}, \tag{48}$$

получим линейное по $\mathbf{D}$ представление производной Трусделла тензора напряжений Коши

$$\begin{gathered} \mathbf{T}^{\nabla Tr} = 4J^{-1}\left(-\psi_0\mathbf{D} + \psi_2\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F} + \sum_{\Gamma=0}^{2}\sum_{N=0}^{2}\theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^\Gamma\mathbf{F}^N\cdot\cdot\,\mathbf{D}\right) = \\ = \frac{2}{J}\left\{-\psi_0(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \psi_2\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{C}_{\mathrm{II}}\cdot\cdot\,[\mathbf{F}\cdot(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})] + 2\sum_{\Gamma=0}^{2}\sum_{N=0}^{2}\theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^\Gamma\mathbf{F}^N\right\}\cdot\cdot\,\mathbf{D}. \end{gathered} \tag{49}$$

Обозначив в (49) тензор четвёртого ранга

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{2}{J}\left\{-\psi_0(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \psi_2\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot\cdot [\mathbf{F}\cdot(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})] + 2\sum_{\Gamma=0}^{2}\sum_{N=0}^{2}\theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^{\Gamma}\mathbf{F}^{N}\right\}, \quad (50)$$

приходим к представлению материальной производной тензора Коши

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\mathbf{D} - \mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T} = \\ = \boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\mathbf{D} - \mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\cdot\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{C}_{\mathrm{III}})\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}.\end{gathered} \quad (51)$$

В соотношениях (49)-(51) использованы **[1]**: симметричность тензоров напряжений Коши $\mathbf{T}$ и меры деформаций Фингера $\mathbf{F}$, правила двойного свёртывания и свойства изотропных тензоров четвёртого ранга

$$\mathbf{C}_{\mathrm{II}} = \mathbf{r}_s\mathbf{r}_k\mathbf{r}^s\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^s\mathbf{r}^k\mathbf{r}_s\mathbf{r}_k = \mathbf{r}^s\mathbf{r}_k\mathbf{r}_s\mathbf{r}^k = \mathbf{r}_s\mathbf{r}^k\mathbf{r}^s\mathbf{r}_k \quad (52)$$

и

$$\mathbf{C}_{\mathrm{III}} = \mathbf{r}_s\mathbf{E}\mathbf{r}^s = \mathbf{r}^s\mathbf{E}\mathbf{r}_s, \quad (53)$$

где $\mathbf{r}_{\mathrm{m}}$ и $\mathbf{r}^{\mathrm{m}}$ $(\mathrm{m} = 1{,}2{,}3)$ – векторы основного и взаимного базисов,

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_k\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^k\mathbf{r}_k \quad (54)$$

– единичный тензор.

В отсчетной конфигурации, если она натуральная ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$), тензор касательных модулей Трусделла (50) представляется соотношением:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\Lambda})_0 = 2\left(-\psi_0 + \psi_2\right)_0(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \\ +4\mathbf{E}\mathbf{E}(\theta_{00} + \theta_{11} + \theta_{22} + 2\theta_{01} + 2\theta_{02} + 2\theta_{12})_0.\end{gathered} \quad (55)$$

Тензор упругостей изотропной среды

Тензор упругостей – тензор четвертого ранга, равный производной тензора напряжений по мере деформации, через которую он представлен.

Конвективная производная $\dot{\mathbf{T}}$ определяется сверткой [1]

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_{,\mathbf{F}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}} \quad (56)$$

и теперь требуется к этому виду преобразовать выражение (38) тензора $\dot{\mathbf{T}}$.

Выражение дивергенции вектора $\boldsymbol{\upsilon}$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\mathbf{F}^{-1}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\mathbf{F}^{-1}\cdot\cdot(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}) = \\ = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\end{gathered} \quad (57)$$

и первое слагаемое в (38) заменяется выражением

$$-\mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = -\frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-1}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}. \quad (58)$$

Далее можно записать

$$(\psi_1\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{F})\cdot\dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}(\psi_1\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{F})\cdot(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}, \quad (59)$$

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C}_{\text{II}} \cdot\cdot\, \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\mathbf{C}_{\text{II}} \cdot\cdot\, [\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}})] \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}}.$$

Остаётся ещё записать формулы

$$\dot{\psi}_\Gamma = (\psi_\Gamma)_{,\mathbf{F}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}} = (\theta_{0\Gamma}\mathbf{F}^{-1} + \theta_{1\Gamma}\mathbf{E} + \theta_{2\Gamma}\mathbf{F}) \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}} = \sum_{N=0}^{2} \theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^{N-1} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}}. \qquad (60)$$

Получаем

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{T}} = \langle -\frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-1} + J^{-1}\{(\psi_1\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}}) + \\ +\psi_2\mathbf{C}_{\text{II}} \cdot\cdot\, [\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}})]\} + 2J^{-1}\sum_{\Gamma=0}^{2}\sum_{N=0}^{2} \theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^{\Gamma}\mathbf{F}^{N-1}\rangle \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}}.\end{gathered} \qquad (61)$$

Тензор четвертого ранга в угловых скобках по (56) и является тензором упругостей. С учётом симметричности коэффициентов $\theta_{N\Gamma}$ его развернутое представление имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_{\mathbf{F}} = -\frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-1} + J^{-1}\{(\psi_1\mathbf{E} + \psi_2\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}}) + \\ +\psi_2\mathbf{C}_{\text{II}} \cdot\cdot\, [\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}})]\} + 2J^{-1}[\theta_{00}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1} + \theta_{11}\mathbf{F}\mathbf{E} + \theta_{22}\mathbf{F}^2\mathbf{F} + \\ +\theta_{01}(\mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}) + \theta_{02}(\mathbf{E}\mathbf{F} + \mathbf{F}^2\mathbf{F}^{-1}) + \theta_{12}(\mathbf{F}\mathbf{F} + \mathbf{F}^2\mathbf{E})].\end{gathered} \qquad (62)$$

В отсчетной конфигурации, если она натуральная ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$),

$$\begin{gathered}(\mathbf{T}_{\mathbf{F}})_0 = (\psi_1 + 2\psi_2)_0(\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}}) + \\ +2\mathbf{E}\mathbf{E}(\theta_{00} + \theta_{11} + \theta_{22} + 2\theta_{01} + 2\theta_{02} + 2\theta_{12})_0.\end{gathered} \qquad (63)$$

Обратившись теперь к представлениям (45) коэффициентов $\theta_{N\Gamma}$ ($N, \Gamma = 0{,}1{,}2$) можно получить

$$\begin{gathered}(\mathbf{T}_{\mathbf{F}})_0 = (\psi_1 + 2\psi_2)_0(\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}}) + \\ +2\mathbf{E}\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial I_1} + 2\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3}\right)(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2)\right]_0.\end{gathered} \qquad (64)$$

Это соотношение позволяет выразить коэффициенты Ляме уравнения состояния линейно упругого тела через коэффициенты ψ_Γ и значения их производных в отсчетной натуральной конфигурации

$$\begin{gathered}\lambda = 4\left[\left(\frac{\partial}{\partial I_1} + 2\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3}\right)(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2)\right]_0 = \\ = 4\left[\left(\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3}\right)w\right]_0 + 4\left[\left(\frac{\partial}{\partial I_1} + 2\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3}\right)^2 w\right]_0.\end{gathered} \qquad (65)$$

$$\begin{gathered}\mu = 2(\psi_1 + 2\psi_2)_0 = 2(\psi_2 - \psi_0)_0 = \\ = 2\left[\left(\frac{\partial}{\partial I_1} + \frac{\partial}{\partial I_2}\right)w\right]_0 = -2\left[\left(\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3}\right)w\right]_0.\end{gathered} \qquad (66)$$

Конечные деформации и повороты

Характерной особенностью поведения эластомеров, типичными представителями которых являются каучуки и резины, является возможность испытывать большие перемещения и повороты без потери упругих свойств. Как уже отмечалось, современные пошаговые методики, позволяющие учитывать такое поведение материалов, требуют вычислений материальной производной от напряжений по времени. Наличие материальной производной тензора напряжений Коши, не являющейся объективной, приводит к нарушению требования индифферентности определяющих соотношений [3]. В соответствии же с требованием индифферентности вид уравнения не должен меняться при наложении жесткого движения. Причина кроется в неиндифферентности материальной производной тензора напряжений Коши, несмотря на индифферентность самого тензора напряжений Коши. Выход из данной ситуации обычно заключается в замене в определяющих соотношениях материальной производной на коротационную или конвективную производную [3].

При описании больших поворотов пространственная скорость напряжения Коши не обязательно исчезает, когда скорость деформаций стремится к нулю, т.е. простое жесткое вращение в материальной точке делает $\dot{\mathbf{T}} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, должна быть принята нейтрализованная от вращения (объективная) скорость напряжения с подходящей (правильной) конструкцией тензора касательных модулей. Можно определить ряд объективных скоростей напряжений, чтобы учесть влияние вращения на $\dot{\mathbf{T}}$ – различные объективные скорости, возникающие из предположений о скорости вращения в материальной точке.

В геометрически нелинейном анализе часто используется коротационная система координат, определяемая тензором поворота (собственно ортогональным тензором) полярного разложения тензора градиента деформации (2)

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathring{\mathbf{r}}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}, \qquad (67)$$

где $\mathbf{O}$ – собственно ортогональный тензор (тензор поворота), сопровождающий деформацию; $\mathbf{U}$ – положительно определённый симметричный тензор левой меры искажений [1]. В иностранной литературе [4, 5] обычно обозначают: градиент деформации $\mathbf{F} \equiv \partial \mathbf{r}/\partial \mathring{\mathbf{r}}$ – *the deformation gradient*, $\mathbf{R} \equiv \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$ – собственно ортогональный тензор поворота – *the proper, orthogonal rotation tensor*, $\mathbf{U}$ называют правым тензором искажений – *the right-symmetric positive stretch tensors* [6].

Тензор поворота $\mathbf{O}^{\mathrm{T}}(t)$ позволяет ввести локальную коротационную систему координат $\check{\mathbf{r}}$, поворачивающуюся вместе с материальной частицей

$$\check{\mathbf{r}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}(t) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{O}(t), \qquad (68)$$

где $\check{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки в коротационной системе координат, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки в глобальной системе координат. Будем считать $\mathbf{O}(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Коротационный тензор напряжений Коши определяется следующим образом:

$$\breve{\mathbf{T}} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{O}) \cdot\cdot\, \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot\cdot\, (\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}). \tag{69}$$

В [6] коротационный тензор напряжений Коши (*the unrotated or corotational Cauchy stress* [6]) обозначается $\boldsymbol{\sigma}_u \equiv \breve{\mathbf{T}}$.

Материальная производная $\breve{\mathbf{T}}$

$$\begin{gathered}\dot{\breve{\mathbf{T}}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} = \\ = -\mathbf{O} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} + \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T}^{\nabla \mathrm{C}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}.\end{gathered} \tag{70}$$

где кососимметричный тензор

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} = -\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}} = -\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} \tag{71}$$

представляет собой тензор угловой скорости (спин) [1] коротационной системы относительно пространственной[10].

Соотношение (70) может быть представлено в виде:

$$\mathbf{T}^{\nabla \mathrm{C}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\breve{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{O} = (\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{II}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}) \cdot\cdot\, \dot{\breve{\mathbf{T}}} = \dot{\breve{\mathbf{T}}} \cdot\cdot\, (\mathbf{O} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{II}} \cdot \mathbf{O}), \tag{72}$$

где $\mathbf{T}^{\nabla \mathrm{C}}$ – объективный тензор скорости напряжений, который по (70)

$$\mathbf{T}^{\nabla \mathrm{C}} = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \tag{73}$$

$\mathbf{T}^{\nabla \mathrm{C}}$ может интерпретироваться как скорость $\breve{\mathbf{T}}$ в текущей конфигурации [5] (объективная производная вида (73) называется производной Грина-Нагди [4, 6, 7]). Поскольку $\dot{\breve{\mathbf{T}}}$ и $\mathbf{T}^{\nabla \mathrm{C}}$ подчиняются правилам преобразования для тензоров второго порядка, они считаются объективными мерами скоростей напряжений. Ещё раз напомним, что тензор $\dot{\mathbf{T}}$ не подчиняется правилам преобразования тензоров второго порядка, и, следовательно, не является объективным.

Для гипоэластичных[11] материалов определяющие соотношения задаются в глобальной системе координат в виде:

$$\mathbf{T}^{\nabla} = \mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{D}, \tag{74}$$

где $\mathbf{T}^{\nabla}$ – некоторая объективная производная тензора напряжений Коши; $\mathbf{C}$ – тензор (4-го ранга) касательных модулей; $\mathbf{D}$ – тензор скорости деформации.

Считая, что производная $\mathbf{T}^{\nabla}$ в соотношении (74) является коротационной производной $\mathbf{T}^{\nabla \mathrm{C}}$ в (70), и используя последнее равенство в (70), получаем

$$\dot{\breve{\mathbf{T}}} = \mathbf{O} \cdot (\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{D}) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{II}} \cdot \mathbf{O}) \cdot\cdot\, (\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{D}) = [(\mathbf{O} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{II}} \cdot \mathbf{O}) \cdot\cdot\, \mathbf{C}] \cdot\cdot\, \mathbf{D}. \tag{75}$$

Пусть коротационный тензор скоростей деформаций $\breve{\mathbf{D}}$ определяется следующим образом

$$\breve{\mathbf{D}} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{O}) \cdot\cdot\, \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot\cdot\, (\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}), \tag{76}$$

тогда определяющие соотношения гипоэластичных материалов в коротационной системе представляются следующим образом:

$$\dot{\breve{\mathbf{T}}} = \breve{\mathbf{C}} \cdot\cdot\, \breve{\mathbf{D}}, \tag{77}$$

---

[10] В [1]: «штрихованной системы относительно нештрихованной».

[11] Гипоэластичные определяющие соотношения связывают объективные производные напряжения с объективными производными деформации. Чаще всего связь представляет собой мгновенную линейную связь с эффективными (касательными) модулями, которые зависят просто от текущих (объективных) напряжений.

где $\check{\mathbf{C}}$ – тензор (4-го ранга) касательных модулей в коротационной системе координат определяется соотношением

$$\check{\mathbf{C}} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{II}} \cdot \mathbf{O}) \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot (\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}). \tag{78}$$

Очевидно, что форма определяющих уравнений в коротационной системе (77) идентична форме (74) в глобальной системе координат, справедливой и в теории малых деформаций [5]. ***Заметим, что для изотропных материалов свойства не зависят от вращения*** [5] и, таким образом, для изотропных материалов

$$\check{\mathbf{C}} = \mathbf{C}. \tag{79}$$

Ясно, что определяющее уравнение (77) в коротационной системе координат не является единственным [5]. Во-первых, различные варианты поворотов в конечном итоге приведут к разным материальным реакциям (в [5] в качестве тензора $\mathbf{O}$ расматривается произвольный тензор поворота). Во-вторых, что является правильным выбором $\mathbf{D}$?

Если $\mathbf{D}$ – тензор деформации скорости (41), то тензор скорости деформации в коротационной системе координат выражается через скорости искажений

$$\check{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}\right) \tag{80}$$

и называется пространственной мерой скорости искажения [2] (*the unrotated deformation rate tensor* иногда *the rotation neutralized or corotational deformation rate* [6]).

Кроме того, использование тензоров деформации скорости $\mathbf{D}$ и скорости искажения $\check{\mathbf{D}}$ может быть обосновано тем, что соотношения между тензорами напряжений $\mathbf{T}$ и $\check{\mathbf{T}}$ (69) и сопряжёнными тензорами скоростей деформаций соответсвенно $\mathbf{D}$ и $\check{\mathbf{D}}$ (76) удовлетворяют условию инвариантности мощности деформирования относительно выбора системы координат:

$$\check{\mathbf{T}} \cdot\cdot \check{\mathbf{D}} = \mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}, \tag{81}$$

где величины в левой части равенства относятся к коротационной системе координат, а в правой – к глобальной системе координат. При отсутствии вращений в момент времени t тензоры $\mathbf{T}$ и $\check{\mathbf{T}}$ (соответственно $\mathbf{D}$ и $\check{\mathbf{D}}$) становятся одинаковыми.

Возникающая естественным образом в приведённых выше соотношениях (70) объективная производная Грина-Нагди (73) приводит к сложным вычислениям тензора спина $\mathbf{\Omega}$, требующих (71) производной тензора поворота [1], и неэффективности численного решения. Выход из данной ситуации заключается в замене производной Грина-Нагди другой, близкой к ней в некотором смысле, объективной производной.

В описании теоретических положений системы ANSYS отсутствует четкое указание на то, какая именно объективная производная тензора напряжений по времени подразумевается в материальных соотношениях. Анализ литературных источников [4, 5, 7] дает основание считать, что $\mathbf{T}^{\nabla}$ следует рассматривать как объективную производную Яуманна от напряжений Кирхгофа, взятую при условии, что текущее напряженно-деформированное состояние материала в данный момент времени принимается за «начальное», то есть:

$$\mathbf{T}^{\nabla} = \boldsymbol{\tau}^{\nabla J}, \tag{82}$$

где $\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$ – объективная производная Яумана тензора напряжений Кирхгофа $\boldsymbol{\tau}$. По определению:

$$\boldsymbol{\tau} = J\mathbf{T}, \tag{83}$$

J – якобиан градиента деформации (67).

Выражение для производной Яумана:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}, \tag{84}$$

где $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ – материальная производная по времени:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d}{dt}(J\mathbf{T}) = J\left[(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\upsilon})\mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}}\right], \tag{85}$$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\upsilon}$ – дивергенция скорости, $\mathbf{W}$ – тензор вихря (спин над полем вектора $\boldsymbol{\upsilon}$):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}). \tag{86}$$

Явное выражение для производной $\mathbf{T}^{\nabla}$ сразу получается из выражения для производной Яуманна $\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$, если в нем положить $J = 1$, что и отражает мысленный перенос «мгновенной начальной» конфигурации в «текущую». Очевидно, что при этом напряжения Коши $\mathbf{T}$ и Кирхгофа $\boldsymbol{\tau}$ будут совпадать, что и оправдывает обозначение $\mathbf{T}^{\nabla}$:

$$\mathbf{T}^{\nabla} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\upsilon})\mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}. \tag{87}$$

В работе [4] показано, что материальная составляющая касательной матрицы элемента вычисляется с использованием координат тензора касательных модулей $\mathbf{C}^{Tr}$, задающего связь тензора деформации скорости $\mathbf{D}$ с другой объективной производной тензора напряжений Коши – производной Трусделла $\mathbf{T}^{\nabla Tr}$:

$$\mathbf{T}^{\nabla Tr} = \mathbf{C}^{Tr} \cdot\cdot\, \mathbf{D}. \tag{88}$$

Сопоставляя явные выражения для объективных производных $\mathbf{T}^{\nabla}$ и $\mathbf{T}^{\nabla Tr}$, соответственно (87) и (48), можно показать, что между производными имеется простая связь [4]:

$$\mathbf{T}^{\nabla Tr} = \mathbf{T}^{\nabla} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \tag{89}$$

которая может быть представлена в виде

$$\mathbf{T}^{\nabla Tr} = \mathbf{T}^{\nabla} - \mathbf{C}^{*} \cdot\cdot\, \mathbf{D}, \tag{90}$$

где тензор 4-го ранга $\mathbf{C}^{*}$ не зависит от свойств материала, а определяется только напряжениями в текущем состоянии, а именно:

$$\mathbf{C}^{*} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot\, [\mathbf{T} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})]. \tag{91}$$

Таким образом, приходим к соотношению:

$$\mathbf{C}^{Tr} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^{*}. \tag{92}$$

Очевидно, что при построении матрицы жёсткости $\mathbf{C}^{*}$ даёт вклад в «геометрическую» жесткость элемента, определяемую только текущими напряжениями и деформированной формой.

МОДЕЛИ ЭЛАСТОМЕРОВ

Материал Муни-Ривлина (девять констант)

Упругий потенциал (плотность энергии деформации) представляется в виде:

$$W = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W_1(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_2(J) = \\ = \sum_{k=0}^{3}\sum_{n=0}^{3} c_{kn}(\bar{I}_1 - 3)^k (\bar{I}_2 - 3)^n + \frac{1}{d}(J-1)^2, \tag{93}$$

Первая часть $W_1(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$ упругого потенциала (93) представляет собой энергию изменения формы, вторая часть $W_2(J)$ – энергию изменения объёма.

Для удобства введём обозначения:

$$P_{kn} = P_{kn}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \equiv c_{kn}(\bar{I}_1 - 3)^k (\bar{I}_2 - 3)^n \tag{94}$$

– одночлены (мономы) полинома в правой части (93), $k, n = 0,1,2,3$; вектор-стобцы (матрицы размерности 4×1) степеней $(\bar{I}_1 - 3)^k$ и $(\bar{I}_2 - 3)^n$ соответственно:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 1 & (\bar{I}_1 - 3) & (\bar{I}_1 - 3)^2 & (\bar{I}_1 - 3)^3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{95}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 1 & (\bar{I}_2 - 3) & (\bar{I}_2 - 3)^2 & (\bar{I}_2 - 3)^3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{96}$$

Тогда первую часть (93) – полином – можно представить в виде произведения матриц

$$W_1(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \sum_{k=0}^{3}\sum_{n=0}^{3} P_{kn} = [S_1]^{\mathrm{T}}[c_{kn}][S_2], \tag{97}$$

где c_{kn}, d – константы материала; отличные от нуля коэффициенты c_{kn} показаны в матрице:

$$[c_{kn}]_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0 & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{20} & c_{21} & 0 & 0 \\ c_{30} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{98}$$

$\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ – инварианты модифицированной меры деформации Фингера

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-2/3}\mathbf{F} = I_3^{-1/3}\mathbf{F} \tag{99}$$

($\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3 = 1$ совпадают с инвариантами модифицированной меры деформации Коши-Грина); J – определитель (третий инвариант) градиента деформации $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$. $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, J связаны с инвариантами I_1, I_2, I_3 меры деформации Фингера $\mathbf{F}$ (18) соотношениями:

$$\bar{I}_1 = I_3^{-1/3} I_1, \quad \bar{I}_2 = I_3^{-2/3} I_2, \quad J = I_3^{1/2}. \tag{100}$$

Для удобства вычислений представим необходимые величины в матричном виде. Производные упругого потенциала (93):

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\partial W_1}{\partial \bar{I}_1} = \sum_{k=0}^{3}\sum_{n=0}^{3} \frac{k}{\bar{I}_1 - 3} P_{kn} =$$
$$= c_{10} + c_{11}(\bar{I}_2 - 3) + c_{12}(\bar{I}_2 - 3)^2 + \quad (101)$$
$$+2c_{20}(\bar{I}_1 - 3) + 2c_{21}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + 3c_{30}(\bar{I}_1 - 3)^2 =$$
$$= [S_1^I]^{\mathrm{T}}[c_{kn}][S_2],$$

где $[S_1^I] = \partial/\partial\bar{I}_1\ ([S_1])$ – вектор-столбец первых производных $[S_1]$.

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} = \frac{\partial W_1}{\partial \bar{I}_2} = \sum_{k=0}^{3}\sum_{n=0}^{3} \frac{n}{\bar{I}_2 - 3} P_{kn} =$$
$$= c_{01} + 2c_{02}(\bar{I}_2 - 3) + 3c_{03}(\bar{I}_2 - 3)^2 + \quad (102)$$
$$+c_{11}(\bar{I}_1 - 3) + 2c_{12}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + c_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2 =$$
$$= [S_1][c_{kn}][S_2^I]^{\mathrm{T}},$$

где $[S_2^I] = \partial/\partial\bar{I}_2\ ([S_2])$ – вектор-столбец первых производных $[S_2]$.

$$\frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial W_2}{\partial J} = \frac{2}{d}(J - 1), \quad (103)$$

Обозначим оператор производных

$$[\underline{\partial}] \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \bar{I}_1} & \dfrac{\partial}{\partial \bar{I}_2} & \dfrac{\partial}{\partial J} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (104)$$

– вектор-столбец (матрица размерности 3×1). Тогда производные упругого потенциала будут представляться вектор-столбцом, который обозначим

$$[\underline{\partial}W] \equiv [\underline{\partial}]W = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} & \dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} & \dfrac{\partial W}{\partial J} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \quad (105)$$

Тензор напряжений Коши определяется по (31), (34)

$$\mathbf{T} = 2J^{-1}\mathbf{F} \cdot w_{,\mathbf{F}} = 2J^{-1}(\psi_0 \mathbf{E} + \psi_1 \mathbf{F} + \psi_2 \mathbf{F}^2). \quad (106)$$

где упругий потенциал

$$w(I_1, I_2, I_3) = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W_1(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_2(J), \quad (107)$$

коэффициенты ψ_0, ψ_1, ψ_2 – функции от инвариантов $I_k(\mathbf{F})$ – определяются по следующим формулам:

$$\psi_0 = I_3 \frac{\partial w}{\partial I_3}, \quad \psi_1 = \frac{\partial w}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial w}{\partial I_2}, \quad \psi_2 = -\frac{\partial w}{\partial I_2}. \quad (108)$$

Запишем формулы (108) в векторно-матричном виде. Для этого обозначим

$$[\boldsymbol{\psi}] = [\psi_0 \quad \psi_1 \quad \psi_2]^{\mathrm{T}} \quad (109)$$

– вектор-столбец коэффициентов уравнения состояния, вектор-столбец производных упругого потенциала (107)

$$[\partial w] \equiv [\partial]w = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial I_1} & \dfrac{\partial w}{\partial I_2} & \dfrac{\partial w}{\partial I_3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{110}$$

матрицу, связывающую коэффициенты уравнения состояния $[\boldsymbol{\psi}]$ с производными упругого потенциала $[\partial w]$ в соотношении (108)

$$[\boldsymbol{\alpha}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_3 \\ 1 & I_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J^2 \\ 1 & J^{2/3}\bar{I}_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}. \tag{111}$$

Теперь коэффициенты (108) уравнения состояния (106) представляются в матричном виде:

$$[\boldsymbol{\psi}] = [\boldsymbol{\alpha}][\partial w]. \tag{112}$$

Для вычисления вектора производных (110) упругого потенциала $[\partial w]$ введён вектор-оператор дифференцирования по системе инвариантов (I_1, I_2, I_3)

$$[\partial] \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial I_1} & \dfrac{\partial}{\partial I_2} & \dfrac{\partial}{\partial I_3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{113}$$

– вектор-столбец (матрица размерности 3×1).

Матрица Якоби системы функций (100) $(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J)$ – функций инвариантов (I_1, I_2, I_3) меры деформаций Фингера (совпадают с инвариантами меры деформации Коши-Грина)

$$[\partial\bar{I}] \equiv \frac{\partial(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J)}{\partial(I_1, I_2, I_3)} = [\partial][\bar{I}_1 \quad \bar{I}_2 \quad J] = \begin{bmatrix} J^{-2/3} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-4/3} & 0 \\ -\dfrac{1}{3}J^{-2}\bar{I}_1 & -\dfrac{2}{3}J^{-2}\bar{I}_2 & \dfrac{1}{2}J^{-1} \end{bmatrix}. \tag{114}$$

Производные от упругого потенциала $[\partial w]$ вычисляются дифференцированием W как сложной функции и векторно-матричном виде представляются следующим образом:

$$[\partial w] = [\partial\bar{I}][\underline{\partial}W]. \tag{115}$$

Вектор-столбец коэффициентов (108) уравнения состояния (106) в соответствии с (112) и (115) может быть представлен в виде:

$$[\boldsymbol{\psi}] = [\boldsymbol{\alpha}][\partial w] = [\boldsymbol{\alpha}][\partial\bar{I}][\underline{\partial}W] = [\boldsymbol{\beta}][\underline{\partial}W], \tag{116}$$

где матрица

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{\beta}] \equiv [\boldsymbol{\alpha}][\partial\bar{I}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J^2 \\ 1 & J^{2/3}\bar{I}_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{-2/3} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-4/3} & 0 \\ -\dfrac{1}{3}J^{-2}\bar{I}_1 & -\dfrac{2}{3}J^{-2}\bar{I}_2 & \dfrac{1}{2}J^{-1} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3}\bar{I}_1 & -\dfrac{2}{3}\bar{I}_2 & \dfrac{1}{2}J \\ J^{-2/3} & J^{-2/3}\bar{I}_1 & 0 \\ 0 & -J^{-4/3} & 0 \end{bmatrix},\end{gathered} \tag{117}$$

Тензор четвёртого ранга (50)

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{2}{J}\left\{-\psi_0(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \psi_2\, \mathbf{F}\cdot\mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot\cdot \left[\mathbf{F}\cdot(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right] + 2\sum_{\Gamma=0}^{2}\sum_{N=0}^{2}\theta_{N\Gamma}\mathbf{F}^{\Gamma}\mathbf{F}^{N}\right\}, \quad (118)$$

где коэффициенты $\theta_{N\Gamma} = \theta_{\Gamma N}$ $(N, \Gamma = 0{,}1{,}2)$ – также функции от инвариантов $I_k(\mathbf{F})$ – определяются по формулам (45) следующим образом:

$$\theta_{0\Gamma} = I_3\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_3}, \quad \theta_{1\Gamma} = \frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2}, \quad \theta_{2\Gamma} = -\frac{\partial\psi_\Gamma}{\partial I_2} \quad (119)$$

Как уже отмечалось, структура зависимости $\theta_{N\Gamma}$ от ψ_Γ та же, что ψ_Γ от w; по формулам (108) и (119) коэффициенты $\theta_{N\Gamma}$ выражаются через вторые производные w по инвариантам.

Обозначим матрицу вторых производных упругого потенциала (93)

$$\left[\underline{\partial}^2 W\right] \equiv \left[\underline{\partial}\right]\left[\underline{\partial} W\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_1^2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_1} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial^2 W}{\partial J^2} \end{bmatrix}_{3\times 3}, \quad (120)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_1^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \bar{I}_1^2} &= \sum_{k=0}^{3}\sum_{n=0}^{3}\frac{k(k-1)}{\left(\bar{I}_1 - 3\right)^2}P_{kn} = \\ &= 2c_{20} + 2c_{21}\left(\bar{I}_2 - 3\right) + 6c_{30}\left(\bar{I}_1 - 3\right) = \\ &= \left[S_1^{II}\right]^{\mathrm{T}}[c_{kn}][S_2], \end{aligned} \quad (121)$$

$[S_1^{II}]$ – вектор-столбец вторых производных $[S_1]$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} &= \sum_{k=0}^{3}\sum_{n=0}^{3}\frac{kn}{\left(\bar{I}_1 - 3\right)\left(\bar{I}_2 - 3\right)}P_{kn} = \\ &= c_{11} + 2c_{12}\left(\bar{I}_2 - 3\right) + c_{21}\left(\bar{I}_1 - 3\right) = \\ &= [S_1^{I}]^{\mathrm{T}}[c_{kn}][S_2^{I}], \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_2^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \bar{I}_2^2} &= \sum_{k=0}^{3}\sum_{n=0}^{3}\frac{n(n-1)}{\left(\bar{I}_2 - 3\right)^2}P_{kn} = \\ &= 2c_{02} + 6c_{03}\left(\bar{I}_2 - 3\right) + 2c_{12}\left(\bar{I}_1 - 3\right) = \\ &= [S_1]^{\mathrm{T}}[c_{kn}][S_2^{II}], \end{aligned} \quad (123)$$

$[S_2^{II}]$ – вектор-столбец вторых производных $[S_2]$;

$$\frac{\partial^2 W}{\partial J^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial J^2} = \frac{2}{d}. \quad (124)$$

Матрица производных для ψ_0, ψ_1, ψ_2

$$[\partial\boldsymbol{\psi}] = [\partial][\boldsymbol{\psi}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\psi_0}{\partial I_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial I_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial I_1} \\ \dfrac{\partial\psi_0}{\partial I_2} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial I_2} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial I_2} \\ \dfrac{\partial\psi_0}{\partial I_3} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial I_3} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial I_3} \end{bmatrix}_{3\times 3}, \tag{125}$$

определяется формулами дифференцирования сложных функций аналогичными (115)

$$[\partial\boldsymbol{\psi}] = \left[\partial\bar{I}\right]\left[\underline{\partial}\boldsymbol{\psi}\right], \tag{126}$$

где обозначено:

$$\left[\underline{\partial}\boldsymbol{\psi}\right] = \left[\underline{\partial}\right][\boldsymbol{\psi}]^{\mathrm{T}} \tag{127}$$

– матрица производных аналогичная (125), коэффициенты которой в соответствии с соотношениями (116) вычисляются следующим образом

$$\begin{gathered} \left[\underline{\partial}\boldsymbol{\psi}\right] = \left[\underline{\partial}\right][\boldsymbol{\psi}]^{\mathrm{T}} = \left[\underline{\partial}\right]\left([\boldsymbol{\beta}]\left[\underline{\partial}W\right]\right)^{\mathrm{T}} = \left[\underline{\partial}\right]\left(\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\right) = \\ = \left[\underline{\partial}^2 W\right][\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\bar{I}_1}\left([\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\right) + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\bar{I}_2}\left([\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\right) + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial J}\left([\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\right) = \\ = \left[\underline{\partial}^2 W\right][\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{\gamma}], \end{gathered} \tag{128}$$

где

$$\begin{gathered} [\boldsymbol{\gamma}] \equiv \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\bar{I}_1}\left([\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\right) + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\bar{I}_2}\left([\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\right) + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial J}\left([\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\right) = \\ = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-2/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\left[\underline{\partial}W\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{2}{3}J^{-5/3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{3}J^{-5/3}\bar{I}_1 & \dfrac{4}{3}J^{-7/3} \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial W}{\partial\bar{I}_1} & J^{-2/3}\dfrac{\partial W}{\partial\bar{I}_2} & 0 \\ -\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial W}{\partial\bar{I}_2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial J} & -\dfrac{2}{3}J^{-5/3}\left(\dfrac{\partial W}{\partial\bar{I}_1} + \bar{I}_1\dfrac{\partial W}{\partial\bar{I}_2}\right) & \dfrac{4}{3}J^{-7/3}\dfrac{\partial W}{\partial\bar{I}_2} \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{129}$$

Тогда коэффициенты матрицы касательных модулей

$$\begin{gathered} [\theta_{N\Gamma}] = [\boldsymbol{\alpha}][\partial\boldsymbol{\psi}] = [\boldsymbol{\alpha}]\left[\partial\bar{I}\right]\left[\underline{\partial}\boldsymbol{\psi}\right] = [\boldsymbol{\beta}]\left[\underline{\partial}\boldsymbol{\psi}\right] = \\ = [\boldsymbol{\beta}]\left(\left[\underline{\partial}^2 W\right][\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{\gamma}]\right) = [\boldsymbol{\beta}]\left[\underline{\partial}^2 W\right][\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}} + \left[\underline{\boldsymbol{\gamma}}\right], \end{gathered} \tag{130}$$

где

$$
\left[\underline{\boldsymbol{\gamma}}\right] \equiv [\boldsymbol{\beta}][\boldsymbol{\gamma}] =
$$

$$
= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\bar{I}_1 & -\frac{2}{3}\bar{I}_2 & \frac{1}{2}J \\ J^{-2/3} & J^{-2/3}\bar{I}_1 & 0 \\ 0 & -J^{-4/3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} & J^{-2/3}\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} & 0 \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial J} & -\frac{2}{3}J^{-5/3}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2}\right) & \frac{4}{3}J^{-7/3}\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \end{bmatrix} = \tag{131}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{9}\bar{I}_1\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \frac{4}{9}\bar{I}_2\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} + \frac{1}{4}J\frac{\partial W}{\partial J} & -\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_1\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2}\right) & \frac{2}{3}J^{-4/3}\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \\ -\frac{1}{3}J^{-2/3}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_1\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2}\right) & J^{-4/3}\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} & 0 \\ \frac{2}{3}J^{-4/3}\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

По вычисленным коэффициентам ψ_Γ и $\theta_{N\Gamma}$ определяется тензор 4-го ранга $\boldsymbol{\Lambda}$, необходимый для определения касательных модулей упругости.

Неогуков материал

Наиболее распространено [1] задание удельной потенциальной энергии деформации **несжимаемого** упругого тела в форме двухконстантного потенциала Муни

$$
w = C_1(I_1(\mathbf{G}) - 3) + C_2(I_2(\mathbf{G}) - 3). \tag{132}
$$

Коэффициенты потенциала $C_1 + C_2 = \mu/2$, где μ – модуль сдвига при малых деформациях. Упрощённой формой потенциала Муни

$$
w = C_1(I_1 - 3) \tag{133}
$$

является «неогуков» потенциал, иначе называемый потенциалом Трелоара по имени автора, получившего это представление из рассмотрения конструктивной модели резины, как системы связанных друг с другом длинных молекулярных цепочек.

Для **почти несжимаемого** упругого тела удельная потенциальная энергия деформации неогукова материала является упрощённой формой девятиконстантного потенциала Муни-Ривлина (93)

$$
W = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \tag{134}
$$

с аналогичными обозначениями используемых величин

$$
J = \sqrt{I_3(\mathbf{F})}, \quad \bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1(\mathbf{F}) = I_3^{-1/3}I_1, \quad \bar{I}_2 = J^{-4/3}I_2(\mathbf{F}) = I_3^{-2/3}I_2, \tag{135}
$$

где $\mathbf{F}$ – мера деформации Фингера (18):

$$
\mathbf{F} = \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r} = \mathbf{E} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{u} + \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{u} \tag{136}
$$

Коэффициенты уравнения состояния (34)

$$\psi_0 = I_3 \frac{\partial w}{\partial I_3} = I_3 \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial I_3} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial I_3} + \frac{\partial W}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial I_3} \right) =$$

$$= I_3 \left[\frac{\mu}{2} I_1 \left(-\frac{1}{3} \right) I_3^{-4/3} + \frac{1}{d} \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left(\sqrt{I_3} - 1 \right) \right] = \tag{137}$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{\mu}{2} I_1 I_3^{-1/3} + \frac{1}{d} \left(I_3 - I_3^{1/2} \right),$$

$$\psi_1 = \frac{\partial w}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial w}{\partial I_2} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial I_2} = \frac{\mu}{2} I_3^{-1/3}, \tag{138}$$

$$\psi_2 = -\frac{\partial w}{\partial I_2} = 0. \tag{139}$$

Уравнение состояния неогукова материала

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} (\psi_0 \mathbf{E} + \psi_1 \mathbf{F} + \psi_2 \mathbf{F}^2) =$$

$$= 2J^{-1} \left\{ \left[-\frac{1}{3} \frac{\mu}{2} I_1 J^{-2/3} + \frac{1}{d} \left(I_3 - I_3^{1/2} \right) \right] \mathbf{E} + \frac{\mu}{2} J^{-2/3} \mathbf{F} \right\} =$$

$$= J^{-1} \mu \left(J^{-2/3} \mathbf{F} - \frac{J^{-2/3} I_1}{3} \mathbf{E} \right) + \frac{2}{d} (J - 1) \mathbf{E} = \tag{140}$$

$$= J^{-1} \mu \left(\bar{\mathbf{F}} - \frac{\bar{I}_1}{3} \mathbf{E} \right) + \frac{2}{d} (J - 1) \mathbf{E}.$$

Коэффициенты тензора касательных модулей

$$\theta_{00} = I_3 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} = I_3 \left[\frac{1}{9} \frac{\mu}{2} I_1 I_3^{-4/3} + \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{2} I_3^{-1/2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{9} \frac{\mu}{2} I_1 I_3^{-1/3} + \frac{1}{d} \left(I_3 - \frac{1}{2} I_3^{1/2} \right), \tag{141}$$

$$\theta_{10} = \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} = -\frac{1}{3} \frac{\mu}{2} I_3^{-1/3}, \tag{142}$$

$$\theta_{20} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} = 0, \tag{143}$$

$$\theta_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial I_2} = 0, \tag{144}$$

$$\theta_{21} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial I_2} = 0, \tag{145}$$

$$\theta_{22} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial I_2} = 0. \tag{146}$$

Подставляем в (50)

$$\mathbf{\Lambda} = 4J^{-1}\left[-\psi_0 \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \theta_{00}\mathbf{EE} + \theta_{10}(\mathbf{EF} + \mathbf{FE})\right] =$$
$$= \frac{2}{3}\mu J^{-5/3}\left[I_1\left(\frac{1}{2}\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \frac{1}{2}\mathbf{C}_{\mathrm{III}} + \frac{1}{3}\mathbf{EE}\right) - (\mathbf{EF} + \mathbf{FE})\right] +$$
$$+\frac{4}{d}\left[\left(J - \frac{1}{2}\right)\mathbf{EE} - (J-1)\frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right] = \qquad (147)$$
$$= \frac{2}{3}\mu J^{-1}\left[\bar{I}_1\left(\frac{1}{2}\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \frac{1}{2}\mathbf{C}_{\mathrm{III}} + \frac{1}{3}\mathbf{EE}\right) - \left(\mathbf{E\bar{F}} + \mathbf{\bar{F}E}\right)\right] +$$
$$+\frac{4}{d}\left[\left(J - \frac{1}{2}\right)\mathbf{EE} - (J-1)\frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right].$$

При $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ (в отсчётном состоянии) получим

$$\mathbf{\Lambda} = 4J^{-1}\left[-\psi_0 \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + (\theta_{00} + 2\theta_{10})\,\mathbf{EE}\right]. \qquad (148)$$

при этом

$$J = 1,\ \ I_1 = 3,\ \ I_2 = 3,\ \ I_3 = 1,$$
$$\psi_0 = -\frac{\mu}{2},\ \ \psi_1 = \frac{\mu}{2},\ \ \psi_2 = 0, \qquad (149)$$
$$\theta_{00} = \frac{1}{3}\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2d},\ \ \theta_{10} = -\frac{1}{3}\frac{\mu}{2},\ \ \theta_{20} = \theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{22} = 0$$

и (148) представляется в виде

$$\mathbf{\Lambda} = 4\left[\frac{\mu}{2}\frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \left(-\frac{1}{3}\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2d}\right)\mathbf{EE}\right] =$$
$$= \mu(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \left(\frac{2}{d} - \frac{2\mu}{3}\right)\mathbf{EE}. \qquad (150)$$

Ненулевые координаты $\mathbf{\Lambda}$

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = \frac{2}{d} + \frac{4\mu}{3},$$
$$C_{1221} = C_{1331} = C_{2112} = C_{2332} = C_{3113} = C_{3223} = 2\mu, \qquad (151)$$
$$C_{1122} = C_{1133} = C_{2211} = C_{2233} = C_{3311} = C_{3322} = \frac{2}{d} - \frac{2\mu}{3}.$$

В отсчетной конфигурации, если она натуральная ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$), тензор упругостей $\mathbf{T_F}$, определяемый формулой (62), для неогукова материала вычисляется следующим образом:

$$(\mathbf{T_F})_0 = (\psi_1 + 2\psi_2)_0(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) +$$
$$+2\mathbf{EE}(\theta_{00} + \theta_{11} + \theta_{22} + 2\theta_{01} + 2\theta_{02} + 2\theta_{12})_0 = \qquad (152)$$
$$= \frac{\mu}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) + \mathbf{EE}\left(\frac{1}{d} - \frac{2}{3}\frac{\mu}{2}\right),$$

при этом производная меры деформации Фингера в (61)

$$\left(\dot{\mathbf{F}}\right)_0 = 2\mathbf{D} \qquad (153)$$

и удвоенные координаты тензора упругостей совпадают с коэффициентами матрицы жесткостей линейно упругого однородного изотропного материала.

Рассмотрим неогуков материал как частный случай девятиконстантного материала Муни-Ривлина (93). В этом случае только один из коэффициентов c_{kn} отличен от нуля: $c_{10} = \mu/2$, где μ – модуль сдвига изотропного материала.

Вектор производных упругого потенциала

$$[\underline{\partial} W]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c_{10} & 0 & \frac{2}{d}(J-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{2} & 0 & \frac{2}{d}(J-1) \end{bmatrix}. \qquad (154)$$

Коэффициенты (108) уравнения состояния (106) по (116) и (117):

$$\begin{gathered} [\boldsymbol{\psi}] = [\boldsymbol{\beta}][\underline{\partial} W] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\bar{I}_1 & -\frac{2}{3}\bar{I}_2 & \frac{1}{2}J \\ J^{-2/3} & J^{-2/3}\bar{I}_1 & 0 \\ 0 & -J^{-4/3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mu}{2} \\ 0 \\ \frac{2}{d}(J-1) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\bar{I}_1 \frac{\mu}{2} + \frac{1}{d}J(J-1) & J^{-2/3}\frac{\mu}{2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ = \frac{\mu}{2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\bar{I}_1 & J^{-2/3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{d}[J(J-1) \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \qquad (155)$$

Уравнение состояния

$$\begin{gathered} \mathbf{T} = 2J^{-1}(\psi_0 \mathbf{E} + \psi_1 \mathbf{F} + \psi_2 \mathbf{F}^2) = \\ = 2J^{-1}\left\{\left[-\frac{1}{3}\bar{I}_1\frac{\mu}{2} + \frac{1}{d}J(J-1)\right]\mathbf{E} + J^{-2/3}\frac{\mu}{2}\mathbf{F}\right\} = \\ = J^{-1}\mu\left(-\frac{\bar{I}_1}{3}\mathbf{E} + \bar{\mathbf{F}}\right) + \frac{2}{d}(J-1)\mathbf{E} \end{gathered} \qquad (156)$$

совпадает с (140).

Матрица вторых производных упругого потенциала

$$[\underline{\partial}^2 W] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_1^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} & 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial J^2} \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{d} \end{bmatrix}, \qquad (157)$$

Коэффициенты матрицы касательных модулей

$$\begin{gathered} [\theta_{N\Gamma}] = [\boldsymbol{\beta}][\underline{\partial}^2 W][\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}} + [\underline{\boldsymbol{\gamma}}] = \\ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\bar{I}_1 & -\frac{2}{3}\bar{I}_2 & \frac{1}{2}J \\ J^{-2/3} & J^{-2/3}\bar{I}_1 & 0 \\ 0 & -J^{-4/3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\bar{I}_1 & J^{-2/3} & 0 \\ -\frac{2}{3}\bar{I}_2 & J^{-2/3}\bar{I}_1 & -J^{-4/3} \\ \frac{1}{2}J & 0 & 0 \end{bmatrix} + [\underline{\boldsymbol{\gamma}}] = \end{gathered} \qquad (158)$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{J}{d} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3}\bar{I}_1 & J^{-2/3} & 0 \\ -\dfrac{2}{3}\bar{I}_2 & J^{-2/3}\bar{I}_1 & -J^{-4/3} \\ \dfrac{1}{2}J & 0 & 0 \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{9}\bar{I}_1\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \dfrac{4}{9}\bar{I}_2\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} + \dfrac{1}{4}J\dfrac{\partial W}{\partial J} & -\dfrac{1}{3}J^{-2/3}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_1\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_2}\right) & \dfrac{2}{3}J^{-4/3}\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \\ -\dfrac{1}{3}J^{-2/3}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_1\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_2}\right) & J^{-4/3}\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} & 0 \\ \dfrac{2}{3}J^{-4/3}\dfrac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad (158)
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{J^2}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{9}\bar{I}_1\dfrac{\mu}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{d}J(J-1) & -\dfrac{1}{3}J^{-2/3}\dfrac{\mu}{2} & 0 \\ -\dfrac{1}{3}J^{-2/3}\dfrac{\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{3}\frac{\mu}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3}\bar{I}_1 & -J^{-2/3} & 0 \\ -J^{-2/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{1}{d}\begin{bmatrix} J(2J-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Коэффициенты полученной матрицы совпадают с выражениями (141)-(146).

ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим задачу о деформировании твёрдого тела с геометрическими и физическими нелинейностями.

Слабая формулировка уравнения баланса импульса в виде вариационного уравнения принципа виртуальной работы в текущей конфигурации определяется выражением

$$\int\limits_V \mathbf{T} \cdot\cdot\, \delta\mathbf{D}_\mathrm{r} dV + \int\limits_V \rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{r} dV = \int\limits_V \mathbf{f}_V \cdot \delta\mathbf{r} dV + \int\limits_{S_\mathrm{f}} \mathbf{f}_S \cdot \delta\mathbf{r} dS, \tag{159}$$

где $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши-Эйлера, который является тензором истинных напряжений;

$$\delta\mathbf{D}_\mathrm{r} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r}^\mathrm{T} + \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r}) \tag{160}$$

– тензор возможных деформаций. В силу симметрии тензоров $\mathbf{T}$ и $\delta\mathbf{D}_\mathrm{r}$ и коммутативности скалярного произведения векторов, уравнение (159) представимо в виде

$$\int\limits_V \delta\mathbf{D}_\mathrm{r} \cdot\cdot\, \mathbf{T} dV + \int\limits_V \delta\mathbf{r} \cdot \rho\dot{\mathbf{v}} dV = \int\limits_V \delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_V dV + \int\limits_{S_\mathrm{f}} \delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_S dS. \tag{161}$$

Первое слагаемое левой части (159) и (161) представляет собой работу внутренних напряжений на возможных деформациях, которая для упругих материалов является вариацией потенциальной энергии деформаций; соответственно, подынтегральное выражение определяет значение вариации удельной потенциальной энергии деформации. Второе слагаемое левой части – работа сил инерции ($\rho\dot{\mathbf{v}}$) на возможных перемещениях ($\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{u}$). Первое и второе слагаемые правой части – работа внешних объёмных ($\mathbf{f}_V$) и поверхностных ($\mathbf{f}_S$) сил, соответственно. Предполагается, что поверхность, ограничивающая деформируемое тело, занимающее в текущей конфигурации объём V, состоит из двух частей: $S = S_\mathrm{u} \cup S_\mathrm{f}$, где S_u – часть границы, на которой заданы кинематические граничные условия и для неё $\delta\mathbf{r} = 0$, S_f – часть границы, на которой заданы силовые граничные условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f}_S$; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней (по отношению к объёму) нормали к поверхности.

Геометрическая нелинейность уравнения (159) или (161) обусловлена тем, что дифференцирование и интегрирование выполняется по текущей, неизвестной конфигурации. Кроме того возможность появления больших перемещений и поворотов, соответственно больших деформаций, приводит к необходимости учёта конечных деформаций, которые связаны с перемещениями нелинейными геометрическими соотношениями. Физическая нелинейность уравнения (159) или (161) обусловлена нелинейностью определяющих физических соотношений (нелинейной зависимостью внутренних напряжений от смещений).

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ

Общая схема

Для математического описания нелинейных задач используются инкрементальные теории [8].

Формулировка инкрементальной теории начинается с представления пути деформирования в виде последовательности равновесных состояний

$$V^{(0)}, \dots, V^{(\mathrm{k})}, V^{(\mathrm{k}+1)}, \dots, V^{(\mathrm{K})}, \tag{162}$$

где $V^{(0)}$ и $V^{(\mathrm{K})}$ – начальное и конечное состояния деформирования, а $V^{(\mathrm{k})}$ – произвольное промежуточное состояние. Считается, что все переменные состояния известны на протяжении всей истории деформирования вплоть до состояния $V^{(\mathrm{k})}$ (будем называть это состояние достигнутым). Задача состоит в том, чтобы получить уравнения для определения переменных состояния в $V^{(\mathrm{k}+1)}$ в предположении, что состояние $V^{(\mathrm{k}+1)}$ бесконечно близко к состоянию $V^{(\mathrm{k})}$ и все необходимые уравнения можно линеаризовать по отношению к приращению переменных состояния. Переход от состояния $V^{(\mathrm{k})}$ к состоянию $V^{(\mathrm{k}+1)}$ называется $(\mathrm{k}+1)$-м шагом процесса деформирования.

Положения произвольной материальной точки среды в состояниях $V^{(0)}$, $V^{(\mathrm{k})}$ и $V^{(\mathrm{k}+1)}$ обозначим соответственно $\mathrm{M}^{(0)}$, $\mathrm{M}^{(\mathrm{k})}$ и $\mathrm{M}^{(\mathrm{k}+1)}$, радиус-векторы этих точек – $\mathbf{r}^{(0)}$, $\mathbf{r}^{(\mathrm{k})}$ и $\mathbf{r}^{(\mathrm{k}+1)}$, а их декартовы координаты – X_i, x_i, y_i $(i = 1,2,3)$ соответственно.

Запишем уравнение (159) в операторной форме

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = 0. \tag{163}$$

Для любого i-го состояния, в том числе и для достигнутого k-го, и последующего $(\mathrm{k}+1)$-го состояния должно выполняться уравнение

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{i})} = 0. \tag{164}$$

Считая k-е и $(\mathrm{k}+1)$-е состояния близкими, уравнение для $(\mathrm{k}+1)$-го состояния можно представить в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{k}+1)} = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{k})} + \dot{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{(\mathrm{k})}\Delta t = 0. \tag{165}$$

Для статических задач понятие времени весьма условно и может быть представлено некоторым параметром, связанным с приращением внешнего нагружения, поэтому приращение Δt можно принять равным единице, т.е. $\Delta t = 1$.

Кроме того, при численном решении уравнение равновесия (164) – как статического, так и динамического – строго не выполняется ни для одного состояния. Поэтому в уравнении (165) сохраняется слагаемое $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{k})}$. Как известно [9], отбрасывание слагаемого $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{k})}$, которое в силу уравнения (164) должно быть равно нулю ($\boldsymbol{\mathcal{F}}^{(\mathrm{k})} = 0$), приводит к схеме последовательных нагружений, имеющей тенденцию к накоплению ошибок.

Квазистатика деформируемого твёрдого тела

Запишем уравнение (165) для квазистатических задач деформируемого твёрдого тела (161), в которых силами инерции можно пренебречь

$$\int\limits_{V^{(\mathrm{k})}} \delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{k})} \cdot\cdot \mathbf{T}^{(\mathrm{k})} dV^{(\mathrm{k})} - \int\limits_{V^{(\mathrm{k})}} \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_V^{(\mathrm{k})} dV^{(\mathrm{k})} - \int\limits_{S_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{k})}} \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_S^{(\mathrm{k})} dS^{(\mathrm{k})} +$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{V^{(\mathrm{k})}} \delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{k})} \cdot\cdot \mathbf{T}^{(\mathrm{k})} dV^{(\mathrm{k})} - \int\limits_{V^{(\mathrm{k})}} \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_V^{(\mathrm{k})} dV^{(\mathrm{k})} - \int\limits_{S_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{k})}} \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_S^{(\mathrm{k})} dS^{(\mathrm{k})} \right)\Delta t = 0. \tag{166}$$

Вычислим материальные производные от всех интегралов. Номер состояния опускаем. Необходимо учесть, что переменными величинами являются все величины кроме вариации вектора места $\delta\mathbf{r}$.

Первое слагаемое

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} \delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T} dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathring{V}} \delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T}\, J d\mathring{V} = \int\limits_{\mathring{V}} \frac{d}{dt}(J\delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T}\,) d\mathring{V} =$$

$$= \int\limits_{\mathring{V}} \left(\frac{dJ}{dt}\delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T} + J\frac{d\delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}}}{dt} \cdot\cdot \mathbf{T} + J\delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt}\right) d\mathring{V} \rightrightarrows \tag{167}$$

Изменение якобиана (8) преобразования координат отсчётного состояния в координаты актуального состояния

$$\frac{dJ}{dt} = J\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\upsilon}. \tag{168}$$

Используя (168), в последнем интеграле преобразований (167) можно перейти к интегрированию по достигнутой конфигурации

$$\rightrightarrows \int\limits_{\mathring{V}} \left[(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\upsilon})\delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T} + \delta \dot{\mathbf{D}}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T} + \delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{T}}\right] J d\mathring{V} =$$

$$= \int\limits_{V} \left(\delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\upsilon} + \delta \dot{\mathbf{D}}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T} + \delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{T}}\right) dV. \tag{169}$$

Производная тензора возможных деформаций (160)

$$\frac{d\delta \mathbf{D}_{\mathrm{r}}}{dt} \equiv \delta \dot{\mathbf{D}}_{\mathrm{r}} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r}) \tag{170}$$

и соответственно

$$\delta \dot{\mathbf{D}}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot \mathbf{T} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}} \cdot\cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r} \cdot\cdot \mathbf{T}) =$$

$$= -(\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{T}) \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} = -\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r} \cdot\cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{III}} \cdot \mathbf{T}) \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} \tag{171}$$

Здесь, аналогично (51), использованы [1]: симметричность тензора напряжений

Коши, правила двойного свёртывания трёх тензоров второго ранга и свойства изотропного тензора четвёртого ранга $\mathbf{C}_{\mathrm{III}}$ (53).

Подставляя теперь полученные соотношения (51) и (171) в подынтегральное выражение (169), получим

$$\begin{gathered}
\delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot\, \mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + \delta\dot{\mathbf{D}}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot\, \mathbf{T} + \delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{T}} = \\
= \delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot\, \mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r} \cdot\cdot\, \mathbf{C}_{\mathrm{III}}\cdot\mathbf{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \\
+\delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot\, [\boldsymbol{\Lambda} \cdot\cdot\, \mathbf{D} - \mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\cdot\mathbf{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}] = \\
= \delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\Lambda} \cdot\cdot\, \mathbf{D} - \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r} \cdot\cdot\, \mathbf{C}_{\mathrm{III}}\cdot\mathbf{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} + \\
+\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r} \cdot\cdot\, \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot\, (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\cdot\mathbf{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon} = \\
= \delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\Lambda} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r} \cdot\cdot\, \mathbf{C}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}.
\end{gathered} \tag{172}$$

Материальная производная второго слагаемого в (166)

$$\frac{d}{dt}\int_V \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}_V dV = \frac{d}{dt}\int_{\mathring{V}} \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}_V\, J d\mathring{V} = \int_V \delta\mathbf{r}\cdot\left[\dot{\mathbf{f}}_V + \mathbf{f}_V\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\right]dV. \tag{173}$$

Материальная производная третьего слагаемого в (166)

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int_{S_{\mathrm{f}}} \mathbf{f}_S\cdot\delta\mathbf{r}dS = \frac{d}{dt}\int_{S_{\mathrm{f}}} dS\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\delta\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\int_{\mathring{S}_{\mathrm{f}}} d\mathring{S}J\mathring{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\cdot\delta\mathbf{r} = \\
= \int_{\mathring{S}_{\mathrm{f}}} d\mathring{S}\left[\dot{J}\mathring{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T} + J\mathring{\mathbf{n}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{T} + J\mathring{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{T}}\right]\cdot\delta\mathbf{r} = \\
= \int_{\mathring{S}_{\mathrm{f}}} d\mathring{S}J\mathring{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\left[\mathbf{T}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon}) - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}}\right]\cdot\delta\mathbf{r} = \\
= \int_{S_{\mathrm{f}}} dS\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{T}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon}) - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}}\right]\cdot\delta\mathbf{r} = \\
= \int_{S_{\mathrm{f}}} dS\mathbf{n}\cdot(\mathbf{T}^{\nabla Tr} + \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon})\cdot\delta\mathbf{r} = \int_{S_{\mathrm{f}}}\left(\dot{\mathbf{f}}_S + \mathbf{f}_S\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon}\right)\cdot\delta\mathbf{r}dS.
\end{gathered} \tag{174}$$

Подставляя полученные соотношения (167), (169), (172)-(174) в уравнение (166), получим:

$$\int_{V^{(\mathrm{k})}} \delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{k})} \cdot\cdot\, \mathbf{T}^{(\mathrm{k})}dV^{(\mathrm{k})} - \int_{V^{(\mathrm{k})}} \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}_V^{(\mathrm{k})}dV^{(\mathrm{k})} - \int_{S_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{k})}} \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}_S^{(\mathrm{k})}dS^{(\mathrm{k})} + \tag{175}$$

$$
+\left\{\int\limits_{V^{(\mathrm{k})}}\left[\delta\mathbf{D}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{k})}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\Lambda}^{(\mathrm{k})}\cdot\cdot\,\mathbf{D}^{(\mathrm{k})}+(\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{r})^{(\mathrm{k})}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{k})}\cdot\mathbf{T}^{(\mathrm{k})}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon})^{(\mathrm{k})}\right]dV^{(\mathrm{k})}-\right.
$$

$$
-\int\limits_{V^{(\mathrm{k})}}\delta\mathbf{r}\cdot\left[\dot{\mathbf{f}}_{V}^{(\mathrm{k})}+\mathbf{f}_{V}^{(\mathrm{k})}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\upsilon})^{(\mathrm{k})}\right]dV^{(\mathrm{k})}-
$$

$$
\left.-\int\limits_{S_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{k})}}\delta\mathbf{r}\cdot\left[\dot{\mathbf{f}}_{S}^{(\mathrm{k})}+\mathbf{f}_{S}^{(\mathrm{k})}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\upsilon})^{(\mathrm{k})}\right]dS^{(\mathrm{k})}\right\}\Delta t=0. \tag{175}
$$

Опуская для краткости номер шага и переходя к приращениям перемещений $\mathbf{u}=\boldsymbol{\upsilon}^{(\mathrm{k})}\Delta t$, получим

$$
\int\limits_{V}\delta\mathbf{D}_{\mathrm{u}}\cdot\cdot\,\mathbf{T}dV-\int\limits_{V}\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_{V}dV-\int\limits_{S_{\mathrm{f}}}\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_{S}dS+
$$

$$
+\int\limits_{V}(\delta\mathbf{D}_{\mathrm{u}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\,\mathbf{D}_{\mathrm{u}}+\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})dV- \tag{176}
$$

$$
-\int\limits_{V}\delta\mathbf{u}\cdot(\Delta\mathbf{f}_{V}+\mathbf{f}_{V}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})dV-\int\limits_{S_{\mathrm{f}}}\delta\mathbf{u}\cdot(\Delta\mathbf{f}_{S}+\mathbf{f}_{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})dS=0
$$

– вариационное уравнение для решения квазистатических задач деформирования твёрдых тел.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Рассмотрим вклад отдельного конечного элемента в общую систему уравнений. Вариационное уравнение (176) для отдельного внутреннего элемента представим в виде

$$\int_{V_e} [\delta \mathbf{D}_{\mathrm{u}} \cdot\cdot\, \mathbf{\Lambda} \cdot\cdot\, \mathbf{D}_{\mathrm{u}} + \nabla \delta \mathbf{u} \cdot\cdot\, (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{T}) \cdot\cdot\, \nabla \mathbf{u}] dV - \\ - \int_{V_e} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_{V_e} \delta \mathbf{D}_{\mathrm{u}} \cdot\cdot\, \mathbf{T} dV - \int_{V_e} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{f}_V + \Delta \mathbf{f}_V) dV. \tag{177}$$

В этом уравнении все подынтегральные выражения представляют собой либо скалярные произведения векторов, либо двойное скалярное произведение (двойную свёртку) тензоров второго ранга или тензора четвёртого ранга и тензоров второго ранга.

Матричная запись векторно-тензорных соотношений

В методе конечных элементов принята матричная запись всех соотношений. Для этого применяется нотация Фойгта. В ортонормированной системе координат координаты тензора второго ранга представляются вектор-строкой или вектор-столбцом, а координаты тензора четвёртого ранга в той же ортонормированной системе координат – квадратной матрицей. Это позволяет представить двойную свёртку (двойное скалярное умножение) тензоров произведением матриц.

Нотация Фойгта заменяет двухиндексную нумерацию координат тензора второго ранга одноиндексной нумерацией в соответствии со следующим правилом для произвольного тензора второго ранга $\mathbf{A}$:

$$\{11\ 12\ 13\ 21\ 22\ 23\ 31\ 32\ 33\} \Rightarrow \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\}, \tag{178}$$

при этом его координаты представляются вектор-столбцом

$$\mathbf{A} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{Bmatrix}_{9\times 1} \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{Bmatrix}_{9\times 1}, \tag{179}$$

четырёхиндексные координаты в ортонормированной системе координат тензора четвёртого ранга в общем случае представляются двухиндексной матрицей размерности 9×9:

$$\mathbf{C} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} & c_{1112} & c_{1122} & c_{1132} & c_{1113} & c_{1123} & c_{1133} \\ c_{1211} & c_{1221} & c_{1231} & c_{1212} & c_{1222} & c_{1232} & c_{1213} & c_{1223} & c_{1233} \\ c_{1311} & c_{1321} & c_{1331} & c_{1312} & c_{1322} & c_{1332} & c_{1313} & c_{1323} & c_{1333} \\ c_{2111} & c_{2121} & c_{2131} & c_{2112} & c_{2122} & c_{2132} & c_{2113} & c_{2123} & c_{2133} \\ c_{2211} & c_{2221} & c_{2231} & c_{2212} & c_{2222} & c_{2232} & c_{2213} & c_{2223} & c_{2233} \\ c_{2311} & c_{2321} & c_{2331} & c_{2312} & c_{2322} & c_{2332} & c_{2313} & c_{2323} & c_{2333} \\ c_{3111} & c_{3121} & c_{3131} & c_{3112} & c_{3122} & c_{3132} & c_{3113} & c_{3123} & c_{3133} \\ c_{3211} & c_{3221} & c_{3231} & c_{3212} & c_{3222} & c_{3232} & c_{3213} & c_{3232} & c_{3233} \\ c_{3311} & c_{3321} & c_{3331} & c_{3312} & c_{3322} & c_{3332} & c_{3313} & c_{3323} & c_{3333} \end{bmatrix}_{9\times 9}. \qquad (180)$$

Учитывая симметрию тензора второго ранга ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$) и симметрию тензора четвёртого ранга по первой и второй парам индексов и внутри этих пар двойную свёртку этих тензоров можно $\mathbf{C}$ представить в виде произведения матрицы размерности 6×6 и вектора 6×1. При этом обычно используется следующая нотация Фойгта:

$$\{11\ 22\ 33\ 12\ 23\ 31\} = \{11\ 22\ 33\ 21\ 32\ 13\} \Rightarrow \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}. \qquad (181)$$

В этом случае координаты тензора второго ранга $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ представляются вектор-столбцом

$$\mathbf{A} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}_{6\times 1} \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ 2a_{12} \\ 2a_{23} \\ 2a_{31} \end{Bmatrix}_{6\times 1}, \qquad (182)$$

тензор четвёртого ранга:

$$\mathbf{C} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1123} & c_{1131} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2223} & c_{2231} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3323} & c_{3331} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1223} & c_{1231} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2323} & c_{2331} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & c_{3112} & c_{3123} & c_{3131} \end{bmatrix}_{6\times 6}. \qquad (183)$$

Интерполяция функций

Функции формы изопараметрического элемента являются функциями параметрических координат ξ, η, ζ и сгруппированы в строку

$$\langle \boldsymbol{N} \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_{ne} \rangle, \qquad (184)$$

ne – количество узлов элемента.

Декартовы координаты материальной точки в момент времени t интерполируются по текущим узловым координатам

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{3\times 1} = \widehat{\mathbf{N}}_{3\times 3ne} \begin{Bmatrix} (x_e)_{ne\times 1} \\ (y_e)_{ne\times 1} \\ (z_e)_{ne\times 1} \end{Bmatrix} = \widehat{\mathbf{N}} \boldsymbol{c}_e, \qquad (185)$$

где

$$\widehat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{N} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle \end{bmatrix}_{3\times 3ne}. \tag{186}$$

Приращения перемещений материальной точки в момент времени t интерполируются по узловым значениям приращений перемещений

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{3\times 1} = \widehat{\mathbf{N}}_{3\times 3ne} \begin{Bmatrix} (u_e)_{ne\times 1} \\ (v_e)_{ne\times 1} \\ (w_e)_{ne\times 1} \end{Bmatrix} = \widehat{\mathbf{N}} \boldsymbol{u}_e, \tag{187}$$

Интерполяция производных

Связь между производными по параметрическим координатам и производными по декартовым координатам устанавливается стандартно с помощью матрицы Якоби

$$\begin{Bmatrix} H_{,\xi} \\ H_{,\eta} \\ H_{,\zeta} \end{Bmatrix}_{3\times 1} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} H_{,x} \\ H_{,y} \\ H_{,z} \end{Bmatrix}_{3\times 1}, \tag{188}$$

где $H(\xi, \eta, \zeta)$ – некоторая функция параметрических координат и матрица Якоби

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix}_{3\times 3}. \tag{189}$$

Матрица обратная к матрице Якоби обозначается

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}^{-1}. \tag{190}$$

Градиент перемещений в декартовых координатах

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,x} \\ \mathbf{u}_{,y} \\ \mathbf{u}_{,z} \end{Bmatrix}_{9\times 1} = [u_{,x} \quad v_{,x} \quad w_{,x} \quad u_{,y} \quad v_{,y} \quad w_{,y} \quad u_{,z} \quad v_{,z} \quad w_{,z}]^{\mathrm{T}}. \tag{191}$$

Градиент перемещений в параметрических координатах

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,\xi} \\ \mathbf{u}_{,\eta} \\ \mathbf{u}_{,\zeta} \end{Bmatrix}_{9\times 1} = [u_{,\xi} \quad v_{,\xi} \quad w_{,\xi} \quad u_{,\eta} \quad v_{,\eta} \quad w_{,\eta} \quad u_{,\zeta} \quad v_{,\zeta} \quad w_{,\zeta}]^{\mathrm{T}}. \tag{192}$$

Производные в декартовых координатах определяются через производные в параметрических координатах

$$\nabla\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{\Gamma}} \boldsymbol{\phi}, \tag{193}$$

где

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}\mathbf{I}_3 & \Gamma_{12}\mathbf{I}_3 & \Gamma_{13}\mathbf{I}_3 \\ \Gamma_{21}\mathbf{I}_3 & \Gamma_{22}\mathbf{I}_3 & \Gamma_{23}\mathbf{I}_3 \\ \Gamma_{31}\mathbf{I}_3 & \Gamma_{32}\mathbf{I}_3 & \Gamma_{33}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}_{9\times 9}, \tag{194}$$

и единичная матрица

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{195}$$

Аналогично (184), производные функций формы элемента по параметрическим координатам ξ, η, ζ сгруппированы в строки

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\xi} &= \langle N_{1,\xi} \quad N_{2,\xi} \quad N_{3,\xi} \quad \cdots \quad N_{ne,\xi} \rangle, \\ \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\eta} &= \langle N_{1,\eta} \quad N_{2,\eta} \quad N_{3,\eta} \quad \cdots \quad N_{ne,\eta} \rangle, \\ \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\zeta} &= \langle N_{1,\zeta} \quad N_{2,\zeta} \quad N_{3,\zeta} \quad \cdots \quad N_{ne,\zeta} \rangle, \end{aligned} \tag{196}$$

Градиент перемещений в параметрических координатах (192) через узловые перемещения

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{G}\boldsymbol{u}_e, \tag{197}$$

где матрица производных функций формы

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{N}}_{,\xi} \\ \widehat{\mathbf{N}}_{,\eta} \\ \widehat{\mathbf{N}}_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\xi} & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\xi} & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\xi} \\ \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\eta} & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\eta} & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\eta} \\ \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\zeta} & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\zeta} & \langle \mathbf{0} \rangle \\ \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \mathbf{0} \rangle & \langle \boldsymbol{N} \rangle_{,\zeta} \end{bmatrix}_{9\times 3ne}. \tag{198}$$

Таким образом, градиент перемещений в декартовых координатах (191)

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,x} \\ \mathbf{u}_{,y} \\ \mathbf{u}_{,z} \end{Bmatrix}_{9\times 1} = \widehat{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{G}\boldsymbol{u}_e. \tag{199}$$

Аналогично градиент виртуальных перемещений в декартовых координатах

$$\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u}_{,x} \\ \delta\mathbf{u}_{,y} \\ \delta\mathbf{u}_{,z} \end{Bmatrix}_{9\times 1} = \widehat{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{G}\delta\boldsymbol{u}_e. \tag{200}$$

Соотношения деформации-перемещения

Симметричный тензор деформации (перемещений) в векторной форме через узловые перемещения

$$
\mathbf{D}_{\text{u}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_{6\times 1} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} \end{Bmatrix}_{6\times 1} = \mathbf{B}_{6\times 3ne}\boldsymbol{u}_{e(3ne\times 1)}, \tag{201}
$$

где матрица деформации-перемещения

$$
\mathbf{B}_{6\times 3ne} = \widetilde{\mathbf{B}}_{6\times 9}\hat{\mathbf{\Gamma}}_{9\times 9}\mathbf{G}_{9\times 3ne}, \tag{202}
$$

и

$$
\widetilde{\mathbf{B}}_{6\times 9} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6\times 9}. \tag{203}
$$

Аналогично определяется симметричный тензор виртуальной деформации (деформации виртуальных перемещений)

$$
\delta\mathbf{D}_{\text{u}} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{yz} \\ \delta\gamma_{xz} \end{Bmatrix}_{6\times 1} = \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta w_{,z} \\ \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \\ \delta v_{,z} + \delta w_{,y} \\ \delta u_{,z} + \delta w_{,x} \end{Bmatrix}_{6\times 1} = \mathbf{B}_{6\times 3ne}\delta\boldsymbol{u}_{e(3ne\times 1)}. \tag{204}
$$

Матрица касательной жёсткости

В матричном виде тензор четвёртого ранга $\mathbf{T}\cdot\mathbf{C}_{\text{II}}$ представляется следующим образом

$$
\mathbf{M}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I}_3 & \sigma_{12}\mathbf{I}_3 & \sigma_{13}\mathbf{I}_3 \\ \sigma_{12}\mathbf{I}_3 & \sigma_{22}\mathbf{I}_3 & \sigma_{23}\mathbf{I}_3 \\ \sigma_{13}\mathbf{I}_3 & \sigma_{23}\mathbf{I}_3 & \sigma_{33}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}_{9\times 9}, \tag{205}
$$

$\mathbf{I}_3$ – единичная матрица (195).

Симметричная материальная матрица, связывающая изменение напряжений Коши с изменениями деформаций, представляется в виде

$$
\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2112} & C_{2123} & C_{2131} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2123} & C_{3223} & C_{3231} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3331} & C_{2131} & C_{3231} & C_{1331} \end{bmatrix}_{6\times 6}. \tag{206}
$$

Касательная матрица жёсткости элемента представляется в виде суммы материальной матрицы жёсткости и геометрической матрицы жёсткости

$$\int\limits_{V_e} [\delta \mathbf{D}_\mathrm{u} \cdot\cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot\cdot \mathbf{D}_\mathrm{u} + \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u} \cdot\cdot (\mathbf{C}_\mathrm{II} \cdot \mathbf{T}) \cdot\cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}] dV =$$
$$= \delta \boldsymbol{u}_e^\mathrm{T} \left[\int\limits_{V_e} \left(\mathbf{B}^\mathrm{T} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\mathrm{T} \mathbf{G}^\mathrm{T} \mathbf{M}_\sigma \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{G} \right) dV \right] \boldsymbol{u}_e = \delta \boldsymbol{u}_e^\mathrm{T} [\mathbf{K}_T]_e \boldsymbol{u}_e \,. \tag{207}$$

Здесь $[\mathbf{K}_T]_e$ – касательная матрица жёсткости элемента:

$$[\mathbf{K}_T]_e = [\mathbf{K}_{mat}]_e + \left[\mathbf{K}_{geo}\right]_e, \tag{208}$$

где $[\mathbf{K}_{mat}]_e$ – материальной матрицы жёсткости элемента

$$[\mathbf{K}_{mat}]_e = \int\limits_{V_e} \mathbf{B}^\mathrm{T} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B} dV, \tag{209}$$

$\left[\mathbf{K}_{geo}\right]_e$ – геометрической матрицы жёсткости элемента

$$\left[\mathbf{K}_{geo}\right]_e = \int\limits_{V_e} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\mathrm{T} \mathbf{G}^\mathrm{T} \mathbf{M}_\sigma \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{G} dV. \tag{210}$$

Касательная матрица жёсткости элемента вычисляется с использованием стандартной процедуры численного интегрирования

$$[\mathbf{K}_T]_e = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left(\mathbf{B}^\mathrm{T} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^\mathrm{T} \mathbf{G}^\mathrm{T} \mathbf{M}_\sigma \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{G} \right) \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \tag{211}$$

Все зависящие от перемещений величины здесь относятся к значениям для текущей -ой итерации нелинейного решения на $\mathrm{k}+1$-ом шаге нагружения: матрица $\mathbf{B}$ вычисляется с использованием обновленных узловых координат $\boldsymbol{x}_{(i)}^{(\mathrm{k}+1)}$; напряжения Коши, фигурирующие в $\mathbf{M}_\sigma$, являются $\mathbf{T}_{(i)}^{(\mathrm{k}+1)}$; $\boldsymbol{\Lambda}$ – тензор касательных модулей материала, который определяет изменение напряжения Коши при переходе от k-го к $(\mathrm{k}+1)$-му состоянию, в соответствии с процедурой обновления напряжения для приращения деформации и который правильно учитывает жесткое вращение материальной точки [6].

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ В СИСТЕМЕ ANSYS

Рассмотрим схему решения геометрически и физически нелинейных задач для гиперупругих материалов на примере почти несжимаемого неогукова материала [7].

Потенциал энергии деформаций почти несжимаемого гиперупругого неогукова материала

$$w = \frac{\mu}{2}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + \frac{K}{2}(J-1)^2, \tag{212}$$

где μ – модуль сдвига, K – объёмный модуль, $\bar{I}_1 = \operatorname{tr}\bar{\mathbf{G}}$ – первый инвариант модифицированного (изохорического) правого тензора деформациии Коши-Грина $\bar{\mathbf{G}} = J^{-2/3}\mathbf{G}$ (модифицированной меры деформации Коши-Грина) – *the isochoric right Cauchy-Green deformation tensor*, $J = \det\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}$ – определитель тензора градиента деформации $\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$ (*deformation gradient*).

Тензор напряжений Коши в пространственной конфигурации определяется по формуле

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J}\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot \left(2\frac{\partial w}{\partial \mathbf{G}}\right) \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{r} = \frac{1}{J}\mu\left(\bar{\mathbf{F}} - \frac{\bar{I}_1}{3}\mathbf{E}\right) + K(J-1)\mathbf{E}, \tag{213}$$

где $\bar{\mathbf{F}} = J^{-2/3}\mathbf{F}$ – модифицированный (изохорический) левый тензор деформации Коши-Грина (модифицированная мера деформации Фингера) – *the isochoric left Cauchy-Green deformation tensor*. Как отмечается в [7], при вычислении $\mathbf{T}$ не используется дифференциальная форма и интегрирование не требуется.

Пространственный тензор касательных модулей (*spatial tangent*) $\mathbf{c}$ (Труселла $\mathbf{C}^{Tr}$) определяется через тензор материальной касательной жёсткости (*material tangent stiffness*) – через удвоенную производную от второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа (*the 2nd Piola-Kirchhoff stress*) по мере деформаций Коши-Грина – и преобразование Пиола [7]

$$\begin{aligned}\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mu J^{-1}\left(-\bar{\mathbf{F}}\mathbf{E} - \mathbf{E}\bar{\mathbf{F}} + \bar{I}_1\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \frac{\bar{I}_1}{3}\mathbf{E}\mathbf{E}\right) + \\ +K[(2J-1)\mathbf{E}\mathbf{E} - 2(J-1)\mathbf{C}_{\mathrm{II}}].\end{aligned} \tag{214}$$

В индексной записи в ортонормированной системе координат

$$\begin{aligned}c_{ijkl} = \frac{2}{3}\mu J^{-1}\left(-\bar{b}_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ij}\bar{b}_{kl} + \bar{I}_1\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\bar{I}_1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) + \\ +K\left[(2J-1)\delta_{ij}\delta_{kl} - 2(J-1)\delta_{ik}\delta_{jl}\right].\end{aligned} \tag{215}$$

В [7] тензор $\mathbf{c}$ определяет реакцию неогукова материала в терминах производной Ли тензора напряжений Кирхгофа (22):

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau} = J\mathbf{c} \cdot\cdot\, \mathbf{D}. \tag{216}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \nabla\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\boldsymbol{\upsilon}. \tag{217}$$

Как уже отмечалось, для описания больших деформаций и поворотов используется коротационная система координат, определяемая тензором поворота (собственно ортогональным тензором) полярного разложения тензора градиента деформации $\mathring{\nabla}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}$. При этом скорость (приращение) тензора напряжений Коши $\dot{\mathbf{T}}$ определяется с использованием скорости коротационного тензора напряжений Коши $\dot{\tilde{\mathbf{T}}}$ и производной Грина-Нагди (73)

$$\mathbf{T}^{\nabla GN} \equiv \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{O} = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \tag{218}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}$ – кососимметричный тензор угловой скорости (спин) [1] коротационной системы относительно пространственной (71). Получающиеся при этом соотношения имеют сложную структуру [1]. В системе ANSYS при описании моделирования поведения неогукова материала [7] утверждается, что подходящей аппроксимацией производной Грина-Нагди является производная Яумана

$$\mathbf{T}^{\nabla J} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}, \tag{219}$$

где $\mathbf{W}$ – кососимметричный тензор вихря (спин над вектором скорости) [1]. Реакция материала (материальные соотношения) задаются в коротационной системе с использованием производной Яумана в виде:

$$\mathbf{T}^{\nabla J} = \mathbf{c}^{J} \cdot\cdot\, \mathbf{D}, \tag{220}$$

где $\mathbf{c}^{J}$ – тензор касательной жёсткости Яумана, $\mathbf{D}$ – тензор деформации скорости (41). Тензор $\mathbf{c}^{J}$ неявно определяется следующим образом:

$$\mathbf{T}^{\nabla J} = \mathbf{c} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}. \tag{221}$$

Это соотношение преобразуется:

$$\begin{gathered}
\mathbf{T}^{\nabla J} = \mathbf{c} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = \\
= \mathbf{c} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})^{\mathrm{T}} + \mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{D} = \mathbf{c} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot\, (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) = \\
= \mathbf{c} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot \left\{\mathbf{T} \cdot \left[\frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot\, \mathbf{D}\right]\right\} = \\
= \mathbf{c} \cdot\cdot\, \mathbf{D} + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot \{[\mathbf{T} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})] \cdot\cdot\, \mathbf{D}\} = \\
= \left\{\mathbf{c} + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot [\mathbf{T} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})]\right\} \cdot\cdot\, \mathbf{D}.
\end{gathered} \tag{222}$$

Таким образом

$$\mathbf{c}^{J} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot [\mathbf{T} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})]. \tag{223}$$

В индексной записи в ортонормированной системе координат

$$c_{ijkl}^{J} = c_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{jk}\delta_{il} + \sigma_{jl}\delta_{ik} + \sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk}\right), \tag{224}$$

где

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J}\mu\left(\bar{b}_{ij} - \frac{\bar{I}_1}{3}\delta_{ij}\right) + K(J-1)\delta_{ij} \tag{225}$$

– координаты тензора напряжений Коши неогукова материала (213).

Для неогукова материала тензор 4-го ранга

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot [\mathbf{T} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})] = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot \left\{\left[\frac{1}{J}\mu\left(\bar{\mathbf{F}} - \frac{\bar{I}_1}{3}\mathbf{E}\right) + K(J-1)\mathbf{E}\right] \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right\} = \\
&= \mu J^{-1}\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot \left[\bar{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right] - \frac{\bar{I}_1}{3}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right\} + \\
&\quad + K(J-1)(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) = \\
&= \frac{2}{3}\mu J^{-1}\left\{\frac{3}{4}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot \left[\bar{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right] - \frac{\bar{I}_1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}})\right\} + \\
&\quad + K(J-1)(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}).
\end{aligned} \tag{226}$$

В матричном виде в нотации Фойгта (183) необходимые тензорные величины приведены в приложении Б.

Переход от глобальной системы координат к коротационной системе координат выполняется с использованием тензора поворота $\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$ по следующим соотношениям:

$$\breve{\mathbf{T}} = \mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{T}, \tag{227}$$

$$\check{\mathbf{C}} = \mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \tag{228}$$

где тензоры 4-го ранга

$$\mathbf{Q} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{O}, \tag{229}$$

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}. \tag{230}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
2. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 29-37.
3. Трусов П.В., Келлер И.Э. Теория определяющих соотношений. Курс лекций. Ч.I. Общая теория. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1997. – 98 с.
4. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2000. – 666 pp.
5. Fish, J., Shek, K. Finite deformation plasticity based on the additive split of the rate of deformation and hyperelasticity // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2000. – Vol. 190, Issues 1–2. – pp. 75-93.
6. WARP3D-Release 18.0: 3-D Dynamic Nonlinear Fracture Analyses of Solids Using Parallel Computers / B.Healy, A.Gullerud, K.Koppenhoefer, A.Roy, S.R.Chowdhury, J.Petti, M.Walters, B.Bichon, K.Cochran, A.Carlyle, J.Sobotka, M.Messner, T.Truster, R.Dodds. – Illinois: Department of Civil & Environmental Engineering University of Illinois at Urbana-Champaign, 2019. – 621 pp. http://www.warp3d.net/downloads.
7. ANSYS Mechanical APDL Technology Demonstration Guide, Chapter 40: Large Deformation Neo-Hookean Analysis (via Usermat Subroutine) // ru.scribd.com. 2015. URL: https://ru.scribd.com/document/257964355/ANSYS-Mechanical-APDL-Technology-Demonstration-Guide-pdf (дата обращения: 25.09.2019).
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
9. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. III. Постановки задачи и алгоритмы решения. – 2009. – Т. 151, кн. 3. – С. 108-120.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Напряжения, возникающие в твердых телах, порождаются, в частности, деформациями этих тел. Поэтому, если на рассматриваемое движение тела накладывается жесткое движение, т.е. движение, не сопровождающееся деформацией, а все прочие параметры (например, температура) остаются неизменными, то мы ожидаем, что и напряжения при этом окажутся неизменными. Вместе с тем понятно, что при жестком повороте тела тензор напряжений поворачивается вместе с телом, т.е. поворачиваются его главные оси, а собственные значения не меняются. Иными словами, тензор напряжений оказывается как бы «вмороженным» в данное тело. Объекты, обладающие при жестких движениях аналогичными свойствами, называются **индифферентными** [1].

Рассмотрим два движения деформируемого тела $\mathbf{r}(q^k;t)$ и $\mathbf{r}'(q^k;t)$, ни одно из которых, вообще говоря, не является жестким. Будем говорить, что эти два движения различаются жестким движением, если в данный момент времени между ними существует связь вида

$$\mathbf{r}'(q^k;t) = \mathbf{r}'_c(t) + [\mathbf{r}'(q^k;t) - \mathbf{r}_c(t)] \cdot \mathbf{O}(t). \tag{A.1}$$

Здесь $\mathbf{r}'_c(t)$ – место, занимаемое $\mathbf{r}_c$ при движении $\mathbf{r}'$, $\mathbf{O}(t)$ – собственно ортогональный тензор (тензор поворота). *Если между* <u>*любыми*</u> *двумя движениями тела можно установить соответствие* (А.1)*, то такое* ***тело*** *называется* ***абсолютно твердым.***

Определение: тензорное поле -го ранга $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется **индифферентным**, если при наложении жесткого движения оно преобразуется по следующему закону:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = A^{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r})\mathbf{e}_{i_1} \cdot \mathbf{O}(t) \dots \mathbf{e}_{i_n} \cdot \mathbf{O}(t). \tag{A.2}$$

Здесь $\mathbf{O}(t)$ – тот же ортогональный тензор, что и в (А.1), $\mathbf{e}_i$ – произвольный базис. В частности, скаляр является индифферентным, если выполнено условие

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}). \tag{A.3}$$

Типичным примером индифферентного скаляра является плотность. Последняя зависит от движения $\mathbf{r}$, поскольку при этом меняется объем. Однако объемы в движениях $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ совпадают, поэтому и плотности совпадают. Примером неиндифферентного скаляра является кинетическая энергия, но внутренняя энергия индифферентна.

Вектор $\mathbf{a}$ индифферентен при условии

$$\mathbf{a}'(\mathbf{r}') = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}(t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{A.4}$$

Из (А.1) немедленно следует, что базисные векторы $\mathbf{r}_k$ индифферентны. Действительно, поскольку $\mathbf{r}'_c(t)$ и $\mathbf{O}(t)$ одинаковы для всех частиц тела, то

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}(t) \cdot \mathbf{r}_k, \tag{A.5}$$

т.е. базисные векторы «вморожены» в тело.

Найдем координаты индифферентного вектора в движениях $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Легко убедиться, используя (А.4) и (А.5) в справедливости равенства

$$\mathbf{a}'(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'_k = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_k. \quad (A.6)$$

Отсюда вытекает, что положение вектора $\mathbf{a}'$ относительно базиса $\mathbf{r}'_k$ точно такое же, как и положение вектора $\mathbf{a}$ относительно базиса $\mathbf{r}_k$. Вполне аналогично из (A.2) и (A.5) следует, что координаты индифферентного тензора относительно базиса $\mathbf{r}_k$,. остаются неизменными при наложении жестких движений.

Согласно (A.2) индифферентный тензор Q второго ранга определяется соотношением

$$\mathbf{Q}'(\mathbf{r}') = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}(t) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{O}(t). \quad (A.7)$$

Индифферентные величины «вморожены» в базис, сохраняются числовые величины их координат, равно как и ориентация в векторных базисах $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{r}'_k$. Поля $\mathbf{a}$ и $\mathbf{Q}$ смещаются и поворачиваются вместе с базисом, «наблюдатель» за поведением индифферентных полей не знает, с каким базисом он связан.

Вектор скорости неиндифферентен; это и понятно: так как частица движется, вектор скорости не «вморожен» в среду. Градиент скорости – неиндифферентный тензор. Деформация скорости – индифферентный тензор, тензор вихря (спин) скорости – неиндифферентен (теорема Зоравского). Мера Коши-Грина неиндифферентна, Фингера – индифферентна. Следствием этого является неиндифферентность левого, индифферентность правого тензора искажений [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Матричное представление в нотации Фойгта (183) тензорных величин четвёртого ранга в ортонормированной системе координат для неогукова материала:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{II}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{9\times 9}, \qquad \mathbf{C}_{\mathrm{III}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{9\times 9}, \qquad (Б.1)$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{9\times 9}, \qquad \mathbf{T}\cdot(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_6 & \sigma_4 & 0 & 0 & \sigma_6 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \sigma_1 & 2\sigma_4 & \sigma_6 & 0 & \sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_4 & \sigma_1 & \sigma_4 & 2\sigma_6 \\ 2\sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_5 & \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_4 & 2\sigma_2 & \sigma_5 & 0 & \sigma_5 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_4 & \sigma_2 & 2\sigma_5 \\ 2\sigma_6 & \sigma_5 & \sigma_3 & \sigma_5 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_6 & 0 & \sigma_6 & 2\sigma_5 & \sigma_3 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_6 & 0 & 0 & \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma_5 & 2\sigma_3 \end{bmatrix}_{9\times 9}, \qquad (Б.2)$$

$$\mathbf{c}^{*} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \cdot\cdot\, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{C}_{\mathrm{II}} + \mathbf{C}_{\mathrm{III}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_6 & \sigma_4 & 0 & 0 & \sigma_6 & 0 & 0 \\ \sigma_4 & \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} & \frac{\sigma_5}{2} & \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} & \sigma_4 & \frac{\sigma_6}{2} & \frac{\sigma_5}{2} & \frac{\sigma_6}{2} & 0 \\ \sigma_6 & \frac{\sigma_5}{2} & \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} & \frac{\sigma_5}{2} & 0 & \frac{\sigma_4}{2} & \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} & \frac{\sigma_4}{2} & \sigma_6 \\ \sigma_4 & \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} & \frac{\sigma_5}{2} & \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} & \sigma_4 & \frac{\sigma_6}{2} & \frac{\sigma_5}{2} & \frac{\sigma_6}{2} & 0 \\ 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_4 & 2\sigma_2 & \sigma_5 & 0 & \sigma_5 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_6}{2} & \frac{\sigma_4}{2} & \frac{\sigma_6}{2} & \sigma_5 & \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} & \frac{\sigma_4}{2} & \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \frac{\sigma_5}{2} & \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} & \frac{\sigma_5}{2} & 0 & \frac{\sigma_4}{2} & \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} & \frac{\sigma_4}{2} & \sigma_6 \\ 0 & \frac{\sigma_6}{2} & \frac{\sigma_4}{2} & \frac{\sigma_6}{2} & \sigma_5 & \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} & \frac{\sigma_4}{2} & \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} & \sigma_5 \\ 0 & 0 & \sigma_6 & 0 & 0 & \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma_5 & 2\sigma_3 \end{bmatrix}_{9\times 9}. \qquad (Б.3)$$

Учитывая симметрию

$$\mathbf{c}^{*} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_6 \\ 0 & 2\sigma_2 & 0 & \sigma_4 & \sigma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_3 & 0 & \sigma_5 & \sigma_6 \\ \sigma_4 & \sigma_4 & 0 & \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} & \frac{\sigma_6}{2} & \frac{\sigma_5}{2} \\ 0 & \sigma_5 & \sigma_5 & \frac{\sigma_6}{2} & \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} & \frac{\sigma_4}{2} \\ \sigma_6 & 0 & \sigma_6 & \frac{\sigma_5}{2} & \frac{\sigma_4}{2} & \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} \end{bmatrix}_{6\times 6}. \qquad (Б.4)$$

$$
\mathbf{c} \Longrightarrow \frac{2}{3}\mu J^{-1}
\begin{bmatrix}
\frac{4\bar{I}_1}{3}-2\bar{b}_1 & -\bar{b}_4 & -\bar{b}_6 & -\bar{b}_4 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_2 & -\bar{b}_5 & -\bar{b}_6 & -\bar{b}_5 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_3 \\
-\bar{b}_4 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & -\bar{b}_4 & 0 & 0 & 0 & -\bar{b}_4 \\
-\bar{b}_6 & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & -\bar{b}_6 & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & -\bar{b}_6 \\
-\bar{b}_4 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & -\bar{b}_4 & 0 & 0 & 0 & -\bar{b}_4 \\
\frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_2 & -\bar{b}_4 & -\bar{b}_6 & -\bar{b}_4 & \frac{4\bar{I}_1}{3}-2\bar{b}_2 & -\bar{b}_5 & -\bar{b}_6 & -\bar{b}_5 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_2-\bar{b}_3 \\
-\bar{b}_5 & 0 & 0 & 0 & -\bar{b}_5 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & -\bar{b}_5 \\
-\bar{b}_6 & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & -\bar{b}_6 & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & -\bar{b}_6 \\
-\bar{b}_5 & 0 & 0 & 0 & -\bar{b}_5 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & -\bar{b}_5 \\
\frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_3 & -\bar{b}_3 & -\bar{b}_6 & -\bar{b}_4 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_2-\bar{b}_3 & -\bar{b}_5 & -\bar{b}_6 & -\bar{b}_5 & \frac{4\bar{I}_1}{3}-2\bar{b}_3
\end{bmatrix}_{9\times 9} +
$$

$$
+\frac{2}{d}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 2J-1 & 0 & 0 & 0 & 2J-1 \\
0 & 1-J & 0 & 1-J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1-J & 0 & 0 & 0 & 1-J & 0 & 0 \\
0 & 1-J & 0 & 1-J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2J-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2J-1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-J & 0 & 1-J & 0 \\
0 & 0 & 1-J & 0 & 0 & 0 & 1-J & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-J & 0 & 1-J & 0 \\
2J-1 & 0 & 0 & 0 & 2J-1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}_{9\times 9}. \tag{Б.5}
$$

$$
\mathbf{c} \Longrightarrow \frac{2}{3}\mu J^{-1}\begin{bmatrix} \frac{4\bar{I}_1}{3}-2\bar{b}_1 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_2 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_3 & -\bar{b}_4 & -\bar{b}_5 & -\bar{b}_6 \\ \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_2 & \frac{4\bar{I}_1}{3}-2\bar{b}_2 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_2-\bar{b}_3 & -\bar{b}_4 & -\bar{b}_5 & -\bar{b}_6 \\ \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_3 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_2-\bar{b}_3 & \frac{4\bar{I}_1}{3}-2\bar{b}_3 & -\bar{b}_4 & -\bar{b}_5 & -\bar{b}_6 \\ -\bar{b}_4 & -\bar{b}_4 & -\bar{b}_4 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 & 0 \\ -\bar{b}_5 & -\bar{b}_5 & -\bar{b}_5 & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} & 0 \\ -\bar{b}_6 & -\bar{b}_6 & -\bar{b}_6 & 0 & 0 & \frac{\bar{I}_1}{2} \end{bmatrix}_{6\times 6} + \frac{2}{d}\begin{bmatrix} 1 & 2J-1 & 2J-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2J-1 & 1 & 2J-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2J-1 & 2J-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-J \end{bmatrix}_{6\times 6}. \tag{Б.6}
$$

$$
\mathbf{c}^{*} \Longrightarrow \frac{2}{3}\mu J^{-1}\begin{bmatrix} 3\bar{b}_1-\bar{I}_1 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\bar{b}_4 & 0 & \frac{3}{2}\bar{b}_6 \\ 0 & 3\bar{b}_2-\bar{I}_1 & 0 & \frac{3}{2}\bar{b}_4 & \frac{3}{2}\bar{b}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 3\bar{b}_3-\bar{I}_1 & 0 & \frac{3}{2}\bar{b}_5 & \frac{3}{2}\bar{b}_6 \\ \frac{3}{2}\bar{b}_4 & \frac{3}{2}\bar{b}_4 & 0 & \frac{3}{4}\left(\bar{b}_1+\bar{b}_2\right)-\frac{\bar{I}_1}{2} & \frac{3}{4}\bar{b}_6 & \frac{3}{4}\bar{b}_5 \\ 0 & \frac{3}{2}\bar{b}_5 & \frac{3}{2}\bar{b}_5 & \frac{3}{4}\bar{b}_6 & \frac{3}{4}\left(\bar{b}_2+\bar{b}_3\right)-\frac{\bar{I}_1}{2} & \frac{3}{4}\bar{b}_4 \\ \frac{3}{2}\bar{b}_6 & 0 & \frac{3}{2}\bar{b}_6 & \frac{3}{4}\bar{b}_5 & \frac{3}{4}\bar{b}_4 & \frac{3}{4}\left(\bar{b}_1+\bar{b}_3\right)-\frac{\bar{I}_1}{2} \end{bmatrix}_{6\times 6} + \tag{Б.7}
$$

$$+\frac{2}{d}\begin{bmatrix} 2(J-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(J-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(J-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J-1 \end{bmatrix}_{6\times6}. \qquad (Б.7)$$

Окончательно матрица касательной жесткости Яумана для неогукова материала в ортонормированной системе координат в нотации Фойгта (183) представляется в виде

$$\mathbf{c}^J = \mathbf{c} + \mathbf{c}^* \Rightarrow \frac{2}{3}\mu J^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\bar{I}_1}{3}+\bar{b}_1 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_2 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_3 & \frac{1}{2}\bar{b}_4 & -\bar{b}_5 & \frac{1}{2}\bar{b}_6 \\ \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_2 & \frac{\bar{I}_1}{3}+\bar{b}_2 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_2-\bar{b}_3 & \frac{1}{2}\bar{b}_4 & \frac{1}{2}\bar{b}_5 & -\bar{b}_6 \\ \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_1-\bar{b}_3 & \frac{\bar{I}_1}{3}-\bar{b}_2-\bar{b}_3 & \frac{\bar{I}_1}{3}+\bar{b}_3 & -\bar{b}_4 & \frac{1}{2}\bar{b}_5 & \frac{1}{2}\bar{b}_6 \\ \frac{1}{2}\bar{b}_4 & \frac{1}{2}\bar{b}_4 & -\bar{b}_4 & \frac{3}{4}(\bar{b}_1+\bar{b}_2) & \frac{3}{4}\bar{b}_6 & \frac{3}{4}\bar{b}_5 \\ -\bar{b}_5 & \frac{1}{2}\bar{b}_5 & \frac{1}{2}\bar{b}_5 & \frac{3}{4}\bar{b}_6 & \frac{3}{4}(\bar{b}_2+\bar{b}_3) & \frac{3}{4}\bar{b}_4 \\ \frac{1}{2}\bar{b}_6 & -\bar{b}_6 & \frac{1}{2}\bar{b}_6 & \frac{3}{4}\bar{b}_5 & \frac{3}{4}\bar{b}_4 & \frac{3}{4}(\bar{b}_1+\bar{b}_3) \end{bmatrix}_{6\times6} + \qquad (Б.8)$$

$$+\frac{2}{d}\begin{bmatrix} 2J-1 & 2J-1 & 2J-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2J-1 & 2J-1 & 2J-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2J-1 & 2J-1 & 2J-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6\times6}.$$

Александр Васильевич **Жидков**
Николай Васильевич **Леонтьев**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.